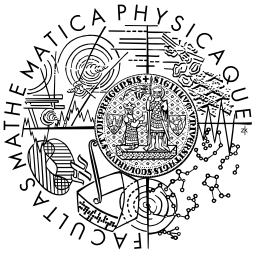


MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Iva Kreslová

Analytický a syntetický přístup k řešení metrických úloh v prostoru

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky – Učitelství informatiky

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Podpis autora

Název práce: Analytický a syntetický přístup k řešení metrických úloh v prostoru

Autor: Bc. Iva Kreslová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Diplomová práce se zabývá metrickými úlohami v prostoru, k jejichž řešení využívá syntetickou a analytickou geometrii. Kromě vysvětlení jednotlivých přístupů zde najdeme i sadu příkladů k procvičení. Řešení příkladů je součástí *Portálu středoškolské matematiky*, kde k jednotlivým příkladům nalezneme analytické řešení, syntetické početní řešení a syntetické konstrukční řešení.

Klíčová slova: metrické úlohy, syntetická geometrie, analytická geometrie, kartézská soustava souřadnic, Pýthagorova věta, odchylka, vzdálenost, geometrie v prostoru, vektor, velikost úhlu, velikost vektoru, kosinová věta

Title: Analytic and synthetic approach to metrical tasks in space solving

Author: Bc. Iva Kreslová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The diploma thesis deals with metric tasks in space, using synthetic and analytical geometry. In addition to explaining the different approaches, there is a set of examples to practice. The solution of the examples is part of the Portal of High School Mathematics (*Portál středoškolské matematiky*), where we can find analytical solutions, synthetic numerical solutions and synthetic constructional solutions.

Keywords: metric tasks, synthetic geometry, analytical geometry, Cartesian coordinate system, Pýthagorean theorem, angular deflection, distance, geometry in space, vector, angle size, vector size, cosine theorem

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucí práce RNDr. Vlastě Moravcové, Ph.D., za rady poskytnuté při vypracovávání diplomové práce a za neskonalou trpělivost, které muselo někdy být více než dost. Také bych ráda poděkovala vedení škol gymnázia v Žatci a gymnázia v Kadani za umožnění provedení průzkumu přístupu žáků k řešení geometrických úloh na jejich škole. V neposlední řadě bych ráda poděkovala své rodině a přátelům za duševní podporu.

Obsah

Úvod **3**

1 Základní metrické vlastnosti **5**
1.1 Vzdálenost dvou bodů 5
1.2 Odchylka dvou přímek 7

2 Další odchylky **11**
2.1 Odchylka dvou rovin 11
2.2 Odchylka přímky od roviny 12
2.3 Příklady k procvičení 13
2.3.1 Vzorový příklad 14

3 Další vzdálenosti **18**
3.1 Vzdálenost bodu od roviny 18
3.2 Vzdálenost přímky od roviny 20
3.3 Vzdálenost dvou rovin 21
3.4 Vzdálenost bodu od přímky 21
3.5 Vzdálenost dvou přímek 26
3.5.1 Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek 26
3.5.2 Vzdálenost dvou mimoběžných přímek 26
3.6 Příklady k procvičení 29
3.6.1 Vzorový příklad 30

4 Průzkum přístupu žáků k řešení geometrických úloh **34**
4.1 Obsah průzkumu 34
4.2 Respondenti a průběh průzkumu 35
4.3 Vyhodnocení dotazníku 36

Závěr **39**

Seznam použité literatury **41**

Seznam obrázků **42**

Seznam tabulek **43**

Seznam použitého značení **44**

A Dotazník k průzkumu žáků **45**

B Uživatelská dokumentace **47**
B.1 Specifikace zadání 47
B.2 Součást *Portálu středoškolské matematiky* 47
B.3 Struktura stránky 48
B.4 Ovládání stránek 49
B.4.1 Postranní menu 49
B.4.2 Zobrazení kontextu 49

B.4.3 Ovládání příkladu 49
B.5 Podpora prohlížečů 51

C Programátorská dokumentace **53**
C.1 Specifikace zadání 53
C.2 Volba programovacích jazyků 53
C.3 Potřebné externí knihovny 53
C.4 Prostředí tvorby 53
C.5 Program webových stránek 53
C.5.1 Struktura kódu 53
C.5.2 Klíčové funkcionality 54
C.5.3 Komplikace a jejich řešení 56
C.6 Znázornění příkladu 57

Úvod

Tématem mé diplomové práce je analytický a syntetický přístup k řešení metrických úloh v prostoru, což obnáší určování vzdáleností nebo odchylek mezi geometrickými útvary. Nejedná se však o polohové úlohy, proto hlavním předpokladem metrických úloh je existence hledaných metrik. V úlohách obsažených v jednotlivých kapitolách tedy neověřujeme při počítání vzdálenosti dvou rovin jejich rovnoběžnost.

Oba přístupy (syntetický a analytický) spadají ve středoškolské matematice do dvou vzdělávacích okruhů. Syntetická geometrie je součástí stereometrie, která pokrývá požadavky jak *Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia*, tak *Rámcového vzdělávacího programu pro střední odborné vzdělání* v oblasti geometrie v prostoru, a tudíž v různých obměnách nedílnou součástí školních vzdělávacích programů pro střední školy. To samé však nemůžeme říci o okruhu analytické geometrie v prostoru, která není součástí ani *Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia*, ani *Rámcového vzdělávacího programu pro střední odborné vzdělání* a nemusí být tedy obsažena v příslušných školních vzdělávacích programech středních škol. Některé střední školy ji však přesto do své výuky zařazují. Není ale jisté, zda dochází k myšlenkovému propojení stereometrie, neboli syntetické geometrie, s analytickou geometrií. Oba okruhy jsou obvykle vyučovány odděleně, nemusí tedy k jejich propojení dojít. Pro mnoho žáků může být analytická geometrie jen množstvím vzorečků, které časem zapomínají.

Cílem diplomové práce je tedy ukázat žákům souvislosti mezi analytickou geometrií a syntetickou geometrií, neboli stereometrií. Propojení znalostí a utvoření jednotného pohledu na problematiku metrických úloh v prostoru je tím, o co se v této práci snažím. Zvolenými prostředky k dosažení cíle jsou shromáždění teoretického přehledu přístupů k řešení metrických úloh a sada příkladů věnující se dané problematice.

Součástí práce je také průzkum přístupů žáků středních škol k řešení metrických úloh v prostoru, abych ověřila správnost domněnky, že žáci neznají souvislosti mezi syntetickou a analytickou geometrií. Průzkum také nastíní, zdali neznalosti nevznikají i z jiných příčin (například kvůli nedostatečné prostorové představivosti studentů).

Diplomová práce je rozdělena do tří hlavních částí. První se věnuje popsání různých přístupů k řešení odchylek a vzdáleností v metrických úlohách. Nachází se zde odvození známých vztahů analytické geometrie a objasnění společných prvků propojujících analytickou a syntetickou geometrii. Na konci kapitol *Další odchylky* a *Další vzdálenosti* je sada příkladů spolu se vzorovým řešením jednoho z nich. Řešení všech příkladů je součástí webové aplikace *Portál středoškolské matematiky* `www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/`.

Právě sada řešených příkladů nacházejících se na *Portálu středoškolské matematiky* je druhou hlavní částí této práce. Sada příkladů přináší pestrou škálu prostorových situací, na nichž se zabývám metrickými vlastnostmi. Postupy řešení jednotlivých příkladů jsou však jen ukázkou, jak lze dané příklady řešit. Existují i jiné postupy, které mohou čtenáře napadnout a nejsou na *Portálu středoškolské matematiky* uvedeny. Do ukázkového řešení nějakého z příkladů lze nahlédnout v podkapitolách *Vzorové příklady* nebo v *Uživatelské dokumentaci*, která

je součástí příloh. *Uživatelská dokumentace* podává návod ovládání řešených příkladů i přehled jednotlivých postupů každého z nich. Pro případ rozšiřování sady příkladů lze v příloze nalézt i programátorskou dokumentaci, která stručně seznamuje s technickým zázemím webových stránek.

Poslední částí je představení průzkumu řešení metrických úloh žáky středních škol, který přináší odpovědi na otázky typu: Uvědomují si žáci souvislost mezi analytickou a syntetickou geometrii? Kterou z metod žáci preferují při řešení metrických úloh? Dělá jim při řešení problém prostorová představivost? Jsou žáci schopni analyzovat obtížnost zadání a zvolit vhodnou metodu řešení?

Shrnutí přístupů k řešení odchylek a vzdáleností v metrických úlohách může sloužit žákům středních škol k rozšíření znalostí. Pedagogové jej mohou využít pro inspiraci ve snaze propojit výuku těchto dvou témat. Na sadě příkladů si žáci mohou procvičit problematiku metrických úloh a najít zde i jiné přístupy řešení.

1 Základní metrické vlastnosti

Základní metrické vlastnosti v prostoru určujeme za pomoci dvou metod – syntetické a analytické (Holešová, 2013). Hlavní myšlenkou syntetické metody je zkoumání geometrických útvarů, v našem případě těles, vzhledem k jejich základním geometrickým vlastnostem. Tělesem je míněn prostorově omezený souvislý geometrický útvar, jehož hranicí je uzavřená plocha (Pomykalová, 2011). K jeho popisu využíváme vlastnosti geometrických objektů, jako jsou úsečky, křivky, části rovin a obecné plochy. Do geometrických vlastností řadíme například délky úseček, velikosti úhlů. Tyto popisné prvky nám napomáhají v určování metrických vlastností v rámci syntetické geometrie.

Pro analytickou geometrii je charakteristické umisťování geometrických útvarů do kartézské soustavy souřadnic, což přináší algebraickou reprezentaci jich samotných, jejich vztahů a operace s nimi v podobě řešení soustav rovnic. Kartézskou soustavou souřadnic nazýváme trojici navzájem kolmých číselných os protínajících se v jednom bodě, který odpovídá bodu $[0;0;0]$. Číselné osy se nazývají souřadnicové osy a značí se písmeny x, y, z. Společný průsečík souřadnicových os se nazývá počátek soustavy souřadnic a my jej budeme označovat O ($O = [0;0;0]$). Soustavu souřadnic v prostoru s počátkem O a osami x, y, z označujeme O_{xyz}. Dále budeme při používání kartézské soustavy souřadnic používat značení x_u, resp. x_A pro x-ovou souřadnici vektoru $\overrightarrow{u}$, resp. bodu A, analogicky pro y-ové a z-ové souřadnice.

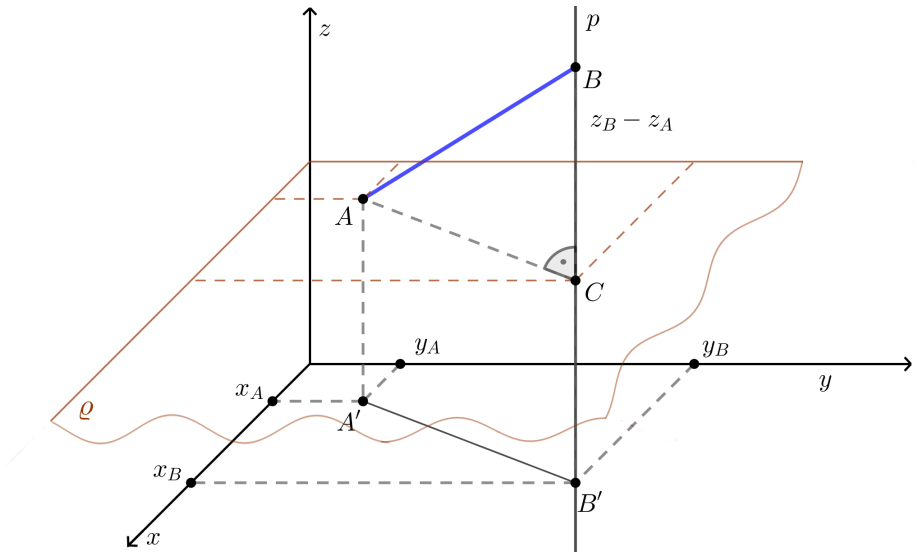
1.1 Vzdálenost dvou bodů

Vzdálenost dvou bodů A, B je délka úsečky AB. Vzdálenost dvou bodů s využitím tělesa (tzn. v rámci syntetické metody) lze odvodit z jeho zadaných vlastností, kterými mohou být povrch, objem, vzdálenosti (například délky hran) či odchylky (například odchylky stěn). Nejdříve však musíme nalézt rovinný geometrický útvar, který obsahuje dané body a náleží tělesu. Omezíme se tedy na řešení vzdálenosti dvou bodů v rovině. Volíme geometrický útvar s nejvyšším počtem zadaných vlastností – bývá jím nejčastěji trojúhelník. K určení vzdálenosti daných bodů lze obvykle využít jeden či více z následujících nástrojů:

- Pýthagorovu větu,
- Eukleidovy věty,
- goniometrické funkce,
- shodnost či podobnost trojúhelníků,
- obsahy geometrických útvarů.

Nástroj pro výpočet vzdálenosti dvou bodů vybíráme dle zvoleného rovinného obrazce. Pýthagorovu větu využíváme také při dopočítávání délek úseček při pomocných mezivýpočtech.

Nyní se podíváme na řešení téhož v rámci analytické metody a odvodíme tak vzorec pro výpočet vzdálenosti dvou bodů v kartézské soustavě souřadnic.



Obrázek 1.1: Vzdálenost dvou bodů v kartézské soustavě souřadnic

Jsou dány body A, B, kde $A = [x_A; y_A; z_A]$ a $B = [x_B; y_B; z_B]$. Proložme bodem A rovinu ρ rovnoběžnou s rovinou xy a bodem B veďme přímku p kolmou k rovině ρ. Průsečík přímky p s rovinou ρ označme C (obrázek 1.1). Body A, B, C jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku s pravým úhlem při vrcholu C, který má souřadnice $[x_B, y_B, z_A]$[1]. Vzdálenost bodů A, B vypočítáme Pýthagorovou větou:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 \tag{1.1}$$

Pro délku úsečky BC obecně platí:

$$|BC| = |z_B - z_A| \tag{1.2}$$

Můžeme nahlédnout, že $|z_B - z_A| = z_B - z_A$ pro $z_B \geq z_A$ (obrázek 1.1).

Vzdálenost bodů A, C je rovna vzdálenosti bodů A', B', kde úsečka $A'B'$ je kolmým průmětem úsečky AB do roviny xy. Velikost úsečky $A'B'$ lze získat opět užitím Pýthagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník ležící v rovině xy (obrázek 1.2):

$$|AC|^2 = |A'B'|^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \tag{1.3}$$

Dosadíme vztahy 1.2 a 1.3 do vztahu 1.1:

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \\ |AB| &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \end{aligned} \tag{1.4}$$

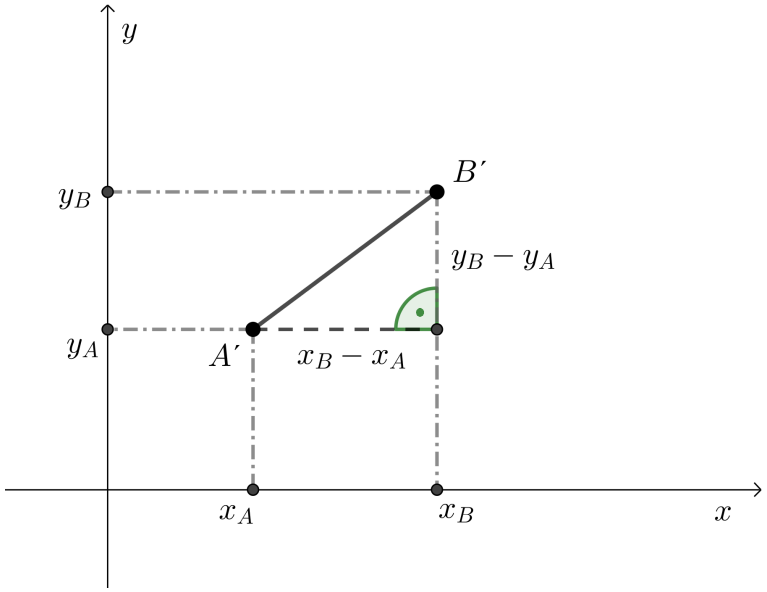
Tento vztah je v některých učebnicích matematiky pro střední školy uváděn bez odvození (např. Liška, 2017, str. 22) jako vzorec pro výpočet vzdálenosti dvou

[1]Pokud bod A splývá s bodem C, pak body A, B mají shodné souřadnice x, y. Shodují-li se body právě ve dvou souřadnicích, pak vzdálenost těchto bodů je rovna absolutní hodnotě rozdílu zbývající souřadnice. Shodují-li se body ve všech třech souřadnicích, pak je vzdálenost bodů nulová.

bodů. Uvažujeme-li vektor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, pak vztah 1.4 určuje také velikost vektoru $\overrightarrow{u}$ o souřadnicích $x_u = x_B - x_A$, $y_u = y_B - y_A$ a $z_u = z_B - z_A$, tj.

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \\ |\overrightarrow{u}| &= \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Lze tedy nahlédnout, že Pýthagorova věta je důležitým nástrojem v obou metodách.



Obrázek 1.2: Průmět bodů A, B do roviny xy

1.2 Odchylka dvou přímek

Odchylka dvou různoběžných přímek, značíme $|\measuredangle pq|$, je rovna velikosti každého z ostrých nebo pravých úhlů, které spolu přímky svírají. Odchylka dvou rovnoběžných přímek je 0°. V prostoru však potřebujeme umět určit také odchylku dvou mimoběžných přímek. Odchylka dvou mimoběžných přímek je rovna odchylce dvou různoběžných přímek vedených rovnoběžně s danými mimoběžkami libovolným bodem prostoru. Za libovolný bod volíme takový bod, který nám usnadňuje numerické výpočty nebo vyobrazení prostorové situace. Velikost odchylky dvou přímek vždy určujeme v rámci roviny, jež je zadána těmito přímkami.

