Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Daniil Korotkov

Reverzní hypotéka

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurové, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2018

Rád bych na tomto místě poděkoval RNDr. Lucii Mazurové, Ph.D., za odborné vedení, trpělivost, poskytnutou literaturu a cenné rady, které mi pomohly při zpracování této bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Daniil Korotkov

Název práce: Reverzní hypotéka

Autor: Daniil Korotkov

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurové, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Reverzní hypotéky jsou v současné době relativně novými produkty na českém trhu a v této práci věnujeme jejích problematice. V práci jsou popsána hlavní rizika tohoto produktu jako riziko dlouhověkosti a nepříznivý vývoj cen nemovitosti. Při analýze těchto rizik se zabýváme modelováním cen podkladové nemovitostí, projekcí jejích budoucích cen, diskontních faktorů a rizikovými modely pomocí vektorové autoregrese, hédonického modelu, repeat-sales a Wills-Sherris modelů. V praktické části odhadujeme parametry Lee-Carterova modelu a modelu autoregrese státního bezkupónového dluhopisu. Na závěr taktéž aplikujeme získáné odhady pro výpočet charakteristik reverzních hypoték.

Klíčová slova: Reverzní hypotéky, repeat-sales model, smíšený repeat-sales model, vektorová autorogrese, Lee-Carterův model, Wills-Sherris model

Title: Reverse mortgage

Author: Daniil Korotkov

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurové, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: At this moment, reverse mortgages are relatively new products on the Czech market and this thesis deals with their problematics. In this thesis, we describe the main risks related to reverse mortgages, namely, longevity risk and adverse evolution of property prices. Analyzing these risks we are modelling the underlying property prices, their future behavior, discount factors along with studying the risk models such as vector autoregression, hedonic model, repeat-sales and Wills-Sherris model. In practical part, we focus on estimating the parameters of Lee-Carter model and autoregression model of zero-coupon government bond as well as applying the results of the estimation to calculate various characteristics of reverse mortgages.

Keywords: Reverse mortgages, repeat-sales model, mixed repeat-sales model, vektor autorogression, Lee-Carter model, Wills-Sherris model

Obsah

Úvod

Reverzní hypotéka je finančním produktem, jehož cílem je zvětšit spotřebitelské schopnosti důchodců pomocí refinancování soukromého majetku. První nabídky reverzních hypoték vznikly ještě v minulém století, ale z důvodu velkého počtu rizik byly podceněné jak ze strany finančních institucí, tak ze strany spotřebitelů. V současné době trh reverzních hypoték rychle roste, primárně ve vyvinutých zemích a největší popularitu tento produkt získal v USA, Austrálii a Velké Británii.

Na českém trhu se reverzní hypotéky objevily v roce 2008, ale z legislativních důvodů tento produkt nebyl relizován. Během 6 let se situace změnila a Evropská komise akceptovala reverzní hypotéky jako jeden z typu zajištění na důchod. Od roku 2015 reverzní hypotéky v ČR nabizí společnost FINEMO.CZ. V roce 2018 FINEMO.CZ obdřela licenci ČNB na poskytování spotřebitelských úvěrů.

Princip reverzní hypotéky je dost podobný klasickému tvaru hypoték: vlastník (resp. spoluvlastník) nemovitosti dostává od věřitele částku (resp. regulární výplaty) spočítanou z hodnoty nemovitosti. Splacení dluhu nastává, když vlastník umře, prodá nebo trvale opustí nemovitost. Tento produkt je velmi rizikový. Bude nás hlavně zajímat expozice reverzních hypoték vůči rizikům dlouhověkosti a vývoje cen nemovitosti.

Kapitola 1

Modelování ztráty reverzních hypoték

Uvažujeme klienta, který po dasažení duchodového věku chce uzavřít reverzní hypotéku na svoji nemovitost. Cena nemovitosti ke datu uzavření smlouvy označíme V_0. Klient má nárok na půjčku v hodnotě L_0 spočítanou z hodnoty nemovitosti, přičemž L_0 je vždycky menší než V_0. Ke splacení dluhu dojde v jednom ze tří případů: smrt klienta, prodej nebo trvalé opouštění nemovitosti. Cena nemovitosti a hodnota půjčky v čase t (V_t resp. L_t) jsou ovlivněný inflací, pohyby cen nemovitostí na trhu, kurzy měn apod. Hodnotu reverzní hypotéky v čase t můžeme vyjádřit jako

$$V_{RM}(t) = \min(V_t; L_t). \tag{1.1}$$

V průběhu času se může stat, že cena nemovitosti klesne a bude menší než hodnota pujčky v čase t, tím pádem reverzní hypotéka generuje pro věřitele ztrátu, danou vzorcem

$$Loss(t) = L_t - V_{RM}(t) = L_t - \min(V_t; L_t) = \max(L_t - V_t; 0). \tag{1.2}$$

