Universita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Bakalářská práce

Úhel v geometrii

Angle in geometry

Autor: Iveta Michálková

Vedoucí práce: Mgr. Marie Holíková, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2019

Odevzdáním této bakalářské práce na téma „*Úhel v geometrii*“ potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne: 16. 3. 2019 Iveta Michálková

Ráda bych na tomto místě poděkovala Mgr. Marii Holíkové, Ph.D. za odborné vedení bakalářské práce, poskytování podnětných rad a cenných připomínek a Mgr. Michalu Zambojovi za zapůjčení odborné literatury.

Abstrakt

Tématem této práce je úhel v dějinách lidstva. Úvodní část práce je věnována prvním dochovaným zmínkám o úhlech v historii. Ve druhé a třetí části je pozornost věnována vývoji nástrojů a přístrojů umožňujících měřit úhly v praxi. Čtvrtá část se zaměřuje na problematiku zavedení úhlů v učebnicích pro základní a střední školy v České republice. Sleduje, zda jsou v jednotlivých učebnicích úhly zavedeny stejným způsobem, nebo vykazuje-li některá učebnice v tomto směru výraznější odchylku. V dalších částech se práce věnuje různým druhům úhlů a dvojicím úhlů a operacím s nimi. Pozornost je zde věnována jak početním, tak grafickým operacím s úhly. Podstatnou část práce tvoří goniometrické funkce. Práce poskytuje různé způsoby zavedení a definice goniometrických funkcí. Na příkladech předvádí využití a význam goniometrických funkcí a jejich vlastností při řešení praktických úloh. Předposlední kapitola je věnována komplexním číslům. V této části se práce zaměřuje především na komplexní čísla v goniometrickém tvaru a výpočtům s nimi. Pro zajímavost a zpestření je v práci zařazena také část, která je věnována knize s názvem Plochozemě anglického autora Edwina Abbotta. Kniha popularizuje geometrii a poskytuje netradiční pohled nejen na samotný úhel, ale i ostatní rovinné útvary. V závěrečné části práce je zařazena sbírka úloh. Celou práci uzavírají řešení a výsledky ke zmíněné sbírce.

Klíčová slova

Úhel, velikost úhlu, druhy úhlů, úhel v učebnicích, měření úhlů, přístroje na měření úhlů, goniometrické funkce, komplexní čísla

Abstract

The theme of this work is an angle in the history of mankind. The introductory part of the work is devoted to the first surviving mention of angles in the history. In the second and the third part is the attention given to the development of tools and instruments that allow to measure angles in practice. The fourth section focuses on the issue of the introduction of the angles in the textbooks for primary and secondary schools in the Czech Republic. It monitors that in each of textbooks the angles are introduced in the same way, or if there are some textbooks show a more significant deviation in this direction. In other parts of the work devoted to the various kinds of angles and couples of angles and operations with them. Attention is paid to how the counting here, so the graphics operations with the angles. A substantial part of the work consists of trigonometric functions. The work provides multiple ways of introduction and definitions of the trigonometric functions. The examples demonstrate the application and importance of trigonometric functions and their properties in the solution of practical tasks. The penultimate chapter is devoted to the complex numbers. In this section, the work focuses primarily on complex numbers in goniometrickém shape and calculations with them. A section is devoted to a book called Flatland by the english author Edwin Abbott for curiosity and diversification in this work is also included. The book popularise the geometry and provides non-traditional view of both the angle itself, but also other flat structures. The collection of tasks is integrated in the final part of the work. The whole work is closed by the solutions and the results of the collection.

Keywords

An angle, size of angles, types of angles, an angle in students books, devices for measuring angles, goniometric functions, complex numbers

Obsah

Úvod str. 9

1. Úhel v dějinách str. 10

1. 1. Starší doba kamenná (paleolit) str. 10

1. 2. Mladší doba kamenná (neolit) str. 10

1. 3. Babylónie str. 11

1. 4. Řecko str. 11

2. Historie měření úhlu str. 12

2. 1. Jednotky velikosti úhlů – stupňová míra str. 12

2. 1. 1. Groma str. 14

2. 1. 2. Dioptr str. 15

2. 1. 3. Trikvetr str. 16

2. 1. 4. Astroláb str. 16

2. 1. 5. Teodolit str. 17

2. 2. Jednotky velikosti úhlů – oblouková míra str. 18

2. 3. Vztah mezi jednotkami stupňové a obloukové míry str. 19

2. 4. Setinná míra str. 20

3. Měření úhlu v technické praxi str. 20

3. 1. Přímé měření úhlů str. 21

3. 2. Nepřímé měření úhlů str. 22

4. Zavedení úhlů ve škole str. 22

4. 1. Základní škola str. 22

4. 1. 1. Matematika pro 6. ročník základní školy, Fortuna str. 22

4. 1. 2. Matematika Geometrie, učebnice pro Základní školy a víceletá gymnázia, Fraus str. 24

4. 1. 3. Hejného metoda str. 25

4. 1. 4. Hravá matematika pracovní sešit pro 6. ročník ZŠ a víceletá gymnázia str. 25

4. 1. 5. Matematika 6, Prodos str. 27

4. 1. 6. Matematika pro 6. ročník základní školy [3], Prometheus str. 27

4. 1. 7. Matematika 6 I. Díl, Prometheus str. 29

4. 1. 8. Matematika učebnice vytvořená v souladu s RVP ZV Rovinné útvary, Nová škola s. r.o. 2015 str. 30

4. 1. 9. Základní geometrické útvary, Prometheus str. 31

4. 1. 10. Průvodce matematikou 2, Didaktis str. 31

4. 2. Střední škola str. 32

4. 2. 1. Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN str. 32

4. 2. 2. Matematika pro gymnázia Planimetrie, Prometheus str. 33

5. Vlastnosti úhlů str. 35

5. 1. Druhy úhlů podle velikosti str. 35

5. 2. Dvojice úhlů str. 37

5. 3. Úhly příslušné k obvodu kružnice str. 42

6. Početní operace s úhly str. 46

6. 1. Měření úhlů str. 46

6. 2. Sčítání a odčítání úhlů str. 46

6. 2. 1. Grafické sčítání a odčítání úhlů str. 47

6. 2. 2. Početní sčítání a odčítání úhlů str. 48

6. 3. Násobení úhlů přirozeným číslem str. 49

6. 3. 1. Grafické násobení úhlů přirozeným číslem str. 49

6. 3. 2. Početní násobení úhlů přirozeným číslem str. 49

6. 4. Dělení úhlů str. 50

6. 4. 1. Osa úhlu str. 50

6. 4. 2. Konstrukce úhlu dané velikosti bez použití úhloměru str. 51

6. 4. 3. Trisekce úhlu str. 52

7. Orientovaný úhel str. 52

8. Goniometrie str. 54

8. 1. Goniometrické funkce definované pomocí pravoúhlého trojúhelníku str. 55

8. 2. Goniometrické funkce definované pomocí jednotkové kružnice str. 57

8. 3. Vlastnosti goniometrických funkcí str. 58

8. 4. Sinová věta str. 63

8. 5. Kosinová věta str. 67

9. Komplexní čísla str. 68

10. Plochozemě str. 73

11. Úlohy na procvičení str. 75

11. 1. Zápis úhlu str. 75

11. 2. Operace s úhly str. 77

11. 3. Grafické operace s úhly str. 78

11. 4. Dvojice úhlů str. 79

11. 5. Úhly příslušné k obvodu kružnice str. 83

11. 6. Goniometrie str. 83

11. 7. Komplexní čísla str. 86

12. Řešení str. 87

Závěr str. 100

Seznam použitých informačních zdrojů str. 101

Úvod

Pro zpracování bakalářské práce jsem si vybrala téma *„Úhel v geometrii"*. Toto téma jsem si zvolila proto, že mne zajímalo, kdy naši předkové úhel „objevili" a kdy a jakým způsobem s ním začali pracovat. Co je k tomu vedlo? Jak se vyvíjely nástroje a přístroje umožňující úhly měřit? Dále pak, jestli je ve všech současných učebnicích pro základní školu úhel zaveden stejným způsobem, nebo, jsou-li v tomto ohledu nějaké výrazné rozdíly. Jak je daná problematika zpracována v učebnicích pro střední školy?

Úvodní část práce je věnována pojmu úhel v dějinách lidstva. Pozorování začíná v době kamenné.

Druhá, obsáhlejší část sleduje vývoj měřících nástrojů a přístrojů – od nejjednodušších až po velmi složité přístroje, které máme možnost využívat v současné době. Podává také vysvětlení, proč měříme úhly v úhlových stupních (úhlových minutách, úhlových vteřinách) a radiánech.

Třetí část práce se zabývá problematikou měření úhlu v technické praxi.

Čtvrtá, nejobsáhlejší část, podává přehled o nejčastěji užívaných učebnicích matematiky pro základní školu a o tom, jak je v nich úhel zaveden. Pro srovnání pak obsahuje ukázku ze dvou učebnic pro střední školu.

V páté části je pozornost věnována rozlišení úhlů podle velikosti a dvojicím úhlů, se kterými se ve zmíněných učebnicích setkáváme.

Další část předvádí základní operace, které se žáci základní školy učí s úhly provádět.

Značná pozornost je také věnována goniometrickým funkcím a možnostem jejich využití při výpočtech v trojúhelnících – v pravoúhlých i obecných.

Na část věnované goniometrii navazují komplexní čísla. V této kapitole je pozornost zaměřena především na komplexní čísla v goniometrickém tvaru a výpočtům s těmito čísly.

Ke konci práce je zařazena část, která se věnuje knize nazvané Plochozemě (Flatland). Sám autor Edwin A. Abbott knihu označil za *„Román mnoha rozměrů"*, ačkoliv popisuje pouze život v rovině.

Závěrečnou část práce tvoří malá sbírka úloh k procvičení získaných znalostí a dovedností a jejich výsledky. Úlohy jsou záměrně zvoleny tak, aby odpovídaly testům přijímacích zkoušek na střední školy a dále pak maturitním didaktickým testům.

1. Úhel v dějinách

1. 1. Starší doba kamenná (paleolit)

Chceme-li zjistit, kde se v naší dlouhé historii poprvé setkáváme s úhlem, musíme se ponořit až do doby kamenné. Lidé tehdy žili v jeskyních a jejich život se po několik století nebo spíše tisíciletí příliš nelišil od života zvířat. Hlavní náplní jejich života bylo získávání potravy. Za tím účelem si postupně začali vyrábět nejprve zbraně vhodné k lovu i rybolovu, později nástroje pro snadnější zpracování svého úlovku. Pozvolna docházelo k rozvoji dorozumívacích schopností. Z kreseb (z doby odhadované na 15 000 let př. n. l.), které byly nalezeny především ve francouzských a španělských jeskyních, je patrné, že v té době již člověk měl pozoruhodnou schopnost vnímat tvar.

1. 2. Mladší doba kamenná (neolit)

Pro sledování pojmu úhel (i geometrie jako celku) se ukazuje velmi důležitým období neolitu (mladší doba kamenná – 8 000 – 5 000 l. př. n. l.). Člověk opouští jeskyně. Přechází od pouhého lovení a sbírání potravy k její skutečné výrobě. Začíná se velmi intenzivně věnovat zemědělství. Ke stavbě svých domů a vyměření polí je nucen nalézt způsob, jak vyměřit úsečky a vytyčit pravé úhly. Vylepšuje a vyzdobuje si svá obydlí – splétá rohože, pálí a zdobí hrnčířské výrobky (ornamenty jsou bohaté na shodnosti, symetrie a podobnosti).

Z této doby pocházejí první opravdu zřetelné stopy poznání úhlu. Bezesporu tehdy lidé znali trojúhelníky (jsou velmi častým ozdobným tvarem na různých malbách a nalezených předmětech) – tím pádem jistě i úhly. I když je možná nijak samostatně nenazývali a neoznačovali (kromě pravého úhlu, který má velmi široké užití).

Mnohé kvantitativní vztahy a geometrické útvary byly tedy správně poznány dávno před naším letopočtem. Archeologické vykopávky potvrzují, že člověk vytvořil první geometrické pojmy (i aritmetické) už v době kamenné.

S přechodem k zemědělství si lidé více než dříve začali všímat vegetačních změn a spojovat je s periodickými změnami Měsíce. Pozorovali také slunovraty a východy souhvězdí při stmívání. Užívali lunární kalendář. Věnovali se astronomii. Souhvězdí jako vodítek při mořeplavbě využívaly již primitivní národy. S rozvojem astronomie velmi úzce souvisí výrazný pokrok ve znalostech a užívání úhlů. Užívali souhvězdí jako vodítek při mořeplavbě. K tomu úhly nepostradatelně patří. Rozvoj astronomie není možný bez rozvoje matematických poznatků. Zpočátku náhodné, později stále soustavnější pozorování oblohy, vedlo k objevení vlastností směrových úhlů (také koule a kruhu). [1]

---

[1] STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1963. Malá moderní encyklopedie (Orbis), str. 8-18, 26-33

KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1968.Ch. J. Scriba, P. Schreiber: *5000 Years of Geometry*, 2015 str.13-14, 25-32

1. 3. Babylónie

Pojem úhlu velmi úzce souvisí se vznikem geometrie jako vědy. Pro vznik matematické metody je rozhodující zhruba 4. století př. n. l. Tehdy postupně vznikly jednotlivé části Euklidových Základů. Tomu však předcházel dlouhý vývoj, ve kterém byly získávány jednotlivé poznatky, a byla zkoumána jejich vzájemná logická souvislost. V Egyptě a Babylónii nebyly přírodovědné znalosti (kromě astronomických) písemně zachycovány.

1. 4. Řecko

Teprve u Řeků (počínaje asi 4. stoletím př. n. l.) se objevují záznamy o jednotlivých fyzikálních poznatcích – např. geometrická optika (zákon odrazu – tzn. úhlu).

Egyptské papyry nebo babylónská matematika z doby kolem roku 2000 př. n. l. dokládá velmi vysokou úroveň znalostí. V Babylónii (název jižní části Mezopotámie v dnešním Iráku) se tehdy užívalo šedesátkové soustavy. Babyloňané pravděpodobně znali „Pythagorovu" větu více než 1000 let před Pythagorem. To svědčí o tom, že měli dosti značné základní geometrické znalosti. Široce používali pojmu podobnosti geometrických útvarů. [2]

Obrovským přínosem pro vývoj geometrie byly Základy. Ty zformuloval řecký matematik a filosof Euklides z Alexandrie zhruba kolem roku 300 př. n. l (více než 200 let po Pythagorovi). Dílo čítá 13 svazků. Jedná se pravděpodobně o nejznámější učebnici všech dob. Prvních 6 svazků je věnováno rovinné geometrii. Euklides se věnuje též úhlům. Přelomový význam této učebnice spočívá v tom, že všechna tvrzení jsou zde důkladně dokázána. Původně bylo dílo sepsáno v řečtině. Ve středověku (11. – 14. st. n. l.) byly svazky v držení Arabů a byly proto přeloženy do arabštiny, v pozdním středověku (14. – 15. st. n. l.) do latiny, v roce 1570 do angličtiny. Díky svým Základům je Euklides nazýván „Otcem geometrie". Základy se staly druhou nejčastěji tištěnou knihou západního světa (hned po Bibli). Po dobu 2 000 let byly nejuznávanější učebnicí. [3]

„Přírodní zákony nejsou nic jiného než matematické myšlenky od Boha." [4] - tzn., že matematika podpírá všechny přírodní zákony.

O úhlech pojednává kniha první Euklidových Základů, (Obr. 1.1) - body 8-12 [5]:

„Rovinný pak úhel je vzájemný sklon dvou čar, v rovině se stýkajících a neležících k sobě v přímce."

„Když pak čáry úhel svírající jsou přímky, úhel zove se přímkovým."

„Když se postaví přímka na přímku tak, že sousední úhly činí navzájem stejnými, jeden i druhý z těch stejných úhlů jest pravý, a přímka postavená zove se kolmicí té, na níž jest postavena."

---

[2] HAVLÍČEK, Karel. *Cesty moderní matematiky*. 2., rozš. a přeprac. vyd. Praha: Horizont, 1976. Malá moderní encyklopedie (Horizont), str. 224 – 229.

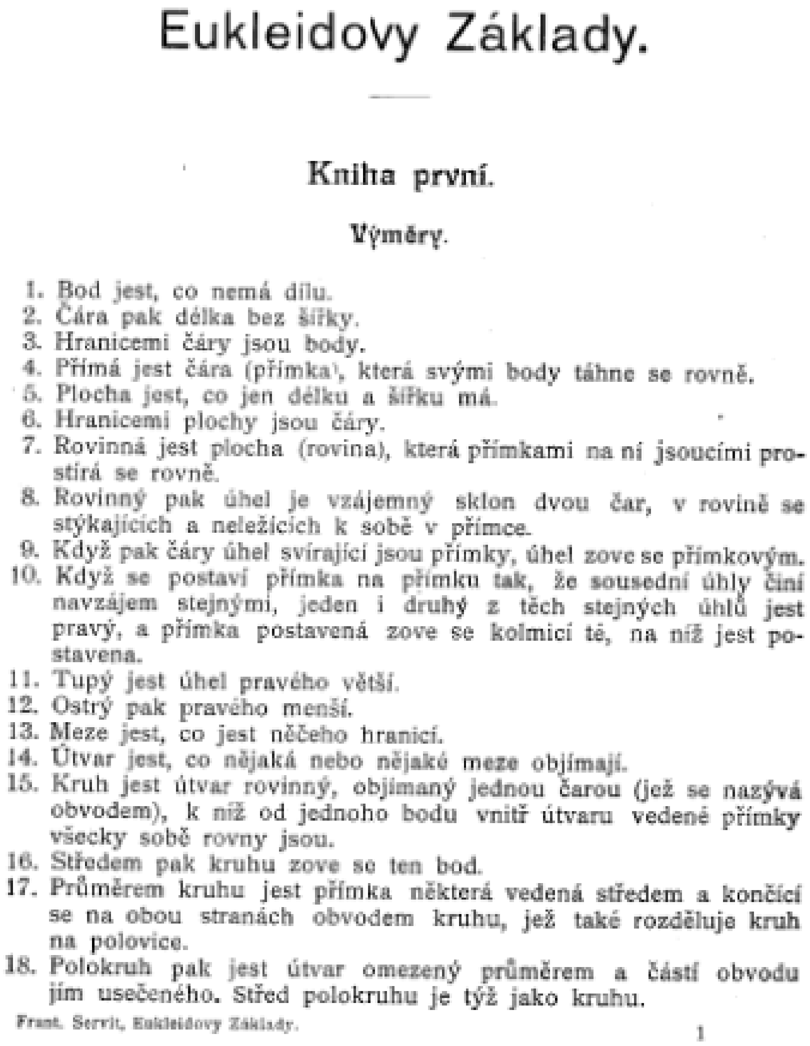
[3] BAKALÁŘI. Matematika: Základy geometrie: Eukleides jako "otec geometrie" – Khanova škola. *KhanAcademy* [online]. 2018 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: https://khanovaskola.cz/video/48/353/264-eukleides-jako-otec-geometrie

[4] EUKLEIDÉS. *Eukleidovy Základy [Elementa]*. Praha: Jednota českých mathematiků a fysiků, 1907, kniha 1.

[5] EUKLEIDÉS. *Eukleidovy Základy [Elementa]*. Praha: Jednota českých mathematiků a fysiků, 1907, kniha 1., str.1

„Tupý jest úhel pravého větší.“

„Ostrý pak pravého menší.“



Eukleidovy Základy.

Kniha první.

Výměry.