Hlavní myšlenkou odchylky dvou přímek v syntetické geometrii je nalezení rovinného útvaru, který je řezem zadaného tělesa rovinou určenou zadanými přímkami. Rovinným útvarem nejčastěji bývá trojúhelník. Geometrické vlastnosti rovinných útvarů (délka strany, velikost úhlů, aj.) používáme poté k vypočítání velikosti hledané odchylky přímek. K určení velikosti úhlů lze využít:

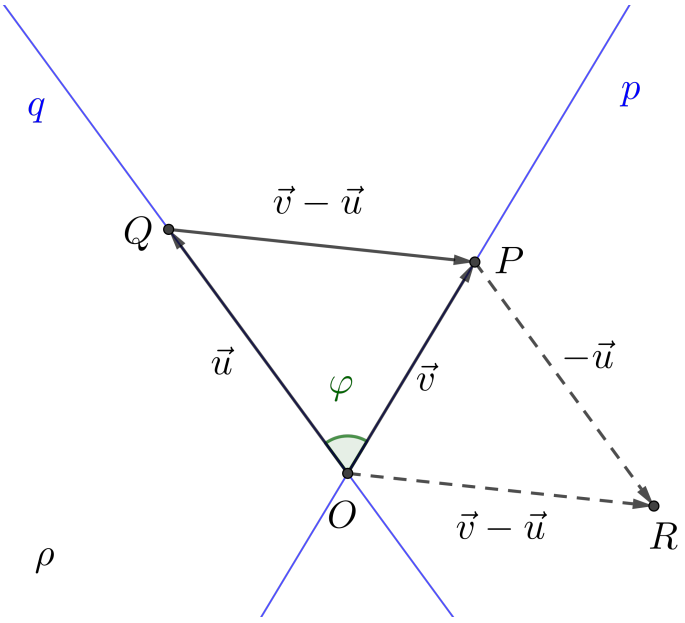
- goniometrické funkce,
- kosinovou či sinovou větu.

Zbývá nám tedy ukázat, jak vypočítat odchylku dvou přímek užitím analytické metody.

Ze syntetické metody víme, že odchylka dvou mimoběžek je rovna odchylce dvou různoběžek vedených rovnoběžně s danými mimoběžkami libovolným bodem prostoru. V analytické geometrii jsou přímky reprezentovány směrovými vektory. Můžeme tedy převést odchylku přímek na odchylku jejich směrových vektorů. Protože směrové vektory rovnoběžných přímek jsou svým násobkem, je velikost odchylky směrových vektorů rovna 0° nebo 180°. Podívejme se tedy na odchylku dvou různoběžných přímek.

Mějme různoběžné přímky p, q náležící rovině ρ, jejichž odchylku chceme určit. Pro názornost a ulehčení výpočtu předpokládejme, že průsečíkem obou přímek je počátek O kartézské soustavy souřadnic O_{xyz}.

Každá přímka je dána směrovým vektorem a bodem, který jí náleží. Odchylku přímek můžeme tedy převést na odchylku dvou vektorů. Odchylka dvou různoběžných přímek je však rovna velikosti ostrého nebo pravého úhlu, zaveďme tedy prozatím následující omezení: Nechť odchylka dvou vektorů odpovídá odchylce dvou přímek, tj. směrové vektory svírají úhel o velikosti $\varphi \in \langle 0°,90° \rangle$.



Obrázek 1.3: Odchylka směrových vektorů přímek p, q

Nechť $\overrightarrow{u} = (x_u; y_u; z_u)$ je směrový vektor přímky q a $\overrightarrow{v} = (x_v; y_v; z_v)$ je směrový vektor přímky p. Umístěme volné vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ do společného počátku O. Vázané vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ svírají dle výše uvedeného omezení ostrý nebo pravý úhel. Jeho velikost φ tedy odpovídá odchylce přímek p, q (obrázek 1.3). Označíme-li $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, získáme trojúhelník OPQ.

Pro výpočet velikosti úhlu v obecném trojúhelníku lze použít kosinovou větu. Zbývá nám určit velikost vektoru $\overrightarrow{PQ}$. Proveďme tedy následující konstrukci:

- veďme vektor $-\overrightarrow{u}$ z bodu P a označme jeho koncový bod R,
- vznikl vektor $\overrightarrow{OR}$ odpovídající vektoru $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$.

Konstrukcí jsme získali rovnoběžník $ORPQ$, pro který platí: $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$. Trojúhelník OPQ má tedy délky stran:

$$|OP| = |\overrightarrow{v}|, \quad |OQ| = |\overrightarrow{u}|, \quad |QP| = |\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}|$$

Podle kosinové věty platí[2]:

$$|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 - 2|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \cos\varphi \tag{1.6}$$

Ze vztahu 1.5 na straně 7 pro velikost vektoru víme:

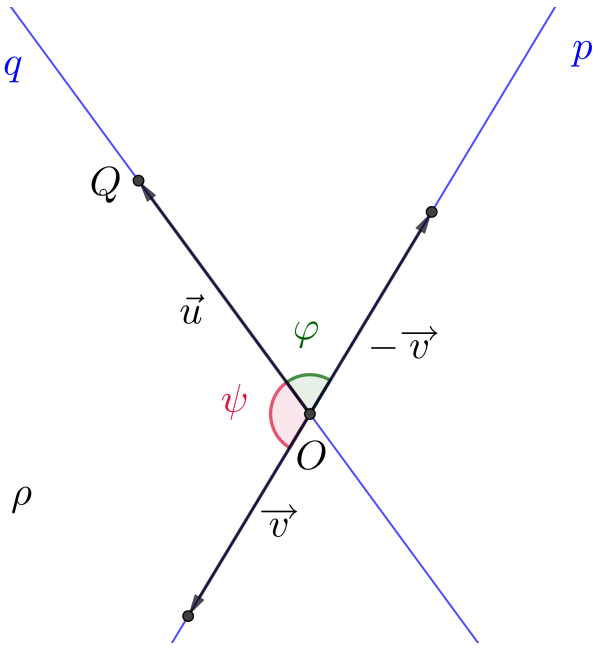
$$\begin{aligned}
(x_v - x_u)^2 + (y_v - y_u)^2 + (z_v - z_u)^2 &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + x_v^2 + y_v^2 + \\
&\quad z_v^2 - 2|u||v| \cos\varphi \\
x_v^2 - 2x_v x_u + x_u^2 + y_v^2 - 2y_v 2y_u + y_u^2 + z_v^2 - 2z_v z_u + z_u^2 &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + x_v^2 + y_v^2 + \\
&\quad z_v^2 - 2|u||v| \cos\varphi \\
-2x_v x_u - 2y_v y_u - 2z_v z_u &= -2|u||v| \cos\varphi
\end{aligned}$$

Protože vektory u, v jsou nenulové, můžeme psát:

$$\cos\varphi = \frac{x_v x_u + y_v y_u + z_v z_u}{|u||v|}$$

Užitím definice skalárního součinu[3] dostaneme:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|} \tag{1.7}$$



Obrázek 1.4: Určení odchylky přímek p, q, jejichž směrové vektory svírají tupý úhel

[2]Pro kolmé vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, tj. $\varphi = 90°$ a $\cos\varphi = 0$, platí: $|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}|^2 = |u|^2 + |v|^2$. Můžeme nahlédnout, že kosinová věta odpovídá Pýthagorově větě, pokud jsou dané vektory navzájem kolmé – Pýthagorova věta je tedy speciálním případem kosinové věty.

[3]Skalární součin dvou vektorů $\overrightarrow{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1; v_2; v_3)$ v prostoru je číslo $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, značíme jej $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ (Boček, 1995, str. 39).

Ukažme nyní, že vztah 1.7 platí pro odchylky směrových vektorů bez omezení na ostré a pravé úhly:

Jsou-li vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ rovnoběžné, tj. přímky svírají nulový úhel, pak platí $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$, $k \neq 0$, tj. $|\overrightarrow{v}| = k|\overrightarrow{u}|$. Dosadíme-li $k\overrightarrow{u}$ za vektor $\overrightarrow{v}$ do vztahu 1.7, získáme[4]:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{u}k\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{ku}|} = \frac{k|\overrightarrow{u}|^2}{|k||\overrightarrow{u}|^2} = \frac{k}{|k|}$$

- Pokud jsou v tomto případě vektory u, v souhlasně rovnoběžné, tj. $k > 0$, pak $|k| = k$ a $\cos\varphi = 1$, tedy $\varphi = 0°$.
- Pokud jsou vektory u, v nesouhlasně rovnoběžné, tj. $\varphi = 180°$ a $k < 0$, pak $|k| = -k$ a $\cos\varphi = -1$, tedy $\varphi = 180°$.

Jsou-li vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ různoběžné a svírají tupý úhel ψ (obrázek 1.4), tj. $\psi \in (90°; 180°)$, pak při určování odchylky přímek p, q vezmeme v úvahu místo jednoho z vektorů vektor jemu opačný. Úhel ψ sevřený vektory $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{-v}$ je ostrý. Můžeme tedy použít vztah 1.7, pro který platí:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{-v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{-v}|} = -\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|} \tag{1.8}$$

Pro odchylku vektorů o velikosti $\varphi \in \langle 0°,90°\rangle \cup \{\varphi = 180°\}$ platí vztah 1.7. Vztah 1.8 platí pro směrové vektory svírající tupý úhel. Velikost odchylky dvou přímek tedy vypočítáme vztahem:

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|} \tag{1.9}$$

[4]Nechť $\overrightarrow{u} = (x_u; y_u; z_u)$, pak platí:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = (x_u; y_u; z_u) \cdot (x_u; y_u; z_u) = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}^2 = |\overrightarrow{u}|^2$$

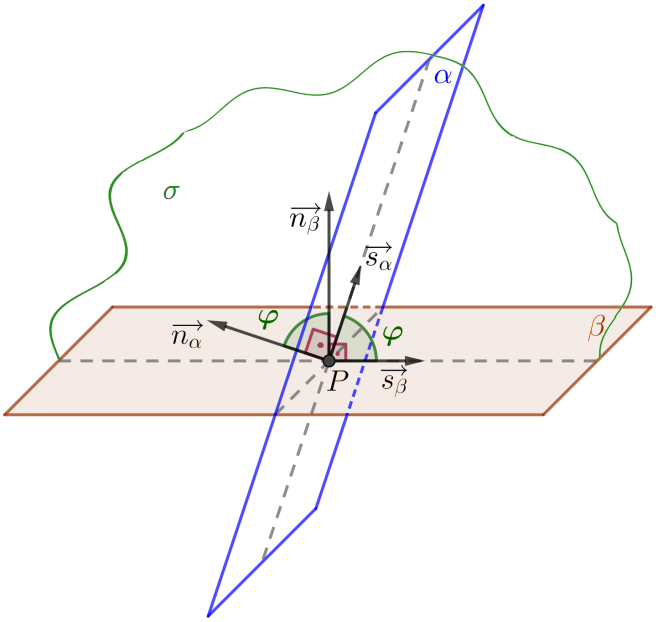
2 Další odchylky

V první kapitole jsme se seznámili se vzdáleností dvou bodů a s odchylkou dvou přímek. Nyní těchto znalostí využijeme. Budeme se zabývat dalšími odchylkami – odchylkou přímky od roviny a odchylkou dvou rovin.

2.1 Odchylka dvou rovin

Odchylka dvou rovin α, β, značíme $|\measuredangle\alpha\beta|$, je rovna odchylce jejich průsečnic[1] p, q s rovinou σ kolmou k oběma rovinám. Průsečnice p je společným průnikem roviny α s rovinou σ a průsečnice q je společným průnikem roviny β s rovinou σ. Problém odchylky dvou rovin odpovídá tedy odchylce dvou přímek. Analytická metoda nám však přináší jednodušší řešení.

Jsou dány různoběžné roviny α a β. Rovina α je dána obecnou rovnicí $a_\alpha x + b_\alpha y + c_\alpha z + d_\alpha = 0$ s normálovým vektorem $\overrightarrow{n_\alpha} = (a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$ a rovina β je dána obecnou rovnicí $a_\beta x + b_\beta y + c_\beta z + d_\beta = 0$, kde vektor $\overrightarrow{n_\beta} = (a_\beta, b_\beta, c_\beta)$ je normálovým vektorem roviny β (obrázek 2.1).



Obrázek 2.1: Odchylka roviny α od roviny β

Veďme rovinu σ kolmou k rovině α i k rovině β. Normálové vektory $\overrightarrow{n_\alpha}$, $\overrightarrow{n_\beta}$ jsou směrovými vektory roviny σ. Zavedením roviny σ jsme získali průsečnice p a q, kde $\sigma \cap \alpha = p$ a $\sigma \cap \beta = q$. Nalezením průsečnic jsme získali jejich směrové vektory a bod P, který je společným bodem všech tří rovin. Směrový vektor přímky p označme $\overrightarrow{s_\alpha}$ a směrový vektor přímky q označme $\overrightarrow{s_\beta}$. Umístěme směrové vektory do společného počátku P.

Dle syntetické metody je hledanou odchylkou rovin α a β odchylka průsečnic p, q. Z kapitoly 1.2 víme, že odchylku průsečnic p, q určíme pomocí odchylky

[1] Průsečnice je přímka, která je společným průnikem dvou různoběžných rovin.

vhodných směrových vektorů $\overrightarrow{s_\alpha}$, $\overrightarrow{s_\beta}$. Nalezení směrových vektorů obou přímek je však příliš pracné. Ukážeme si proto jiný postup.

Použijeme normálové vektory rovin. Normálový vektor $\overrightarrow{n_\alpha}$ je kolmý k rovině α, je tedy kolmý ke všem směrovým vektorům roviny α. Protože průsečnice p leží v rovině α, je vektor $\overrightarrow{s_\alpha}$ směrovým vektorem roviny α. Vektory $\overrightarrow{n_\alpha}$, $\overrightarrow{s_\alpha}$ jsou tedy navzájem kolmé. Analogicky získáme kolmost vektorů $\overrightarrow{n_\beta}$, $\overrightarrow{s_\beta}$.

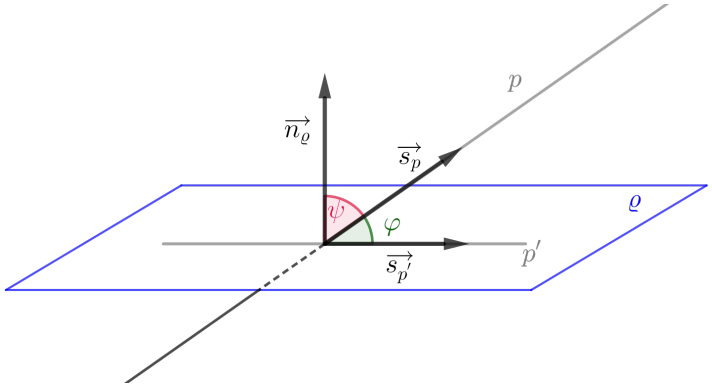
Nyní umístěme vektory do společného počátku P. Odchylka vektorů $\overrightarrow{n_\alpha}$, $\overrightarrow{n_\beta}$ vzniká rotací odchylky vektorů $\overrightarrow{s_\alpha}$, $\overrightarrow{s_\beta}$ o 90° proti směru hodinových ručiček (obrázek 2.1). Platí proto $|\measuredangle \overrightarrow{s_\alpha}\overrightarrow{s_\beta}| = |\measuredangle \overrightarrow{n_\alpha}\overrightarrow{n_\beta}|$. Odchylka dvou rovin α, β odpovídá tedy menší z odchylek jejich normálových vektorů $\overrightarrow{n_\alpha}$, $\overrightarrow{n_\beta}$. Odchylku rovin α a β určíme pomocí následujícího vztahu, který jsme odvodili v kapitole 1.2:

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}||\overrightarrow{n_\beta}|}$$

2.2 Odchylka přímky od roviny

Odchylka přímky p a roviny ϱ (značíme $|\measuredangle p\varrho|$), k níž je přímka p kolmá, je rovna 90°. Není-li přímka p kolmá k rovině ϱ, je odchylka přímky p a roviny ϱ rovna odchylce přímky p a jejího pravoúhlého průmětu[2] p' do této roviny. Analytická metoda nám však přináší ještě další řešení.

Mějme rovinu ϱ různoběžnou s přímkou p. Rovina ϱ je dána obecnou rovnicí $ax + by + cz + d = 0$ s normálovým vektorem $\overrightarrow{n_\varrho} = (a,b,c)$. Přímka p je dána směrovým vektorem $\overrightarrow{s_p}$ a libovolným bodem, který přímce náleží. Určeme jejich odchylku:



Obrázek 2.2: Odchylka přímky p od jejího kolmého průmětu p' do roviny ϱ

Jak jsme již ukázali výše, dle syntetické metody je odchylka přímky p od roviny ϱ rovna odchylce přímky p a jejího pravoúhlého průmětu p'. Směrový vektor přímky p' označíme $\overrightarrow{s_{p'}}$. Odchylka přímky od roviny tedy odpovídá odchylce směrových vektorů $\overrightarrow{s_p}$, $\overrightarrow{s_{p'}}$. Směrový vektor $\overrightarrow{s_{p'}}$ však neznáme.

Umístěme vektory $\overrightarrow{n_\varrho}$, $\overrightarrow{s_p}$ a $\overrightarrow{s_{p'}}$ do společného počátečního bodu (obrázek 2.2). K určení odchylky φ využijme doplňkový úhel ψ, kde $\psi = 90° - \varphi$.

[2]Pravoúhlý průmět přímky p do roviny ϱ získáme jako průnik dané roviny ϱ s rovinou σ, která je kolmá na rovinu ϱ a obsahuje přímku p.

Pro odchylku ψ platí:

$$\cos\psi = \frac{|\overrightarrow{n_\varrho} \cdot \overrightarrow{s_p}|}{|\overrightarrow{n_\varrho}||\overrightarrow{s_p}|}$$

Úhel φ poté získáme jako: $\varphi = 90° - \psi$.