Hodnotu půjčky v čase t vyjádříme pomocí bezrizikové intenzity úroku r_t a rizikové prémie λ:

$$L_t = \ Lt. \tag{1.3}$$

Nechť se bezriziková intenzita úroku rovná intenzitě výnosnosti dluhopisu s nulovým kupónem. Předpokladáme, že parametry r_t a λ zahrnují míru inflace, rizikovost a další ekonomické faktory ovlivňující hodnotu půjčky.
Cenu nemovitosti v čase t odvodíme pomocí intenzity změny ceny nemovitosti δ_t:

$$V_t = \ Vt. \tag{1.4}$$

Podrobněji vývoj cen nemovitostí v čase budeme zkoumat v Kapitole 2.
Dosazením rovnic (1.3) a (1.4) do rovnice (1.1) dostaneme

$$V_{RM}(t) = \min\left[\, Vt; \ Lt\right].$$

Pak ztráta v čase t má tvar

$$Loss(t) = \max\left[\, Lt - \ Vt; 0\right].$$

Označíme zbývající dobu splatnosti reverzní hypotéky (resp. zbývající délku života dlužníka) jako náhodnou veličinu T. Výše ztráty v okamžiku splatnosti hypotéky pak můžeme vyjádřit jako

$$Loss(T) = \max\left[\,Ltt - Vtt; 0\right].$$

Předpokládáme nulovou střední hodnotu ztráty:

$$E\left[\prod_{s=1}^{T} m_s \, Loss(T)\right] = 0, \tag{1.5}$$

kde m_s je stochastikým diskontním faktorem. Podrobněji tato veličina bude popsaná v kapitole 3 v sekci 3.2.2.

Dosazením 1.2 do 1.5 dostaneme rovnici ve tvaru

$$E\left[prod_{s=1}^{T} m_s \max\left[\,Lt - Vt; 0\right]\right] = 0.$$

Tím pádem při použití určité rizikové prémie λ dokážeme spočítat maximální hodnotu půjčky. Obdobně spočítáme spravedlivou rizikovou prémii λ, máme-li k dispotici určitou hodnotu půjčky L_0.

Kapitola 2

Modelování ceny nemovitosti

V této kapitole se budeme zabývat oceněním nemovitostí na základě charakteristik prostředí, údajů o nemovitosti a cenách prodeje. Hodnota nemovitosti V_{it} je daná vzorcem $V_{it} = Q_{it}P_t$, kde Q_{it} je koeficient kvality a P_t je index ceny nemovitosti i v čase t. Standardní modely ocenění nemovitostí jsou: hédonický model, repeat-sales model a smíšený hedonic-repeat-sales model.

2.1 Popis modelů

Logaritmicko-lineární hédonický model

Klasický hédonický model lze vyjadřit logaritmickou funkcí cen nemovitosti na základě charakteristik pozemku: lokality, vybavení, okolí apod. Každá charakteristika v modelu má svoji vlastní cenu a sčitaním jednotlivých cen charakteristik dostáváme na celkovou hodnotu nemovitosti. Podle [5] model má tvar

$$V_{it} = \sum_{k=1}^{K} X_{kt}^{i} \beta_{kt} + \sum_{t=1}^{T} \gamma_t I_t + \epsilon_{it},$$

kde $V_{it} = \ln(P_{i,t})$ je logaritmus ceny nemovitosti i v čase t, X_{kt}^{i} jsou numerické vyjádření charakteristiky k nemovitosti i v čase t, β_{kt} jsou koeficienty charakteristik k v čase t, $\sum_{t=1}^{T} \gamma_t I_t$ jsou indexy cenových změn nemovitostí a $\epsilon_{it} \sim N(0, \sigma^2 I_t)$ jsou nezávislé náhodné veličiny.

Tento model má svoje nevýhody: flexibilita výběru a specifikační chyby.

Repeat-sales model

Repeat-sales model ([5]) se používá primárně pro ocenění trendu vývoje cen nemovitostí v čase, snížení tzv. omitted variable bias, který může vznikat v klasickém hédonickém modelu. Základní myšlenkou modelu je, že prvky vektoru charakteristik a příslušné koeficienty se nemění pri prodeji stejné nemovitosti v ruzné časové okamžiky, pak modelujeme primárně pohyby cen namísto jejich absolutních hodnot. Tento postup umožňuje mnohem snadněji ocenit trend vývoje cen vyřazenim z modelu charakteristik nemovitostí v čase konstantních, což zjednodušuje sběr dat a pravděpodobnost specifikační chyby.

$$V_{it+\tau} - V_{it} = \ln\left(\frac{P_{i,t+\tau}}{P_{i,t}}\right) = (\gamma_{t+\tau} - \gamma_t) + \epsilon_{it},$$

Odhady γ_t získáme metodou nejmenších čtverců použitím matice D, kde řádky jsou indexy nemovitosti a sloupce časové okanžiky. Pak, když nemovitost i se prodávala v časech t a $t+\tau$, pak v i-tem řádku ve sloupcích t a $t+\tau$ budeme mít hodnoty -1 a 1.

Nevýhodou repeat-sales modelu je, že ignoruje změny nezávislé na čase, ale existují modifikace modelu, do kterých vstupuje vektor charakteristik i když to porušuje základní předpoklad modelu.

Smíšení hedonic-repeat-sales model

Tento model popsány v [1] má výhody jak hédonického tak i repeat-sales modelů. V rámci smíšeného repeat-sales modelu řešíme systém ze tří typů regresních rovnic.