1. Bod jest, co nemá dílu.
2. Čára pak délka bez šířky.
3. Hranicemi čáry jsou body.
4. Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně.
5. Plocha jest, co jen délku a šířku má.
6. Hranicemi plochy jsou čáry.
7. Rovinná jest plocha (rovina), která přímkami na ní jsoucími prostírá se rovně.
8. Rovinný pak úhel je vzájemný sklon dvou čar, v rovině se stýkajících a neležících k sobě v přímce.
9. Když pak čáry úhel svírající jsou přímky, úhel zove se přímkovým.
10. Když se postaví přímka na přímku tak, že sousední úhly činí navzájem stejnými, jeden i druhý z těch stejných úhlů jest pravý, a přímka postavená zove se kolmicí té, na níž jest postavena.
11. Tupý jest úhel pravého větší.
12. Ostrý pak pravého menší.
13. Meze jest, co jest něčeho hranicí.
14. Útvar jest, co nějaká nebo nějaké meze objímají.
15. Kruh jest útvar rovinný, objímaný jednou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu vnitř útvaru vedené přímky všecky sobě rovny jsou.
16. Středem pak kruhu zove se ten bod.
17. Průměrem kruhu jest přímka některá vedená středem a končící se na obou stranách obvodem kruhu, jež také rozděluje kruh na polovice.
18. Polokruh pak jest útvar omezený průměrem a částí obvodu jím usečeného. Střed polokruhu je týž jako kruhu.

Frant. Servít, Eukleidovy Základy. 1

Obr. 1.1

2. Historie měření úhlů

Chceme-li mluvit o úhlu, nemůžeme opominout vývoj způsobů měření úhlů a jednotky velikosti úhlů.

Nejnovější metody a přístroje nám umožňují spolehlivě měřit úhly ve zlomcích sekund oblouku (opticky i elektronicky). Vždy to tak ale nebylo.

Z počátku byly úhly měřeny primitivními metodami. V důsledku požadavku na zvýšení přesnosti, se badatelé předháněli v navrhování způsobů, jak dosáhnout co nejlepšího možného měření. Největšího pokroku pak bylo dosaženo především koncem 20. století – až do dneška.

2. 1. Jednotky velikosti úhlů – stupňová míra

V roce 1936 byla v Íránu, nedaleko starobylého města Babylon (hlavní město Mezopotámie = označení pro oblast mezi řekami Eufrat a Tigris) nalezena hliněná deska

(Obr. 2. 1) s neznámým textem (pocházejícím pravděpodobně z období kolem 4 000 př. n. l). Tento text byl rozluštěn až v roce 1950.

Babylonským vědcům byl znám fakt, že obvod hexagonu je přesně šestkrát větší než poloměr ohraničeného kruhu. To byl s největší pravděpodobností důvod, proč se rozhodli rozdělit kruh na 360 stejných dílů (odtud 360°).

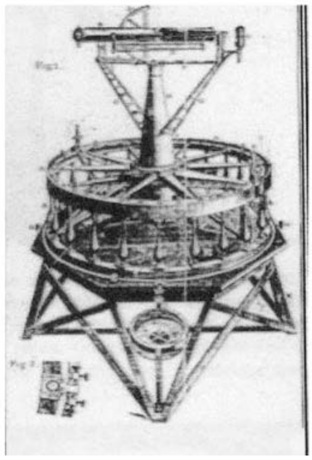
Srovnávali zenit přímo nad hlavou s nekonečným obzorem. Mezi zenitem a horizontem byl pravý úhel. Dva pravé úhly tvořily celý oblouk nebeské klenby a tedy polovinu kružnice. Není zcela jasné, proč Babyloňané zvolili číslo 360 pro určení úhlu celé kružnice. Každopádně zvolili číslo, které bylo velmi dobře dělitelné, a proto vhodné pro vyjadřování menších úhlů a zlomků úhlů. Během staletí se přesnost přístrojů na měření úhlové vzdálenosti mezi objekty stále zvyšovala. Kvadranty měly velikost čtvrtiny celé kružnice (90°), sextanty tvořily šestinu kružnice (60°) a oktanty pak zaujímaly jednu osminu (45°) celé kružnice.

Obr. 2. 1 Hliněná deska zobrazující matematické symboly

Nápis na desce (nazvaná Plimpton 322–3700 let stará) vyjadřuje poměr obvodu pravidelného šestiúhelníku k délce kružnice. (Odtud pak odvodili $\pi = 25/8 = 3{,}125$.) To je důkazem, že Babyloňané používali sexázický systém - založený na 60 (nikoli centenzimální systém - založený na jednotkách 10) a také, že už velmi dobře znali trigonometrii (a tedy také úhly).

Pro přesnější měření se pak užívají jednotky nazvané úhlové minuty ($1° = 60'$), případně úhlové vteřiny ($1' = 60''$).

Dělení kruhu s velkou přesností bylo dlouhotrvajícím problémem. V roce 1793 panovala představa, že nejpřesnější možné měření od dob antického matematika, astronoma, astrologa Claudia Ptolemaia (85–165 l. n. l.) do časů polského astronoma a matematika Mikuláše Koperníka (1473–1543) je dělení na 5–10 úhlových minut. Dánský astronom a astrolog Tycho de Brahe (1546–1601) ho snížil na 1 minutu, polskému astronomovi Johannesu Heveliovi (1611–1687) se to podařilo na 15–20 vteřin. Anglický hodinář Georg Graham (1673–1751) dosáhl přesnosti měření na 7–8 vteřin. V roce 1773 se podařilo londýnskému vynálezci Jessi Ramsdenovi (1735–1800) vyrobit přístroj teodolit (Obr. 2. 2), s jehož pomocí dokázal kruh opakovaně rozdělit s přesností na 3 vteřiny.

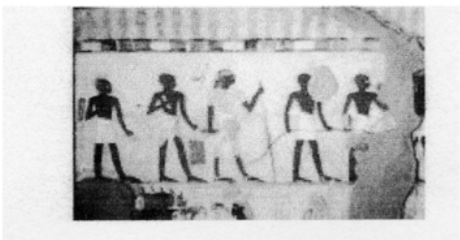


Obr. 2. 2 - Ramsdenův teodolit – vědecké muzeum v Londýně

Na výrobu teodolitů se zaměřila řada různých firem. S postupem a vývojem nových technologií (optické teodolity) došlo v 20. a 21. století k sestrojení spousty typů teodolitů s velmi přesným měřením úhlů.

2. 1. 1. Groma

Historie matematického měření úhlů ve stupňové míře pravděpodobně pochází přibližně z roku 1500 př. n. l. V Egyptě k měření využívali stín slunce zobrazený na kamenném stole. Jak takové měření probíhalo je zobrazeno na deskách, které je možné spatřit v egyptském muzeu v Berlíně (obr. 2. 3 a 2. 4).



Obr. 2.3 - Scéna z hrobky Djeserkeresonb

Obr. 2. 4 - Scéna z hrobky Menna

Prvním známým nástrojem na měření úhlu byl pravděpodobně egyptský Groma používaný při budování obrovských staveb, jako jsou pyramidy. Sloužil k vytyčování pravých úhlů. Jeho použití bylo výrazně omezeno tím, že přístroj bylo možné využít jen na poměrně plochý terén. Přesnost měření byla navíc limitována vzdáleností.

Od Egypťanů přejali tento nástroj Římané. Ačkoliv byl Groma jedinou pomůckou umožňující měřit úhly, kterou měli k dispozici, dokázali Římané pomocí pravých úhlů zvládnout i složité vytyčovací úlohy – kruhové či eliptické amfiteátry nebo ražení tunelů. Pro stavby vytyčené na přímkách (silnice) byl ideálním nástrojem.

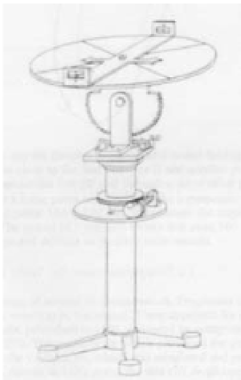
Groma se skládal ze čtyř kamenů zavěšených na dvou tyčkách, které jsou v pravém úhlu (Obr. 2. 5). Měření bylo prováděno vizuálním porovnáním dvou zavěšených kabelů a bodem, který měl být určen.

Obr. 2. 5 - Model egyptského Gromy

Když byly v roce 1912 vykopány Pompeje, byly objeveny verze Gromy, které jsou zhotovené z železného nosiče s bronzovým závažím. [6]

2. 1. 2. Dioptr

Pravděpodobně prvním opravdovým nástrojem na měření úhlů byl Dioptr (Obr. 2. 6) (řecké slovo = průzor – v současné době znám jako zaměřovací pomůcka, mířidlo zbraní). Pochází zhruba z roku 1 500 př. n. l. Z popisu Herona Alexandrijského (10–70 l. n. l.) vyplývá, že dioptr lze považovat za předchůdce teodolitu (geodetický přístroj k měření a vytyčování vodorovných a svislých úhlů).



Obr. 2. 6 - Model dioptru

Tento přístroj byl složen z velké kruhové kovové desky, kterou bylo možné otáčet vodorovně o 360° ozubeným kolem a z další desky, kterou bylo možné přístroj naklonit ve svislé rovině pomocí čepu. K deskám bylo možné připojit vyrovnávací zařízení. Vodorovná deska mohla být zarovnána kovovou lištou s dvojicí otevřených mířidel. Celý přístroj byl namontován na těžkém dřevěném podstavci. [7]

---

6 *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Groma* [online]. c2018 [citováno 27. 11. 2018]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Groma&oldid=16532450>

7 *Co je to?: Co je to dioptr?* [online]. Praha: Superia.cz, 2017 [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: http://cojeto.superia.cz/ruzne/dioptr.php

2. 1. 3. Trikvetr

Velkým přínosem v měření úhlů byl vynález řeckého matematika, astrologa a geografa Claudia Ptolemaia (85–165 n. l.) nazvaný trikvetr. Bylo to zařízení složené ze tří částí. Jedna byla zasazena do země. Dalšími dvěma bylo možné otáčet – tak, aby společně s pevnou vertikální tyčí vytvořily rovnoramenný trojúhelník.

Trikvetrem bylo možné pozorovat hvězdy a planety. V pozdějších dobách byl využíván armádou při terénních průzkumech.

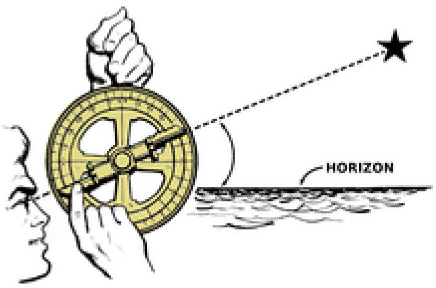
Trikvetr byl přímým předchůdcem dalších přístrojů – kvadrantu, sextantu a oktantu. U těchto přístrojů bylo rameno se stupnicí nahrazeno částí kruhu – u kvadrantu čtvrtinou, u sextantu šestinou, u oktantu osminou. [8]

2. 1. 4. Astroláb

Prvním ručním navigačním přístrojem byl Astroláb (Obr. 2. 7). Umožnil určit polohu na moři. Široké využití měl i při vyměřování při stavebních pracích.

Obr. 2.7 - Španělský Astroláb

Postup při měření pomocí astrolábu je znázorněn na obrázku 2. 8.



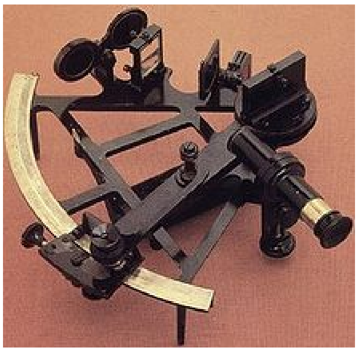
Obr. 2. 8 - Měření úhlu nebeského tělesa nad horizontem použitím astrolábu

Principy, na kterých byl založen Astroláb, byly známy již před 150 lety př. n. l. První doložený Astroláb však pochází až z doby zhruba kolem roku 400 n. l. Velmi hojně jich využívali v maurském světě kolem roku 800 n. l. Odtud se později (začátek 12. st.) rozšířil do

---

[8] *Encyklopedie Vševěd: Trikvetr* [online]. Praha: Netpoint, 2015, 2015 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: http://encyklopedie.vseved.cz/trikvetr

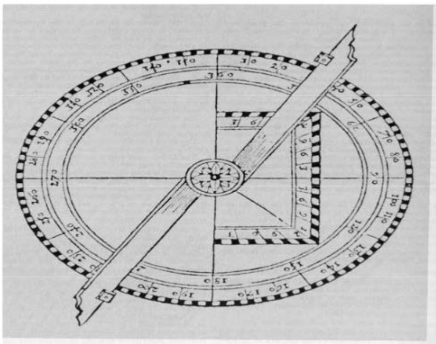
Evropy. Zde byl nejpopulárnějším astronomickým nástrojem až do 17. století, kdy jej nahradil Sextant (Obr. 2. 9). [9]



Obr. 2. 9 - Sextant

2. 1. 5. Teodolit

V roce 1571 nacházíme první zmínku o přístroji nazvaném Teodolit. Objev byl připsán anglickému matematiku a geodetovi Leonardu Diggesovi (1515-1559) (Obr. 2. 10). Zveřejnil ho však až Diggesův syn Thomas Diggest v knize nazvané Pantometria.



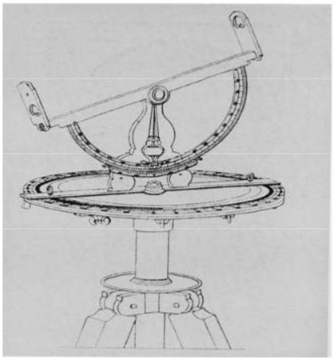
Obr. 2. 10 - Diggesův Teodolit

Teodolit je přístroj na přesné měření a vytyčování vodorovných a výškových úhlů. Prošel řadou velkých změn a zdokonalení. Využívá se dodnes.

Obrázky 2. 11a – 2. 11d dokumentují, jakého vývoje doznal teodolit od svého „zrození“ do dnešního dne.

---

[9] SCHEIRICH, Petr. Vesmír: Velké umění astronavigace: Od astrolábu po sextant. *Vesmír: Velké umění astronavigace: Od astrolábu po sextant* [online]. Praha: WebActive, 2018, 1. 10. 2018, **2018**(10) [cit. 2019-02-01]. ISSN 1214-4029. Dostupné z: https://www.citacepro.com/dok/gwDH9OrJmERbpq97



Obr. 2. 11a - Teodolit W. Leybourna

Obr. 2. 11b - Teodolit z 18. století

Obr 2. 11c - Teodolit z roku 1840

Obr 2. 11d - Teodolit z roku 2018

Teodolity se používají od 19. st. především v zeměměřičství pro měření prostorových souřadnic. Od té doby prodělaly významný konstrukční a technologický vývoj, ale hlavní myšlenka dvou otočných na sebe kolmých os a kolmé záměrné přímky zůstává stále zachována. Stejně tak podmínka, že dalekohledem teodolitu musí být vidět na měřený bod (nebo na bod náhradní k měřenému bodu zpravidla blízký). [10]

Na výrobu teodolitů se zaměřila řada různých firem. S postupem a vývojem nových technologií (optické teodolity) došlo v 20. a 21. století k sestrojení spousty typů teodolitů s velmi přesným měřením úhlů. [11]

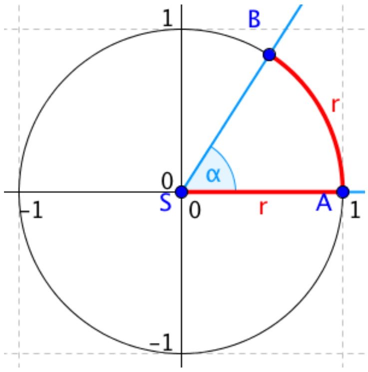
2. 2. Jednotky velikosti úhlů – oblouková míra

Kromě stupňové míry (úhlové stupně, minuty, vteřiny) je možné k vyjádření velikosti úhlu použít také obloukovou míru. Její jednotkou je radián (1 rad).

[10] WALLIS, David A. History of Technology: History of Angle Measurement. *History of Technology: History of Angle Measurement* [online]. Cairo, Egypt: Pfaraohs to Geoinfrmatics, 2005 [cit. 2019-02-01]. Dostupné z: https://www.fig.net/resources/proceedings/fig_proceedings/cairo/papers/wshs_01/wshs01_02_wallis.pdf

[11] *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Teodolit* [online]. c2017 [citováno 27. 11. 2018]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Teodolit&oldid=15603358>

K zavedení a představě radiánu využijeme jednotkovou kružnici, tj. kružnici s poloměrem 1. (Obr. 2. 12)



Obr. 2. 12 – Jednotková kružnice

Délka vyznačeného oblouku AB je stejná jako poloměr kružnice – v tomto případě 1. Úhel *ASB* pak má velikost 1 rad. Je potřebné zdůraznit, že nejde o délku úsečky *AB*, ale opravdu o délku oblouku *AB* (odtud oblouková míra).

S myšlenkou na zavedení úhlové jednotky, která velikostí odpovídá jednomu radiánu, se poprvé setkáváme pravděpodobně v roce 1714 u Rogera Cotese. Název radián však poprvé použil až o více než 150 let později (v roce 1873) Jameson Thomson.

2. 3. Vztah mezi jednotkami stupňové a obloukové míry

Oblouk kružnice má délku *r* (poloměr kružnice) (Obr. 2. 12). Celá kružnice má délku $O = 2\pi r$. Na kružnici tedy můžeme nanést 2π oblouků o velikosti *r*. Můžeme napsat:

$$360° = 2\pi\, rad \;\Rightarrow\; 180° = \pi\, rad$$

π (čteme *pí*) je matematická konstanta, která udává poměr obvodu O jakéhokoli kruhu a jeho průměru d ($O = \pi d$, protože průměr kruhu je dvojnásobkem poloměru téhož kruhu, dostaneme zmíněný vztah $O = 2\pi r$). Tuto konstantu nazýváme Ludolfovým číslem – podle německého matematika Ludolpha van Ceulena (1540 – 1610), který výpočtu hodnoty tohoto čísla věnoval značnou část svého života. Dokázal ji určit s přesností na 35 desetinných míst. Po jeho smrti mu byla tato hodnota dokonce vytesána na náhrobní kámen.

Řecké písmeno π pro označení tohoto čísla použil poprvé velšský matematik William Jones v roce 1706 jako zkratku řeckého slova pro obvod (řecky perimetros). Označení zpopularizoval v roce 1737 švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler. V anglické literatuře se používá spíše označení Archimédova konstanta.

Jednotku *rad* často vynecháváme a píšeme pouze úhel o velikosti například 2π.

$$\Rightarrow \quad 360° = 2\pi \quad \text{a} \quad 180° = \pi$$

Vztah mezi jednotkami je možné přibližně vyjádřit takto:

$$1rad = 57°17'45'' \qquad 1° = \frac{\pi}{180}rad$$ [12]

Tabulka důležitých hodnot velikostí úhlů								
Velikost úhlu								
Stupňová míra	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Oblouková míra	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

2. 4. Setinná míra

Kromě stupňové a obloukové míry je možné k vyjádření velikosti úhlu použít také setinnou míru. Ta je definována tak, že pravý úhel (90°) je rozdělen na 100 dílů. Ty potom nazýváme gony nebo také grady, či setinné stupně.

Setinný stupeň (1^g) se dále dělí na 100 setinných minut (1^c), tzn., že $1^g = 100^c$, setinnou minutu můžeme rozdělit na 100 setinných vteřin (1^{cc}), tzn., že$1^c = 100^{cc}$.

Vztah mezi setinnou a obloukovou mírou je vyjádřen takto: $\boldsymbol{1^g = \frac{\pi}{200} rad}$ [13]

Setinné míry se využívá zřídka. Na základní ani střední škole se nevyučuje.

3. Měření úhlů v technické praxi

V technické praxi se velikost rovinného úhlu udává ve stupních, které se dělí na minuty a vteřiny. Úhly se měří buď přímo úhloměry, úhelníky, úhlovými měrkami apod., nebo nepřímo tím, že se určí jiné rozměry a velikost úhlu se z nich vypočítá.