Můžeme jej však určit přímo díky vztahu $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$:

$$\cos\psi = \cos(90° - \varphi) = \sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_\varrho} \cdot \overrightarrow{s_p}|}{|\overrightarrow{n_\varrho}||\overrightarrow{s_p}|}$$

2.3 Příklady k procvičení

V sadě příkladů[3] si problematiku odchylek procvičíme na množině těles, kterou tvoří krychle, pravidelný čtyřboký/šestiboký jehlan a čtyřstěn. Stanovme nyní úmluvu pro popis jednotlivých těles. Během popisu situací budeme používat značení S_{XY} pro střed úsečky XY a značení jednotlivých útvarů bude následovné:

Označení krychle či kvádru odpovídá označení vrcholů v pravém nadhledu rovnoběžného promítání. Nejdříve jsou uvedeny názvy vrcholů dolní podstavy jdoucí proti směru hodinových ručiček. Tento popis je následován popisem horní podstavy, který má stejnou strukturu jako v případě dolní podstavy.

Jehlany jsou označovány popisem podstavy následované hlavním vrcholem V. Střed podstavy označujeme S.

Speciálním typem trojbokého jehlanu je čtyřstěn, jehož hlavní vrchol popisujeme písmenem následujícím po popisu jeho podstavy.

Odchylky mezi zadanými objekty jsou v následujících příkladech vždy definovány. Zadané objekty tedy mají společný alespoň jeden bod.

Příklad 1: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete odchylku přímky AB od přímky $S_{BF}E$.

Příklad 2: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete odchylku přímek $S_{AE}B$, $S_{BF}G$ (převzato z Krynický, 2015b).

Příklad 3: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4$ cm, $|SV| = 5$ cm. Určete odchylku přímek AS_{CD}, CV.

Příklad 4: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete odchylku přímek BE, AH (převzato z Krynický, 2015b).

Příklad 5: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete odchylku rovin DAF, $BS_{EF}S_{GH}$.

Příklad 6: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete odchylku rovin $BS_{AE}S_{DH}$, $S_{AE}S_{BF}S_{CG}$ (převzato z Vojáček (2008a)).

Příklad 7: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4$ cm, $|SV| = 4$ cm. Určete odchylku rovin BCV, $S_{AV}S_{DV}B$.

[3] Řešení příkladů jsou součástí webové aplikace *Portál středoškolské matematiky.*

Příklad 8: Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$, $|AB| = 4$ cm. Určete odchylku rovin bočních stěn.

Příklad 9: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete odchylku přímky EC od roviny BGD (převzato z Vojáček, 2008b).

Příklad 10: Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$, $|AB| = 4$ cm, $|SV| = 6$ cm. Určete odchylku roviny podstavy jehlanu od přímky AS_{FV}.

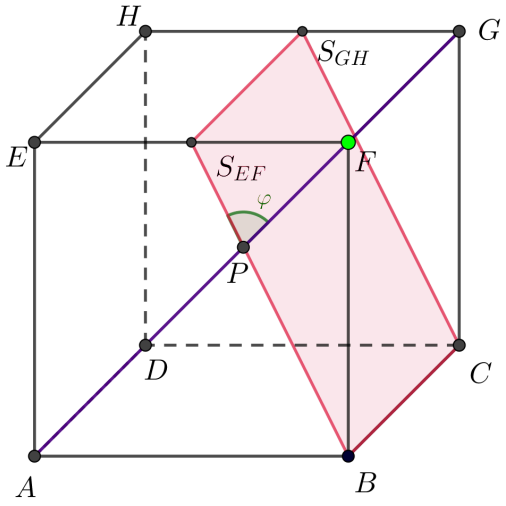
Příklad 11: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete odchylku přímky AS_{BF} od roviny EFG.

Příklad 12: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4$ cm, $|SV| = 6$ cm. Určete odchylku roviny $BS_{CV}D$ od přímky SV (převzato z Vojáček, 2008b).

2.3.1 Vzorový příklad

Příklad 5: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete odchylku rovin DAF, $BS_{EF}S_{GH}$[4].

Zobrazení situace



Obrázek 2.3: Zobrazení situace příkladu 5

[4]Vzorový příklad je ukázkou řešení příkladů uvedených v kapitole 3.6. Části příkladu *zobrazení situace* a *analytické řešení* obsahují v této kapitole jen vyobrazení v rovnoběžném promítání. Na webových stránkách *Portálu středoškolské matematiky* jsou tělesa vyobrazena pomocí *Grafického náhledu 3D* v aplikaci *GeoGebra Classic 5.0.542*. Náhled vyobrazení těles v *Grafickém náhledu 3D* je ukázán v *Uživatelské dokumentaci* B.

Analytické řešení

Zadanou krychli jsme vhodně umístili do počátku soustavy souřadnic (obrázek 2.4). Abychom nemuseli počítat normálové vektory obou rovin, převedeme odchylku rovin na odchylku dvou přímek (průsečnic). Těmito přímkami jsou přímky AF, BS_{EF}. Jedná se o přímky, které vznikly jako průnik zadané roviny a roviny kolmé na obě zadané roviny. Rovina přední stěny ABE je naší kolmou rovinou na obě zadané roviny

Odchylka rovin DAF, $BS_{EF}S_{GH}$ je tedy rovna odchylce průsečnic AF, BS_{EF}. Vektor $\overrightarrow{AF}$ je směrovým vektorem přímky AF a $\overrightarrow{BS_{EF}}$ je směrovým vektorem přímky BS_{EF}.

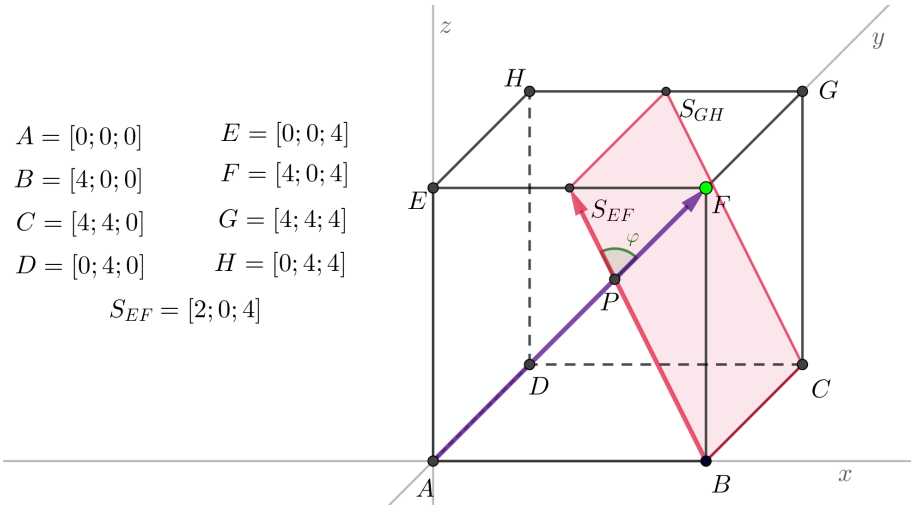
Pro směrové vektory přímek platí:

$$\overrightarrow{AF} = (4;0;4) \quad \overrightarrow{BS_{EF}} = (-2;0;4)$$

Dosaďme nyní do vztahu pro odchylku přímek:

$$\cos\varphi = \frac{|(4;0;4)\cdot(-2;0;4)|}{|(4;0;4)||(-2;0;4)|} = \frac{|4\cdot(-2)+4\cdot 4|}{\sqrt{4^2+4^2}\sqrt{(-2)^2+4^2}} = \frac{|8|}{4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

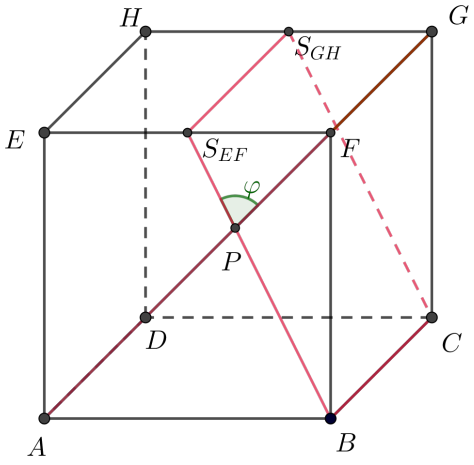
$$\varphi \doteq 71°33'$$



Obrázek 2.4: Analytické řešení příkladu 5

Syntetické početní řešení

Velikost úhlu $S_{EF}PF$ tj. hledanou odchylku určíme přes doplňkový úhel BPF (obrázek 2.5). Úhel $S_{EF}PF$ je odchylkou přímek AF, BS_{EF}. Jedná se o přímky, které vznikly jako průnik zadaných rovin a roviny ABE kolmé na obě zadané roviny. Velikost úhlu BPF získáme pomocí zbývajících úhlů v trojúhelníku BPF, které umíme určit. Velikost úhlu PBF zjistíme z trojúhelníku BFS_{EF} užitím



Obrázek 2.5: Syntetické početní řešení příkladu 5

goniometrické funkce tangens: $\tan \angle PBF = \frac{|S_{EF}F|}{|BF|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |\angle PBF| \doteq 26°33'$. Úhel BFP je roven polovině pravého úhlu BFE:

$$|\angle BFP| = 45°$$

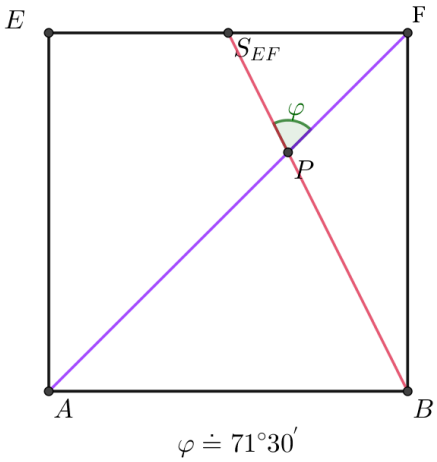
Odtud dostaneme velikost úhlu BPF:

$$|\angle BPF| = 180° - |\angle BFP| - |\angle PBF| = 180° - 45° - 26°33' = 108°27'$$

Odchylka rovin DAF, $BS_{EF}S_{GH}$ je tedy rovna velikosti úhlu $S_{EF}PF$:

$$|\angle S_{EF}PF| = 180° - |\angle BPF| = 180° - 108°27' = 71°33'$$

Syntetické konstrukční řešení



Obrázek 2.6: Syntetické konstrukční řešení příkladu 5

1. čtverec $ABFE; |AB| = 4$ cm
2. $S_{EF}; S_{EF}$ je střed strany EF
3. $P; \overline{AF} \cap \overline{BS_{EF}} = \{P\}$

Provedením konstrukce (obrázek 2.6) jsme získali velikost úhlu $\varphi = |\angle S_{EF}PF|$, čímž jsme sestrojili odchylku rovin DAF, $BS_{EF}S_{GH}$.

3 Další vzdálenosti

V první kapitole jsme se seznámili s určováním vzdálenosti dvou bodů, čehož v této kapitole využijeme. Uvedeme si zde vzdálenosti mezi dalšími typy objektů. Základem těchto vzdáleností však bude stále vzdálenost dvou bodů.

3.1 Vzdálenost bodu od roviny

Vzdálenost bodu A od roviny ϱ, značíme $|A\varrho|$, je rovna vzdálenosti AP, kde P je kolmým průmětem bodu A do roviny ϱ. Bod P je patou kolmice vedené z bodu A k rovině ϱ.

Analytická metoda nám nabízí dva přístupy k určení vzdálenosti bodu od roviny. Před aplikováním metod analytické geometrie musíme opět zadané objekty umístit do kartézské soustavy souřadnic.

Je dána rovina ϱ a bod $A = [x_A; y_A; z_A]$. Rovina ϱ může být zadána buď parametrickým vyjádřením, nebo obecnou rovnicí – z parametrického vyjádření roviny lze ovšem její obecnou rovnici odvodit (viz Boček, 1995, str. 113).

Nechť je dána rovina ϱ parametrickým vyjádřením:

$$x = x_0 + tx_u + sx_v, \quad y = y_0 + ty_u + sy_v, \quad z = z_0 + tz_u + sz_v, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

kde $[x_0; y_0; z_0]$ jsou souřadnice libovolného bodu náležícího rovině ϱ a $(x_u; y_u; z_u)$, $(x_v; y_v; z_v)$ jsou souřadnice směrových vektorů $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ roviny ϱ takových, že $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{o}$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{o}$ a $\overrightarrow{u} \neq k\overrightarrow{v}$ pro $\forall k \in \mathbb{R}$.

Obecná rovnice roviny ϱ je poté dána normálovým vektorem $\overrightarrow{n_\varrho} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, označme jej $\overrightarrow{n_\varrho} = (a; b; c)$:

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ kde } d = -ax_0 - by_0 - cz_0 \tag{3.1}$$

Chceme tedy určit $|A\varrho|$.

Přístup 1: *Kolmice z bodu A k rovině ϱ*

Vzdálenost bodu od roviny zjistíme pomocí kolmice k vedené z bodu A k rovině ϱ. Patu kolmice k označme P. Víme, že $\overrightarrow{n_\varrho} = (a, b, c)$ je kolmý k dané rovině a současně je rovnoběžný s přímkou k (obrázek 3.1). Přímka k má tedy parametrické vyjádření:

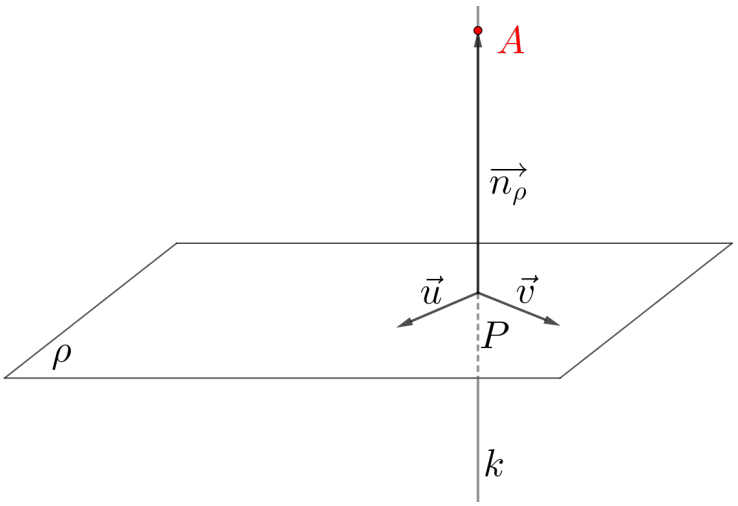
$$x = x_A + ta, \quad y = y_A + tb, \quad z = z_A + tc, \quad t \in \mathbb{R}$$

Bod $P = [x_P; y_P; z_P]$ náleží přímce k, proto $\exists t_P$ takové, že pro souřadnice bodu P platí:

$$x_P = x_A + t_P a, \quad y_P = y_A + t_P b, \quad z_P = z_A + t_P c, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

Zároveň bod P leží v ϱ, tedy:

$$\begin{aligned} a(x_A + t_P a) + b(y_A + t_P b) + c(z_A + t_P c) + d &= 0 \\ ax_A + by_A + cz_A + d + t_P(a^2 + b^2 + c^2) &= 0 \end{aligned}$$



Obrázek 3.1: Vzdálenost bodu A od roviny ϱ užitím kolmice k

Vyjádříme t_P:

$$t_P = -\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Souřadnice bodu P získáme dosazením t_P do vztahu 3.2:

$$\begin{aligned} x_P &= x_0 - \frac{a(ax_A + by_A + cz_A + d)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ y_P &= y_0 - \frac{b(ax_A + by_A + cz_A + d)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ z_P &= z_0 - \frac{c(ax_A + by_A + cz_A + d)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nyní nám jen zbývá vypočítat $|AP|$ pomocí vzorce pro výpočet vzdálenosti dvou bodů:

$$|AP| = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2} \tag{3.4}$$

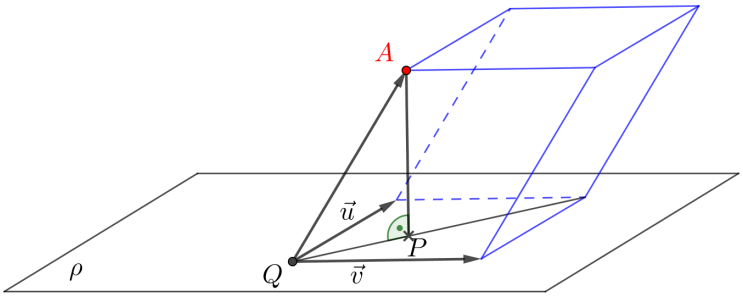
Po dosazení 3.3 do 3.4 a úpravách získáme:

$$|AP| = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2)(ax_A + by_A + cz_A + d)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}}$$

$$|A\varrho| = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{3.5}$$

Přístup 2: *Doplnění na rovnoběžnostěn*

V dané rovině ϱ zvolme tři libovolné navzájem různé nekolineární body. Z nich utvořme dva směrové vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ roviny ϱ, tak aby vycházely ze stejného bodu. Tento bod označme $Q = [x_Q; y_Q; z_Q]$. Vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ tvoří hrany podstavy našeho rovnoběžnostěnu, tj. obsah podstavy rovnoběžnostěnu lze vypočítat jako $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|$ (Boček, 1995, str. 57). Boční hrany rovnoběžnostěnu nechť jsou dány vektorem $\overrightarrow{QA}$ (obrázek 3.2).