První sada rovnic bere v potaz nemovitosti, které se prodaly jenom jednou za dané období. Rovnice mají tvar

$$V_{it} = \alpha + \beta_t + X^\top \gamma + X^\top \Delta_t + \eta_i + \xi_{it}, \tag{2.1}$$

kde V_{it} je přirozený logaritmus ceny nemovitosti i v čase t, α je absolutní člen, β je dummy-proměnná závislá na čase t, X je vektor číselných charakteristik nemovitosti, Δ_t je vektor koeficientů příslušných jednotlivým charakteristikám nemovitosti, η je specifikační chyba a ξ je chybový člen.

Druhá sada rovnic je ve stejném tvaru jako (2.1). Rozdíl je v tom, že do této rovnice vstupují nemovitosti, které se prodávaly víc než jednou během daného období, s výjimkou poslední transakce.

Třetí typ rovnic lze vyjadřit z repeat-sales modelu jako logaritmus podílů hodnot nemovitostí.

$$V_{it} - V_{is} = \beta_t - \beta_s + X^\top(\Delta_t - \Delta_s) + \xi_{it} - \xi_{is}. \tag{2.2}$$

Pro nemovitosti i a j $(i \neq j)$ platí

1. $E(\xi_{it}) = 0$, $E(\xi_{it}) = \sigma_\xi^2$
2. $E(\eta_i) = 0$, $E(\eta_i) = \sigma_\eta^2$
3. $E(\xi_{it}\xi_{js}) = 0$, $E(\eta_i\eta_j) = 0$ pro $s \neq t$
4. $E(\eta_i\xi_{it}) = 0$

Na základě předchozích vlastností kovarianční matice soustavy rovnic se dá vyjádřit jako

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\epsilon^2 I_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\epsilon^2 I_N & -\sigma_\xi^2 I_N \\ 0 & -\sigma_\xi^2 I_N & 2\sigma_\xi^2 I_N \end{pmatrix} \quad ,$$

kde $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 + \sigma_\xi^2$ je rozptylem $\epsilon_{it} = \eta_{it} + \xi_{it}$, σ_ξ^2 je rozptylem ξ_{it}, M je počet nemovitostí s jednou transakcí, N je počet transakcí z třetí sady rovnic systému.

Odhady parametrů $\widehat{\gamma}$ a $\widehat{\beta}$ použijeme pro agregovaný index cen nemovitostí:

$$P_t = 100exp(\gamma_t + \bar{X}_0\beta_t),$$

kde $\bar{X}_0$ je řádkový vektor průměrných hodnot charakteristik nemovitosti v čase 0.

Chceme-li rozdělit nemovitosti do tarifních tříd můžeme spočítat agregovaný index cen pro jednotlivé třídy:

$$P_t^k = 100exp(\gamma_t + X^k\beta_t) = 100exp\gamma_t exp(X^k\beta_t) =$$

$$= 100\left(\frac{P_t}{100exp(\bar{X}_0\beta_t)}\right)exp(X^k\beta_t) = P_t exp((X^k - \bar{X}_0)\beta_t),$$

kde X^k je řádkový vektor hodnot charakteristik nemovitostí podle třídy k.

Kapitola 3

Riziko vývoje cen nemovitostí

3.1 Základní pojmy

Definice 1 (Časová řada). Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor a $X_1, \ldots, X_n$ je množinou reálných náhodných veličin (resp. vektorů), kde $t = 1, \ldots, n$ jsou prvky množiny $T \subset \mathbb{R}$ interpretované jako časové okamžiky. Pak množina $\{X_t, t \in T\}$ definovaná na (Ω, A, P) je časovou řadou (resp. mnohorozměrnou časovou řadou).

Definice (Bílý šum). Časovou řadu $\{X_t\}$ nazveme bílý šum, když $\{X_t, t \in T\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin (resp. vektorů) s konečnými střední hodnotou a rozptylem.

Poznámka. Když $\{X_t\}$ má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem, pak posloupnost $\{X_t\}$ je Gaussovský bílý šum.

Definice (Slabá stacionarita). Časová řada $\{X_t\}$ je slabě stacionární když střední hodnota X_t a kovariance mezi X_t a X_{t-h} nejsou závislý na čase t.

3.1.1 Modely časových řád

Definice. *Autoregresní posloupnost řadu n* $(AR(n))$ je posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, pro kterou platí

$$X_t = a_0 + a_1 X_{t-1} + \ldots + a_n X_{t-n} + Y_t, t \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

kde Y_t je bílý šum a a_i pro $i = 1, \ldots, n$ jsou reálná čísla, přičemž a_n se nerovná 0.