[12] HAVRLANT, Lukáš. Matematika.cz: radián. *Matematika.cz: radián* [online]. Brno: Nová média, s.r.o. 2013, 2013 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: https://matematika.cz/radian

[13] HAVRLANT, Lukáš. Matematika.cz: úhel. *Matematika.cz: úhel* [online]. Brno: Nová média, s.r.o. 2013, 2013 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: https://matematika.cz/uhel

3. 1. Přímé měření úhlů

Úhelníky

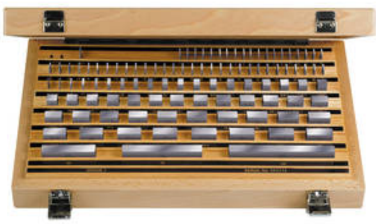
V praxi se nejčastěji setkáváme s potřebou zkontrolovat, zda je měřený úhel pravý. K tomu účelu se využívají pevné úhelníky (Obr. 3. 1).

Obr. 3. 1 - Úhelníky - plochý, příložný, nožový

Pokud je potřeba změřit jiný úhel než pravý, používají se speciální úhelníky.

Úhlové měrky

Používají se na přesné měření úhlů. Sadu úhlových měrek (Obr. 3. 2) tvoří kalené ocelové destičky, broušené a lapované, s dvěma nebo čtyřmi přesně vyrobenými úhly. Sada umožňuje vytvářet sestavením měrek jakýkoliv úhel. Sestavené měrky se upínají do držáku. Používají se 3 stupně přesnosti úhlových měrek, s maximální odchylkou ± 3, ± 10, ± 30 vteřin.



Obr. 3. 2 - Úhlové měrky

Úhloměry

Úhloměry jsou nejčastěji používaným měřidlem. Pro měření úhlů se používají různé druhy úhloměrů, které obvykle umožňují měření úhlů v rozsahu 0° až 180°. V dílenských podmínkách se používají úhloměry obloukové a univerzální.

a) Obloukové dílenské úhloměry (Obr. 3. 3) mají rozlišitelnost obvykle 1° a mohou být použity jen pro méně přesná měření, např. při různých zámečnických pracích.

Obr. 3. 3 - Obloukový úhloměr

b) Univerzální úhloměry (Obr. 3. 4) se uplatňují pro přesnější měření úhlů. Má dvě navzájem kolmá ramena a jedno vyměnitelné pravítko. Celé stupně odečítáme na stupnici, která je rozdělena na čtyři kvadranty po 2° a hodnotu úhlu určuje nulová čárka. Minuty odečítáme od nuly v tom samém směru. Přesnost odečítání je 5 minut. Také se používají optické úhloměry s odečítáním pomocí lupy (Obr. 3. 5).

Obr. 3. 4 - Universální úhloměr

Obr. 3. 5 - Universální úhloměr s lupou

c) Optické dělicí hlavy se používají pro měření a přesnou výrobu, kde je požadováno přesné dělení a odečítání úhlu. [14]

3. 2. Nepřímé měření úhlů

Nepřímá měření úhlů jsou metody založené na trigonometrických funkcích. Lze jimi měřit úkosy, kužele, sklony apod.

Sinusové pravítko

Sinusové pravítko (Obr. 3. 6 a, b) je přesně broušená destička, na jejíž obou stranách jsou umístěny válečky stejného průměru (100, 200, 300, 400 mm). Je-li úhel přesně dodržen, úchylkoměr neukáže žádnou úchylku.

Obr. 3. 6 a-Sinusové pravítko

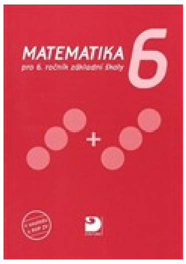
Obr. 3. 6 b-Sinusové magnetické pravítko

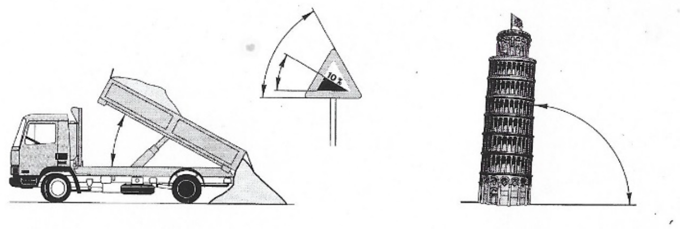
4. Zavedení úhlů ve škole

4. 1. Základní škola

4. 1. 1. MATEMATIKA pro 6. ročník Základní školy, Nakladatelství Fortuna 2007

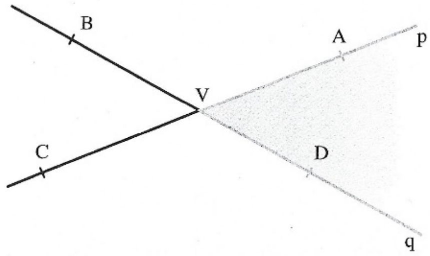
[14] Měření úhlů. *Měření úhlů* [online]. Ivančice: MaB Calibr, spol., 2014, 2014 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: http://www.mbcalibr.cz/mereni-uhlu.html





3.1 Uhel jako část roviny

Narýsujte do sešitu dvě přímky p, q, které jsou a) různoběžné, b) rovnoběžné, c) splývající. Na kolik částí rozdělí celou rovinu příslušná dvojice přímek?



Různoběžky dělí rovinu na čtyři části. Každou z nich budeme nazývat **úhel**.
Úhel ovšem není jen to, co máme narýsováno v sešitu nebo v učebnici. Úhel je stejně jako přímka nebo polopřímka nekonečný útvar. Představujeme si, že se stále rozevírá, aniž by někde končil.

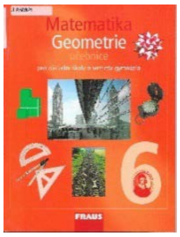
Polopřímky *VA* a *VB*, které úhel vymezují, nazýváme **ramena úhlu**. Bodu *V* budeme říkat **vrchol úhlu**. Úhel se označuje pomocí vrcholu a dvou bodů na ramenech. Náš úhel můžeme popsat jako **úhel** *AVB*, používáme symbol ∡.

∡ *AVB*

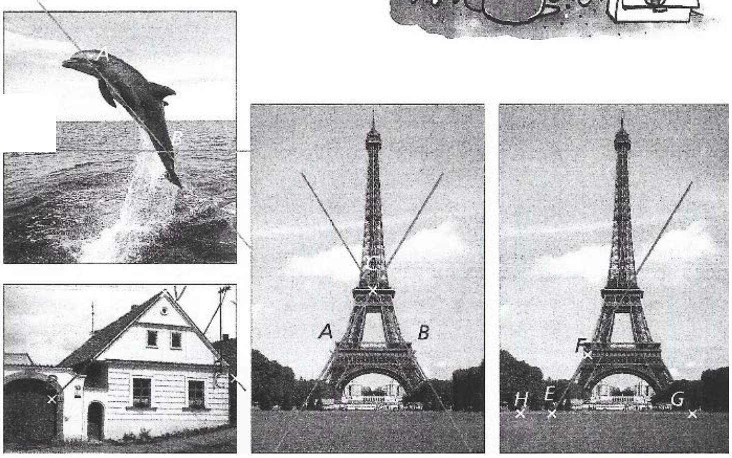
K označení úhlu potřebujeme tři body. Všimněte si, že název vrcholu je vždy uprostřed. Pořadí krajních bodů není rozhodující. [15]

[15] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro 6. ročník základní školy*. 2., upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007. ISBN 978-80-7168-992-8, str. 87-88.

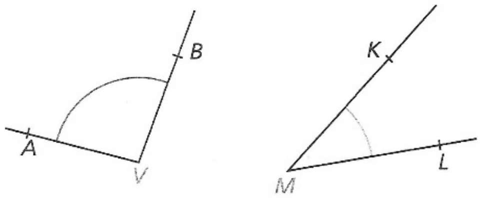
4. 1. 2. Matematika, Geometrie, učebnice pro Základní školy a víceletá Gymnázia, Fraus



Pozorujte obrázky. Které body jsou důležité, abychom mohli určit sklon střechy domu?
Jaký je sklon pilířů Eiffelovy věže?
Je sklon, který stavitelé naměřili a označili písmeny *HEF*, stejný jako *FEG*?
Je důležitý sklon, pod nímž delfín vyskočí nad vodu?



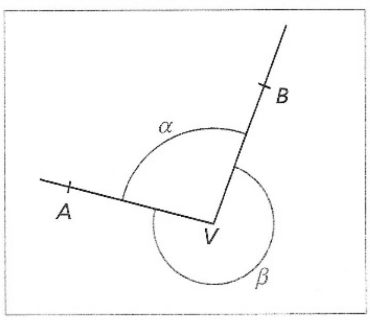
3.1 Co si představujete pod pojmem úhel? Zkuste určit, který z úhlů na obrázku je větší.



Část roviny označená obloukem se nazývá úhel. Úhel *AVB* je ohraničen polopřímkami *VA* a *VB*. Bod *V* je vrchol úhlu a polopřímky *VA* a *VB* jsou ramena úhlu. Ramena považujeme za součást úhlu.

Úhly se obvykle označují písmeny řecké abecedy α, β, γ, δ, ε…

Úhel *AVB* značíme $\sphericalangle AVB$ (vrchol píšeme vždy doprostřed). Všimněte si, že na obrázku určuje vrchol *V* a ramena *VA* a *VB* dva úhly – α a β.



[16]

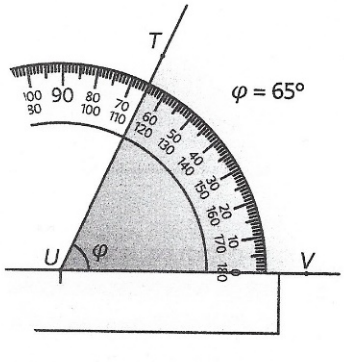
---

[16] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-656-7, str.19-20.

4. 1. 3. HEJNÉHO METODA B

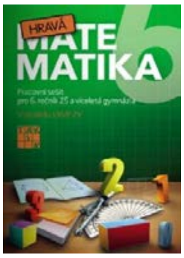
Na obrázku je úhel φ (čteme *fí*). Je to část roviny ohraničená polopřímkami *UT* a *UV*, **rameny** úhlu φ. Ramena *UT* a *UV* svírají úhel φ.
Bod *U* je **vrchol** úhlu φ.
Značíme $\varphi = \sphericalangle TUV$ nebo $\sphericalangle VUT$. Úhel φ je **ostrý**, protože jeho velikost je méně než 90°.
Úhel, jehož velikost je 90°, se nazývá **pravý**.

Měření úhlů zavedli astronomové v Mezopotámii před více než pěti tisíci lety. Za základ vzali **plný úhel** („jednu otočku“) a rozdělili jej na 360 stupňů.



[17]

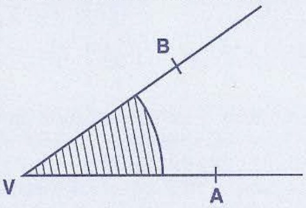
4. 1. 4. HRAVÁ MATEMATIKA, Pracovní sešit pro 6. ročník ZŠ a víceletá Gymnázia



17 HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ, Anna SUKNIAK, Eva BOMEROVÁ a Kateřina EICHLEROVÁ. *Matematika*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2015. ISBN 978-80-905756-1-5, str.5.

ÚHEL

Úhel nebo rovinný úhel je část roviny určená dvěma polopřímkami se společným počátkem



Pojmenování
– ramena úhlu jsou polopřímky, které určují úhel v rovině (polopřímka VA, polopřímka VB)
– vrchol úhlu je společný bod ramen (bod V)

Znázornění úhlu
– úhel se znázorňuje pomocí ramen, mezi kterými se vyznačí obloučkem u vrcholu úhlu

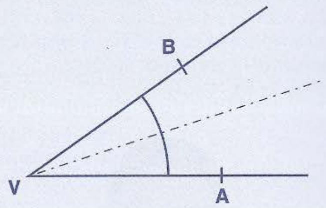
Značka úhlu
– úhel se označuje symbolem ∢

Velikost úhlu
– měříme pomocí úhloměru ve stupních, minutách a vteřinách
1 stupeň … 1° 1 minuta … 1′ 1 vteřina … 1″

Převody
1° = 60′ = 3600″
1′ = 60″

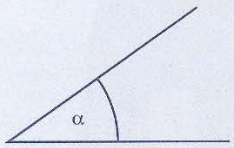
25°16′ = 1516′ 25 • 60′ + 16′ = 1500′ + 16′
1984′ = 33°4′ 1984 : 60 = 33° zbytek 4′

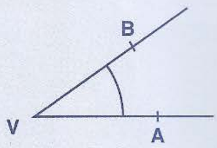
Osa úhlu
– polopřímka, která rozděluje úhel na dvě stejně velké části
– počáteční bod polopřímky je vrchol úhlu



Označení úhlů
1. způsob:
– pomocí písmen řecké abecedy (α, β, γ)

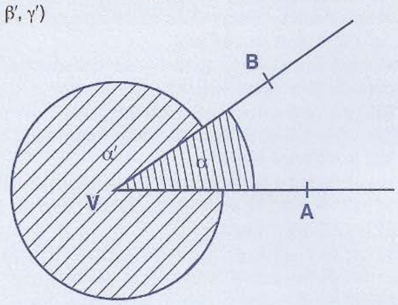
2. způsob:
– pomocí tří bodů (∢ AVB)





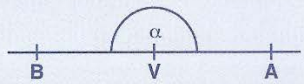
Rozdělení úhlu
• vnitřní úhel – množina bodů ohraničená rameny úhlu
• vnější úhel – množina bodů roviny, které nejsou body vnitřního úhlu

Zápis vnitřních a vnějších úhlů
– vnitřní úhel zapisujeme pomocí písmen řecké abecedy (α, β, γ)
– vnější úhel se označuje znakem vnitřního úhlu s čárkou (α′, β′, γ′)

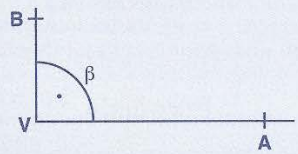


Druhy úhlů, rozdělení úhlů podle velikosti

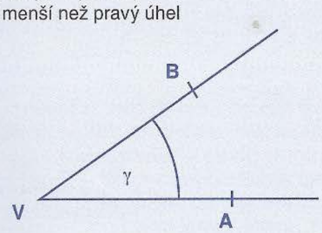
a) Přímý úhel (α = 180°)
– úhel, jehož ramena jsou navzájem opačné polopřímky, takže spolu vytvářejí přímku
– polovina roviny



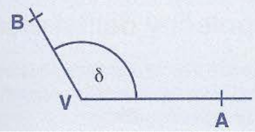
b) Pravý úhel (β = 90°)
– úhel, který svírají dvě kolmice
– polovina přímého úhlu
– označujeme ho tečkou v obloučku



c) Ostrý úhel (0° < γ < 90°)
– úhel menší než pravý úhel



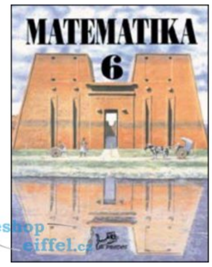
d) Tupý úhel (90° < δ < 180°)
– úhel větší než pravý úhel a menší než přímý úhel

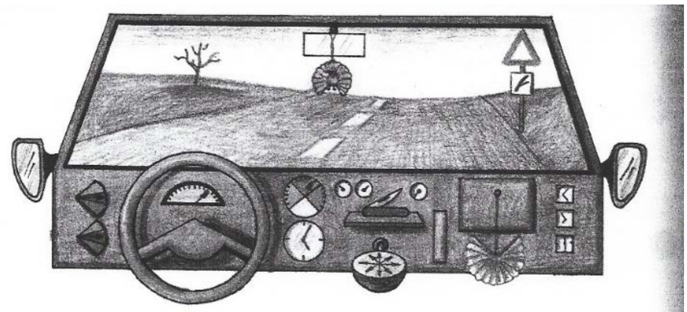


[18]

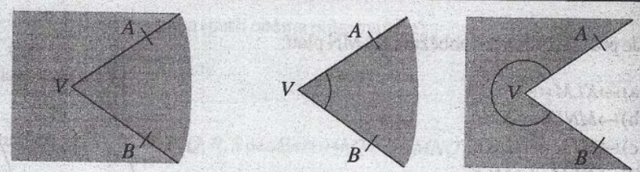
[18] HERMOCHOVÁ, Dana, Jana PRESOVÁ, Petr KAŠŠÁK, et al. *Hravá matematika 6: pracovní sešit pro 6. ročník ZŠ a víceletá gymnázia: v souladu s RVP ZV*. Praha: Taktik, 2014. ISBN 978-80-87881-18-7, str. 6/4.

4. 1. 5. MATEMATIKA 6, Prodos




Slyšeli jste už někdy slovo „úhel"? Při jaké příležitosti?

Polopřímky VA a VB se společným počátkem (viz obr.) určují v rovině dvě části. Každá z těchto částí se nazývá **úhel**.



∢AVB ∡AVB

V - vrchol úhlu

$\mapsto VA$, $\mapsto VB$ - ramena úhlu (patří oběma úhlům)

∢AVB, ∡AVB - úhel AVB (s vrcholem V)

[19]

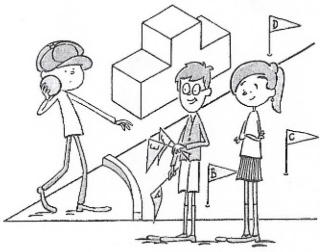
4. 1. 6. MATEMATIKA pro 6. ročník Základní školy [3], Prometheus

[19] MOLNÁR, Josef. *Matematika 6: [učebnice pro základní školy]*. Olomouc: Prodos, 1998. ISBN 80-85806-98-3, str.58.

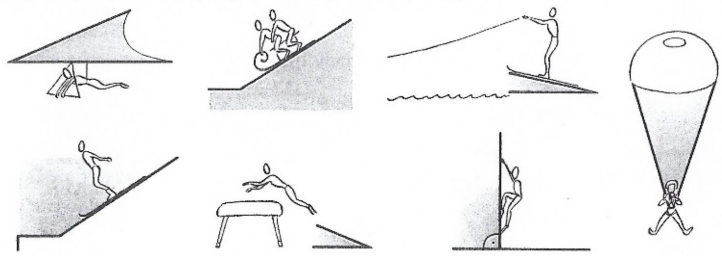
A *Pepa vrhá koulí.* Čenda označuje místa dopadu koule trojúhelníkovými praporky. Anička je zvědavá: „Dopadne tentokrát koule do vymezeného úhlu?“

a) Kterými písmeny jsou označeny dopady koule do úhlu?

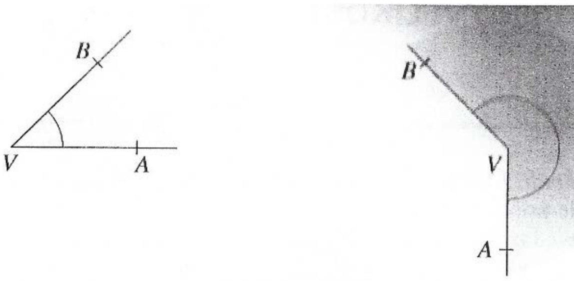
b) Které písmeno označuje dopad koule mimo úhel?



B *Úhly a sportovní disciplíny.* Poznáš, o které sporty jde?



ÚHEL



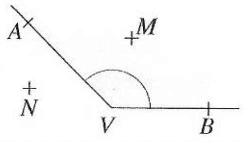
Bod V je *vrchol* úhlu AVB.
Polopřímky VA a VB jsou *ramena* úhlu.

Úhel na obrázku, který má vrchol V a ramena VA, VB, označujeme takto:

$\sphericalangle AVB$ nebo $\sphericalangle BVA$ $\measuredangle AVB$ nebo $\measuredangle BVA$

Písmeno označující vrchol je vždy *uprostřed*.