Obrázek 3.2: Vzdálenost bodu A od roviny ϱ pomocí rovnoběžnostěnu

Pro objem rovnoběžnostěnu platí (Boček, 1995, str. 60):

$$V = |(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{QA}| \quad \text{nebo} \quad V = S_p \cdot v = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||A\varrho|, \tag{3.6}$$

kde S_p je obsah podstavy a v je výška rovnoběžnostěnu, tedy $v = |A\varrho|$.
Ze vztahů 3.6 vyplývá:

$$|(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{QA}| = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||A\varrho|$$

Pro $|A\varrho|$, tj. pro výšku rovnoběžnostěnu, platí:

$$\begin{aligned} |A\varrho| &= \frac{|(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{QA}|}{|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|} \\ |A\varrho| &= \frac{|\overrightarrow{n_\varrho} \cdot \overrightarrow{QA}|}{|\overrightarrow{n_\varrho}|} \end{aligned}$$

Vektor $\overrightarrow{n_\varrho} = (a; b; c)$ je normálový vektor roviny ϱ. Platí tedy:

$$\begin{aligned} |A\varrho| &= \frac{|\overrightarrow{n_\varrho} \cdot (A - Q)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ |A\varrho| &= \frac{|(a; b; c) \cdot (x_A - x_Q; y_A - y_Q; z_A - z_Q)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ |A\varrho| &= \frac{|ax_A + by_A + cz_A - ax_Q - by_Q - cz_Q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \text{ kde} \\ d &= -ax_Q - by_Q - cz_Q \end{aligned}$$

Rovina ϱ má obecnou rovnici $ax + by + cz + d = 0$ a bod $Q = [x_Q; y_Q; z_Q]$ jí náleží, proto $d = -ax_Q - by_Q - cz_Q$ a tedy:

$$|A\varrho| = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

3.2 Vzdálenost přímky od roviny

Uvažme přímku p a rovinu ϱ. Při určování jejich vzdálenosti musíme nejprve vzít v potaz jejich vzájemnou polohu. Existují dvě možnosti: přímka p může být s rovinou ϱ buď různoběžná, nebo rovnoběžná.

V prvním případě (přímka p je s rovinou q různoběžná) má přímka p s rovinou ϱ společný bod a jejich vzdálenost nelze jednoznačně určit – body přímky p mají různé vzdálenosti od roviny ϱ.

Ve druhém případě (přímka p je s rovinou ϱ rovnoběžná) je vzdálenost přímky p a roviny ϱ, značíme $|p\varrho|$, rovna vzdálenosti libovolného bodu A přímky p od roviny ϱ. Analytická metoda odpovídá tedy vzdálenosti bodu od roviny (viz kapitola 3.1).

3.3 Vzdálenost dvou rovin

Dvě roviny mohou být navzájem rovnoběžné, nebo různoběžné. Jsou-li dvě roviny navzájem různoběžné, protínají se v jedné přímce – průsečnici. Vzdálenost dvou různoběžných rovin není definována, protože vzdálenost libovolného bodu jedné roviny má různou vzdálenost od druhé roviny.

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ϱ, σ je rovna vzdálenosti libovolného bodu A roviny ϱ od dané roviny σ, značíme $|\varrho\sigma|$. Analytická metoda odpovídá tedy vzdálenosti bodu od roviny (viz kapitola 3.1).

3.4 Vzdálenost bodu od přímky

Vzdálenost bodu A od přímky p, značíme $|Ap|$, je rovna vzdálenosti bodů A, P, kde P je kolmý průmět bodu A do přímky p. Kolmý průmět P sestrojíme pomocí kolmice z bodu A na přímku p – bod P je patou kolmice.

Analytická metoda nám nabízí tři přístupy k určení vzdálenosti bodu od přímky. Abychom mohli metody analytické geometrie použít, musíme zadané objekty vyjádřit pomocí souřadnic v kartézské soustavě souřadnic.

Je dána přímka p a bod $A = [x_A; y_A; z_A]$. Přímka p je určena libovolným bodem $[x_0; y_0; z_0]$ a směrovým vektorem $\overrightarrow{u} = (x_u; y_u; z_u)$, kde $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{o}$. Parametrické vyjádření přímky p je tedy (viz Kolouchová, 1986, str. 73):

$$x = x_0 + tx_u, \quad y = y_0 + ty_u, \quad z = z_0 + tz_u, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

Přístup 1: *Proložení bodu A rovinou kolmou k přímce p*

Veďme bodem A rovinu ϱ kolmou k přímce p (obrázek 3.3). Z kolmosti přímky a roviny vyplývá, že pro normálový vektor roviny ϱ platí:

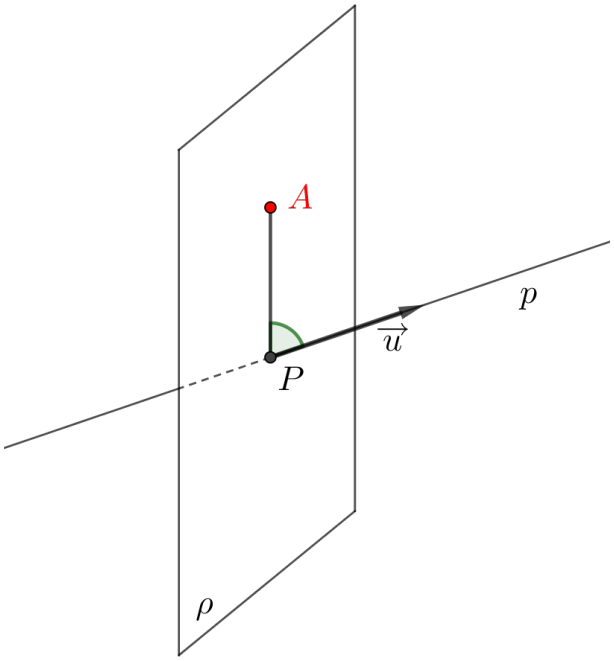
$$\overrightarrow{n_\varrho} = \overrightarrow{u} = (x_u; y_u; z_u)$$

Obecná rovnice roviny ϱ má pak následující tvar:

$$x_u x + y_u y + z_u z + d = 0, \quad \text{kde } d = -x_u x_A - y_u y_A - z_u z_A$$

Bod $P = [x_P; y_P; z_P]$ náleží přímce p, proto $\exists t_P$ je takové, že pro souřadnice bodu P platí:

$$x_P = x_0 + t_P x_u, \quad y_P = y_0 + t_P y_u, \quad z_P = z_0 + t_P z_u, \quad t_P \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$



Obrázek 3.3: Rovina ϱ vedená bodem A kolmo k přímce p

Pro průsečík P roviny ϱ a přímky p platí:

$$x_u(x_0 + t_P x_u) + y_u(y_0 + t_P y_u) + z_u(z_0 + t_P z_u) - (x_u x_A + y_u y_A + z_u z_A) = 0$$

$$x_u x_0 + y_u y_0 + z_u z_0 - (x_u x_A + y_u y_A + z_u z_A) + t_P(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) = 0$$

Vyjádřeme parametr t_P:

$$\begin{aligned} t_P &= -\frac{x_u x_0 + y_u y_0 + z_u z_0 - (x_u x_A + y_u y_A + z_u z_A)}{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \\ t_P &= -\frac{x_u(x_0 - x_A) + y_u(y_0 - y_A) + z_u(z_0 - z_A)}{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Souřadnice bodu P získáme tedy dosazením t_P do rovnic 3.8:

$$x_P = x_0 - x_u \frac{x_u x_0 + y_u y_0 + z_u z_0 - (x_u x_A + y_u y_A + z_u z_A)}{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$$

$$y_P = y_0 - y_u \frac{x_u x_0 + y_u y_0 + z_u z_0 - (x_u x_A + y_u y_A + z_u z_A)}{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$$

$$z_P = z_0 - z_u \frac{x_u x_0 + y_u y_0 + z_u z_0 - (x_u x_A + y_u y_A + z_u z_A)}{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$$

Nyní můžeme vyjádřit délku úsečky AP užitím vzorce pro výpočet vzdále-

nosti dvou bodů:

$$
\begin{aligned}
|AP| &= \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2} \\
|AP| &= \sqrt{(x_0 + tx_u - x_A)^2 + (y_0 + ty_u - y_A)^2 + (z_0 + tz_u - z_A)^2} \\
|AP| &= \Big\{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2 + (z_0 - z_A)^2 + t_P^2(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) + \\
&\qquad 2t[x_u(x_0 - x_A) + y_u(y_0 - y_A) + z_u(z_0 - z_A)]\Big\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

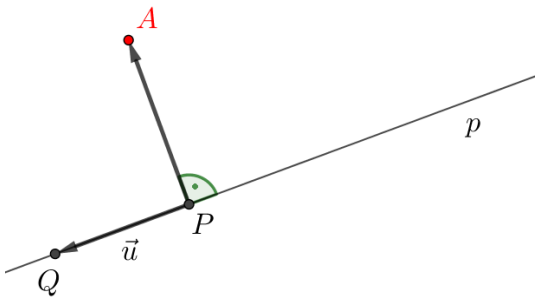
Dosazením t_P ze vztahu 3.9 dostaneme:

$$
\begin{aligned}
|AP| &= \Big\{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2 + (z_0 - z_A)^2 - \\
&\qquad \frac{[x_u(x_0 - x_A) + y_u(y_0 - y_A) + z_u(z_0 - z_A)]^2}{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}\Big\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Získaný vztah určující vzdálenost bodu od přímky ani nadcházející přístupy již nepřinášejí „hezké výrazy“, jako tomu bylo při odvozování vztahu 3.5 pro vzdálenost bodu od roviny. Proto přistoupíme ke zjednodušení vhodnou volbou bodů či vektorů. Bez újmy na obecnosti nechť tedy přímka p splývá s osou souřadnic x, tj. $\overrightarrow{u} = (1; 0; 0)$. Toto zjednodušení předpokládáme i v nadcházejících přístupech. Dosadíme-li směrový vektor $\overrightarrow{u} = (1; 0; 0)$ do vztahu 3.10 ($x_u = 1$, $y_u = 0$, $z_u = 0$), pak pro vzdálenost bodu A od přímky p platí:

$$
|Ap| = \sqrt{(y_0 - y_A)^2 + (z_0 - z_A)^2} \tag{3.11}
$$

Přístup 2: *Kolmost vektorů*



Obrázek 3.4: Vzdálenost bodu A od přímky p pomocí skalárního součinu

Vyjděme ze skutečnosti, že $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u}$, kde $\overrightarrow{u}$ je směrový vektor přímky p, a přímka p splývá s osou x. Souřadnice bodu $P = [x_P; y_P; z_P]$ můžeme vyjádřit z parametrického vyjádření přímky p, tj. $P = [x_0 + t_P; y_0; z_0]$.

Pro vektor $\overrightarrow{AP}$ platí:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} &= (x_P - x_A; y_P - y_A; z_P - z_A) \\
\overrightarrow{AP} &= (x_0 + t_P - x_A; y_0 - y_A; z_0 - z_A)
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Jelikož $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u}$, pak skalární součin vektorů $\overrightarrow{AP}$ a $\overrightarrow{u}$ je roven nule, tedy:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{u} &= 0 \\ (x_0 + t_P - x_A; y_0 - y_A; z_0 - z_A) \cdot (1; 0; 0) &= 0 \\ x_0 + t_P - x_A &= 0 \end{aligned}$$

Odtud vyjádříme t_P:

$$t_P = x_A - x_0 \tag{3.13}$$

Ze vztahu 3.12 plyne, že pro velikost vektoru $\overrightarrow{AP}$ platí:

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x_0 + (x_A - x_0) - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2 + (z_0 - z_A)^2} \tag{3.14}$$

Vzdálenost bodu A od přímky p je tedy rovna:

$$|Ap| = \sqrt{(y_0 - y_A)^2 + (z_0 - z_A)^2}$$

Přístup 3: *Doplnění na rovnoběžník*

K určení vzdálenosti bodu od přímky můžeme také využít doplnění na rovnoběžník, kde $|Ap|$ bude výškou daného rovnoběžníku – patu výšky označme P, tj. $|Ap| = |AP|$. Popišme nyní konstrukci zmiňovaného rovnoběžníku.

Na přímce p splývající s osou x zvolme dva libovolné různé body R, Q, kde $R \neq P$, $Q \neq P$[1]. Protože oba body náleží přímce p, pak jejich souřadnice odpovídají parametrickému vyjádření přímky p:

$$Q = [x_0 + t; y_0; z_0], \quad R = [x_0 + t; y_0; z_0]$$

Zvolme parametr pro jednotlivé body Q, R tak, aby platilo $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{u}$, tedy:

$$Q = [x_0 + t_Q; y_0; z_0], \text{ kde} \quad t_Q = 0$$

$$R = [x_0 +_R t; y_0; z_0], \text{ kde} \quad t_R = 1$$

Body R a Q tvoří jednu stranu našeho rovnoběžníku $AQRS$. Druhá strana je tvořena úsečkou AQ (obrázek 3.5). Vnitřní úhel rovnoběžníku $AQRS$ u vrcholu Q označme φ.

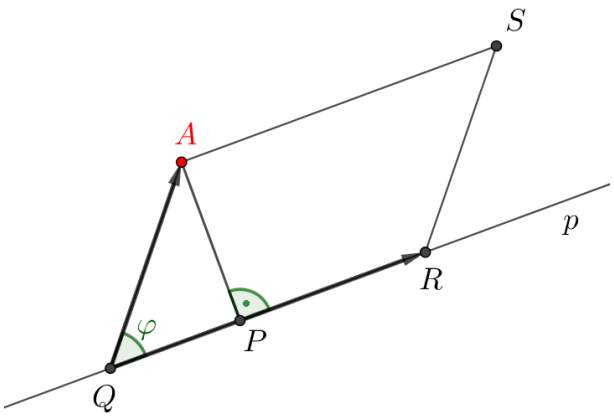
Pro obsah rovnoběžníku $AQRS$ platí:

$$S = |\overrightarrow{QR}||\overrightarrow{AP}| \tag{3.15}$$

Z pravoúhlého trojúhelníku AQP víme:

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{QA}|} \quad \text{tedy} \quad |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{QA}| \sin\varphi$$

[1]Pokud by platilo $Q = P$ nebo $Q = P$, pak by vzdálenost bodu A od přímky p odpovídala velikosti jedné ze stran konstruovaného rovnoběžníku.



Obrázek 3.5: Vzdálenost bodu A od přímky p
pomocí doplnění na rovnoběžník

Vztah pro obsah S rovnoběžníku $AQRS$ můžeme také vyjádřit jako:

$$S = |\overrightarrow{QR}||\overrightarrow{QA}| \sin\varphi \tag{3.16}$$

Porovnáme-li vztahy 3.15 a 3.16, pro obsah S dostáváme:

$$|\overrightarrow{QR}||\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{QR}||\overrightarrow{QA}| \sin\varphi \tag{3.17}$$

Ze vztahu 3.17 plyne:

$$|\overrightarrow{AP}| = \frac{|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QR}| \sin\varphi}{|\overrightarrow{QR}|}$$

Pomocí goniometrické identity $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ (viz Odvárko, 1994, str. 78) získáme[2]:

$$|\overrightarrow{AP}| = \frac{|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QR}|\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{|\overrightarrow{QR}|} \tag{3.18}$$

Užitím vztahu 1.9 pro směrové vektory $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QR}$ dostáváme:

$$|\overrightarrow{AP}| = \frac{\sqrt{|\overrightarrow{QA}|^2|\overrightarrow{QR}|^2 - (\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR})^2}}{|\overrightarrow{QR}|} \tag{3.19}$$

Pro vektory $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QR}$ platí:

$$\overrightarrow{QA} = (x_A - x_0; y_A - y_0; z_A - z_0) \quad \text{a} \quad \overrightarrow{QR} = (1; 0; 0)$$

Dosazením vektorů $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QR}$ do vztahu 3.19 a upravením výrazu dostaneme:

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(y_0 - y_A)^2 + (z_0 - z_A)^2}$$

Výraz pro určení velikosti vektoru $\overrightarrow{AP}$ tedy odpovídá vztahu 3.11 pro $|Ap|$.

[2]Pro sinus libovolného úhlu φ platí: $\sin\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$. Uvažujme ostrý úhel φ v pravoúhlém trojúhelníku AQP. Protože $\varphi \in (0°; 180°)$, nabývá funkce sinus pro úhel φ kladných hodnot. Dále budeme tedy počítat se $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$.

Všechny výše uvedené postupy vedou ke stejnému výrazu určujícímu vzdálenost bodu od přímky.

3.5 Vzdálenost dvou přímek

Určení vzdálenosti dvou přímek závisí na jejich vzájemné poloze. Dvě přímky mohou být totožné, pak je jejich vzdálenost rovna nule. Mohou být ovšem také rovnoběžné různé, různoběžné, nebo mimoběžné. Různoběžnými přímkami se však zabývat nebudeme, neboť jejich vzdálenost nelze definovat (vzdálenost jednotlivých bodů jedné přímky od druhé je různá).

Věnujme se tedy nyní případy rovnoběžných a mimoběžných přímek.

3.5.1 Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek p, q, značíme $|pq|$, je rovna vzdálenosti libovolného bodu A jedné přímky od druhé. Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek tedy převedeme na vzdálenost bodu od přímky (viz kapitola 3.4). Speciálním případem rovnoběžných přímek je totožnost, kdy jednotlivé přímky splývají – vzdálenost totožných přímek je tedy rovna nule (viz výše).

3.5.2 Vzdálenost dvou mimoběžných přímek

Vzdálenost dvou mimoběžných přímek p, q, značíme $|pq|$, je rovna délce nejkratší příčky mimoběžek (úsečky kolmé na obě přímky zároveň), přičemž každý krajní bod úsečky náleží jedné z přímek).

Aplikováním analytické metody si lze vybrat ze dvou možných přístupů, jak určit vzdálenost dvou mimoběžných přímek. Nechť jsou tedy dány přímky p, q, které jsou navzájem mimoběžné. Pro přehlednější manipulaci s výrazy opět přistoupíme k zjednodušení vhodnou volbou přímek. Dojde tedy ke zjednodušení výrazů, s nimiž budeme pracovat. Bez újmy na obecnosti nechť je přímka p dána bodem $[0;0;0]$ a směrovým vektorem $\overrightarrow{u} = (1;0;0)$. Přímka q je určena jí náležejícím libovolným bodem $Q = [x_Q; y_Q; z_Q]$ a směrovým vektorem $\overrightarrow{v} = (x_v; y_v; z_v)$. Vzdálenost přímek $|pq|$ je rovna příčce mimoběžek s krajními body $M \in p$ a $N \in q$.