Vektorový autoregresní model řádu 1— VAR(1)

Definice (VAR (1)) Mnohorozměrná časová řada $\{\mathbb{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je daná vzorcem

$$\mathbb{X}_t = a_0 + A\mathbb{X}_{t-1} + \mathbb{Y}_t, \tag{3.2}$$

kde a_0 je k-rozměrný vektor, A je matice $k \times k$ a $\mathbb{Y}_t, t \in \mathbb{Z}$ je vektor nekorelovaných náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a pozitivně definitní kovarianční maticí Σ se nazývá *vektorový autoregresní model řádu 1.*

Kovarianční matice Σ je pozitivně definitní, což znamená, že existuje Choleského rozklad $\Sigma = LGL^\top$, kde L je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na hlavní diagonále a G je diagonální matice. Z rozkladu plyne, že $G = L^{-1}\Sigma(L^\top)^{-1}$

Nechť $\mathbf{b}_t = (b_{1t}, \dots, b_{kt})^\top = L^{-1}\mathbb{Y}_t$, pak

$$E(\mathbf{b}_t) = L^{-1}E(\mathbb{Y}_t) = 0 \tag{3.3}$$

$$Cov(\mathbf{b}_t) = L^{-1}\Sigma(L^{-1})^T = L^{-1}\Sigma(L^T)^{-1} = G \tag{3.4}$$

Z rovnice 3.4 je vidět, že pokud G je diagonální matice, pak jednotlivé prvky vektoru $\mathbf{b}_t$ jsou nekorelované. Vynásobením zleva vzorce 3.2 maticí L^{-1} dostaneme rovnici

$$L^{-1}\mathbb{X}_t = L^{-1}a_0 + L^{-1}A\mathbb{X}_{t-1} + L^{-1}\mathbb{Y}_t = a_0^* + A^*\mathbb{X}_{t-1} + \mathbf{b}_t, \tag{3.5}$$

kde $a_0^* = L^{-1}a_0$ je k-rozměrný vektor a $A^* = L^{-1}A$ je matice $k \times k$.

K-tý řádek matice L^{-1} má tvar $(l_{k1}, l_{k2}, \dots, l_{k,k-1}, 1)$. K-tý řádek soustavy (3.5) lze zapsat jako

$$X_{kt} + \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}X_{it} = a_{k0}^* + \sum_{i=1}^{k} A_{ki}^* X_{i,t-1} + \mathbf{b}_{kt}, \tag{3.6}$$

z čehož je vidět lineární závislost mezi parametry $\mathbb{X}_t$.

Vektorový autoregresní model řádu p— VAR(p)

Model

$$\mathbb{X}_t = a_0 + A_1\mathbb{X}_{t-1} + \dots + A_p\mathbb{X}_{t-p} + \mathbb{Y}_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} A_i\mathbb{X}_{t-i} + \mathbb{Y}_t, \tag{3.7}$$

kde a_0 je k-rozměrný vektor, A_i jsou $k \times k$ rozměrné matice a $\mathbb{Y}_t, t \in \mathbb{Z}$ je posloupnost nekorelovaných náhodných vektorů s nulovou střední hodnotou a pozitivně definitní kovarianční maticí Σ, se nazývá *vektorový autoregresní model řádu n.*

Volba řadu VAR modelu

Pro zvolení optimálního řadu p modelu VAR, a taktéž kontrolu a hodnocení použijeme iterační postup jak se uvádí v [2].
Nechť máme postupné modely VAR:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{X}_t = a_0 + A_1\mathbb{X}_{t-1} + \mathbb{Y}_t \\
&\mathbb{X}_t = a_0 + A_1\mathbb{X}_{t-1} + A_2\mathbb{X}_{t-2} + \mathbb{Y}_t \\
&\vdots \\
&\mathbb{X}_t = a_0 + A_1\mathbb{X}_{t-1} + \ldots + A_i\mathbb{X}_{t-i} + \mathbb{Y}_t \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nechť $\widehat{A}_i^{(j)}$ a $\widehat{a}_0^{(j)}$ jsou odhady A_i a a_0 získané MNČ, kde (j) odpovídá řádu modelu VAR(j).

$$\mathbb{X}_t = \widehat{a}_0^{(j)} + \widehat{A}_1^{(j)}\mathbb{X}_{t-1} + \ldots + \widehat{A}_j^{(j)}\mathbb{X}_{t-j} + \mathbb{Y}_t^{(j)}$$

$$\widehat{\mathbb{Y}}_t^{(j)} = \mathbb{X}_t - \widehat{a}_0^{(j)} - \widehat{A}_1^{(j)}\mathbb{X}_{t-1} - \ldots - \widehat{A}_j^{(j)}\mathbb{X}_{t-j}$$

Pro $i = 0$ odchylka je definovana vzorcem $\widehat{\mathbb{X}}_t^{(0)} = \mathbb{X}_t - \bar{\mathbb{X}}$, kde $\bar{\mathbb{X}}$ je výběrový průměr $\mathbb{X}_t$. Odhad kovarianční matice je

$$\widehat{\Sigma}_j = \frac{1}{T-2j-1} \sum_{t=j+1}^{T} \widehat{a_t}^{(j)} (\widehat{a_t}^{(j)})^T \tag{3.8}$$

Abychom určili řád modelu musíme otestovat hypotézu $H_0 = A_l = 0$ proti alternativě $H_1 = A_l \neq 0$ pro $l = 12, \ldots$.
Testová statistika:

$$M(i) = -(T - k - i - \frac{3}{2}) \ln \left(\frac{det(\widehat{\Sigma}_i)}{det(\widehat{\Sigma}_{i-1})} \right) \tag{3.9}$$