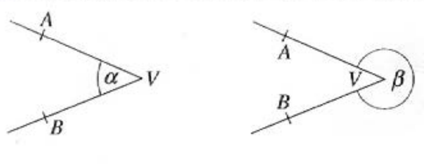
Úhel je část roviny.



Body M, A, B, V *patří* úhlu AVB.

Bod N *nepatří* úhlu AVB.

$M \in \sphericalangle AVB$ $N \notin \sphericalangle AVB$

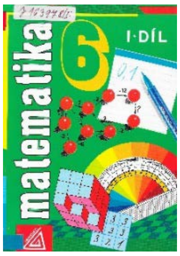


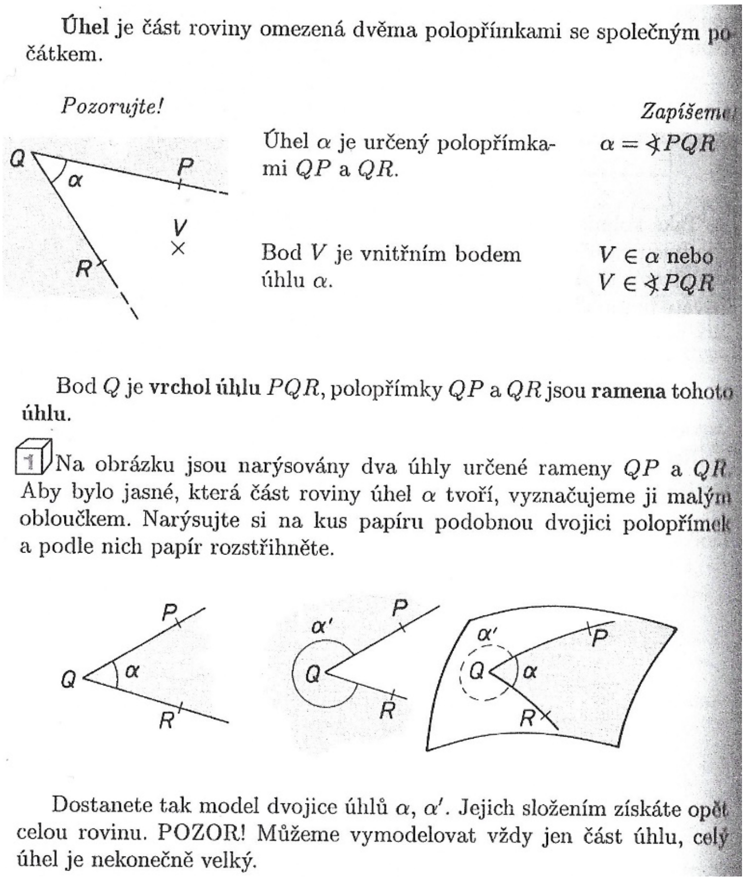
$\alpha = \sphericalangle AVB$ $\beta = \measuredangle AVB$

Úhly často označujeme písmeny řecké abecedy. [20]

[20] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy: [učebnice zpracovaná podle učebních osnov vzdělávacího programu Základní škola*. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-092-6, str 3-5.

4. 1. 7. Matematika 6, I. DÍL, Prometheus





Úhel je část roviny omezená dvěma polopřímkami se společným po-
čátkem.

Pozorujte! *Zapíšeme*

Úhel α je určený polopřímkami QP a QR. $\alpha = ∢PQR$

Bod V je vnitřním bodem úhlu α. $V \in \alpha$ nebo $V \in ∢PQR$

Bod Q je **vrchol úhlu** PQR, polopřímky QP a QR jsou **ramena** tohoto **úhlu.**

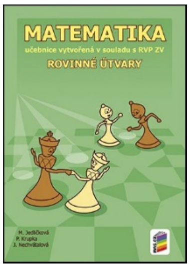
1 Na obrázku jsou narýsovány dva úhly určené rameny QP a QR. Aby bylo jasné, která část roviny úhel α tvoří, vyznačujeme ji malým obloučkem. Narýsujte si na kus papíru podobnou dvojici polopřímek a podle nich papír rozstřihněte.

Dostanete tak model dvojice úhlů α, α'. Jejich složením získáte opět celou rovinu. POZOR! Můžeme vymodelovat vždy jen část úhlu, celý úhel je nekonečně velký.

[21]

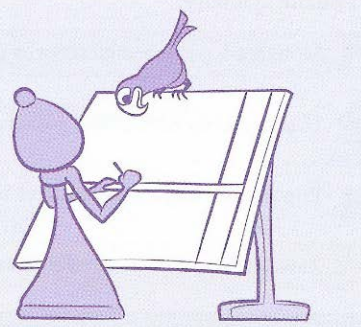
[21] ŠAROUNOVÁ, Alena, Jan MAREŠ, Jitka RŮŽIČKOVÁ a Věnceslava VÄTEROVÁ. *Matematika 6*. 2. vydání. Ilustroval Martin MAŠEK. Praha: Prometheus, 2015. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-373-8, str.94.

4. 1. 8. MATEMATIKA učebnice vytvořená v souladu s RVP ZV ROVINNÉ ÚTVARY, Nová škola, s. r. o. 2015

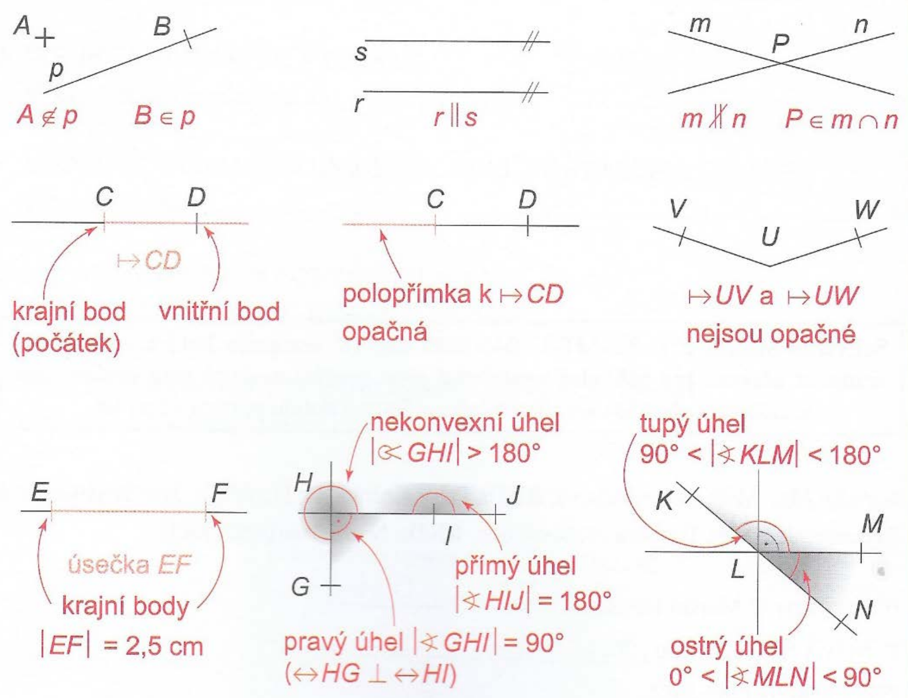


Když architekt projektuje dům, používá přímky a úsečky, hledá jejich průsečíky a vyznačuje důležité body. Někdy narýsuje přímky rovnoběžné, někdy různoběžné, někdy musí nebo chce použít lomené čáry či křivky.

Bod, přímka a kružnice jsou základní stavební kameny geometrie. Geometrie je pak odpradávna umění, díky němuž lidé plánují, vyměřují, staví a konstruují.



Základními geometrickými útvary, se kterými budeme dále pracovat, jsou **bod**, **přímka** a části přímky – **úsečka** a **polopřímka**. Pomocí přímek dále určujeme **úhly**. Připomeňme si je na obrázcích:

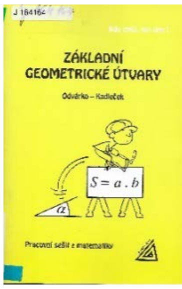


[22]

---

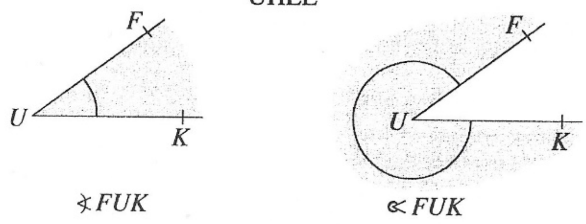
22 JEDLIČKOVÁ, Michaela, Peter KRUPKA a Jana NECHVÁTALOVÁ. *Matematika: rovinné útvary*. Ilustroval Martin BAŠAR. Brno: Nová škola, 2015. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-7612, str. 2.

4. 1. 9. ZÁKLADNÍ GEOMETRICKÉ ÚTVARY, Prometheus



Co je úhel

ÚHEL



Písmeno *U* označuje **vrchol** úhlu.

Polopřímky *UK* a *UF* jsou **ramena** úhlu.

Úhel je část roviny.

Úhly často značíme řeckými písmeny:

α – alfa	β – béta
γ – gamma	δ – delta
ε – epsílon	φ – fí

[23]

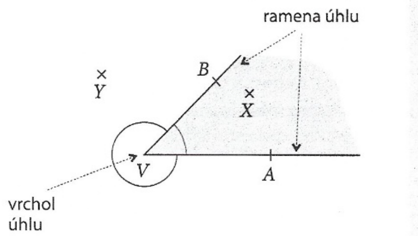
4. 1. 10. Průvodce matematikou 2, didaktis

[23] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Základní geometrické útvary: pracovní sešit z matematiky: [pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií]*. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-018-7, str.28-29.

Úhel

ÚHEL je část roviny ohraničená dvěma polopřímkami se společným počátkem. Polopřímky nazýváme RAMENA ÚHLU a počátek polopřímek VRCHOL ÚHLU.

Dvě polopřímky se společným počátkem rozdělují rovinu na dva úhly. Graficky tyto úhly odlišujeme oblouky kružnic, jejichž středy se nacházejí ve vrcholu úhlu. Tyto dva úhly můžeme rozlišit i popisem pomocí libovolného vnitřního bodu (úhel s vnitřním bodem X).



Úhly označujeme:	Zapisujeme:	Čteme:
malými písmeny řecké abecedy,	α, β, ...	úhel *alfa*, úhel *beta*, ...
pomocí trojice bodů v pořadí: libovolný vnitřní bod jednoho ramene, vrchol úhlu, libovolný bod druhého ramene a pomocí symbolů ∢ nebo ∢.	∢ AVB ∢ AVB	úhel AVB úhel AVB Druhé písmeno v pořadí označuje vrchol úhlu.

[24]

4. 2. Střední škola

4. 2. 1. MATEMATIKA pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN

[24] PALKOVÁ, Martina. *Průvodce matematikou 2, aneb, Co byste měli znát z geometrie ze základní školy*. Brno: Didaktis, 2007. Co byste měli znát ze základní školy. ISBN 978-80-7358-083-4, str. 13.

4.1 Úhel a jeho velikost

Stejně jako v základní škole budeme i v této kapitole chápat úhel jako jistou podmnožinu množiny všech bodů dané roviny. Jsou-li dány tři body *V, A, B*, které neleží v přímce, určují polopřímky *VA, VB* dva úhly: **konvexní úhel** *AVB* (značíme ∢ *AVB* nebo ∢ *BVA*) se nazývá průnik dvou polorovin *VAB* a *VBA*; druhý úhel se nazývá **nekonvexní**. Bod *V* je **vrchol** obou těchto úhlů, polopřímky *VA, VB* jsou jejich **ramena**.

Jsou-li polopřímky *VA, VB* opačné, pak každý z obou úhlů, které určují, se nazývá **úhel přímý**. Připustíme-li, aby polopřímky *VA, VB* splynuly, vznikne buď **úhel nulový** (jeho všechny body vyplňují polopřímku), nebo **úhel plný** (jeho body vyplňují celou rovinu). Úhel přímý, nulový a plný počítáme také mezi úhly konvexní.

Velikost úhlu udáváme **v míře stupňové** nebo **v míře obloukové**. Jednotkový úhel ve stupňové míře je úhel, který vznikne rozdělením přímého úhlu na 180 shodných úhlů; velikost tohoto úhlu je jeden **stupeň** (píšeme 1°). Rozdělením úhlu velikosti 1° na šedesát shodných úhlů vznikne úhel velikosti jedna **minuta** (píšeme 1′) a dělením tohoto úhlu opět na šedesát shodných úhlů dostaneme úhel velikosti jedna **vteřina** (píšeme 1″). Platí tedy

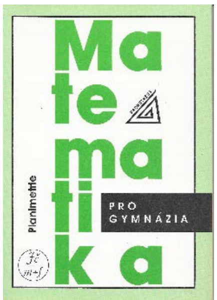
$$1° = 60', \; 1' = 60''.$$

Přímý úhel má tedy velikost 180°, pravý úhel 90°, nulový 0° a velikost plného úhlu je 360°.

V míře obloukové určujeme velikost úhlu pomocí délky oblouku kružnice, jež má střed ve vrcholu daného úhlu. Chceme-li určit velikost úhlu *AVB* v obloukové míře, sestrojíme kružnici *k* libovolného poloměru *r* se středem ve vrcholu *V* daného úhlu (viz. obr. 4.1).

[25]

4. 2. 2. Matematika PRO GYMNÁZIA Planimetrie, Prometheus

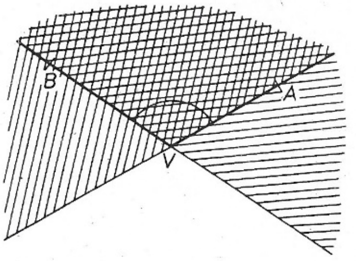


---

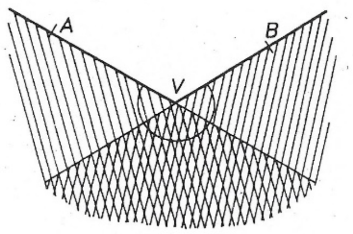
[25] ODVÁRKO, Oldřich a Jana ŘEPOVÁ. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-039-x, str. 139.

Polopřímky VA, VB se nazývají **ramena**, bod V **vrchol** obou úhlů. Všechny body ramen leží v obou úhlech. Každý bod roviny, který neleží na žádném z ramen VA, VB, je **vnitřním bodem** jednoho z úhlů AVB.

Nejsou-li polopřímky VA, VB opačné, je jeden úhel AVB průnikem polorovin VAB, VBA a nazývá se **konvexní úhel** AVB (obr. 9a); značíme $\sphericalangle AVB$. Druhý úhel AVB vznikne sjednocením polorovin opačných k polorovinám VAB, VBA a nazývá se **nekonvexní úhel** AVB (obr. 9b). Značíme $\sphericalangle AVB$.



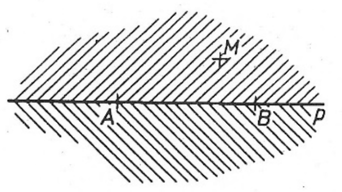
Obr. 9a



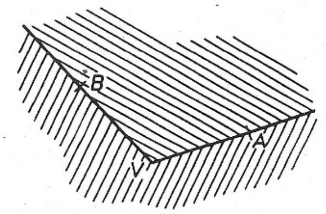
Obr. 9b

1.2 Polorovina, úhel, dvojice úhlů

Přímka dělí rovinu na dvě navzájem **opačné poloroviny** a je jejich společnou **hranicí** neboli hraniční přímkou (obr. 7).



Obr. 7



Obr. 8

Hraniční přímka p patří do obou polorovin. Každý bod roviny, který neleží na hraniční přímce, je **vnitřním bodem** jedné z obou polorovin. Polorovinu s hranicí p a vnitřním bodem M značíme $\mapsto pM$; je-li $p = \leftrightarrow AB$, pak $\mapsto pM = \mapsto ABM$.

Dvě různé polopřímky VA, VB dělí rovinu na dva **úhly** AVB (obr. 8). [26]

Shrnutí: Ve všech zmíněných učebnicích je úhel definován jako **část roviny**, která je **vymezena dvěma polopřímkami se společným počátkem**. Tento společný bod je nazýván **vrcholem úhlu**. Označen je obvykle V.

Polopřímky určující úhel (VA, VB) jsou nazývány **rameny úhlu**. Úhel je znázorněn obloučkem mezi zmíněnými polopřímkami, v zápise třemi velkými písmeny – vrchol je vždy prostředním z nich - $\sphericalangle AVB$.

[26] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. Dot. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-85849-07-0, str. 11-12.

Jedinou výjimkou je učebnice pro Gymnázia. Úhel je zde definován jako **průnik polorovin – konvexní úhel** (obr. 9a ze str. 15) nebo **sjednocení polorovin – nekonvexní úhel** (obr. 9b – ze str. 15).

5. Vlastnosti úhlů

Co je to úhel, už zde bylo zmíněno několikrát. Pro úplnost je ještě potřeba připomenout, že součástí úhlu jsou i jeho ramena a že úhel je nekonečný (ne jeho velikost) stejně jako polopřímky, které ho vymezují.

Podívejme se nyní na další vlastnosti úhlů.

5. 1. Druhy úhlů podle velikosti

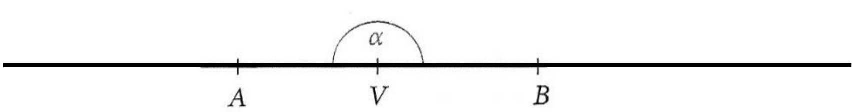
Nulový úhel – ramena úhlu tvoří dvě shodné polopřímky se společným počátkem (ramena leží na sobě) - nemá žádný vnitřní bod (Obr. 5. 1)

$$\boldsymbol{\alpha = 0° = 0\pi}$$

Obr. 5. 1

Přímý úhel – ramena úhlu tvoří dvě navzájem opačné polopřímky se společným počátkem (Obr. 5. 2)

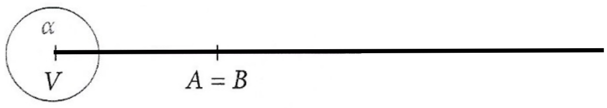
$$\boldsymbol{\alpha = 180° = \pi}$$



Obr. 5. 2

Plný úhel - ramena úhlu tvoří dvě shodné polopřímky se společným počátkem (ramena leží na sobě) - vnitřními body jsou všechny body roviny (Obr. 5. 3)

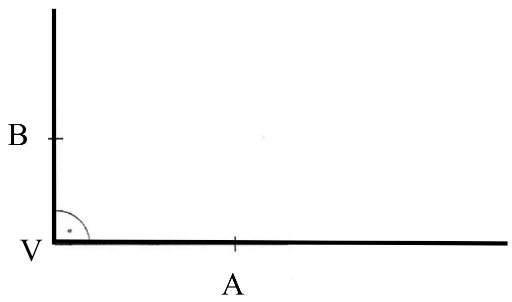
$$\boldsymbol{\alpha = 360° = 2\pi}$$



Obr. 5. 3

Pravý úhel – ramena úhlu tvoří dvě kolmé polopřímky se společným počátkem (Obr. 5. 4)

$$\boldsymbol{\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}}$$

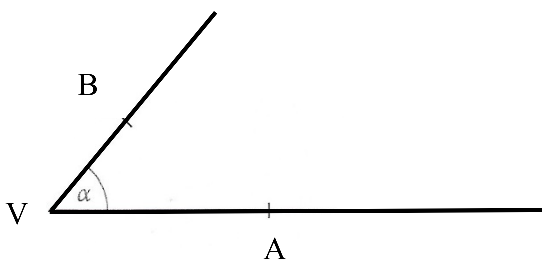


Obr. 5. 4

Ostrý úhel – úhel větší než nulový a menší než pravý. (Obr. 5. 5)

$$\boldsymbol{0° < \alpha < 90°}$$

$$\boldsymbol{0 < \alpha < \frac{\pi}{2}}$$

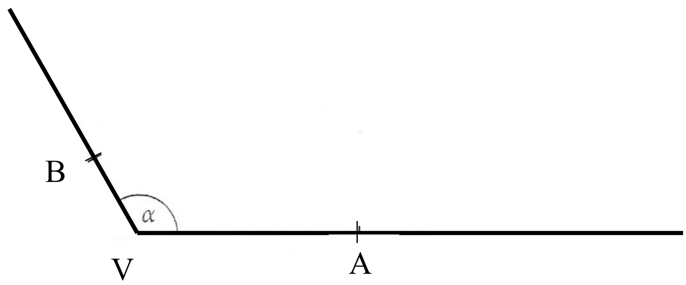


Obr. 5. 5

Tupý úhel – úhel větší než pravý a menší než přímý. (Obr. 5. 6)

$$90° < \alpha < 180°$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$



Obr. 5. 6

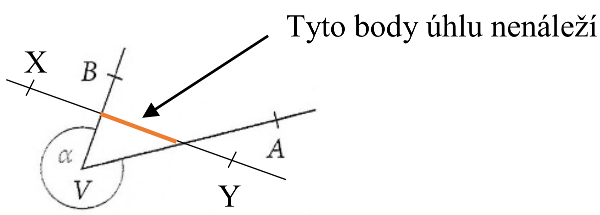
Všechny právě jmenované úhly se nazývají **konvexní.**

Kosý úhel

Kosým úhlem je každý úhel, který není nulový ($\alpha \neq 0$°), pravý ($\alpha \neq 90$°), přímý ($\alpha \neq 180$°) ani plný ($\alpha \neq 360$)

Nekonvexními úhly pak nazýváme takové úhly, které jsou větší než přímý úhel a menší než plný úhel.