Parametrické vyjádření přímky p:

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.20}$$

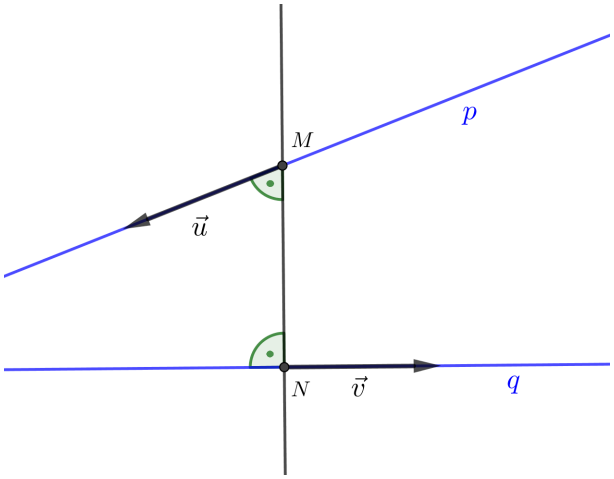
Parametrické vyjádření přímky q:

$$x = x_Q + sx_v, \quad y = y_Q + sy_v, \quad z = z_Q + sz_v, \quad s \in \mathbb{R} \tag{3.21}$$

Přístup 1: *Kolmost příčky MN na obě mimoběžky p a q*

Z kolmosti příčky MN na obě přímky, tj. $MN \perp p \wedge MN \perp q$ plyne:

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$



Obrázek 3.6: Kolmost mimoběžek p, q k jejich příčce MN

Pro vektor $\overrightarrow{MN}$, kde $M = [t_M; 0; 0]$ a $N = [x_Q + s_N x_v; y_Q + s_N y_v; z_Q + s_N z_v]$, platí:

$$\overrightarrow{MN} = (x_Q + s_N x_v - t_M; y_Q + s_N y_v; z_Q + s_N z_v)$$

Vektorové součiny vektorů $\overrightarrow{MN}$, $\vec{u}$ a vektorů $\overrightarrow{MN}$, $\vec{v}$ jsou rovny nule, tedy:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} &= 0 \\ x_Q + s_N x_v - t_M &= 0 \qquad (3.22) \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{v} &= 0 \\ s_N(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) + x_v x_Q + y_v y_Q + z_v z_Q - x_v t_M &= 0 \qquad (3.23) \end{aligned}$$

Ze vztahu 3.22 vyjádříme t_M:

$$t = x_Q + s_N x_v$$

Do vztahu 3.23 dosadíme parametr t_M a vyjádříme s_N:

$$s_N = -\frac{y_v y_Q + z_v z_Q}{y_v^2 + z_v^2}$$

Parametry s_N a t_M dosadíme do souřadnic vektoru $\overrightarrow{MN}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \left(0; y_Q - \frac{y_v^2 y_Q + y_v z_v z_Q}{y_v^2 + z_v^2}; z_Q - \frac{y_v z_v y_Q + z_v^2 z_Q}{y_v^2 + z_v^2}\right) \\ \overrightarrow{MN} &= \left(0; \frac{z_v(y_Q z_v - y_v z_Q)}{y_v^2 + z_v^2}; \frac{y_v(z_Q y_v - y_Q z_v)}{y_v^2 + z_v^2}\right) \end{aligned}$$

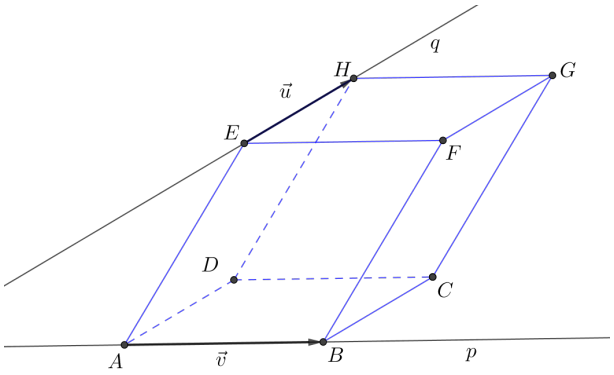
Velikost vektoru $\overrightarrow{MN}$ je tedy rovna:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MN}| &= \sqrt{\frac{z_v^2(y_Q z_v - z_Q y_v)^2}{(y_v^2 + z_v^2)^2} + \frac{y_v^2(z_Q y_v - y_Q z_v)^2}{(y_v^2 + z_v^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(z_v^2 + y_v^2)(z_v y_Q - z_Q y_v)^2}{(y_v^2 + z_v^2)^2}} \\ &= \frac{|z_v y_Q - z_Q y_v|}{\sqrt{y_v^2 + z_v^2}} \end{aligned}$$

Vzdálenost dvou mimoběžek p, q, kde p splývá s osou x, odpovídá velikosti příčky MN, tj.:

$$|pq| = \frac{|z_v y_Q - z_Q y_v|}{\sqrt{y_v^2 + z_v^2}}$$

Přístup 2: *Doplnění na rovnoběžnostěn*



Obrázek 3.7: Vzdálenost mimoběžek p, q pomocí rovnoběžnostěnu

Hlavním nástrojem nyní bude smíšený součin (viz Boček, 1995, str. 60). Zvolme libovolné body A, E takové, že $A \in q$ a $E \in p$. Hrana AB nechť leží na přímce p a hrana EH nechť leží na přímce q. Směrový vektor u přímky p má tedy počátek v bodě A a směrový vektor v přímky q má počátek v bodě E.

Z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AE}$ utvoříme rovnoběžnostěn (obrázek 3.7). Vzdálenost přímek p, q je rovna vzdálenosti podstav $ABCD$, $EFGH$ rovnoběžnostěnu, tj. výšce rovnoběžnostěnu. Vztah pro vzdálenost mimoběžek odvodíme analogicky jako vztah pro vzdálenost bodu od roviny (str. 19), tzn. pro $|pq|$ platí:

$$|pq| = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AE}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \tag{3.24}$$

Protože bod $A \in q$ a $E \in p$, kde p splývá s osou x, pak pro souřadnice bodů A, E platí:

$$A = [x_Q + s_A x_v; y_Q + s_A y_v; z_Q + s_A z_v] \quad \text{a} \quad E = [t_E; 0; 0]$$

Vyjádřeme vektory $\overrightarrow{AE}$ a $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\overrightarrow{AE} = (t_E - x_Q - s_A x_v; -y_Q - s_A y_v; -z_Q - s_A z_v); \quad \vec{u} \times \vec{v} = (0; -z_v; -y_v)$$

Vektory $\overrightarrow{AE}$ a $\vec{u} \times \vec{v}$ dosaďme do vztahu 3.24:

$$|pq| = \frac{|z_v y_Q - z_Q y_v|}{\sqrt{z_v^2 + y_v^2}}$$

3.6 Příklady k procvičení

V následujících příkladech[3] se vyskytuje krychle, kvádr, pravidelný čtyřboký/pětiboký/šestiboký jehlan nebo čtyřstěn. Během popisu jednotlivých útvarů budeme používat značení S_{XY} pro střed úsečky XY a značení jednotlivých útvarů bude následovné:

Označení krychle či kvádru odpovídá označení vrcholů v pravém nadhledu rovnoběžného promítání. Nejdříve jsou uvedeny názvy vrcholů dolní podstavy jdoucí proti směru hodinových ručiček. Tento popis je následován popisem horní podstavy, který má stejnou strukturu jako v případě dolní podstavy.

Jehlany jsou označovány popisem podstavy následované hlavním vrcholem V. Střed podstavy označujeme S.

Speciálním typem trojbokého jehlanu je čtyřstěn, jehož hlavní vrchol popisujeme písmenem následujícím po popisu jeho podstavy.

Vzdálenosti mezi zadanými objekty jsou v následujících příkladech vždy definovány.

Příklad 1: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm, a bod M, který je průsečíkem úhlopříček stěny ABF. Určete vzdálenost bodů C, M.

Příklad 2: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4$ cm, $|SV| = 4$ cm. Dále jsou dány body K, L. Bod K náleží hraně DV a platí: $|KV| = \frac{1}{4}|DV|$. Bod L je středem hrany BV. Určete vzdálenost bodů K, L.

Příklad 3: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4$ cm, $|SV| = 6$ cm. Určete vzdálenost bodů S_{AV}, C.

Příklad 4: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete vzdálenost bodu S_{FH} od roviny ABC.

Příklad 5: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete vzdálenost bodu F od roviny BGE.

Příklad 6: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4$ cm, $|SV| = 4$ cm. Dále je dán bod Q, který je středem úsečky $S_{BC}V$. Určete vzdálenost bodu Q od roviny BCS_{DV}.

Příklad 7: Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$, $|AB| = 4$ cm, $|SV| = 6$ cm. Určete vzdálenost bodu S od roviny boční stěny jehlanu.

Příklad 8: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete vzdálenost přímky $S_{DH}F$ od roviny $AS_{BF}D$ (převzato z Krynický, 2015a).

Příklad 9: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4$ cm, $|SV| = 4$ cm. Určete vzdálenost přímky $S_{DV}S_{AB}$ od roviny BCV (převzato z Krynický, 2015a).

Příklad 10: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete vzdálenost rovin EBC a $S_{EF}S_{BF}S_{CG}$.

[3]Řešení příkladů jsou součástí webové aplikace *Portál středoškolské matematiky.*

Příklad 11: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 6$ cm. Určete vzdálenost bodu A od přímky BH (převzato z Vojáček, 2008c).

Příklad 12: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 6$ cm. Určete vzdálenost bodu E od přímky AS_{FH}.

Příklad 13: Je dán pravidelný pětiboký jehlan $ABCDEV$, $|AB| = 4$ cm, $|SV| = 4$ cm. Určete vzdálenost bodu A od přímky DV.

Příklad 14: Je dán kvádr $ABCDEFGH$, $|AB| = 2$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|BF| = 5$ cm. Dále je dán bod M takový, že bod C je středem úsečky DM. Určete vzdálenost bodu M od přímky BH.

Příklad 15: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete vzdálenost přímky EG od přímky $S_{AB}S_{BC}$ (převzato z Krynický, 2015c).

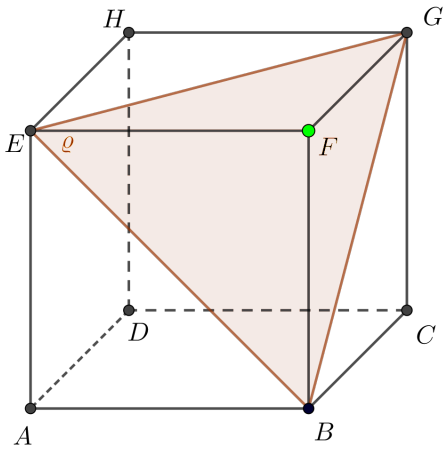
Příklad 16: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete vzdálenost přímky EG od přímky DF.

Příklad 17: Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$, $|AB| = 4$ cm. Určete vzdálenost přímek AB a DC (převzato z Krynický, 2015c).

3.6.1 Vzorový příklad

Příklad 5: Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = 4$ cm. Určete vzdálenost bodu F od roviny BGE[4].

Zobrazení situace



Obrázek 3.8: Zobrazení situace příkladu 5

[4]Vzorový příklad je ukázkou řešení příkladů uvedených v kapitole 3.6. Části příkladu *zobrazení situace* a *analytické řešení* obsahují v této kapitole jen vyobrazení v rovnoběžném promítání. Na webových stránkách *Portál středoškolské matematiky* jsou tělesa vyobrazena pomocí *Grafického náhledu 3D* v aplikaci *GeoGebra Classic 5.0.542*. Náhled vyobrazení těles v *Grafickém náhledu 3D* je ukázán v *Uživatelské dokumentaci* B.

Analytické řešení

Zadanou krychli jsme vhodně umístili do počátku soustavy souřadnic (obrázek 3.9). Pro určení vzdálenosti d bodu F od roviny BGE (dále ji značme ϱ) využijeme vztah

$$d(F,\varrho) = \frac{|ax_F + by_F + cz_F + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

kde ϱ má obecnou rovnici $ax + by + cz + d = 0$ a $F = [x_F; y_F; z_F]$.

Potřebujeme tedy najít normálový vektor roviny. Normálový vektor lze určit pomocí dvou směrových vektorů. Použijeme vektory:

$$\overrightarrow{GE} = (-4; -4; 0) \quad \overrightarrow{GB} = (0; -4; -4)$$

Nyní určíme normálový vektor roviny ϱ:

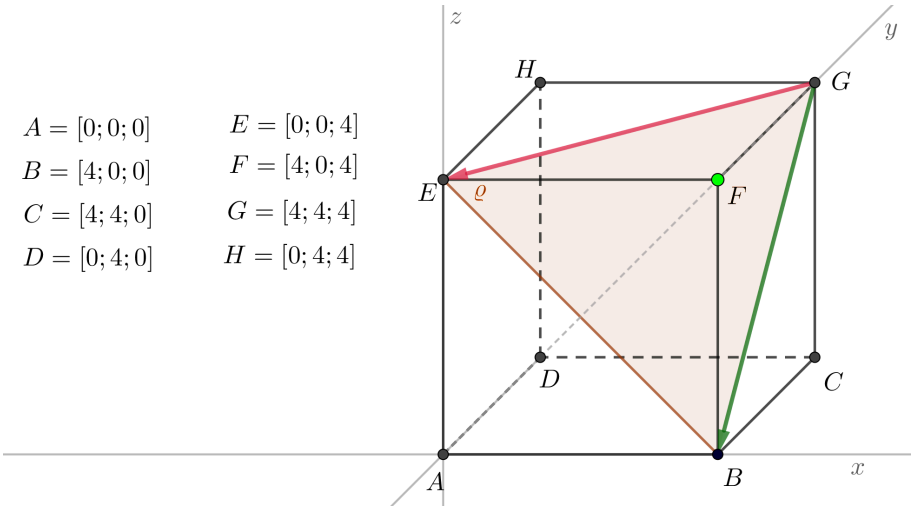
$$\begin{aligned} \overrightarrow{n_\varrho} &= \overrightarrow{GE} \times \overrightarrow{GB} \\ &= \big((-4)\cdot(-4) - (-4)\cdot 0; 0\cdot 0 - (-4)\cdot(-4); (-4)\cdot(-4) - 0\cdot(-4)\big) \\ &= (16; -16; 16) \end{aligned}$$

Nyní můžeme dosadit do výše uvedeného vztahu pro výpočet vzdálenosti bodu od roviny:

$$d(F,\varrho) = \frac{|16\cdot 0 - 16\cdot 0 + 16\cdot 4 + 0|}{\sqrt{16^2 + (-16)^2 + 16^2}} = \frac{|16\cdot 4|}{16\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \doteq 2{,}3 \text{ cm}$$

$A = [0; 0; 0]$
$B = [4; 0; 0]$
$C = [4; 4; 0]$
$D = [0; 4; 0]$

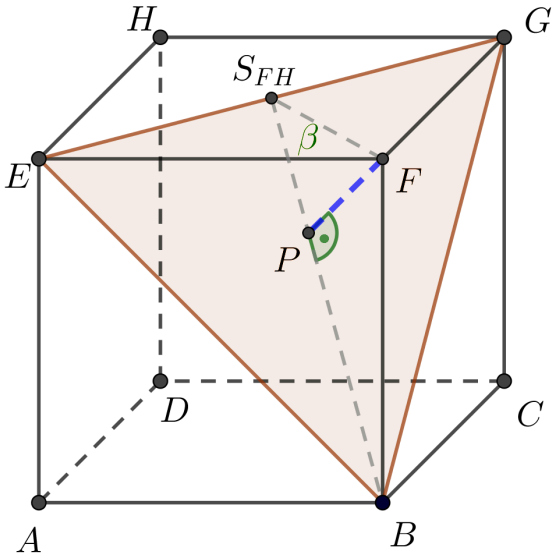
$E = [0; 0; 4]$
$F = [4; 0; 4]$
$G = [4; 4; 4]$
$H = [0; 4; 4]$



Obrázek 3.9: Analytické řešení příkladu 5

Syntetické početní řešení

K výpočtu vzdálenosti bodu F od roviny ϱ využijeme pravoúhlý $\triangle BFS_{FH}$ s pravým úhlem u vrcholu F (obrázek 3.10).



Obrázek 3.10: Syntetické početní řešení příkladu 5

Pomocí goniometrické funkce tangens určeme velikost úhlu $FS_{FH}B$, označme jej β:

$$\tan\beta = \frac{|BF|}{|S_{FH}F|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \beta \doteq 54°44'$$

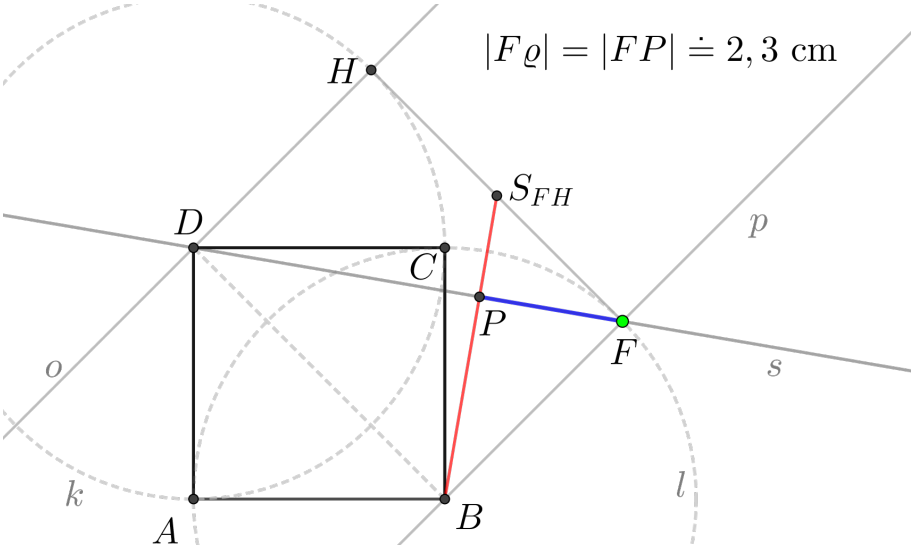
Úhel β je společný pro $\triangle BFS_{FH}$ a $\triangle PFS_{FH}$, kde P je patou kolmice k přímce $S_{FH}B$ procházející bodem F. Z trojúhelníku PFS_{FH} užitím goniometrické funkce sinus získáme vzdálenost $|FP|$:

$$\sin\beta = \frac{|FP|}{|S_{FH}F|} \Rightarrow |FP| = |S_{FH}F|\sin\beta = 2\sqrt{2}\sin(54°44') \doteq 2{,}3 \text{ cm}$$

Vzdálenost bodu F od roviny ϱ odpovídá velikosti $|FP|$.