$M(i)$ má asymptoticky chí-kvadrát rozdělení s k^2 stupňi volnosti.
Taktéž můžeme použit Akaikovo infomační kritérium (AIC).
Definice AIC je definováno vzorcem

$$AIC = -\frac{2}{T} \ln(f) + \frac{2}{T}(p),$$

kde f je věrohodnostní funkce, p je počet parametrů a T je expozice. Parametry j-té rovnice můžeme taky odhadnout pomoci metody maximální věrohodnosti: odhady parametrů a_0 a A_i získané MNČ a MLE jsou totožné, maximálně věrohodný odhad Σ je

$$\widetilde{\Sigma}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^{T} \widehat{a_t}^{(j)} (\widehat{a_t}^{(j)})^T \tag{3.10}$$

3.2 Modelování odvozeného indexu cen nemovitosti

3.2.1 Projekce budoucích cen nemovitostí

Pro modelování průměrné změny cen na trhu nemovitostí v budoucnu použijeme model vektorové autoregrese. VAR model je standardní metoda modelovaní dynamiky cenových změn, závislé na různých fundamentálních ekonomických ukazatelech, jako roční vývoj HDP, míra inflace atd. V první kapitole jsme popisovali hodnotu pujčky L_t závislou na intenzitě r_t, proto předpokládáme, že do $\mathbb{X}_t$ vstupují parametry r_t a $r_t^{(n)} - r_t$, kde $r_t^{(n)}$ je intenzitou výnosnosti bezrizikového dluhopisu se splatností n. Použijeme $VAR(p)$ model ve tvaru (3.5):

$$\mathbb{X}_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} A_i \mathbb{X}_{t-i} + \mathbf{b}_t, \tag{3.11}$$

kde $\mathbb{X}_t$ je $k-$rozměrný vektor stavových proměnných, p je řad modelu, A_i jsou $k \times k$ rozměrné matice parametrů a $\mathbf{b}_t = L^{-1}\mathbb{Y}_t$, kde $\mathbb{Y}_t, t \in \mathbb{Z}$ je posloupnost nekorelovaných náhodných vektorů s nulovou střední hodnotou a pozitivně definitní kovarianční maticí Σ a L^{-1} je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na hlavní diagonále získaná pomocí Choleského rozkladu Σ.

Nejoptimálnější řad modelu a nejlepší kombinaci parametrů zvolíme na základě testové statistiky a AIC, popsáných v předchozí sekci této kapitoly.

3.2.2 Vyjadření stochastického diskotního faktoru

Stochatický diskontní faktor má reflektovat klíčová rizika reverzní hypotéky, týkající se vývoje cen nemovitostí. Pro modelování diskontního faktoru použijeme model popsáný v [3]:

$$m_{t+1} = \exp\{-r_t\}\frac{\zeta_{t+1}}{\zeta_t} = \exp\left(-r_t - \frac{1}{2}\lambda_t^\top\lambda_t - \lambda_t^T\mathbf{b}_{t+1}\right),$$

kde ζ_{t+1} je logaritmicko-normální proces, pro který platí

$$\zeta_{t+1} = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_t^\top\lambda_t - \lambda_t^\top\mathbf{b}_{t+1}\right)\zeta_t,$$

λ_t je hodnota rizika závislá na čase t, daná funkcí:

$$\lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1\mathbb{X}_t,$$

kde λ_0 je $p-$rozměrný vektor a λ_1 je matice $p \times p$.

Ceny dluhopisu s nulovým kupónem a dobou splatnosti n lze zapsat jako

$$P_t^{(n)} = E_t\left[m_{t+1}P_{t+1}^{(n-1)}\right].$$

Abychom odvodili ziskaný diskontní faktor závislý na (3.11) předpokládáme, že ceny dluhopisu s nulovým kupónem tvořejí exponenciální lineární funkci stavových proměnných:

$$P_t^n = \exp\left(A_n + \sum_{i=0}^{p-1} B_{n,i}^\top Y_{t-i}\right).$$

Odhad intenzity výnosnosti dluhopisu s nulovým kuponem a splatností n se rovná

$$\widehat{r}_t^{(n)} = -\frac{\log P_t^{(n)}}{n} = -\frac{A_n + \sum_{i=0}^{p-1} B_{n,i}^\top Y_{t-i}}{n}.$$

Tržní cenu rizika získáme pomocí

$$raremin_{\{\lambda_0,\lambda_1\}}\left\{\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{N}(\widehat{r}_t^{(n)} - r_t^{(n)})^2\right\}.$$

Kapitola 4

Riziko dlouhověkosti

4.1 Základní pojmy

Definice *Pravděpodobnost úmrtí* (${}_tq_x$) je pravděpodobnost, že jedinec ve věku x zemře před dožitím věku $x + t$.
Definice *Pravděpodobnost dožití* (${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$))je pravděpodobnost, že jedinec ve věku x se dožije věku $x + t$.
Poznámka Nechť ${}_1p_x = p_x$, pak

$${}_tp_x = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+t-1}.$$

Nechť T_0 je spojitá náhodná veličina, představující dobu života právě narozeného jedince, s distribuční funkcí

$$F_0(t) = P(T_0 \leq t) = {}_tq_0,$$

pak *funkce přežití* $S_0(t)$ je pravděpodobnost, že jedinec přežije t let:

$$S_0(t) = 1 - F_0(t) = P(T_0 > t) = {}_tp_0.$$

V této práci nás bude zajímat náhodná veličina T_x- *zbývající doba života osoby ve věku* x. Distribuční funkci dostaneme pomocí podmíněné pravděpodobnosti:

$${}_tq_x = F_x(t) = P(T_x \leq t) = P(T_0 \leq x + t \mid T_0 > x) =$$

$$= \frac{P(T_0 \leq x + t)P(T_0 > x \mid T_0 \leq x + t)}{P(T_0 > x)} = \frac{F_0(x + t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)}.$$