V nekonvexním úhlu lze najít dva body takové, že úsečka s těmito krajními body, má alespoň jeden vnitřní bod, který tomuto úhlu nenáleží. (Obr. 5. 7)



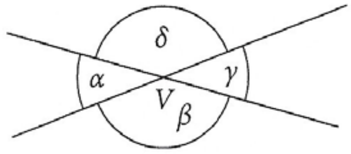
Obr. 5. 7

5. 2. Dvojice úhlů

Vedlejší úhly

Dvojice úhlů, které mají jedno rameno společné a zbylá dvě ramena tvoří navzájem opačné polopřímky se společným počátkem V. (Obr. 5. 8)

Součet dvou vedlejších úhlů je vždy 180°



Obr. 5. 8

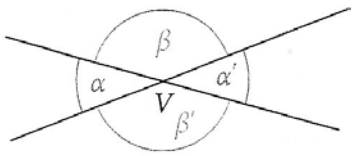
Dvojice vedlejších úhlů: $\boldsymbol{\alpha, \beta} \quad \boldsymbol{\beta, \gamma} \quad \boldsymbol{\gamma, \delta} \quad \boldsymbol{\delta, \alpha}$

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°}$$

Vrcholové úhly

Dvojice úhlů, jejichž rameny jsou navzájem opačné polopřímky se společným počátkem V. (Obr. 5. 9)

Vrcholové úhly jsou shodné.



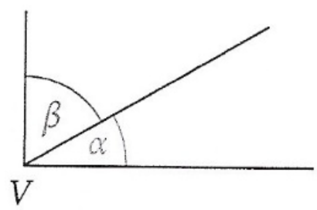
Obr. 5. 9

Dvojice vrcholových úhlů: $\boldsymbol{\alpha, \alpha'} \quad \boldsymbol{\beta, \beta'}$

$$\boldsymbol{\alpha = \alpha'} \quad \boldsymbol{\beta = \beta'}$$

Doplňkové úhly

Dvojice úhlů, která má společné rameno a jejich součet je 90°. (Obr. 5. 10)

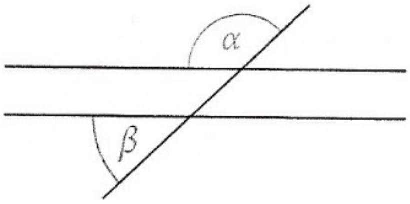


Obr. 5. 10

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = 90°}$$

Výplňkové úhly

Výplňkovými úhly je libovolná dvojice úhlů, jejichž součet je 180°. (Obr. 5. 11)

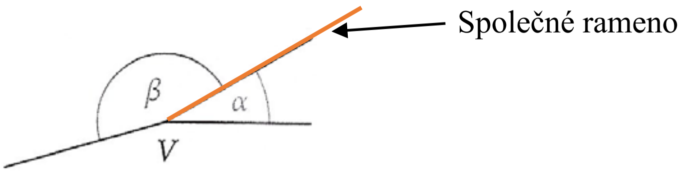


Obr. 5. 11

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{180}°$$

Styčné úhly

Styčnými úhly je dvojice úhlů, která má jedno rameno společné a současně je součet velikostí těchto úhlů menší než 360°. (Obr. 5. 12)

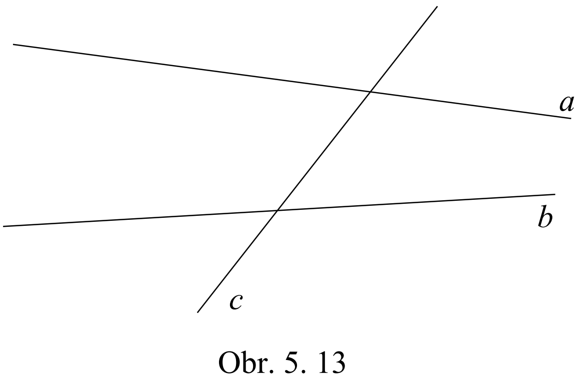


Obr. 5. 12

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} < \mathbf{360}°$$

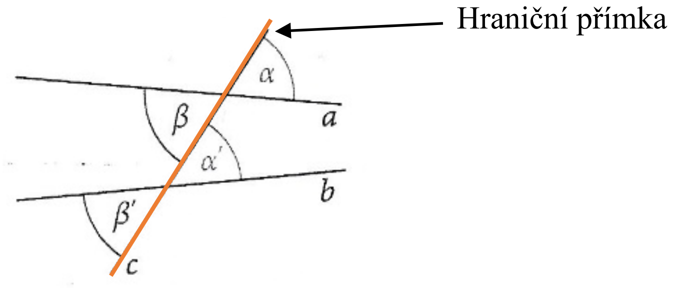
Souhlasné úhly

Souhlasnými úhly je dvojice úhlů, která vznikne, pokud dvě různoběžné přímky *a, b* „překříží" další různoběžná přímka *c* (hraniční příčka). (Obr. 5. 13)



Obr. 5. 13

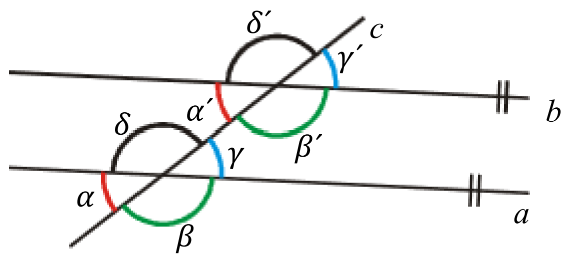
Souhlasné úhly leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou. (Obr. 5. 14)



Obr. 5. 14

Dvojice souhlasných úhlů: $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}'$ $\quad \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}'$

Jsou-li přímky *a, b* **rovnoběžné** (*a* ∥ *b*), pak jsou souhlasné úhly **shodné**.
(Obr. 5. 15)



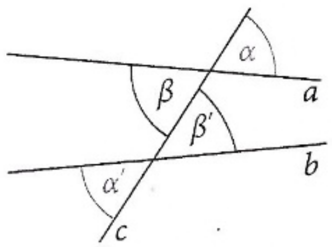
Obr. 5. 15

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}' \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}' \quad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}' \quad \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}'$$

Střídavé úhly

Stejně jako v případě souhlasných úhlů, střídavé úhly vzniknou „překřížením“ dvou různoběžných přímek *a, b* další různoběžnou přímkou *c* (příčkou). (Obr. 5. 16)

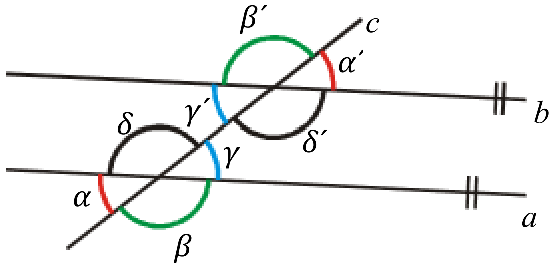
Střídavé úhly leží v polorovinách navzájem opačných s hraniční přímkou.



Obr. 5. 16

Dvojice střídavých úhlů: $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}'$ $\quad \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}'$

Jsou-li přímky *a, b* **rovnoběžné** (*a* ∥ *b*), pak jsou střídavé úhly **shodné**. (Obr. 5. 17)

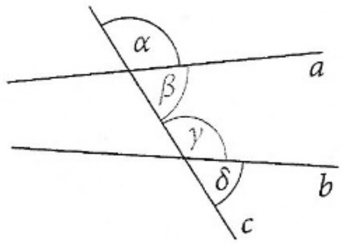


Obr. 5. 17

$$\boldsymbol{\alpha = \alpha' \quad \beta = \beta' \quad \gamma = \gamma' \quad \delta = \delta'}$$ [27]

Přilehlé úhly

Stejně jako v případě souhlasných a střídavých úhlů vycházíme z dvojice různoběžných přímek *a, b* a třetí *c* (příčka), která je k oběma různoběžná. (Obr. 5. 18)



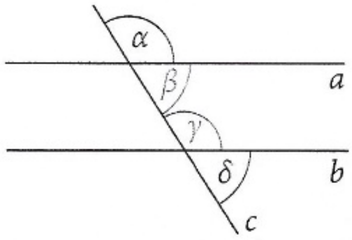
Obr. 5. 18

Přilehlé úhly leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou *c*.

Dvojice přilehlých úhlů: $\boldsymbol{\alpha, \delta} \quad \boldsymbol{\beta, \gamma}$

Jsou-li přímky *a, b* **rovnoběžné** (*a* ∥ *b*), pak je **součet dvojice přilehlých úhlů 180°**. (Obr. 5. 19)

[27] KRYNICKÝ, Martin. Matematika ZŠ: Souhlasné a střídavé úhly. *Realistické učebnice matematiky a fyziky: když (se) chcete naučit...* [online]. Strakonice, 2010, 27. 8. 2018 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice/03%20Matematika%20Z%C5%A0/01%206.%20ro%C4%8Dn%C3%ADk/05%20%C3%9Ahel/14%20Souhlasn%C3%A9%20a%20st%C5%99%C3%ADdav%C3%A9%20%C3%BAhly.pdf



Obr. 5. 19

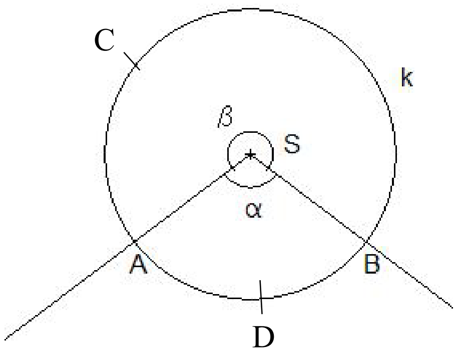
$$\boldsymbol{\alpha + \delta = 180°} \quad \boldsymbol{\beta + \gamma = 180°}$$

5. 3. Úhly příslušné k obvodu kružnice

Středový úhel

Body A, B dělí kružnici k na dva oblouky – ADB a ACB. Každému z těchto oblouků odpovídá jeden středový úhel (oblouku ADB úhel α, oblouku ACB úhel β). Říkáme, že se jedná o středový úhel příslušný oblouku ADB (ACB). (Obr. 5. 20)

Středovým úhlem nazveme takový úhel α, (β), jehož vrcholem je střed kružnice, jehož ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k.

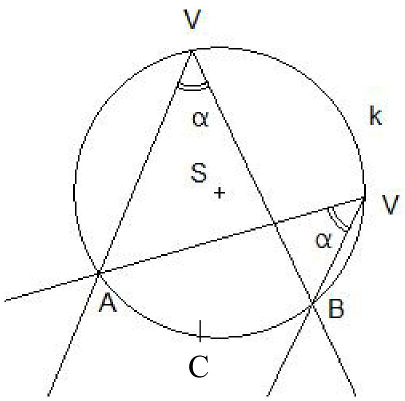


Obr. 5. 20

Každému oblouku kružnice přísluší právě jeden středový úhel – je určen jednoznačně, protože kružnice má pouze jeden střed.

Obvodový úhel

Obvodovým úhlem nazveme každý úhel, jehož vrchol V leží na kružnici a jehož ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice ($A \neq V$, $B \neq V$). (Obr. 5. 21)

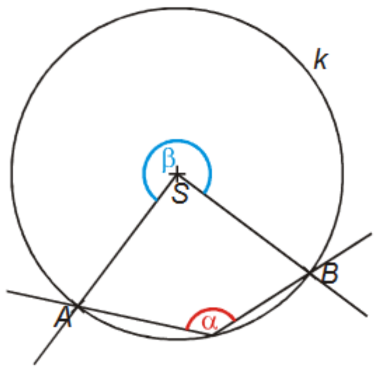


Obr. 5. 21

Obvodových úhlů příslušných danému oblouku ACB existuje v kružnici nekonečně mnoho, protože druhý oblouk AVB obsahuje nekonečně mnoho bodů. Všechny tyto obvodové úhly však mají stejnou velikost.

Věta o středovém a obvodovém úhlu

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného témuž oblouku. (Obr. 5. 22). [28]



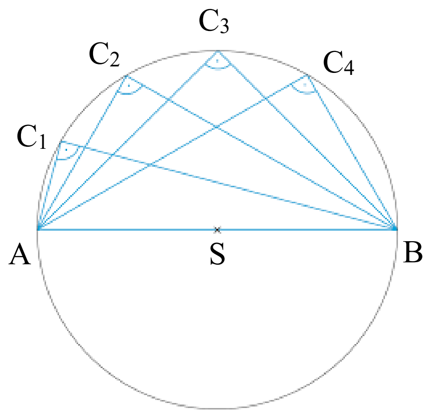
$$\beta = 2\alpha$$

Obr. 5. 22

Thaletova věta

Všechny obvodové úhly sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravé. (Obr. 5. 23)

[28] KRYNYCKÝ, Martin. Učebnice matematiky pro gymnázia: Planimetrie. *Učebnice matematiky pro gymnázia: Planimetrie* [online]. Strakonice: www.realisticky.cz, 2010, 2010 [cit. 2019-01-27]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20S%C5%A0/03%20Planimetrief



Obr. 5. 23

$|\sphericalangle AC_1B| = |\sphericalangle AC_2B| = |\sphericalangle AC_3B| = |\sphericalangle AC_4B| = 90°$

Takových úhlů existuje nekonečně mnoho.

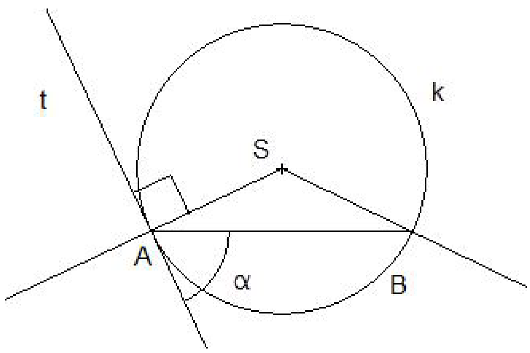
Kružnici *k*, na které leží body *A, B, C* (*C*$_1$, *C*$_2$, *C*$_3$, …) nazýváme Thaletovou kružnicí.

Větu s největší pravděpodobností znali už Egypťané a Babyloňané. Jako první ji však dokázal až Thalés z Milétu (zhruba 600 l. př. n. l.).

Thaletova věta je zvláštním případem věty o středovém a obvodovém úhlu – středový úhel má velikost 180°, obvodový pak velikost poloviční, tzn. 90°.

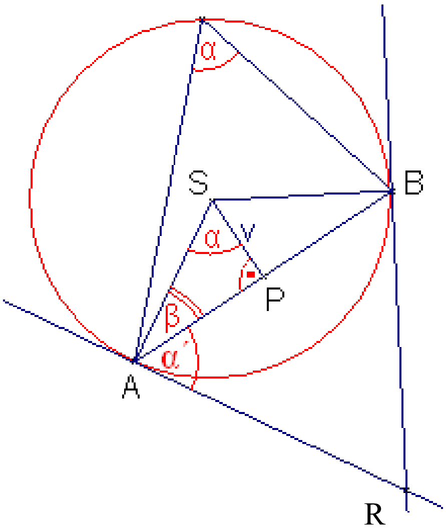
Úsekový úhel

Úsekovým úhlem nazveme úhel, který svírá tětiva *AB* kružnice *k* s tečnou *t* kružnice *k* v bodě *A*, případně v bodě *B*. (Obr. 5. 24)



Obr. 5. 24

Vztah mezi středovým, obvodovým a úsekovým úhlem



Obr. 5. 25

Trojúhelník ABS (Obr. 5. 25) je rovnoramenný ($|AS| = |BS|$, základna AB).

Výška na základnu AB rozdělí středový úhel na dva stejně velké – mají poloviční velikost než středový úhel ⇒ mají velikost úhlu α.

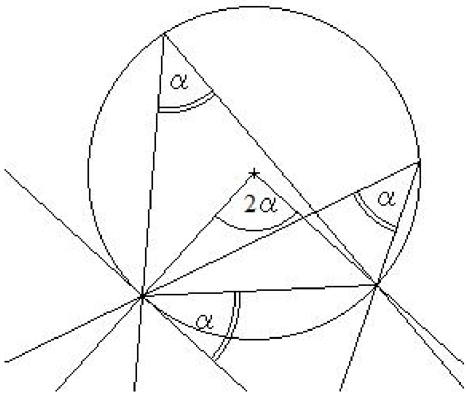
V trojúhelníku APS má úhel β velikost $\beta = 90° - \alpha$

$\alpha' + \beta = 90°$ (polopřímka AR je tečnou ke kružnici ⇒ je kolmá na poloměr AS) ⇒ $\alpha' = 90° - \beta$

$\alpha' = 90° - (90° - \alpha)$

⇒ $\underline{\alpha' = \alpha}$

Obvodový a úsekový úhel mají tedy stejnou velikost. Středový úhel má oproti těmto dvěma úhlům velikost dvojnásobnou. (Obr. 5. 26) [29]



Obr. 5. 26

[29] SUSSELMILCH, David. Planimetrie: úsekový úhel. *Planimetrie: úsekový úhel* [online]. Praha: TOPlist, 1997, 1997 [cit. 2019-01-27]. Dostupné z: http://planimetrie.kvalitne.cz/uhly_usekovy.html

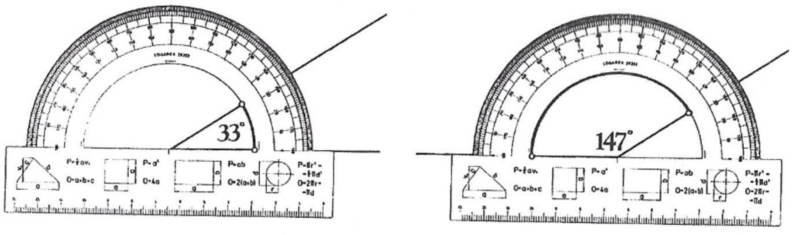
6. Početní operace s úhly

6. 1. Měření úhlů

Dříve, než začneme provádět operace s úhly, musíme se naučit správně měřit velikosti úhlů.

Úhly ve škole měříme úhloměrem.