Syntetické konstrukční řešení

1. čtverec $ABCD$; $|AB| = 4$ cm
2. $\leftrightarrow o; o \perp BD \wedge D \in o$
3. $\leftrightarrow p; p \perp BD \wedge B \in p$
4. $k; k(D,|AB|)$
5. $l; l(B,|AB|)$
6. $H; H \in o \cap k$
7. $F; F \in p \cap l \wedge F \in \mapsto BDH$
8. $S_{FH}; S_{FH}$ je středem úsečky HF
9. $\leftrightarrow s; s \perp \overline{S_{FH}B} \wedge F \in s$



Obrázek 3.11: Syntetické konstrukční řešení příkladu 5

10. $P; s \cap \overline{S_{FH}B} = \{P\}$

Provedením konstrukce (obrázek 3.11) jsme získali vzdálenost bodů F a P, která odpovídá vzdálenosti bodu F od roviny EBG.

4 Průzkum přístupu žáků k řešení geometrických úloh

Průzkum přístupu žáků k řešení geometrických úloh nám poskytuje náhled na různé postupy žáků středních škol při řešení příkladů zaměřených na metrické úlohy v prostoru. Protože analytická geometrie v prostoru není součástí rámcových vzdělávacích programů, tak ani většina středních škol ji nezahrnuje do svých školních vzdělávacích programů. Jako vzorek byli vybráni žáci gymnázií, jež analytickou geometrii v prostoru zařadila do svých školních vzdělávacích programů[1].

Průzkum byl uskutečněn formou anonymního testu s doplňujícími otázkami, jenž nám nastínil dovednosti a vědomosti žáků potřebné ke správnému řešení zadaných příkladů.

4.1 Obsah průzkumu

Průzkum se skládá ze dvou příkladů a sady doplňujících otázek (viz A). Doplňující otázky slouží ke zjištění, zda žák vnímá souvislost mezi analytickou a syntetickou geometrií. S tím souvisí i požadavek chronologického zasazení obou metod do historie.

Nyní se blíže podíváme na jednotlivé příklady. Podle toho, jakou metodu řešení respondenti volili, je možné usuzovat, jaká je jejich schopnost analyzovat obtížnost dané úlohy. S volbou vhodného postupu pak souvisí i následné usnadnění (nebo naopak ztížení) vyřešení příkladu.

Příklad 1: Je dána krychle $ABCDEFGH$, kde $|AB| = 6$ cm, a přímka p, která prochází body Q, R. Bod Q je středem hrany BF a bod R je bodem hrany GH tak, že $|HR| = \frac{1}{3}|GH|$. Určete odchylku přímky p a roviny ABE.

Příklad 1 je zaměřen na využití syntetické geometrie spolu se znalostí odchylky od roviny. Můžeme tedy pozorovat:

- správnost konstrukce zadaných bodů a zobrazení odchylky,
- volbu metody,
- nástroje potřebné pro výpočet odchylky související s volbou metody,
- numerickou správnost řešení.

Kromě těchto parametrů pozorujeme i postup, kterou respondent při řešení úlohy uplatnil.

Příklad 2: Je dána krychle $ABCDEFGH$, kde $|AB| = 4$ cm, a přímky p, q. Přímka p je dána body B, G. Přímka q je dána body E a N, kde bod N je středem hrany CD. Určete odchylku přímek p, q.

[1]Za spolupráci děkujeme gymnáziím v Žatci a v Kadani.

Příklad 2 je vhodný pro využití analytické metody řešení, pomocí níž dojde ke zjednodušení dané problematiky. Žák tedy nemusí znát definici odchylky dvou mimoběžek a nepotřebuje ani dobrou prostorovou představivost. Můžeme zde pozorovat následující parametry:

- volbu vhodné metody,
- správnost zasazení geometrického tělesa do kartézské soustavy souřadnic,
- zjednodušení výpočtu vhodnou volbou počátku soustavy souřadnic,
- volbu nástrojů pro určení velikosti odchylky,
- numerickou správnost řešení.

4.2 Respondenti a průběh průzkumu

Průzkumu se účastnilo 24 studentů z matematických seminářů na gymnáziích v Žatci a v Kadani. Na každé škole je v rámci semináře vyučována vždy jedna třída složená z žáků třetích ročníků čtyřletého a septimy osmiletého gymnázia. Obě třídy tak již během povinné výuky matematiky probraly v kapitole stereometrie metrické úlohy v prostoru a během matematického semináře se na přelomu prvního a druhého pololetí roku 2019 seznámily i s analytickou geometrií v prostoru. Průzkum proběhl koncem května 2019 – látku analytické geometrie by si tedy žáci ještě měli pamatovat.

Aby nedošlo k narušení výuky, byl průzkum uskutečněn v období školní části maturit, které s sebou přinesly zvláštní rozvrh. Výuka byla zpestřována interaktivními prvky, mezi studenty vládla uvolněnější atmosféra a vyučování obou tříd končilo již ve 12.30. Na vyplnění příkladů a zodpovězení doplňujících otázek měli žáci 40 minut. Během této doby docházelo mezi žáky k půjčování rýsovacích potřeb. Žákům byl také zdůrazňován požadavek na zamyšlení se nad výběrem vhodné metody řešení.

Na gymnáziu v Žatci průzkum probíhal ve čtvrtek během čtvrté vyučovací hodiny. Žáci byli odpočatí po týdenním vodáckém kurzu, což se projevilo zejména zvýšením jejich komunikativnosti. Průzkumu se celkově zúčastnilo 13 respondentů, z čehož na hodině bylo přítomno pouze 6 z nich. Většina těchto žáků odevzdala vypracovaný test s doplňujícími otázkami po 20–25 minutách. Žáci, kteří odevzdali svá řešení, dostali samostatnou práci, aby ostatní žáci nebyli rušeni.

Zbylých sedm žáků, kteří se nezúčastnili hodiny, podstoupilo vyplnění testu s doplňujícími otázkami dodatečně v následujícím týdnu během dalších hodin matematického semináře – žákům byl test zadán jejich vyučujícím. Tito žáci však test s doplňujícími otázkami vyplňovali jako samostatnou práci ve zkráceném čase 20 minut během probíhající aktivity zbylé části třídy.

Na gymnáziu v Kadani probíhal průzkum v pátek během druhé vyučovací hodiny. Průzkumu se zúčastnilo 11 žáků. Na hodinu se dostavili v plném počtu a snažili se k řešení využít veškerý poskytnutý čas.

4.3 Vyhodnocení dotazníku

Během vyhodnocování byly všechny příklady spolu s doplňujícími otázkami nejdříve opraveny autorkou průzkumu. Na základě odpovědí žáků a předpokládaných parametrů pozorování u jednotlivých příkladů byla stanovena kritéria hodnocení jednotlivých příkladů. Každému kritériu bylo přiděleno hodnocení splnil/nesplnil.

Příklad první

První příklad byl hodnocen na základě následujících kritérií:

- přečtení zadání s porozuměním
- použití syntetické metody
- správné zobrazení situace
- naznačení myšlenky
- jednoduchost použitých nástrojů
- numerická správnost
- konečný výsledek

Vyhodnocení výše uvedených kritérií jsme zaznamenali do tabulky (tabulka 4.1) dle typu školy a dle žáka. U každé třídy uvádíme počet respondentů, kteří splnili dané kritérium. Procentuální úspěšnost z celkového počtu respondentů je shrnuta v posledním sloupci tabulky 4.1:

kritéria	Žatec		Kadaň		úspěšnost
	3. ročník	septima	3. ročník	septima	(%)
Přečtení zadání s porozuměním	5	8	6	4	95,83
Použití syntetické metody	5	5	7	4	87,50
Správné zobrazení situace	5	8	5	4	91,67
Naznačení myšlenky	5	8	5	4	91,67
Jednoduchost použitých nástrojů	1	3	4	3	45,83
Numerická správnost	3	5	5	4	70,84
Konečný výsledek	3	5	5	4	70,84

Tabulka 4.1: Příklad první – vyhodnocení

Z uvedených výsledků vyplývá, že porozumění zadání žákům nečinilo problém – jen 5 % z 24 respondentů si špatně přečetlo zadání. Správně přečtené zadání však neznamená správné zobrazení situace. Počet žáků, kteří zadání správně vyobrazili je o 7 % menší, než kolik jich zadání přečetlo správně. Správnou metodu řešení zvolilo celkem 21 žáků, což je skoro 88% správnost volby potřebné metody ze všech respondentů. Správného výsledku se dopočítalo 70,84 % žáků, zbývající žáci se při výpočtu dopustili numerických chyb.

Příklad druhý

Druhý příklad byl hodnocen na základě následujících kritérií:

- přečtení zadání s porozuměním
- správné zobrazení situace
- použití analytické metody
- naznačení myšlenky
- řešení bez posunutí zadané situace
- jednoduchost použitých nástrojů
- zjednodušení výpočtu správnou volbou počátku kartézské soustavy souřadnic
- numerická správnost
- konečný výsledek

Vyhodnocení výše uvedených kritérií jsme zaznamenali do tabulky (4.2) dle typu školy a dle žáka. U každé třídy uvádíme počet respondentů, kteří splnili dané kritérium. Procentuální úspěšnost z celkového počtu respondentů je shrnuta v posledním sloupci tabulky 4.2:

kritéria	Žatec		Kadaň		úspěšnost
	3. ročník	septima	3. ročník	septima	(%)
Přečtení zadání s porozuměním	4	7	5	4	83,33
Použití analytické metody	2	6	1	2	45,83
Správné zobrazení situace	4	6	5	4	71,16
Naznačení myšlenky	3	8	4	4	71,16
Jednoduchost použ. nástrojů	2	5	0	2	37,50
Řešení bez posunu	0	4	1	2	29,17
Volba počátku KSS	1	2	0	0	12,50
Numerická správnost	3	7	1	2	54,17
Konečný výsledek	2	7	4	3	66,67

Tabulka 4.2: Příklad druhý – vyhodnocení

Úspěšnost druhého příkladu je oproti prvnímu slabší. Správně přečíst zadání úlohy zvládlo 83,33 % žáků – z toho 95 % zadanou situaci správně zobrazilo v obrázku. Zvolit pro výpočet analytickou metodu, která je v tomto případě jednodušší, zvládlo necelých 46 %. Bez pokusu o posun však tuto úlohu řešilo jen 29,17 % žáků. Ke správnému výsledku dospělo 66,67 % dotázaných.

Hodnocení obou příkladů dohromady

U každé třídy uvádíme počet respondentů, kteří splnili dané kritérium. Procentuální úspěšnost z celkového počtu respondentů je shrnuta v posledním sloupci tabulky 4.3:

Správnou metodu v obou příkladech zvolilo necelých 33 %. Propojit analytickou a syntetickou metodu tedy nezvládla ani polovina respondentů. Potěšující je však procento žáků, kteří zadané úlohy zobrazili správně. Můžeme z toho usoudit, že 66,67 % žáků má dobře rozvinutou prostorovou představivost. V tabulce 4.3

kritéria	Žatec		Kadaň		úspěšnost
	3. ročník	septima	3. ročník	septima	(%)
Prostorové vidění	3	6	3	4	66,67
Správná volba metod	2	3	0	3	33,33
Správné výsledky	1	2	2	2	25,00
Jen analytická metoda	0	3	0	0	12,50
Jen syntetická metoda	1	3	3	2	37,50

Tabulka 4.3: Hodnocení obou příkladů dohromady

vidíme i procenta žáků, jež preferují buď analytickou, nebo syntetickou metodu.

Doplňující otázky

Pro doplňující otázky byla stanovena následující kritéria, na jejichž základě byla hodnocena úspěšnost odpovědí:

- odhalení souvislosti pro výpočet vzdálenosti dvou bodů
- správné přečtení páté doplňující otázky[2]
- určení správné časové posloupnosti vývoje metod
- návaznost metod

Vyhodnocení výše uvedených kritérií jsem zaznamenala do tabulky (tabulka 4.4) dle typu školy a dle žáka. U každé třídy uvádíme počet respondentů, kteří splnili dané kritérium. Procentuální úspěšnost z celkového počtu respondentů je shrnuta v posledním sloupci tabulky:

kritéria	Žatec		Kadaň		úspěšnost
	3. ročník	septima	3. ročník	septima	(%)
odhalení souvislosti	0	3	4	2	37,50
správné čtení 5. otázky	2	4	5	4	62,50
časová posloupnost	5	4	5	4	75,00
návaznost metod	2	4	5	4	62,50

Tabulka 4.4: Hodnocení doplňujících otázek

Určení časové souslednosti a návaznosti obsahů jednotlivých metod žákům nedělalo problémy. Odhalit souvislost mezi vzorcem pro výpočet vzdálenosti dvou bodů v analytické geometrii a syntetické geometrii zvládlo však jen 37,5 % žáků a to i přesto, že si žáci mohli danou úlohu převést do roviny.

[2]Otázka číslo pět nabízí dvě možné odpovědi – buď analytická geometrie navazuje na syntetickou nebo syntetická geometrie navazuje na analytickou. Nelze tedy na tuto otázku odpovědět jen slovem „ANO“. Pokud žák odpověděl jen „ANO“, tak si zřejmě nedočetl celou otázku.

Závěr

Za cíl své diplomové práce jsem si stanovila ukázat souvislosti mezi analytickou a syntetickou geometrií na metrických úlohách v prostoru. Spolu s tímto cílem vyvstalo několik domněnek a otázek, které se týkaly znalostí obou přístupů a také souvislostí mezi nimi. K potvrzení nebo vyvrácení těchto domněnek a k nalezení odpovědí na otázky byl žákům třetích ročníků čtyřletých gymnázií a sedmých ročníků osmiletých gymnázií zadán test s doplňujícími otázkami v podobě dvou příkladů. Pomocí tohoto průzkumu jsem zjistila, že volba syntetické metody je pro žáky přijatelnější. Výzkum ukázal, že přibližně jedna třetina žáků řešila obě úlohy syntetickou metodou. Naproti tomu jen jedna osmina žáků aplikovala na obě úlohy analytickou metodu. U zbývajících žáků byl v některých případech v úloze číslo dvě vidět pokus o posunutí zadaných přímek do společného bodu za účelem určení jejich odchylky. Úloha číslo dvě pro některé žáky znamenala i problém s prostorovou představivostí – jednalo se však pouze o jednu třetinu testovaných žáků.

Z celkového počtu 24 respondentů jich jedna třetina zvolila v obou příkladech správnou metodu řešení. Z průzkumu ovšem vyplývá, že v této jedné třetině převažují žáci osmiletých gymnázií. Kromě toho je zřetelné, že ani výsledek škol není rovnocenný.

Z výsledku vyplývá, že neznalosti souvislostí mezi syntetickou a analytickou geometrií jsou u některých žáků patrné. Touto prací se tedy snažím existující neznalosti souvislostí vyplnit. Ukazuji zde různé přístupy k řešení metrických úloh v prostoru. Jednotlivé geometrické situace přinášejí jak syntetický pohled, tak analytický. Ze syntetického pohledu se snažím odvodit analytický. V práci lze tedy, mimo jiné, nalézt odvození některých vztahů analytické geometrie.

Kromě teoretického nalezení souvislostí si žák může procvičit danou problematiku na sadě příkladů, která je součástí webové aplikace Portál středoškolské matematiky. U každého příklad lze nalézt obě metody řešení. Z uvedených řešení lze porovnat, která metoda je pro danou situaci jednodušší. Příklady však nebrání žákům v kreativitě vymýšlet další postupy, které by byly jednodušší.

Přítomnost syntetických a analytických řešení na jednom místě žákovi přináší možnost objevovat souvislosti obou metod, které se ve školách obvykle vyučují odděleně. Nepodařilo se mi najít učebnici, ve které by obě metody byly propojeny. Kromě tradičních řešení žák při řešení úloh využije například i znalost vektorového součinu a vztahu pro obsah/objem geometrického útvaru.

Jak lze vidět na ukázce příkladu v uživatelské dokumentaci, která je součástí přílohy, postupy řešených příkladů jsou zpracovány pomocí prostorových animací v aplikaci *GeoGebra Classic 5.0.542*, čímž napomáhají v rozvoji prostorové představivosti. Animace umožňují žákům zhlédnout zadané situace i z jiných pohledů, než pouze z obvyklého pravého horního nadhledu. Bohužel se během vypracovávání nepovedlo zajistit funkcionalitu otevírání jednotlivých řešení v novém okně prohlížeče ani zobrazení vícero řešení najednou. Žák si tedy nemůže prohlížet různé postupy řešení zároveň. Příčinou byla omezení na straně prohlížečů a omezení plynoucí z práv na změnu souborů, jež tvoří hlavní layout stránek *Portálu středoškolské matematiky*.

Práci je možné dále rozšiřovat o další postupy jednotlivých příkladů nebo

převést kapitoly o řešení odchylek a vzdáleností do webové podoby. Převedením těchto kapitol do webové podoby by mohlo dojít k propojení s příklady pomocí odkazu na danou problematiku. Žák by tím měl ke konkrétnímu řešení uveden i obecný postup pomocí odkazu na danou problematiku. V podobném duchu by poté mohly být zpracovány polohové úlohy v prostoru nebo geometrie v rovině.