Potom dopočítáme *funkci přežití ve věku* x:

$${}_tp_x = S_x(t) = P(T_x > t) = P(T_0 > x + t \mid T_0 > x) = \frac{P(T_0 > x + t)}{P(T_0 > x)} = \frac{S_0(x + t)}{S_0(x)}.$$

Náhodná veličina $\mathbf{T}_0$ má hustotu

$$f_0(t) = \frac{\partial}{\partial t}F_0(t) = \frac{\partial}{\partial t}{}_tq_0 = -\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_0,$$

pak

$$f_x(t) = \frac{\partial}{\partial t}F_x(t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{{}_{x+t}p_0}{{}_x p_0} = -\frac{\partial}{\partial t}{}_t p_x.$$

Definice *Intenzita úmrtnosti ve věku x* je daná vzorcem

$$\mu_t = \frac{f_0(t)}{{}_t p_0} = -\frac{1}{{}_t p_0}\frac{\partial}{\partial t}{}_t p_0 = -\frac{\partial}{\partial t}\ln({}_t p_0),$$

podobně

$$\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t}\ln({}_t p_x). \tag{4.1}$$

Pomocí intenzity úmrtnosti vyjádříme hustotu $\mathbf{T}_x$:

$$f_x(t) = \mu_{x+t}({}_t p_x).$$

Obecně,

$$m_x = \frac{S_0(x) - S_0(x+1)}{\int_0^1 S_0(x+s)ds}.$$

Pro projekci vývoje populace v rámci reverzních hypoték budeme operovat pojmem míra úmrtnosti $m_{x,t}$ ve věku x za rok t, danou vzorcem

$$m_{x,t} = \frac{d_{x,t}}{E_{x,t}},$$

kde $d_{x,t}$ je počet zemřelých ve věku x během roku t a $E_{x,t}$ je průměrný počet živých jedinců ve věku x v půlce roku t.

a za předpokladu, že $\mu_{x+t} = \mu_{\bar{x}}$ pro $t \in (0,1)$ platí

$$m_x = \mu_{\bar{x}}$$

4.1.1 Modely úmrtnosti

Lee-Carterův model

Model

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \epsilon_{x,t},$$

kde parametry α_x jsou obecné věkové ukazatele úmrtnosti nezávislé na čase, parametry β_x jsou vlivz času na jednotlivé věkové skupiny, k_t jsou změny úrovně úmrtnosti v čase a $\epsilon_{x,t}$ jsou náhodné složky modelu.

Pro jednoznačnost parametrů budeme předpokladat:

$$\sum_x \beta_x = 1, \sum_t k_t = 0$$

Pro odhad parametrů α_x, β_x a k_t se většinou používá buď metoda nejmenších čtverců, nebo (za předpokladu, že $d_{x,t}$ má Poissonovo rozdělení) metoda maximální věrohodnosti.

Lee-Carterův model má několik modifikací a jednou z nich je Renshaw-Habermanův model. který představuje klasický L-C model s kohortním efektem τ_{t-x} a parametry γ_x

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \gamma_x \tau_{t-x} + \epsilon_{x,t},$$

kde

$$\sum_x \gamma_x = 1, \sum_{t,x} \tau_{t-x} = 0$$

Wills-Sherrisův model

Wills-Sherrisův model ([8]) se vyjadřuje pomocí delty měr úmrtnosti $\triangle_c \ln(m_{x,t}) = \ln(m_{x,t}) - \ln(m_{x-1,t-1})$. Tato skutečnost znamená, že W-S model má flexibilnější strukturu závislosti pravděpodobnosti úmrtí na věku než L-C model:

$$\Delta_c \ln(m_{x,t}) = ax + b + \sigma \epsilon_{x,t}, \tag{4.2}$$

kde a, b a σ jsou parametry a $\epsilon_{x,t} \sim N(0,1)$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Abychom spočetli závislost modelu na věku, představíme si $\epsilon_{x,t}$ jako lineární kombinaci nezávislých stejně rozdělených náhodnych veličin $\boldsymbol{\epsilon}_t = (\epsilon_{x_1,t}, \epsilon_{x_2,t}, \ldots, \epsilon_{x_N,t})^\top = \Omega^{\frac{1}{2}} W_t$, kde Ω je kovarianční matice, která vyjadřuje strukturu závislosti na věku a W_t je vektor *i.i.d.* náhodných veličin s rozdělením $N(0,1)$. Stejně jako v L-C modelu můžeme rozdělit vliv věku nezávislý na čase a rozdíly vlivu času na jednotlivé věkové skupiny:

$$\Delta_c \ln(m_{x,t}) = (ax + b - g(x)) + (g(x) + \sigma \epsilon_{x,t}),$$

kde $(ax + b - g(x))$ je vliv věku, $(g(x) + \sigma \epsilon_{x,t})$ je vliv času a $g(x)$ je implicitní funkce věku, která označuje vývoj míry úmrtnosti v čase.