Úhloměr přiložíme k úhlu tak, že značka na středu úhloměru leží na vrcholu úhlu. Hranu úhloměru přiložíme k jednomu rameni úhlu. Velikost úhlu odečteme na stupnici v místě, kde druhé rameno protíná úhloměr. (Obr. 6. 1)



[30]

Obr. 6. 1

6. 2. Sčítání a odčítání úhlů

Sčítat úhly můžeme početně i graficky.

Předtím, než se pustíme do sčítání (a odčítání) úhlů, musíme si ukázat, jak graficky **přenášet úhly**.

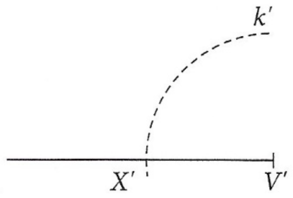
Příklad 1: Úhel XVA přeneste na danou polopřímku s počátkem V' tak, aby byl bod V' vrcholem přeneseného úhlu. (Obr. 6. 2)

Obr. 6. 2

[30] PALKOVÁ, Martina. *Průvodce matematikou 2, aneb, Co byste měli znát z geometrie ze základní školy*. Brno: Didaktis, 2007. Co byste měli znát ze základní školy. ISBN 978-80-7358-083-4, str. 36.

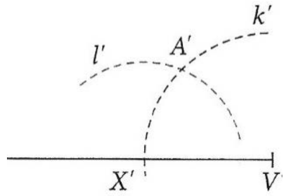
Postup:

1) Ve vrcholu V' sestrojíme kružnici k' se stejným poloměrem jako má kružnice k. Průsečík kružnice k' s danou polopřímkou označíme X'. (Obr. 6. 3)



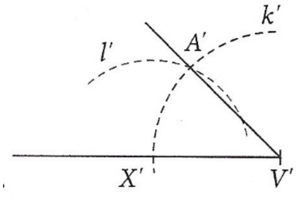
Obr. 6. 3

2) Sestrojíme kružnici l' se středem v bodě X' s poloměrem $|XA|$. Průsečík kružnic k' a l' označíme A'. (Obr. 6. 4)



Obr. 6. 4

3) Sestrojíme polopřímku $V'A'$ - tvoří druhé rameno přeneseného úhlu $X'V'A'$. (Obr. 6. 5)



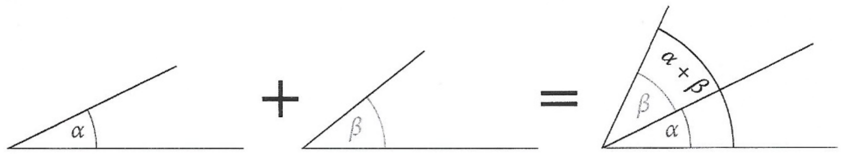
[31]

Obr. 6. 5

6. 2. 1. Grafické sčítání a odčítání úhlů

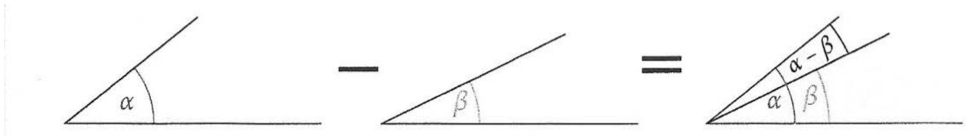
Graficky úhly α, β **sčítáme** tak, že jeden úhel přeneseme k druhému (popsaným způsobem) mimo úhel tak, aby měly společné rameno se společným vrcholem. Vytvoříme tak dvojici styčných úhlů. Grafickým součtem těchto úhlů je pak jejich sjednocení. Krajní ramena svírají výsledný úhel $\alpha + \beta$. (Obr. 6. 6)

[31] PALKOVÁ, Martina. *Průvodce matematikou 2, aneb, Co byste měli znát z geometrie ze základní školy*. Brno: Didaktis, 2007. Co byste měli znát ze základní školy. ISBN 978-80-7358-083-4, str. 19.



Obr. 6. 6

Graficky úhly α, β ($\alpha > \beta$) (Obr. 6. 7) **odčítáme** tak, že úhel β přeneseme k úhlu α tak, aby měly společné rameno se společným vrcholem. Ramena úhlů $\alpha, \beta,$ která spolu nesplývají, svírají výsledný úhel, jehož velikost se rovná rozdílu úhlů α, β .



[32]

Obr. 6. 7

V případě, že je naopak $\alpha < \beta$, lze určit pouze $\beta - \alpha$.

Odčítat můžeme vždy pouze úhel s menší velikostí od úhlu s větší velikostí (pořadí nelze prohodit). Jedinou výjimkou je případ, kdy mají oba úhly stejnou velikost. Jejich rozdílem je pak úhel o velikosti 0° (nulový úhel).

6. 2. 2. Početní sčítání a odčítání úhlů

Chceme-li sčítat (odčítat) velikosti úhlů, sčítáme (odčítáme) zvlášť stupně, zvlášť minuty, zvlášť vteřiny.

<u>Příklad 1</u>: Sečtěte úhly $\alpha = 48°\ 15'\ 23''$ a $\beta = 95°\ 27'\ 31''$.

$$\begin{array}{r} 48°\ 15'\ 23'' \\ \underline{95°\ 27'\ 31''} \\ 143°\ 42'\ 54'' \end{array} \rightarrow \quad \underline{\alpha + \beta = 143°\ 42'\ 54''}$$

Pokud při sčítání úhlů dojde k tomu, že počet minut (vteřin) bude větší nebo roven 60, převedeme tento počet na stupně (minuty) – podle následujícího pravidla.

1° = 60′ 1′ = 60′′

<u>Příklad 2</u>: Sečtěte úhly $\alpha = 48°\ 51'\ 32''$ a $\beta = 95°\ 27'\ 31''$

[32] PALKOVÁ, Martina. *Průvodce matematikou 2, aneb, Co byste měli znát z geometrie ze základní školy*. Brno: Didaktis, 2007. Co byste měli znát ze základní školy. ISBN 978-80-7358-083-4, str. 20.

$$\frac{\begin{array}{r}48° \, 51' \, 32'' \\ 95° \, 27' \, 31''\end{array}}{143° \, 78' \, 63''} = 143° \, 79' \, 03'' = \underline{144° \, 19' \, 03''}$$

Pokud při odčítání úhlů nastane situace, že menšitel má více minut (vteřin) než menšenec, musíme si nejprve „vypůjčit“ potřebný počet stupňů (minut) a převést je na minuty (vteřiny) tak, abychom mohli úhly odečíst.

Příklad 3: Odečtěte úhly $\alpha = 148° \, 11' \, 32''$ a $\beta = 95° \, 27' \, 13''$

$$\frac{\begin{array}{r}148° \, 11' \, 32'' \\ 95° \, 27' \, 13''\end{array}}{-} = \frac{\begin{array}{r}147° \, 71' \, 32'' \\ -95° \, 27' \, 13''\end{array}}{52° \, 44' \, 19''}$$

Příklad 4: Odečtěte úhly $\gamma = 87° \, 32' \, 15''$ a $\delta = 54° \, 42' \, 33''$

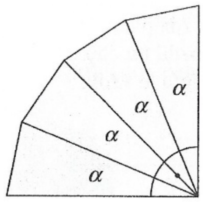
$$\frac{\begin{array}{r}87° \, 32' \, 15'' \\ 54° \, 42' \, 33''\end{array}}{-} = \frac{\begin{array}{r}86° \, 92' \, 15'' \\ -54° \, 42' \, 33''\end{array}}{-} = \frac{\begin{array}{r}86° \, 91' \, 75'' \\ -54° \, 42' \, 33''\end{array}}{32° \, 49' \, 42''}$$

6. 3. Násobení úhlů přirozeným číslem

6. 3. 1. Grafické násobení úhlů přirozeným číslem

Graficky násobit úhel znamená, že daný úhel budeme několikrát přičítat.

Máme-li například graficky určit čtyřnásobek nějakého úhlu, přičteme k tomuto úhlu 3 úhly stejné velikosti. (Obr. 6. 8)



Obr. 6. 8

6. 3. 2. Početní násobení úhlů přirozeným číslem

Chceme-li úhly vynásobit numericky, vynásobíme (stejně jako při sčítání) zvlášť stupně, zvlášť minuty a zvlášť vteřiny. Pokud po vynásobení bude mít výsledek více než 60 vteřin, převedeme je na minuty. Obdobně minuty převedeme na stupně.

Příklad 1: Vypočítejte: $4 * \alpha$, je-li $\alpha = 32° 16' 12''$

$4 * 32° 16' 12'' = 128° 64' 48'' = 129° 04' 48''$

6. 4. Dělení úhlů

Početně můžeme úhly dělit přirozenými čísly. Graficky však obecný úhel pouze 2, 4, 8 atd. Obecně lze říci, že graficky dělit úhel můžeme hodnotami 2^n, kde *n* je přirozené číslo.

Příklad 1: Vypočítejte: α : 2, je-li α = 84° 30′

$84° 30' : 2 = 42° 15'$

Pokud není některá z daných hodnot daným dělitelem celočíselně dělitelná, postupujeme tak, že si buď „vypůjčíme“ potřebný počet z větší jednotky, (minuty ze stupňů, vteřiny z minut) a převede podle pravidla 1° = 60′, 1′ = 60′′, nebo převedeme zbytek z tohoto dělení na menší jednotku a pokračujeme v dělení.

Příklad 2: Vypočítejte: α : 4, je-li α = 137° 20′

$137° 20' : 4 = 136° : 4 + (1° + 20') : 4 = 34° + 80' : 4 = 34° + 20' = 34° 20'$

Příklad 3: Vypočítejte: α : 4, je-li α = 148° 02′

$148° 02' : 4 = 144° : 4 + (2° + 2') : 4 = 36° + (120' + 2') : 4 = 36° + 30' + 2' : 4$
$= 36° 30' + 120'' : 4 = 36° 30' 30''$

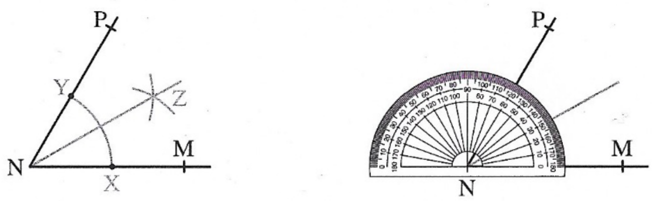
Příklad 4: Vypočítejte: α : 5, je-li α = 137° 17′

$137° 17' : 5 = 135° : 5 + (2° + 17') : 5 = 27° + (120' + 17') : 5 = 27° + 137' : 5$
$= 27° + 27' + 2' : 5 = 27° 27' + 120'' : 5 = 27° 27' 24''$

6. 4. 1. Osa úhlu

Osa úhlu je polopřímka, která daný úhel dělí na dvě stejné části (úhly s velikostí jedné poloviny původního úhlu).

Pomocí kružítka označíme úhel obloučkem libovolného poloměru. Postupně sestrojíme z obou průsečíků tohoto oblouku a ramen oblouky o stejném poloměru. Průsečík těchto dvou oblouků spojíme s vrcholem úhlu. Tato polopřímka je osou úhlu. Změřením pomocí úhloměru můžeme zkontrolovat, že osa původní úhel půlí. (Obr. 6. 9)



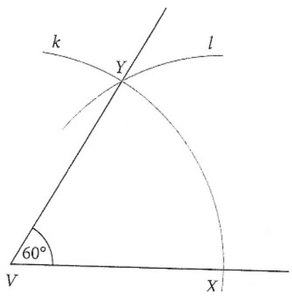
Obr. 6. 9

Při početní operaci postupujeme obdobně jako v předchozích výpočtech.

6. 4. 2. Konstrukce úhlu dané velikosti – bez použití úhloměru

Konstrukce úhlu o velikosti 60°

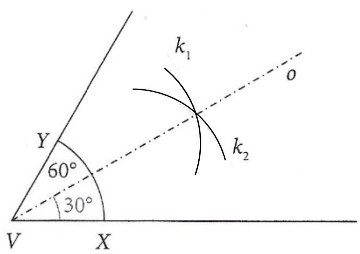
Konstrukci tohoto úhlu začneme tím, že sestrojíme libovolnou polopřímku VX. Dále sestrojíme kružnici $k(V, r = |VX|)$ a kružnici $l(X,\ r = |VX|)$. Průsečíkem těchto dvou kružnic je bod Y. Polopřímka VY tvoří druhé rameno hledaného úhlu. (Obr. 6. 10)



Obr. 6. 10

Konstrukce úhlu o velikosti 30°

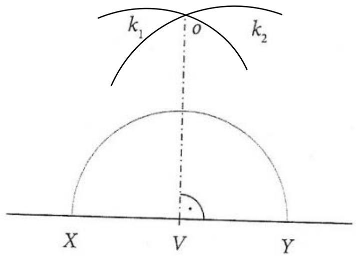
Nejprve sestrojíme právě popsaným způsobem úhel o velikosti 60°. Tento úhel pak osou rozdělíme na poloviny. Tím získáme úhel o velikosti 30°. (Obr. 6. 11)



Obr. 6. 11

Konstrukce úhlu o velikosti 90°

Nejprve sestrojíme přímý úhel. Poté zkonstrujeme osu tohoto úhlu. Ta nám úhel rozdělí na dva pravé úhly. (Obr. 6. 12)



[33]

Obr. 6. 12

S využitím grafického sčítání, odčítání, dělení a násobení úhlů lze pak sestrojit další úhly – např. 120°, 45°, 135°, 150° atd.

6. 4. 3. Trisekce úhlu

Trisekcí úhlu rozumíme konstrukční rozdělení úhlu na tři stejné části za užití pouze pravítka a kružítka (pro obecný úhel). V případě, že budeme chtít dělit přímý nebo plný úhel, je úloha snadno řešitelná, protože sestrojit úhel o velikosti 60° lze snadno. Stejně tak není problém graficky na třetiny rozdělit pravý úhel. Stačí opět využít úhel o velikosti 60° a ten pak osou rozdělit na dva úhly s velikostí 30°. Tím nám vzniknou tři úhly této velikosti.

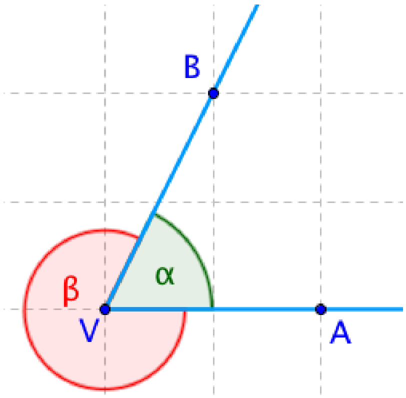
Tím, jak rozdělit na třetiny úhel obecné velikosti, se matematici zabývali již zhruba od 5. st. př. n. l. Teprve v 19. století se francouzskému matematikovi Évaristu Galoisovi podařilo dokázat, že je úloha neřešitelná.

Trisekce úhlu je jedním z tzv. klasických konstrukčních problémů antické matematiky. Dalšími dvěma jsou kvadratura kruhu (k danému kruhu zkonstruovat čtverec o stejném obsahu pouze - za užití pravítka a kružítka) a duplikace krychle (k dané krychli zkonstruovat krychli s dvojnásobným objemem pouze za užití pravítka a kružítka). [34]

7. Orientovaný úhel

Několikrát již zde bylo zmíněno, že úhel tvoří dvě polopřímky (ramena) se společným počátkem (vrcholem). Zmíněné polopřímky VA, VB vždy v rovině vytyčí dva úhly. Pokud nejsou tyto úhly shodné (180°), je jeden úhel větší (nekonvexní) a jeden menší (konvexní). V obou případech se však jedná o úhel $\sphericalangle AVB$. (Obr. 7. 1)

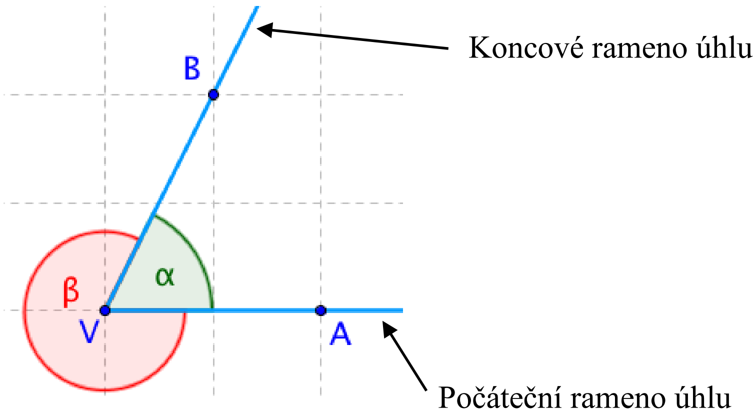
[33] PALKOVÁ, Martina. *Průvodce matematikou 2, aneb, Co byste měli znát z geometrie ze základní školy*. Brno: Didaktis, 2007. Co byste měli znát ze základní školy. ISBN 978-80-7358-083-4, str. 22.
[34] ROKYTA, Mirko. Trisekce úhlu, kvadratura kruhu a jiné podobné "nemožné úlohy". *Trisekce úhlu, kvadratura kruhu a jiné podobné "nemožné úlohy"* [online]. Praha: katedra matematické analýzy MFF UK Praha [cit. 2019-02-01]. Dostupné z: http://www.talnet.cz/documents/18/39cdd2ad-93d3-4dca-afb4-97796ebeaed8



Obr. 7. 1

Pokud není úhel AVB blíže určen, není jasné, o kterém z těchto úhlů vlastně mluvíme. Většinou předpokládáme, že správným úhlem je ten s menší velikostí. Tento náš předpoklad však nemusí být vždy správný. Abychom předešli možnému nedorozumění, zavádíme pojem orientovaný úhel.

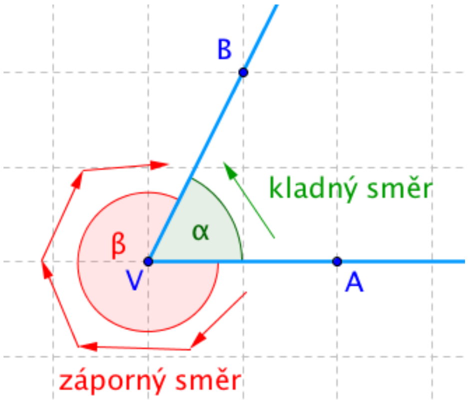
Předtím však ještě musíme zavést dva nové pojmy – tj. počáteční a koncové rameno úhlu. (Obr.7. 2). Polopřímku VA nazveme počátečním ramenem, polopřímku VB pak koncovým ramenem úhlu AVB.



Obr. 7. 2

Z toho, že zavádíme pojmy počáteční a koncové rameno úhlu, je zřejmé, že záleží na pořadí ramen úhlu, který vznikl tak, že jedno z ramen, která se původně překrývala, se pohnulo (bod V zůstává společným počátkem polopřímek) a dostalo se až do pozice koncového ramene.

A nyní nastává okamžik, kdy musíme odlišit, kterým směrem se rameno úhlu „vydalo“. Vznikl-li úhel pohybem ramene **proti směru** pohybu hodiových ručiček, má úhel **kladnou** velikost. Naopak, pokud úhel vznikl tak, že se rameno úhlu pohybovalo **po směru** hodinových ručiček, jedná se o úhel se **zápornou** velikostí. (Obr. 7. 3)



Obr. 7. 3

Orientovaným úhlem pak označíme uspořádanou dvojici polopřímek se společným počátkem. Zapsat ho můžeme dvěma způsoby. Buď $\langle\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}\rangle$, nebo spíše jednodušeji $\widehat{AVB}$.