Seznam použité literatury

Boček, M. (1995). *Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie.* Prometheus, Praha. ISBN 978-80-7196-390-5.

Holešová, M. (2013). Analytická a syntetická geometria vo vyučování matematiky. *Informačný vek modifikuje metódy a formy vyučovania matematiky.*

Kolouchová, J. (1986). *Matematika pro SOŠ a SO SOU.* Prometheus, Praha. ISBN 978-80-7196-074-4.

Krynický, M. (2015a). Matematika sŠ.realisticky.cz, kapitola: Vzdálenost roviny a přímky, záložka: Lekce. [online]. URL `http://www.realisticky.cz/hodina.php?id=1551`. Poslední změna 18.4.2015 [cit. 2019-05-30].

Krynický, M. (2015b). Matematika sŠ.realisticky.cz, kapitola: Odchylka přímek, záložka :lekce. [online]. URL `http://www.realisticky.cz/hodina.php?id=1552`. Poslední změna 18.2.2015 [cit. 2019-05-30].

Krynický, M. (2015c). Matematika sŠ.realisticky.cz, kapitola: Vzdálenosti přímek, záložka: Lekce. [online]. URL `http://www.realisticky.cz/hodina.php?id=1550`. Poslední změna 18.4.2015 [cit. 2019-05-30].

Liška, M. (2017). *Matematika pro spolužáky. Analytická geometrie.* ProSpolužáky.cz s.r.o, Praha. ISBN 978-80-88255-14-7.

Odvárko, O. (1994). *Matematika pro gymnázia. Goniometrie.* Prometheus, Praha. ISBN 978-80-7196-359.

Pomykalová, E. (2011). *Matematika pro gymnázia. Stereometrie.* Prometheus, Praha. ISBN 978-80-7196-389-9.

Vojáček, J. (2008a). Matematika pro každého. [online]. URL `https://maths.cz/clanky/73-stereometrie-odchylka-dvou-rovnin`. Poslední změna 24.5.2008 [cit. 2019-05-30].

Vojáček, J. (2008b). Matematika pro každého. [online]. URL `https://maths.cz/clanky/74-stereometrie-odchylka-primky-a-roviny`. Poslední změna 24.5.2008 [cit. 2019-05-16].

Vojáček, J. (2008c). Matematika pro každého. [online]. URL `https://maths.cz/clanky/95-stereometrie-vzdalenost-bodu-od-primky`. Poslední změna 24.5.2008 [cit. 2019-05-30].

Seznam obrázků

1.1 Vzdálenost dvou bodů v kartézské soustavě souřadnic 6
1.2 Průmět bodů A, B do roviny xy 7
1.3 Odchylka směrových vektorů přímek p, q 8
1.4 Určení odchylky přímek p, q, jejichž směrové vektory svírají tupý úhel 9

2.1 Odchylka roviny α od roviny β 11
2.2 Odchylka přímky p od jejího kolmého průmětu p' do roviny ϱ . . . 12
2.3 Zobrazení situace příkladu 5 14
2.4 Analytické řešení příkladu 5 15
2.5 Syntetické početní řešení příkladu 5 16
2.6 Syntetické konstrukční řešení příkladu 5 16

3.1 Vzdálenost bodu A od roviny ϱ užitím kolmice k 19
3.2 Vzdálenost bodu A od roviny ϱ pomocí rovnoběžnostěnu 20
3.3 Rovina ϱ vedená bodem A kolmo k přímce p 22
3.4 Vzdálenost bodu A od přímky p pomocí skalárního součinu 23
3.5 Vzdálenost bodu A od přímky p pomocí doplnění na rovnoběžník 25
3.6 Kolmost mimoběžek p, q k jejich příčce MN 27
3.7 Vzdálenost mimoběžek p, q pomocí rovnoběžnostěnu 28
3.8 Zobrazení situace příkladu 5 30
3.9 Analytické řešení příkladu 5 31
3.10 Syntetické početní řešení příkladu 5 32
3.11 Syntetické konstrukční řešení příkladu 5 33

B.1 Titulní stránka 47
B.2 Struktura stránky s kontextem příkladů 48
B.3 Ukázka zadání příkladu 49
B.4 Zobrazení situace 49
B.5 Analytické řešení dle zadání příkladu 50
B.6 Syntetické početní řešení 51
B.7 Syntetické konstrukční řešení 51

Seznam tabulek

4.1 Příklad 1 – vyhodnocení 36
4.2 Příklad 2 – vyhodnocení 37
4.3 Hodnocení obou příkladů dohromady 38
4.4 Hodnocení doplňujících otázek 38

Seznam použitého značení

A	bod A
p	přímka p
AB	přímka AB
ABC	rovina ABC
$\mapsto ABC$	polorovina ABC
$\triangle ABC$	trojúhelník ABC
α	rovina α
$\overline{AB}$	úsečka AB
S_{XY}	střed úsečky XY
$\|AB\|$	velikost úsečky AB
$\|Ap\|$	vzdálenost bodu A od přímky p
$\|pq\|$	vzdálenost přímek p, q
$\|p\alpha\|$	vzdálenost přímky p od roviny α
$p \perp q$	přímka p je kolmá k přímce q
$p \cap q = \{P\}$	průsečík P přímek p, q
$k(S,\|AB\|)$	kružnice k se středem v bodě S s poloměrem $\|AB\|$
$\measuredangle ABC$	úhel ABC
$\|\angle ABC\|$	velikost úhlu ABC
$\|\measuredangle\alpha\beta\|$	odchylka rovin α, β
$\|\measuredangle pq\|$	odchylka přímek p, q
$\|\measuredangle p\alpha\|$	odchylka přímky p od roviny α
$\perp$	je kolmo
$\in$	je prvkem
$\neq$	není rovno
$\doteq$	je přibližně rovno
$\leftrightarrow$	přímka
$\overrightarrow{u}$	vektor u
$\overrightarrow{u} = (x_u; y_u; z_u)$	vektor u o souřadnicích x_u, y_u, z_u
$A = [x_A; y_A; z_A]$	bod A o souřadnicích x_A, y_A, z_A
O_xyz	počátek kartézské soustavy souřadnic
$\overrightarrow{AB}$	vektor AB
$\overrightarrow{u_p}$	směrový vektor přímky p
$\overrightarrow{n_\varrho}$	normálový vektor roviny ϱ
$\|\overrightarrow{u}\|$	velikost vektoru u
$\|\overrightarrow{AB}\|$	velikost vektoru AB
$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$	vektorový součin vektorů u, v
$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|$	velikost vektorového součinu $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$	skalární součin vektorů u, v
$d(F,p)$	vzdálenost bodu F od přímky p
$d(F,\varrho)$	vzdálenost bodu F od roviny ϱ

A Dotazník k průzkumu žáků

Průzkum přístupu žáků k řešení geometrických úloh

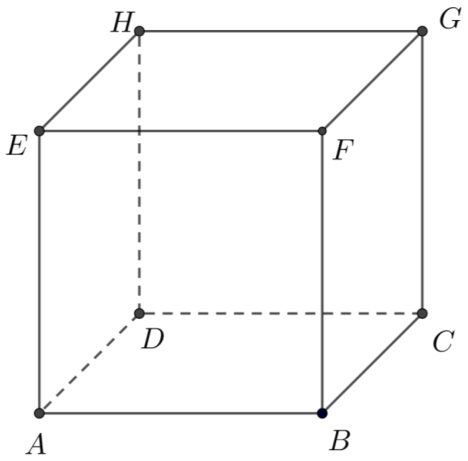
Vážené respondentky, vážení respondenti,
obracím se na Vás s prosbou o vyplnění tohoto dotazníku, který poslouží jako podklad pro diplomovou práci na téma „Analytický a syntetický přístup k řešení metrických úloh v prostoru“. Dovoluji si Vás tímto požádat o co nejpřesnější a pravdivé vyplnění. Vyplnění dotazníku je anonymní a dobrovolné. Vaše odpovědi poslouží k sestavení závěrů hypotéz, které byly stanoveny před samotným sestavením dotazníku.

Děkuji za případnou spolupráci, Iva Kreslová, studentka Matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze.

Následující příklady jsou zaměřeny na vhodnou volbu metody řešení. U každé úlohy napište, zdali jste použili syntetickou nebo analytickou metodu a svou volbu zdůvodněte. Snažte se při řešení úloh odpovídat co nejpřesněji. Budu však ráda i za myšlenky, pokud byste přesné odpovědi neznali.

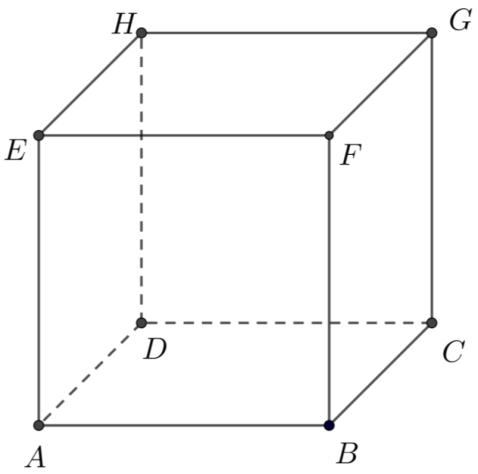
Zadání[1]:

1. Je dána krychle $ABCDEFGH$, kde $|AB| = 6$ cm, a přímka p, která prochází body Q, R. Bod Q je středem hrany BF a bod R je bodem hrany GH tak, že $|HR| = \frac{1}{3}|GH|$. Určete odchylku přímky p a roviny ABE.



[1] Zdroj: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Stereometrie*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 1995, s. 223. ISBN 80-7196-389-9.

2. Je dána krychle $ABCDEFGH$, kde $|AB| = 4\ \text{cm}$, a přímky p, q. Přímka p je dána body B, G. Přímka q je dána body E a N, kde bod N je středem hrany CD. Určete odchylku přímek p, q.



Doplňující otázky:

1) Do jaké třídy chodíte: …….
2) Jaký typ školského zařízení navštěvujete?
    a. střední průmyslová škola
    b. gymnázium
    c. obchodní akademie
    d. střední stavební škola
3) Jak souvisí vzorec pro výpočet vzdálenosti 2 bodů v analytické geometrii se syntetickou geometrií?
4) Byla objevena dříve analytická, nebo syntetická geometrie?
5) Navazuje analytická geometrie na syntetickou geometrii, nebo je tomu naopak?

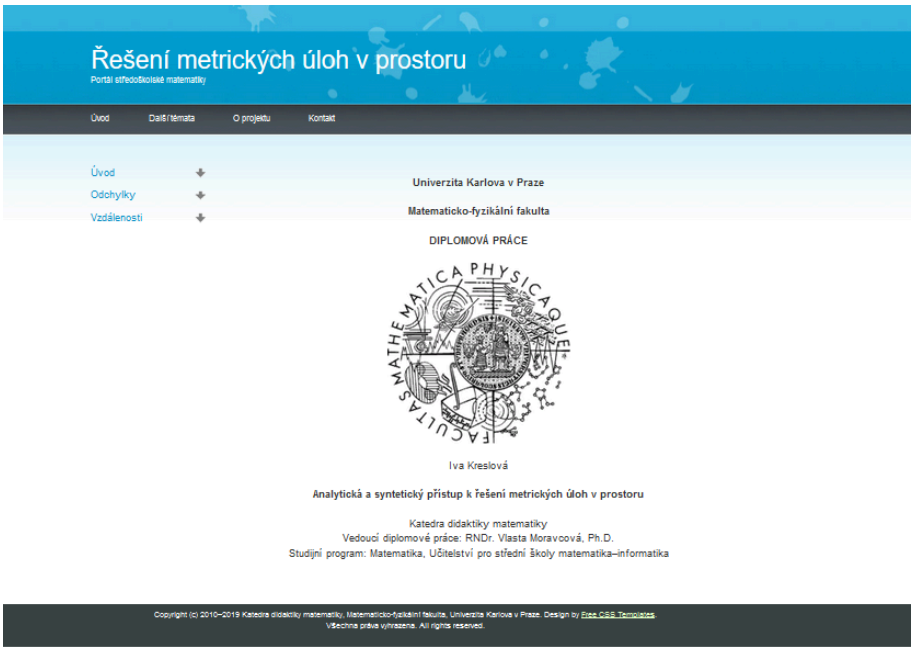
B Uživatelská dokumentace

B.1 Specifikace zadání

Zadáním je sestavit sadu příkladů věnující se problematice metrických úloh v prostoru. Příklady jsou rozdělené dle zaměření na odchylky a vzdálenosti. Každá kapitola je dále rozdělena na podkapitoly dle objektů, k nimž se hledaná vlastnost vztahuje. Uživatel si tedy může vybrat přímo, co ho zajímá.

Každý příklad uživateli nabízí náhled dané situace, analytické řešení, syntetické početní řešení a syntetické konstrukční řešení. Uživateli je tedy nabídnuto více přístupů k řešení každé úlohy – mohou však existovat ještě názornější a jednodušší řešení, než je na této stránce uvedeno.

B.2 Součást *Portálu středoškolské matematiky*



Obrázek B.1: Titulní stránka

Webové stránky s metrickými úlohami v prostoru jsou součástí *Portálu středoškolské matematiky* `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/`. Při otevření kapitoly s metrickými úlohami v prostoru se nám zobrazí titulní stránka informující uživatele, že tento materiál vznikl jako součást diplomové práce. Tato stránka se dále skládá z:

- hlavičky obsahující název kapitoly
- hlavního menu, které je součástí *Portálu středoškolské matematiky* a uživateli umožňuje volbu dalších témat
- těla, kam se zobrazuje obsah daného tématu

- patičky

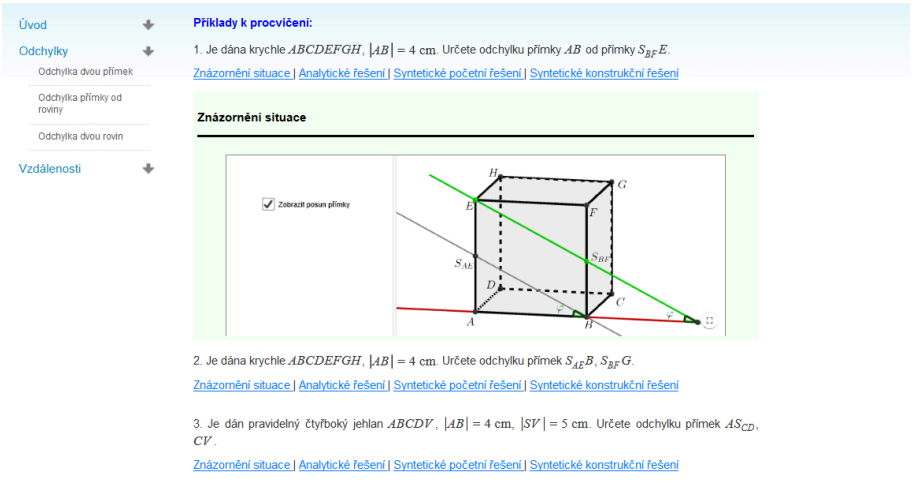
Nás zajímá část stránek, jež se zobrazuje v těle webových stránek středoškolského portálu – na obrázku B.1 je bíle podbarvena.

B.3 Struktura stránky

Stránka se skládá z postranního menu a z prostoru pro zobrazení zvoleného kontextu. Postranní menu obsahuje následující položky:

- Úvod
- Odchylky
  - Odchylka dvou přímek
  - Odchylka přímky od roviny
  - Odchylka dvou rovin
- Vzdálenosti
  - Vzdálenost dvou bodů
  - Vzdálenost bodu od roviny
  - Vzdálenost přímky od roviny
  - Vzdálenost dvou rovin
  - Vzdálenost bodu od přímky
  - Vzdálenost dvou přímek

Prostor pro zobrazování zvoleného kontextu se kromě kontextu úvodu rozkládá na jednotlivé příklady. Každý příklad je složen ze zadání a ze tří přístupů k řešení. Jednotlivé přístupy k řešení jsou podbarveny zeleně, aby docházelo k jejich vizuálnímu odlišení.



Obrázek B.2: Struktura stránky s kontextem příkladů

B.4 Ovládání stránek

B.4.1 Postranní menu

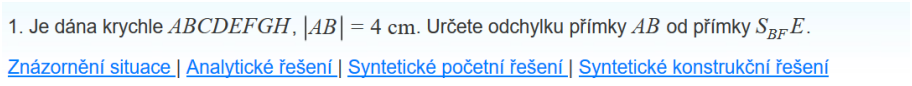
Postranní menu se rozbalí při najetí ukazatelem myši na jednu z hlavních položek menu (úvod, odchylky, vzdálenosti) a následném stisknutí levého tlačítka myši. Opakováním úkonu se menu opět sbalí. Klikneme-li levým tlačítkem myši na libovolnou položku postranního menu, dojde ke změně obsahu v části stránky pro zobrazování kontextu.

B.4.2 Zobrazení kontextu

Kontext stránek se mění kliknutím na libovolnou položku postranního menu. Kontext stránek lze přiblížit zvýšením rozlišení prohlížeče – lze využít klávesovou zkratku *CTRL+kolečko*. Pokud se obsah stránky nevejde na obrazovku monitoru/displeje, lze jej posunout pomocí kolečka myši.