Predikce míry úmrtnosti

Na základě (Wills and Sherris 2008) můžeme modelovat míru úmrtnosti pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů kovarianční matice Ω.

Z vlastností vlastních vektorů platí

$$\Omega = V \Lambda V^\top = (V \Lambda^{\frac{1}{2}})(V \Lambda^{\frac{1}{2}})^\top, \tag{4.3}$$

kde $V = (\mathbf{v}_1 \mid \ldots \mid \mathbf{v}_N)$ je matice vlastních vektorů Ω a $\Lambda = \lambda I$ je diagonální matice s vlastními čísly na hlavní diagonále.

Je vidět, že matici Ω jako součin matice a její transponované verze, což můžeme považovat za zobecněný Choleského rozklad a můžeme použit $V \Lambda^{\frac{1}{2}}$ pro simulaci $\epsilon_{x,t}$

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = V \Lambda^{\frac{1}{2}} W_t.$$

Odhadnuté parametry potom dosadíme do (4.2) a vyjadřením ${}_tp_x$ z (4.1) dostaneme

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \widehat{\mu}_{x+s} ds\right). \tag{4.4}$$

4.1.2 Použití v reverzních hypotékách

Obecně se předpokládá, že v případě reverzní hypotéky s doživotní rentou klientovi se může výplatit celková hodnota nemovitosti. Proto se zavadí podmínka garance nenegativního dopadu (NNEG), která zastavuje výplaty po dosazení hodnoty nemovitosti V_t. NNEG je očekavaná současná hodnota budoucí ztraty pojistitele

$$NNEG = \sum_{t=0}^{w-x-1} E\left[{}_tq_x Loss(t+1)\right],$$

kde w je největší dosažitelný věk podle modelu. Pak na základě pravděpodobnosti dožití dokažeme vyjádřit očekávanou současnou hodnotu kumulovaného zisku reverzní hypotéky (MIP)

$$MIP = \lambda \sum_{t=0}^{w-x-1} E\left[{}_tp_x L_t \prod_{s=1}^{t} m_s\right],$$

kde λ je riziková premie.

Pro ocenění stochastického vlivu úmrtnosti počitáme tzv. short fall (SF) daný rozdílem

$$SF = \sum_{t=0}^{w-x-1} \left[{}_tq_x Loss(t+1)\right] - \lambda \sum_{t=0}^{w-x-1} \left[{}_tp_x L_t \prod_{s=1}^{t} m_s\right].$$

Taktéž můžeme vynulovat SF pomocí změny rizikové premie.

Kapitola 5

Praktická část

5.1 Odhady parametrů Lee-Carterova modelu

Odhady Lee-Carterova modelu ziskáme na základě demografických dat České Republiky, stažených z oficiálních stránek českého statistického úřadu (https://www.czso.cz).

Z ohledem na specifiku reverzních hypoték do modelu vstupují jenom občane ve věkovém intervalu 60 až 100 let.

Odhady parametrů α_x a $\beta_x k_t$ získáme pomocí zobecněného lineárního modelu (GLM) na základe Poissonova regresního modelu (logaritmický link), který je velmi často používaný pro modelování zavislé proměnné, která popisuje počet výskytů sledované události na danou jednotku času. Tabulka 1 shrnuje charakteristiky odhadnutých koeficientů. Je důležité si všimnout, že všechny regresní koeficienty jsou statisticky významné, což svědcí o kvalitě modelu.

Tabulka 1: GLM model

	Estimate	Std. Error	z value	p-value
Intercept	-6.982×10^{01}	7.873×10^{00}	-8.868	0.000
Age	1.426×10^{00}	9.690×10^{-02}	14.720	0.000
Year	2.926×10^{-02}	3.911×10^{-03}	7.481	0.000
Age*Year	-6.577×10^{-04}	4.814×10^{-05}	-13.664	0.000

Na obrázku 1 jsou znázornený rezidua modelu oproti závislé proměnné. Idealně bychom neměli pozorovat žádný trend, což by svědčilo o tom, že variabilita modelu je závislá na datech. V našem případě žádný zřejmý trend není a můžeme tím pádem považovat model za vhodný.