U takto definovaného úhlu hovoříme o **základní velikosti** orientovaného úhlu. Ta vznikne pohybem počátečního ramene VA do polohy koncového ramene VB proti směru pohybu hodinových ručiček, tzn. v kladném směru. Základní velikost orientovaného úhlu je vždy v intervalu $\langle \mathbf{0°}, \mathbf{360°})$, nebo je-li velikost úhlu vyjádřena v obloukové míře $\langle 0, 2\pi)$. Zprava je tento interval otevřený, protože, má-li úhel velikost 360° (2π), koncové rameno VB splyne s počátečním ramenem VA. Velikost úhlu je tím pádem rovna 0°. [35]

V případě, že velikost úhlu přesáhne 360°, znamená to, že koncové rameno VB úhlu „oběhlo kolem dokola“ (a to i několikrát) a pohybovalo se daným směrem dále. Každou takovou velikost úhlu můžeme vyjádřit v základní velikosti jednoduchým výpočtem. Od dané velikosti odečteme 360° tolikrát, kolikrát je to možné (aniž bychom dostali úhel se zápornou velikostí). To lze provést jak ve stupňové, tak v obloukové míře.

Příklad 1: Velikost daného orientovaného úhlu vyjádřete v základní velikosti:

a) 540° b) 960° c) $\frac{9}{4}\pi$ d) $\frac{17}{2}\pi$

Řešení: a) 540° = 360° + 180° → základní velikost = 180°

b) 960° = 2 * 360° + 240° → základní velikost = 240°

c) $\frac{9}{4}\pi = 2\pi + \frac{1}{4}\pi$ → základní velikost = $\frac{1}{4}\pi$

d) $\frac{17}{2}\pi = 8\pi + \frac{1}{2}\pi$ → základní velikost = $\frac{1}{2}\pi$

8. Goniometrie

Při výčtu vlastností a využití úhlů nelze opomenout goniometrické funkce a jejich význam nejen při výpočtech velikostí úhlů. Na začátek pár slov o historii goniometrie.

[35] *Matematika.cz: Orientovaný úhel* [online]. Brno: Nová média, 2014 [cit. 2018-12-25]. Dostupné z: https://matematika.cz/orientovany-uhel

Co slovo goniometrie znamená? Co si pod ním představit?

Toto označení pochází původně z řečtiny a vzniklo spojením dvou částí: gónia (úhel) + metró (měřím). Jedná se tedy o kapitolu z matematiky, která se zabývá měřením úhlů a jejich výpočty. Hlavním prostředkem, kterého se při těchto výpočtech využívá, jsou goniometrické funkce.

V jedné z prvních kapitol této práce jsem se zmínila o tom, že již Egypťané a Babyloňané měli značné poznatky o úhlech. Bezesporu je možné říci, že právě oni položili základy goniometrie (matematické disciplíny zabývající se goniometrickými funkcemi). Jejich hlavním zájmem byla trigonometrie (trigónon = trojúhelník). Tento podobor goniometrie, jenž využívá goniometrických funkcí při řešení úloh o trojúhelnících, pro ně byl velmi důležitým – nezbytně jej potřebovali v zeměměřictví, astrologii, navigaci, atd. Nápisy na zhruba 3 700 let staré desce nazvané Plimpton 322 (Obr. 2. 1) (australští vědci jsou přesvědčeni, že se jim je konečně podařilo rozluštit) dokazují, že Babyloňané již v té době (více než 1 000 let před Řeky) znali trigonometrii. Tabulka obsahuje sérii 15 takových pravoúhlých trojúhelníků, že první trojúhelník je rovnoramenný. U každého dalšího ze čtrnácti trojúhelníků jedna odvěsna zůstává stejná, druhá se zkracuje. Tímto způsobem se postupně zmenšuje úhel mezi přeponou a pevnou odvěsnou.

Goniometrickými funkcemi a výpočty jejich hodnot se pravděpodobně jako první zabýval Hipparchos z Nikaje (zhruba 150 let př. n. l.). Porovnával délky oblouku kružnice při daném středovém úhlu s délkami jim odpovídajících tětiv. Jeho dílo výrazně rozšířil Ptolemaios (odvodil vzorce odpovídající dnešním $\sin(\alpha+\beta), \sin(\alpha-\beta)$). K velkému pokroku pak přispěli Indové a Arabové. Ve 4. – 5. století byla poprvé uvedena definice sinu jako poměru mezi polovinou úhlu a polovinou sečny. Dnes používané slovo sinus pochází z latinského výrazu pro záhyb nebo zátoku. Vzniklo nesprávným překladem ve významu „půltětiva“. Zhruba v 10. století již Arabové používali všechny goniometrické funkce. Pro sinus a tangens měli tabulky s přesností na 8 desetinných míst pro úhly vzdálené od sebe o čtvrtinu stupně.

Zajímavostí je, že ačkoliv dnes při výpočtech používáme častěji funkci tangens (především proto, že na kalkulačkách kotangens není a výpočet je proto komplikovanější), v historii matematiky se objevil dříve kotangens. Funkce kotangens byla známa již zhruba v 9. století. Tangens se poprvé objevil až v druhé polovině 16. století v díle Regiomontana. Teprve koncem 16. století byly goniometrické funkce definovány tak, jak je dnes především známe – tzn. přes pravoúhlé trojúhelníky (v díle Opus palatinum de triangulis). [36]

Definovat goniometrické funkce je možné několika způsoby – pomocí vlastností, řad, jednotkové kružnice atd.

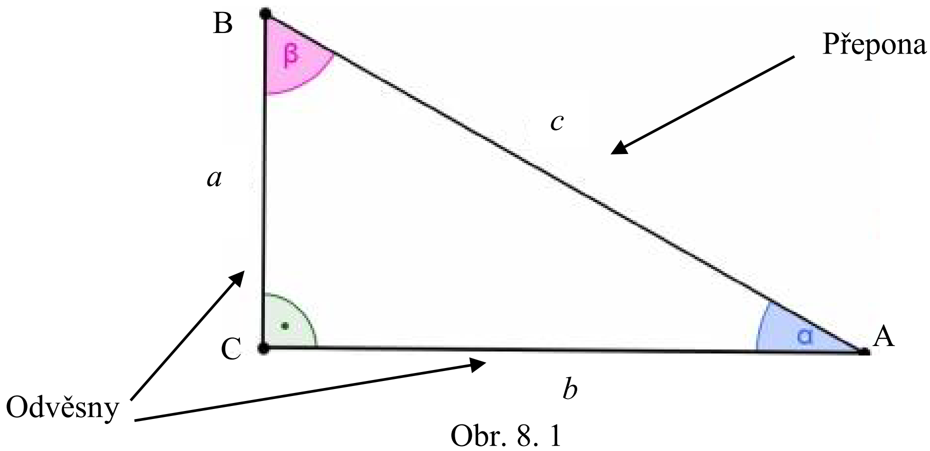
8. 1. Goniometrické funkce definované pomocí pravoúhlého trojúhelníku

Toto zavedení goniometrických funkcí je pro následné výpočty nejdůležitějším. Proto

[36] REICHL, Jaroslav. Encyklopedie fyziky: Dějiny matematiky a fyziky. *Encyklopedie fyziky: Dějiny matematiky a fyziky* [online]. Praha: Aitis, 2018, 2018 [cit. 2018-12-25]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1545-nazvy-goniometrickych-funkci#
Matematika s radostí: goniometrie [online]. Ostrava: Isibalo, 2016 [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: http://msr.vsb.cz/goniometrie/trigonometrie

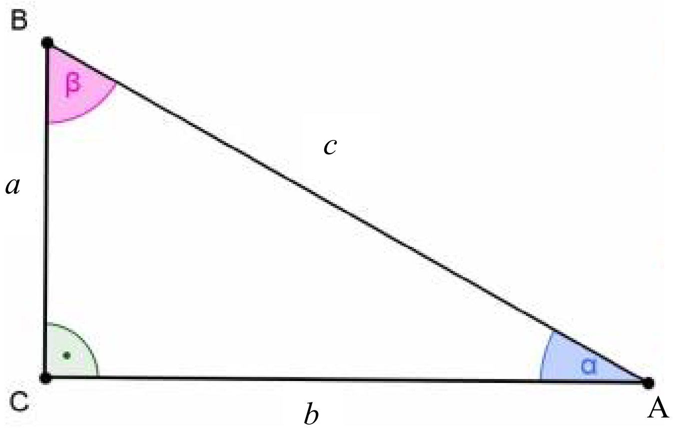
jej uvádím na prvním místě.

Máme-li pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, nazýváme strany *a, b* odvěsnami, stranu *c* přeponou (vždy nejdelší ze všech tří stran pravoúhlého trojúhelníka). Trojúhelník ABC může vypadat například jako na (Obr. 8. 1).



Obr. 8. 1

Pro definování jednotlivých goniometrických funkcí nestačí určit, která strana je odvěsnou a která přeponou. Důležitý je fakt, jakou polohu má odvěsna vzhledem k danému úhlu – tzn., je-li přilehlá (leží při úhlu) nebo protilehlá (leží proti úhlu). (Obr. 8. 2)



α: *a* …… protilehlá odvěsna
b …… přilehlá odvěsna

β: *a* …… přilehlá odvěsna
b …… protilehlá odvěsna

Obr. 8. 2

Jednotlivé goniometrické funkce jsou definovány poměrem délek stran pravoúhlého trojúhelníku ABC (Obr. 8. 2) takto:

sinus ***kosinus***

$$sin\ \alpha = \frac{protilehlá\ odvěsna}{přepona} = \frac{a}{c}$$

$$cos\ \alpha = \frac{přilehlá\ odvěsna}{přepona} = \frac{b}{a}$$

$$sin\ \beta = \frac{protilehlá\ odvěsna}{přepona} = \frac{b}{c} \qquad cos\ \beta = \frac{přilehlá\ odvěsna}{přepona} = \frac{a}{c}$$

tangens ***kotangens***

$$tg\ \alpha = \frac{protilehlá\ odvěsna}{přilehlá\ odvěsna} = \frac{a}{b} \qquad cotg\ \alpha = \frac{přilehlá\ odvěsna}{protilehlá\ odvěsna} = \frac{b}{a}$$

$$tg\ \beta = \frac{protilehlá\ odvěsna}{přilehlá\ odvěsna} = \frac{b}{a} \qquad cotg\ \beta = \frac{přilehlá\ odvěsna}{protilehlá\ odvěsna} = \frac{a}{b}$$

Goniometrické funkce, definované pomocí pravoúhlého trojúhelníku, jsou jen pro ostré úhly.

8. 2. Goniometrické funkce definované pomocí jednotkové kružnice

Hodnoty goniometrických funkcí můžeme vyčíst z jednotkové kružnice, tzn. kružnice *k* se středem O o poloměru jedna.

Průsečík této kružnice s koncovým ramenem orientovaného úhlu α označíme *C*. Bodem *C* sestrojíme kolmici k ose *x*. Jejich průsečík je na ose *x* obrazem reálného čísla X_C. Bodem *C* dále vedeme kolmici k ose *y*. Jejich průsečík je na ose *y* obrazem reálného čísla Y_C. O číslech X_C, Y_C řekneme, že jsou první a druhou souřadnicí bodu *C*, značíme $C[X_C, Y_C]$. (Obr. 8. 3)

První souřadnici bodu *C* jednotkové kružnice na koncovém rameni orientovaného úhlu α v základní poloze nazýváme kosinus α. Hodnotu funkce kosinus „odečteme“ na ose *x* (zelená). (Obr. 8. 3)

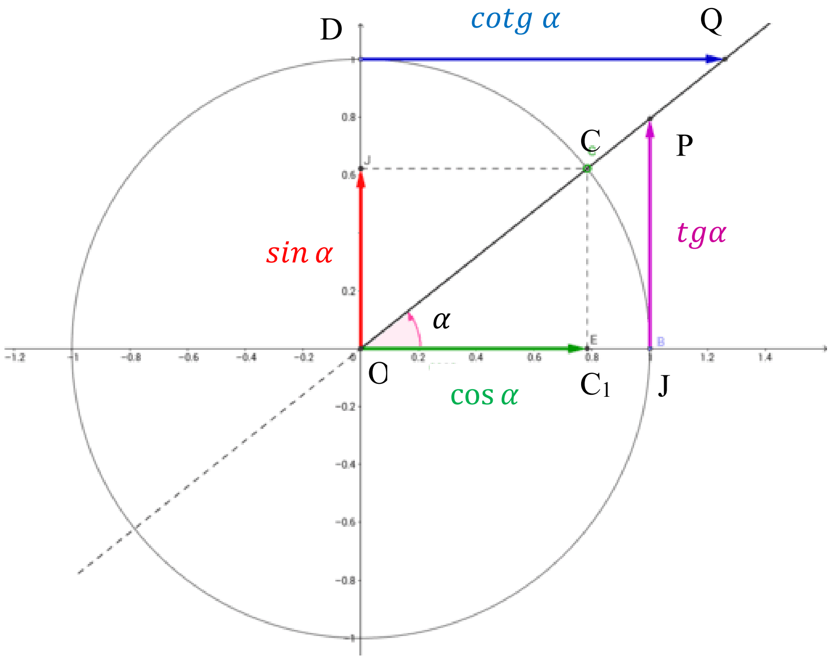
Druhou souřadnici bodu *C* jednotkové kružnice na koncovém rameni orientovaného úhlu α v základní poloze nazýváme sinus α. Hodnotu funkce sinus „odečteme“ na ose *y* (červená). (Obr. 8. 3)

Uvedenými definičními vztahy je každému reálnému číslu přiřazeno právě jedno reálné číslo $sin\,x$ a právě jedno reálné číslo $cos\,x$. Tyto vztahy udávají funkční předpisy funkce sinus: $y = sin\,x$ a funkce kosinus: $y = cos\,x$, *x* se nazývá argument funkce.

Hodnoty funkcí tangens a kotangens argumentu *x* sestrojíme opět pomocí souřadnic bodů *C* jednotkové kružnice *k*. Patu kolmice vedené bodem *C* k ose *x* značíme C_1. V bodech $J[1,0]$, $D[0,1]$ sestrojíme tečny kružnice *k*, které jsou rovnoběžné po řadě se souřadnicovými osami *y*, *x*. Přímka *OC* protne tyto tečny po řadě v bodech *P, Q.* Z podobnosti trojúhelníků $\Delta\, C_1OC \sim \Delta\, JOP$ a $\Delta\, C_1OC \sim \Delta\, DQO$ plyne, že $|PJ| = |tg\ \alpha|$, $|QD| = |cotg\ \alpha|$, takže $P[1, tg\ \alpha]$, $Q[cotg\ \alpha, 1]$. (Obr. 8. 3)

Hodnotě funkce tangens odpovídá délka úsečky JP (polopřímka JP je tečnou k jednotkové kružnici – prochází bodem J $[1, 0]$, JP ∥ *y*) (fialová). (Obr. 8. 3)

Hodnotě funkce kotangens odpovídá délka úsečky DQ (polopřímka DQ je tečnou k jednotkové kružnici – prochází bodem D $[0, 1]$, DQ ∥ *x*) (modrá). (Obr. 8. 3)



[37]

Obr. 8. 3

8. 3. Vlastnosti goniometrických funkcí

Goniometrické funkce mají celou řadu vlastností a vztahů. Jejich výčet by byl hodně obsáhlý. Proto zde uvedu pouze ty nejdůležitější a nejčastěji používané. Uvedené vztahy platí pro reálná čísla *x* a přirozená čísla *k*.

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

$$tg\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x} \qquad cos\,x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq (2k+1)\,\frac{\pi}{2}$$

$$cotg\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x} \qquad \sin x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq k\pi$$

[37] PETRÁNEK, Oldřich. *Matematika 3: pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy*. Dotisk 1. vydání. Praha: SPN, 1980.
MOTYČKOVÁ, Marie. Goniometrie a trigonometrie: Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole. *Goniometrie a trigonometrie: Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole* [online]. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta UK, 2006, 2006 [cit. 2019-02-26]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/motyckova/Stranky_s_aplety/Uvod.html

$$tg\,x * cotg\,x = 1 \quad x \neq k\frac{\pi}{2}$$

$$sin\,x = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad cos\,x = sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$sin\,2x = 2\,sin\,x\,cos\,x$$

$$cos\,2x = cos^2 x - sin^2 x$$

$$sin\,(x + y) = sin\,x\,cos\,x + cos\,x\,sin\,x$$

$$sin\,(x - y) = sin\,x\,cos\,y - cos\,x\,sin\,y$$

$$cos\,(x + y) = cos\,x\,cos\,y - sin\,x\,sin\,y$$

$$cos\,(x - y) = cos\,x\,cos\,y + sin\,x\,sin\,y$$

U goniometrických funkcí, stejně jako všech ostatních funkcí posuzujeme sudost, resp. lichost funkce.

Pro sudou funkci platí: $f(-x) = f(x)$, pro všechna *x*, pro která je daná funkce definována (tj. pro všechna *x* z definičního oboru $D(f)$).
Pro lichou funkci platí: $f(-x) = -f(x)$, pro všechna *x*, pro která je daná funkce definována (tj. pro všechna *x* z definičního oboru $D(f)$).

sin (- *x*) = - *sin x* ……... sinus je funkce lichá

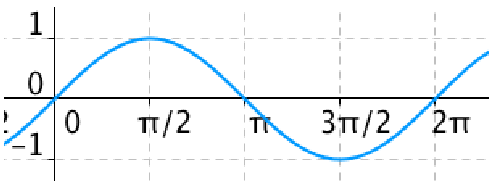
cos (- *x*) = *cos x* ……… kosinus je funkce sudá

tg (- *x*) = - *tg x* ……… tangens je funkce lichá

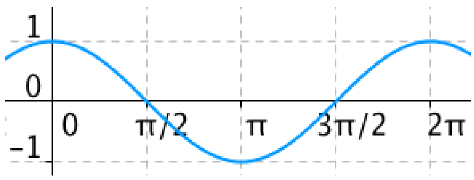
cotg (- *x*) = - *cotg x* …..kotangens je funkce lichá

Grafy goniometrických funkcí:

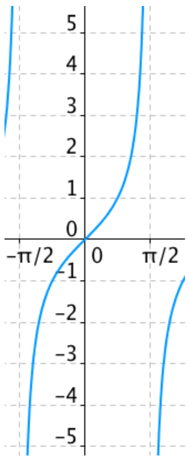
Sinus



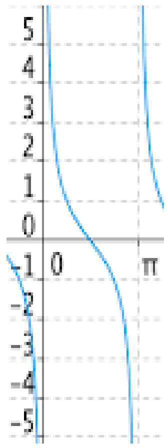
Kosinus



Tangens



Kotangens



Tabulka Definičních oborů a Oborů hodnot goniometrických funkcí

Funkce f	$D(f)$	$H(f)$
sin	R	$\langle -1; 1 \rangle$
cos	R	$\langle -1; 1 \rangle$
tg	$R - \left\{(2k+1)\ \frac{\pi}{2}\right\}$	R
$cotg$	$R - \{k\pi\}$	R

Definičním oborem funkce f ($D(f)$) nazýváme množinu všech proměnných x, pro která je daná funkce definována.

U funkcí sinus a kosinus jsou definičním oborem všechna reálná čísla, tzn., že za x můžeme dosadit libovolné reálné číslo. U funkcí tangens a kotangens je situace obtížnější. Funkce tangens je definována jako poměr funkcí sinus ku kosinu $\left(tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}\right)$. Jmenovatel lomeného výrazu se nikdy nesmí rovnat 0. Proto musíme „ošetřit“ případ, kdy by se $cos\ \alpha$ rovnal 0. Z definičního oboru tedy musíme vyloučit hodnoty $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ atd. Jde o všechny liché násobky $\frac{\pi}{2}$ tzn. $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$. S funkcí kotangens je situace velmi podobná. Ve jmenovateli $\left(cotg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sin\ \alpha}\right)$ nesmí být 0. Proto musíme z definičního oboru vyloučit všechny hodnoty, pro které funkce sinus nabývá hodnoty 0. Zde se jedná o celočíselné násobky π, tzn. $k\pi$, kde $k \in Z$.

Oborem hodnot funkce f ($H(f)$) nazýváme množinu všech hodnot y, kterých daná funkce může nabývat (po dosazení za x).

Tabulka významných hodnot goniometrických funkcí

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.	0	nedef.	0
cotg x	nedef.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nedef.	0	nedef.