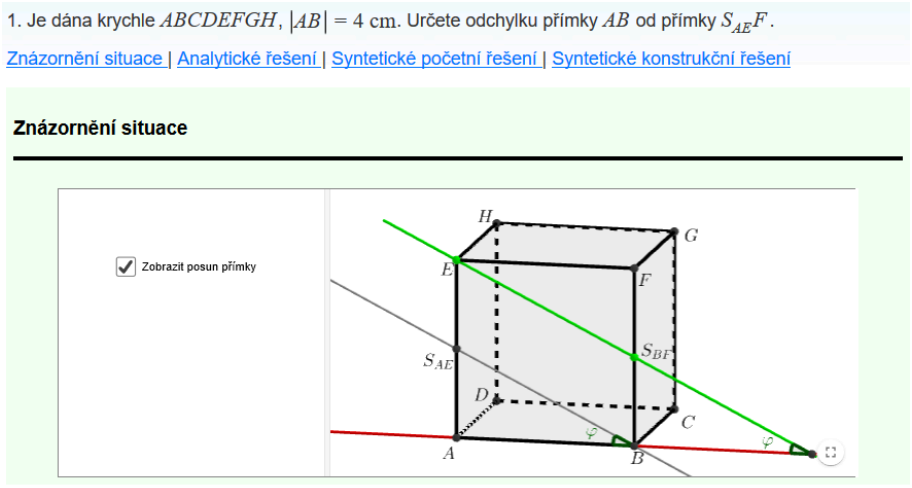
B.4.3 Ovládání příkladu

Každý příklad se skládá ze zadání, tří řešení a náhledu. Zadání je statické – uživatel příklad vždy vidí. Ostatní části si lze dynamicky zobrazit nebo skrýt dle potřeby. V jednom panelu prohlížeče lze zobrazit vždy právě jednu z možností. Doprovodné části se zobrazí při kliknutí na jejich název. Pojmenování jednotlivých částí se nacházejí hned pod zadáním příkladu – jsou zbarveny do modra. Situaci lze vidět názorně na obrázku B.3.



Obrázek B.3: Ukázka zadání příkladu

Zobrazení situace

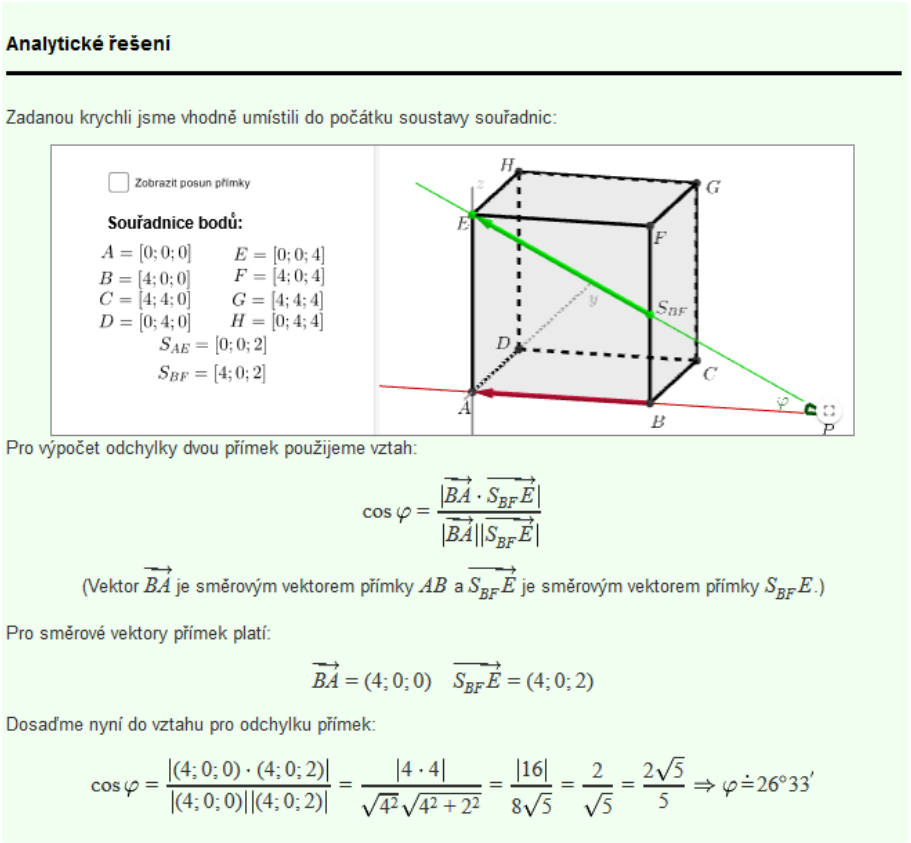


Obrázek B.4: Zobrazení situace

Znázornění situace obsahuje vyobrazení zadané situace pomocí *Grafického náhledu 3D* v aplikaci *GeoGebra Classic 5.0.542*. Toto zobrazení napomáhá uživateli nahlédnout do problematiky. Uživatel může se situací pohybovat, čímž ji může vidět z různých stran. Pohybu uživatel docílí najetím ukazatele myši na okénko s vyobrazeným tělesem a jemnými pohyby myší se stisknutým levým tlačítkem.

Kromě možnosti pootočení situace si uživatel může zobrazit pomocné objekty, které mu napoví, jak úlohu řešit. Tyto objekty se zobrazí při zaškrtnutí checkboxu v levé části okénka zobrazujícího danou situaci (viz obrázek B.4).

Analytické řešení

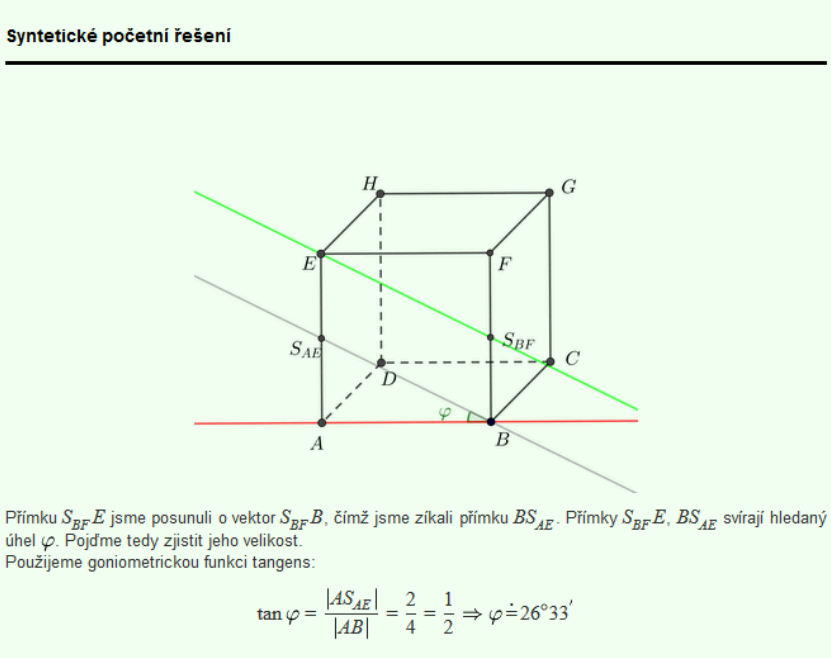


Obrázek B.5: Analytické řešení dle zadání příkladu

Analytické řešení je doprovázeno zobrazením tělesa pomocí *Grafického náhledu 3D* v aplikaci *GeoGebra Classic 5.0.542*. Těleso je vyobrazeno již se zasazením do kartézské soustavy souřadnic. Uživatel má opět možnost si s daným tělesem pootočit, čímž se učí vnímat tělesa z jiných úhlů pohledu. Kromě zobrazení tělesa je zde uveden postup výpočtu pomocí nástrojů analytické geometrie.

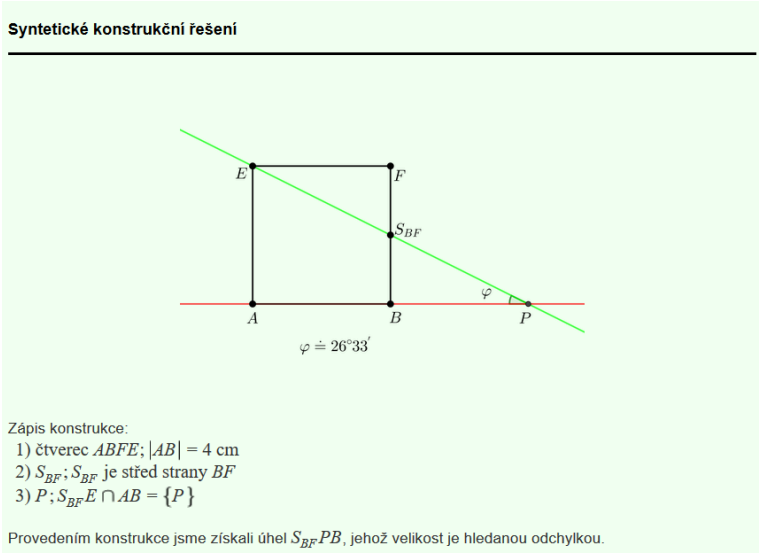
Syntetické početní řešení

Syntetické početní řešení přináší jen statický obrázek, ve kterém je uveden nástin řešení spolu se zadanou situací. Pod obrázkem se zadanou situací se nachází postup výpočtu daného příkladu. Uživatel zde může najít inspiraci, jak danou problematiku řešit.



Obrázek B.6: Syntetické početní řešení

Syntetické konstrukční řešení



Obrázek B.7: Syntetické konstrukční řešení

Poslední ukázkou je syntetické konstrukční řešení, které poskytuje náhled konstrukce daného problému spolu s jeho zápisem. Zápis konstrukce je sepsán pomocí zkráceného symbolického zápisu. Použité symboly nalezneme v *Seznamu použitého značení* na straně 44.

B.5 Podpora prohlížečů

Webová stránka s příklady byla spuštěna v prohlížečích *Safari 12.0.3* na mobilním zařízení, *Chrome 74.0.3729.169*, *Firefox 67.0*, *Microsoft EdgeHTML*

17.17134 a *Internet Explorer 11*. Funkcionalita stránek je zachována ve všech výše vyjmenovaných prohlížečích kromě prohlížeče *Internet Explorer 11*, kde je omezena funkcionalita vložených *iframe*. Nejnovější verze webového prohlížeče *Opera* mají stejné jádro jako prohlížeč *Chrome 74.0.3729.169* – funkcionalita stránek by tedy měla být shodná s prohlížečem *Chrome 74.0.3729.169*. V některých prohlížečích dochází jen k malému posunu písma zobrazeného v LaTeXu – přehlednosti ani smysluplnosti textu to však nebrání.

C Programátorská dokumentace

C.1 Specifikace zadání

Cílem bylo vytvořit příspěvek do předložené šablony webových stránek *Portál středoškolské matematiky*. Tento příspěvek má formu jedné stránky, která je strukturována do více částí. Tato stránka/příspěvek obsahuje sadu úloh k procvičení příkladů zaměřujících se na řešení metrických úloh v prostoru. Každý příklad obsahuje náhledovou část, analytické řešení, syntetické početní řešení a konstrukční řešení.

C.2 Volba programovacích jazyků

Programovací jazyky jsou stanoveny zadáním práce. Vzhledem ke skutečnosti, že se jedná o příspěvek do stránek *Portálu středoškolské matematiky*, jsou již všechny programovací jazyky stanoveny. Základním jazykem je tedy značkovací jazyk $HTML5$. Vzhled příspěvku je zajišťován pomocí $CSS3$ a dynamičnost stránek podporují skriptovací jazyky PHP, $JavaScript$.

C.3 Potřebné externí knihovny

Jedná se o stránky s matematickou tematikou, proto bylo třeba vybrat knihovnu, která nám poskytne vhodné zobrazení matematických výrazů. Pro tyto účely byla zvolena javascriptová knihovna *MathJax*, která umí zobrazit výrazy a rovnice pomocí LaTeXu.

C.4 Prostředí tvorby

Šablona webových stránek *Portálu středoškolské matematiky* je napsána v programovacím jazyku PHP. Pro implementování našeho příspěvku potřebujeme tedy server, jenž podporuje PHP, a nějaký editor. Za server byl zvolen *Apache server* – pro jeho instalaci byla využita aplikace XAMP, jež je schopna nainstalovat jak *Apache server*, tak PHP knihovnu. Samotný zdrojový kód stránek je upravován pomocí editoru *PSPad*.

C.5 Program webových stránek

C.5.1 Struktura kódu

Celý kód je rozdělen do několika logických celků v podobě jednotlivých souborů, jejichž obsah se vkládá do hlavní stránky v podobě souboru $fce.inc$. V tomto souboru najdeme rozdělení stránky na hlavičku, horní menu, boční menu, patičku a obsah těla – jednotlivé části obsahují logiku pro nahrání správného obsahu dle parametru v URL adrese.

Další důležitou částí jsou soubory s kaskádovými styly – (mají příponu *.css*) – a soubor obsahující javascriptové funkce (*myPHP.inc*) – samotný *JavaScript* je do stránky vložen pomocí php příkazu *echo*.

Kromě těchto částí je samotný obsah stránky dělen dle jeho zaměření – titulní stránka, úvod, vzdálenosti a odchylky. Samotné vzdálenosti a odchylky jsou dále děleny na jednotlivé příklady. Všechny příklady mají shodnou šablonu, která zabezpečuje shodný vzhled a funkcionalitu.

C.5.2 Klíčové funkcionality

```
<script>
var situation3="";
var analytic3="";
</script>
<div class="example_task">
  <p><!--ZADANI--></p>
</div>
<div class="example_solutions">
  <div class="example_solutions_options">
    <a class="options" href="#situation3" onclick="SetSRC('sol','
    situation3')"></a>
    <span>|</span>
    <a class="options" href="#analytic3" onclick="SetSRC('sol','
    analytic3')"></a>
    <span>|</span>
    <a class="options" href="#syntetic3" onclick="collapse('sol','
    syntetic3')"></a>
    <span> |</span>
    <a class="options" href="#contruction3" onclick="collapse('sol
    ','contruction3')"></a>
  </div>
  <div class="example_solutions_all">
    <div id="situation3" class="sol" style="display:none;">
      <div class="title_solution">
        <p><!--NAVRH Nadpis--></p>
      </div>
      <iframe id="iframe_situation3" scrolling="no" title="..." src=
    "" width="90%" height="211px" style="border:0px;"> </iframe>
    </div>
    <div id="analytic3" class="sol" style="display:none;">
      <div class="title_solution">
        <p><!--ANALYTIKA Nadpis--></p>      <!--ANALYTIKA-->
      </div>
      <!--POPIS RESENI ANALYTIKA-->
    </div>
    <div id="syntetic3" class="sol" style="display:none;"><!--
    SYNTETIKA-->
      <div class="title_solution">
        <p><!--SYNTETIKA Nadpis--></p>
      </div>
      <img class="solutions\_construction" title=".." src=".."/>
      <div class="solution_text">
        <!--POPIS RESENI SYNTETIKA-->
      </div>
    </div>
```

```
    <div id="contruction3" class="sol" style="display:none;"><!--
    KONSTRUKCE-->
      <div class="title_solution">
        <p><!--KONSTRUKCE Nadpis--></p>
      </div>
      <img class="solutions_construction" title=".." src=".."/>
      <div class="solution_text">
        <!--KONSTRUKCE Nadpis--></br>
        <div style="margin-left:1%">
          <!--Postup KONSTRUKCE-->
        </div>
        <!--ZAVER-->
      </div>
    </div>
  </div>
</div>
```

Listing C.1: Šablona pro jednotlivé příklady

```
function collapse(cl,from){
  sub = document.getElementsByClassName(cl);
  for(i = 0; i < sub.length; i++){
    if(sub[i].id != from && sub[i].style.display != 'none'){
      subcats(sub[i].id);
    }
  }
  subcats(from);
};
```

Listing C.2: Funkce pro skrytí určité části stránky

```
function SetSRC(sol, id){
  var iframeId = 'iframe_'+id;
  var sub = document.getElementById(iframeId );
  if(sub.src!='')
    sub.src=eval(id);
  else sub='';
  collapse(sol,id);
}
```

Listing C.3: Funkce pro zobrazení iframe

```
.example_name {
color: blue;
font-weight: bold;
margin-bottom: 2%
}

.example {
counter-reset: section;
}

.example .example_task p:before {
counter-increment: section;
content: counter(section) ". ";
}

.example_solutions_options {
padding-bottom:2%;
```

```
}

a.options {
text-decoration: underline;
color: #007bff;
}

.example_solutions_all {
text-align: center;
display: grid;
}

img.solutions_construction {
width: 350px;
height: auto;
text-align: left;
padding-bottom:10px;
}

img.solutions_syntetic {
width: 350px;
height: auto;
text-align: left;
padding-bottom:10px;
}

iframe {
text-align: center;
}

.solution_text {
text-align: justify;
}
.title_solution{
color: black;
font-weight: bold;
font-size: 14px;
border-bottom: 3px solid black;
margin-bottom:20px;
}
.sol{
background-color:#F0FFF0;
padding:5px;

}
```

Listing C.4: Kaskádové styly příkladů

C.5.3 Komplikace a jejich řešení

Prvotní návrh stránek obsahoval vyplněné *src* cesty v tazích $iframe$. Toto řešení však přineslo nemalé latence při načítání stránek. Vznik latence byl způsoben stanovením maximálního počtu kontextů využívajících *WebGL API* pro vykreslování 3D objektů. Tento počet je stanoven prohlížečem. Při překročení tohoto maximálního počtu docházelo k násilnému ukončení předchozích již běžících kontextů, což způsobovalo nevykreslení náhledů.

Problém byl vyřešen javacriptovou funkcí, která URL adresu $iframu$ vyplní

až při kliknutí na zobrazení dané části kódu. Prohlížeč se tedy nesnaží nahrát obsah všech $iframu$ najednou.

C.6 Znázornění příkladu

GeoGebra

Jednotlivé ukázky situací v příkladech byly vytvořeny v programu *GeoGebra Classic 5.0.542*. Aplikace je dostupná v prohlížečích nebo si ji lze zdarma stáhnout.

Iframe

$Iframe$ je tag z $HTML$, který umožňuje zobrazit část jiné stránky. Díky této funkcionalitě nemusíme do webových stránek vkládat applety. Soubory aplikace *GeoGebra Classic 5.0.542* lze uložit do cloudu na stránkách `www.geogebra.org`. Takto uložená řešení lze sdílet na svých stránkách právě pomocí tagu $iframe$.