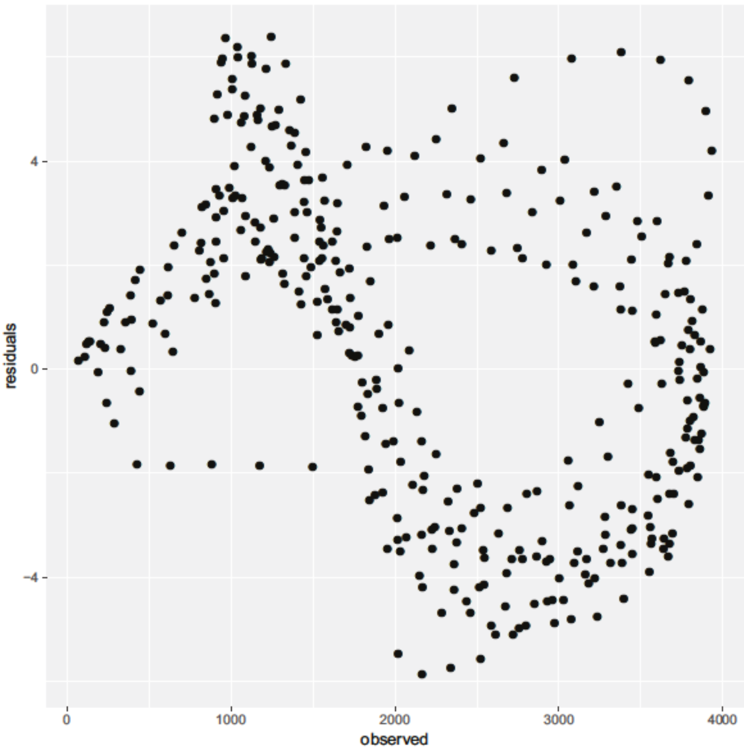
Ziskaný Lee-Carterův model má tvar

$$\ln(m_{x,t}) = 1.426 - 6.577 \times 10^{-04} + \epsilon_{x,t},$$

z něj odvodíme pravděpodobnost dožití ${}_tp_x$.

5.2 Odhad parametrů a řadu AR(n)

V této práci vyjadřujeme hodnotu pujčky v čase t na základě hodnoty pujčky v čase 0 L_0, intenzity bezkuponového dluhopisu r_t a konstantní rizikové premie λ. V



Obrázek 1: *Rezidua modelu*

kapitole 3 jsme probírali modelování budoucích cen nemovitosti na základě fundamentálních ekonomických ukazatelů. Pro ilustraci modelovaní takových hodnot odhadneme řad a parametry modelu autoregrese $AR(n)$. Modelovaní intenzity bezkuponového dluhopisu budeme ilustrovat na datech centrální Evropské banky (https://www.ecb.europa.eu). Máme k dispozici data od července 2010 až do března roku 2018.

Pro odhadovaní parametrů použijeme MNČ a určíme řad autoregresního modelu minimalizaci AIC. V tabulce 2 vidíme hodnoty AIC příslušné různým řádům autoregresního modelu, na základě čehož zvolíme model řádu 7.

Tabulka 2: určení řadu AR

Řád	AIC
0	372.344
1	9.369
2	4.891
3	6.284
4	3.876
5	2.317
6	1.249
7	0.000
8	2.809
9	1.243
10	3.863

V tabulce 3 jsou uvedené odhadnuté koeficienty modelu. Na základě odhadnutých parametrů potom můžeme spočítat rizikovou premii λ.

Table 3: *Koeficienty modelu autoregrese*

	$intercept$	X_{t-1}	X_{t-2}	X_{t-3}	X_{t-4}	X_{t-5}	X_{t-6}	X_{t-7}
$koef.$	-0.002	1.190	0.101	-0.556	-0.029	0.469	0.132	-0.332

Závěr

Reverzní hypotéky jsou perspektivním a dynamicky se vyvijejícím finančním prostředkem, který je z matematického pohledu velice zajímavý. V této práci jsme popsali základní rizika tohoto produktu a několik modelovacích postupů. V první kapitole jsme se zabývali strukturou financování reverzních hypoték a rozepsali jsme jednotlivé ukazatele. Ve druhé kapitole jsme se seznamili s různýmí modely cen nemovitostí, vyhodami a nevyhodami jednotlivých modelů, ruznými postupy odhadů vývoje cen. Ve třetí kapitole jsme analyzovali indexy cen nemovitostí ovlivněné fundamentalními ekonomickými ukazateli a vyjadřovali jsme odhad statního bezrizikového dluhopisu. Ve čtvrté kapitole jsme probírali jedno riziko dlouhověkosti s použitím Lee-Carterova a Wills-Sherrisova modelů. V páté kapitole jsme řešili praktickou aplikaci na reálných datech.

Literatura

[1] *Shao A.W., Michael Sherris, Katja Hanewald:* Disaggregated House Price Indices
UNSW Australlian School of Business Research, 2013

[2] *Ruey S. Tsay:* A Course in Time Series Analysis
University of Chicago, 2000

[3] *Danie Cho, Katja Hanewald, Michael Sherris:* Risk Management and Payout Design of Reverse Mortgages
Australian school of business, 2013

[4] *Helmut Lutkepohl:* New Introduction to multiple Time Series Analysis
Springer, 2005

[5] *Tao Chen, John P. Harding:* Changing Tastes: Estimating Changing Attribute Prices in Hedonic and Repeat Sales Model
Springer Science, 2015

[6] *Tomáš Cípra:* Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou
Ekopress, 2015

[7] *Tomáš Cípra:* Finanční ekonometrie
Ekopress, 2008

[8] *Samuel Wills and Sherris :* Integrating Financial and Demographic Longevity Risk Models: An Australian Model for Financial Applications
Australlian School of Business Research, 2008

[9] *Wang, L., Valdez, E.A., Piggott, J.:* Securitization of longevity risk in reverse mortgages
North American Actuarial Journal, 2008

[10] *Shao, A.W., Hanewald, K., Sherris, M.:* Reverse mortgage pricing and risk analysis allowing for idiosyncratic house price risk and longevity risk.
Insurance: Mathematics and Economics, 2015