[38]

Periody goniometrických funkcí

Funkce	sin	cos	tg	$cotg$
Perioda	2π	2π	π	π

Znaménka hodnot funkcí na intervalech

	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	$\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
$cotg$	+	-	+	-

<u>Příklad 1</u>: Použitím Pythagorovy věty a vztahů pro goniometrické funkce dokažte platnost vzorce: $sin^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$

Řešení: Vyjdeme z Pythagorovy věty, předpoládáme pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C*: $a^2 + b^2 = c^2 \quad / : c^2$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\frac{a}{c} = sin\,\alpha \ \wedge \ \frac{b}{c} = \cos\alpha \ \Rightarrow \ \underline{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

[38] HUDCOVÁ, Milada. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*. 2. vydání. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-318-6, str. 137-148.

Příklad 2: Použitím definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C a vlastností goniometrických funkcí dokažte platnost vzorce: $tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$

Řešení: Vyjdeme z definice funkce tangens v pravoúhlém trojúhelníku *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C*.

$tg\ \alpha = \frac{a}{b}$ Dále zlomek na pravé straně rozšíříme výrazem $\frac{1}{c} \Rightarrow \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$

$$\frac{a}{c} = sin\ \alpha \ \wedge\ \frac{b}{c} = cos\ \alpha \ \Rightarrow\ \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} \quad \Rightarrow tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

Příklad 3:

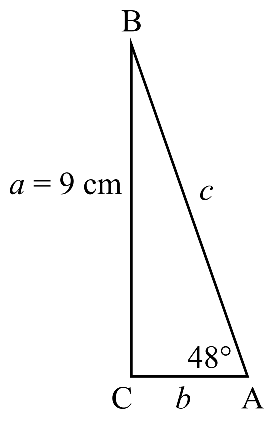
Použitím vztahů pro funkce tangens a kotangens $\left(tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}, cotg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sin\ \alpha}\right)$ dokažte platnost vztahu: $cotg\ \alpha = (tg\ \alpha)^{-1}$

Řešení: $cotg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sin\ \alpha} = \frac{1}{\frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}} = \frac{1}{tg\ \alpha} = (tg\ \alpha)^{-1}$

$cotg\ \alpha = (tg\ \alpha)^{-1}$

Příklad 4: V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C* je dán úhel α = 48° a strana *a* = 9 cm. Vypočítejte délky zbývajících stran a vnitřní úhly daného trojúhelníku. (Obr. 8. 4)

Řešení:



Obr. 8. 4

Z obrázku je jasné, že známe úhel α a odvěsnu, která je vzhledem k tomuto úhlu protilehlá ⇒ můžeme použít funkci sinus (vypočítáme přeponu *c*), nebo funkci tangens (vypočítáme přilehlou odvěsnu *b*.

$sin\ \alpha = \frac{a}{c}$ stranu *b* můžeme dopočítat např.

$sin\ 48° = \frac{9}{c}$ Pythagorovou v. $c^2 = a^2 + b^2$

$c = \frac{9}{sin\ 48°}$ $12{,}1^2 = 9^2 + b^2$

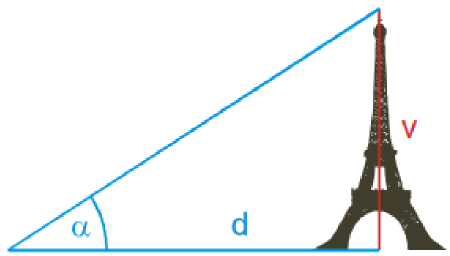
$\underline{c = 12{,}1 \text{ cm}}$ $\underline{b = 8{,}1 \text{ cm}}$

γ = 90° ⇒ β = 180° - (48° + 90°) ← Součet vnitřních úhlů Δ je 180°

$\underline{\beta = 42°}$

Příklad 5: Ze vzdálenosti 450 m je vrchol Eiffelovy věže vidět pod úhlem 35° 45′. Určete výšku věže. (Obr. 8. 5)

Řešení:



Obr. 8. 5

Známe úhel α a odvěsnu přilehlou k tomuto úhlu. Chceme vypočítat protilehlou odvěsnu ⇒ k výpočtu použijeme funkci tangens

$$tg\ \alpha = \frac{v}{d}$$

$$tg\ 35°\ 45' = \frac{v}{450}$$

$v = 450 * tg\ 35°\ 45'$

$v = 324$ m

Eiffelova věž je vysoká přibližně 324 metry.

Goniometrické funkce jsou pro výpočty velmi důležité. Jejich využití je však značně omezeno faktem, že je k výpočtům můžeme použít pouze v pravoúhlém trojúhelníku. Z toho důvodu je nezbytné přidat prostředek, který nám umožní provádět výpočty velikostí vnitřních úhlů a délek stran v obecných trojúhelnících, ne jen v pravoúhlých.

8. 4. Sinová věta

V každém trojúhelníku se stranami *a, b,* c a vnitřními úhly α, β, γ platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

kde *r* je poloměr kružnice opsané danému trojúhelníku.

Sinovou větu tedy můžeme použít, pokud známe dva vnitřní úhly trojúhelníku a stranu proti jednomu z nich, nebo známe-li dvě strany a úhel proti jedné ze stran.

Z právě uvedeného vztahu je patrné, že díky poměrům stran a sinům příslušných úhlů dokážeme vypočítat také poloměr kružnice opsané danému trojúhelníku.

Sinová věta je tedy velmi užitečným prostředkem při řešení prvků trojúhelíku. Při jejím použití však musíme dát pozor. Pokud máme zadány velikosti dvou vnitřních úhlů a délku jedné strany trojúhelníku, není s řešením žádný problém. Potíže ale mohou nastat v případě, že máme zadanou velikost pouze jednoho vnitřního úhlu a k tomu délky dvou stran, které tento úhel nesvírají. V takovém případě musíme ještě předtím, než se pustíme do samotného řešení, udělat kontrolu, kolik trojúhelníků s danými prvky může existovat.

Tupý úhel

Pokud je strana protilehlá k danému tupému úhlu větší než druhá strana ⇒ existuje pouze jeden trojúhelník ⇒ úloha má jediné řešení

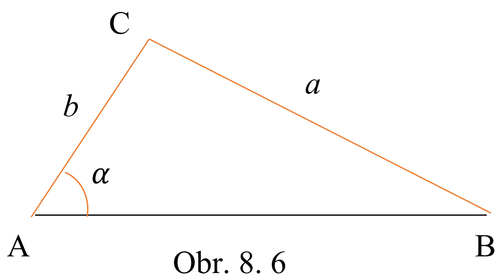
Např.: $\alpha = 105°$, $a = 12$ cm, $b = 9$ cm

$a > b \Rightarrow 1$ řešení

Pokud je strana protilehlá k danému tupému úhlu kratší nebo rovna délce druhé strany $\Rightarrow$ trojúhelník neexistuje $\Rightarrow$ úloha nemá řešení (znamenalo by to totiž, že daný trojúhelník by musel mít dva tupé úhly, což není možné).

Ostrý úhel

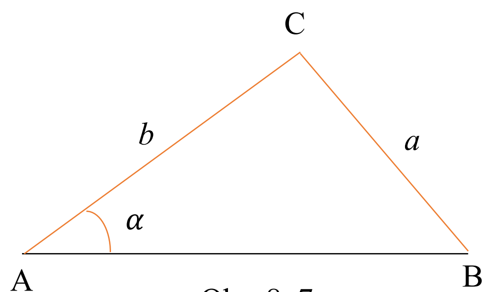
Pokud je strana protilehlá k danému úhlu větší než druhá strana (Obr. 8. 6), existuje jedno řešení.



Obr. 8. 6

$$a > b \Rightarrow 1 \text{ řešení}$$

Pokud je ale délka protilehlé strany k danému ostrému úhlu menší, nebo rovna délce druhé strany (Obr. 8. 7), musíme testovat (předpokládejme, že strana b je přilehlá strana k danému úhlu a strana a je strana protilehlá):

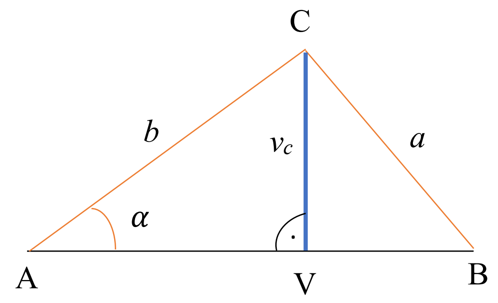


Obr. 8. 7

Posuzujeme počet možných trojúhelníků při řešení sinové věty. Vyjádříme tedy funkci sinus tak, jak byla již zde byla definována (s využitím pravoúhlého trojúhelníku)

$$sin\,\alpha = \frac{protilehlá\ odvěsna}{přepona}$$

Zatím však žádný pravoúhlý trojúhelník nemáme. Stačí ale v našem trojúhelníku doplnit výšku v_c. Výška je kolmá na stranu AB. Rozdělí nám daný trojúhelník na dva pravoúhlé. Pro naše potřeby je důležitý trojúhelník AVC. (Obr. 8. 8). V tomto trojúhelníku již můžeme upaltnit funci sinus. Přeponou je strana b, odvěsnou protilehlou k úhlu α je právě sestrojená výška v_c.



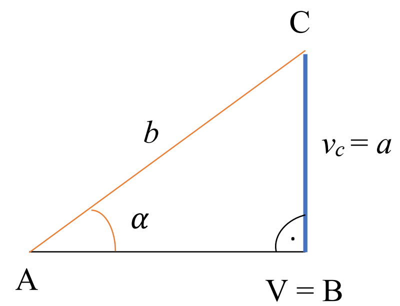
Obr. 8. 8

Vzhledem k funkci $sin\,\alpha$ mohou nastat tři možnosti:

1) $\frac{a}{b} = sin\ \alpha$

$$sin\,\alpha = \frac{protilehlá\ odvěsna}{přepona} = \frac{v_c}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{v_c}{b} \quad \Rightarrow \quad a = v_c$$

Tato možnost nastane pouze v případě, že trojúhelník ABC je pravoúhlý - s pravým úhlem při vrcholu B. (Obr. 8. 9).



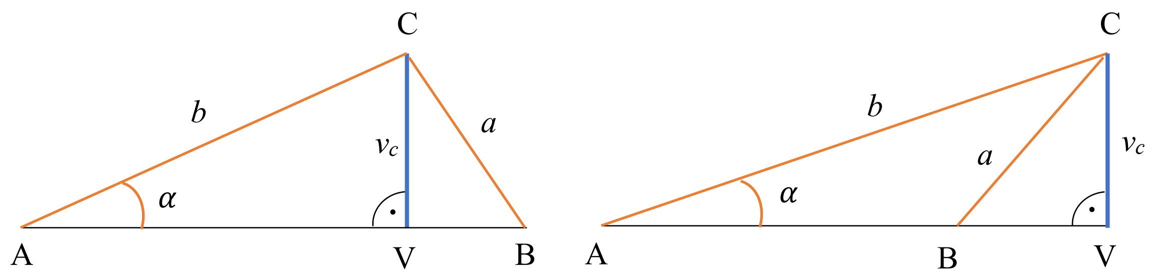
Obr. 8. 9

Úloha má tedy jediné řešení.

2) $\frac{a}{b} > sin\,\alpha$

$$sin\,\alpha = \frac{v_c}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} > \frac{v_c}{b} \quad \Rightarrow \quad a > v_c \quad \wedge \quad b > a$$

Existují dva trojúhelníky, které tyto podmínky splňují $\Rightarrow$ úloha má dvě řešení. (Obr. 8. 10)



Obr. 8. 10

3) $\frac{a}{b} < \sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{v_c}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{v_c}{b} \quad \Rightarrow \quad a < v_c$

Takový trojúhelník neexistuje $\Rightarrow$ úloha nemá řešení

Příklad 1: Vypočítejte délku strany c a vnitřní úhly β, γ trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a = 9 cm, α = 105°, β = 48°.

Řešení: Máme zadány 2 úhly ⇒ nemusíme dělat test počtu řešení

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \quad \frac{9}{\sin 105°} = \frac{b}{\sin 48°} \Rightarrow \quad b = \frac{9 * \sin 48°}{\sin 105°}$$

$\underline{b = 6,9 \text{ cm}}$

Příklad 2: Určete velikosti vnitřních úhlů β, γ a délku strany c trojúhelníku ABC, je-li dáno: α = 52°, a = 12 cm, b = 14 cm.

Řešení: Máme zadán pouze jeden úhel ⇒ musíme provést kontrolu, kolik bude mít úloha řešení.

Zadaný úhel α je ostrý ⇒ $\frac{a}{b}$? $sin\alpha$

$\frac{a}{b} = \frac{12}{14} = 0,8571 \qquad \sin 52° = 0,788 \Rightarrow \frac{a}{b} > \sin\alpha \Rightarrow$ 2 řešení

1. řešení: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \quad \frac{12}{sin52°} = \frac{14}{sin\beta} \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{14 * \sin 52°}{12}$

$\underline{\beta_1 = 67°}$

Abychom mohli dopočítat stranu c, musíme nejprve určit velikost úhlu γ

γ = 180° - $(\alpha + \beta)$ ⇒ γ = 180°- (52° + 67´) ⇒ $\underline{\gamma = 61°}$

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{c}{sin\gamma} \Rightarrow \quad \frac{12}{\sin 52°} = \frac{c}{\sin 61°} \Rightarrow \quad c = \frac{12 * \sin 61°}{\sin 52°}$$

$\underline{c = 13,3 \text{ cm}}$

Výsledky prvního řešení: ΔABC:		
	α = 52°	a = 12 cm
	β = 67°	b = 14 cm
	γ = 61°	c = 13,3 cm

2. řešení: β_2 = 180° - β_1 = 113°

Délku strany c, dopočítáme zcela stejným postupem jako při předchozím řešení

$\underline{\gamma = 15°,\ c = 3,9\ \text{cm}}$

Výsledky druhého řešení: $\Delta\, ABC$:

$\alpha = 52°$	$a = 12$ cm
$\beta = 113°$	$b = 14$ cm
$\gamma = 15°$	$c = 3{,}9$ cm

8. 5. Kosinová věta

V každém trojúhelníku se stranami *a, b,* c a vnitřními úhly α, β, γ platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos\alpha$$

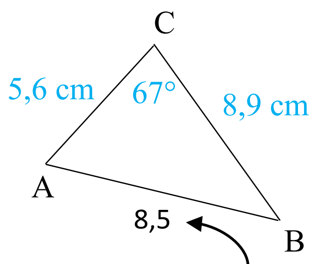
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos\gamma$$

Kosinovou větu využijeme v případě, že známe dvě strany a úhel jimi sevřený, nebo máme zadané všechny tři strany trojúhelníku – pomocí kosinové věty pak dokážeme vypočítat zbývající stranu nebo libovolný vnitřní úhel trojúhelníku.

Příklad 1: V trojúhelníku ABC je dán úhel $\gamma = 67°$ a strany $a = 8,9$ cm a $b = 5,6$ cm. Vypočítejte délku strany c a úhly α, β. (Obr. 8. 11)

Řešení:



Obr. 8. 11

Známe dvě strany a úhel, který tyto strany svírají ⇒ použijeme kosinovou větu – tzv. „céčkovou“

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos\gamma$$

$$c^2 = 8,9^2 + 5,6^2 - 2 * 8,9 * 5,6 * \cos 67°$$

$$c^2 = 79,21 + 31,36 - 38,95$$

$\underline{c = 8,5\ \text{cm}}$

Nyní potřebujeme vypočítat jeden z úhlů α, β. K tomu můžeme využít buď opět kosinovou větu – „áčkovou“ nebo „béčkovou“, nebo výpočet provedeme pomocí sinové věty. V obou případech musíme dostat stejný výsledek ($\pm$ zaokrouhlení)

Použiji „béčkovou“ kosinovou větu: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos\beta$

$$5,6^2 = 8,9^2 + 8,5^2 - 2 * 8,9 * 8,5 * \cos\beta$$

$$31,36 = 79,21 + 72,25 - 151,3 * \cos\beta$$

$cos\ \beta = \frac{120,1}{151,3}$

β = 37° 30′

Nyní již zbývá jen dopočítat velikost úhlu α:

α = 180° - $(\beta + \gamma)$ ⇒ α = 75° 30′

Výsledky řešení: $\Delta\ ABC$:

α = 75° 30′	a = 8,9 cm
β = 37° 30′	b = 5,6 cm
γ = 67°	c = 8,5 cm

9. Komplexní čísla

Chci-li podat ucelený přehled využití úhlů, nemohu opominout komplexní čísla.

Komplexní čísla tvoří číselný obor, který vznikl rozšířením oboru reálných čísel. Jejich název pochází z latinského slova *complexus*, tzn. složený. Poprvé se s nimi setkáváme pravděpodobně v díle italského matematika Gerolama Cardana, který žil v letech 1501–1576. Na jeho dílo navázali Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Abraham de Moivre (1667–1754). Leonhard Paul Euler (1707–1783) zavedl označení pro imaginární jednotku. Na konci 18. století německý matematik Carl Friedrich Gauss (1777–1855) zavedl způsob znázorňování komplexních čísel v rovině. [39]

Obor komplexních čísel vznikl z potřeby řešení rovnic, které by v oboru reálných čísel řešení neměla, nebo neměla příslušný počet kořenů, tj. tolik kořenů, jaký je stupeň rovnice.

Komplexní číslo a je uspořádaná dvojice reálných čísel (a_1, a_2), kde a_1 je reálná část komplexního čísla, a_2 je imaginární část komplexního čísla.

Možnosti zápisu komplexních čísel

1) uspořádaná dvojice (a_1, a_2)

2) algebraický tvar = symbolický zápis $a = a_1 + a_2 i$, kde i je imaginární jednotka, pro kterou platí:

$$i^2 = -1$$

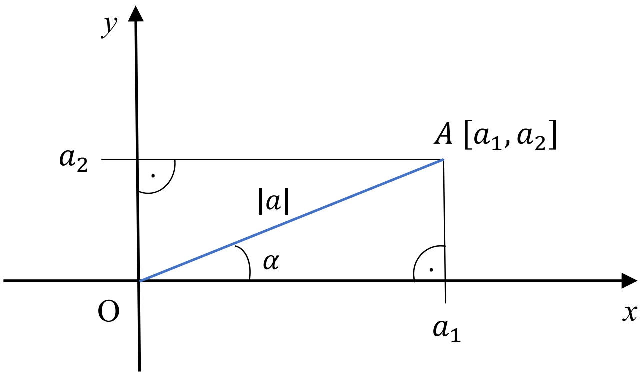
3) goniometrický tvar: $a = |a| * (cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha)$

S komplexními čísly můžeme provádět běžné početní operace, tzn. sčítat, odčítat, násobit, dělit, umocňovat, zjišťovat jejich vzdálenost od počátku soustavy souřadnic (Gaussovy roviny). Popsané operace je možné provést jak s algebraickým, tak goniometrickým tvarem komplexních čísel. Vzhledem k tomu, že tématem této práce jsou úhly, zaměřím se především

[39] VLACHOVÁ, Magda. Techmania.cz: Slavní matematici, fyzici a vynálezci. *Techmania.cz: Slavní matematici, fyzici a vynálezci* [online]. Praha: vedci.wz, 2009, 2009 [cit. 2018-12-30]. Dostupné z: http://vedci.wz.cz/historie/12.htm

na goniometrický tvar (v algebraickém se úhel neobjevuje). Oba tvary můžeme převádět z jednoho do druhého – z algebraického do goniometrického a naopak.

Obrazem komplexního čísla $a = (a_1, a_2)$ je bod roviny $A\,[a_1, a_2]$ (Obr. 9. 1). Této rovině říkáme Gaussova rovina nebo rovina komplexních čísel.



Obr. 9. 1

A - obraz komplexního čísla $a = a_1 + a_2 i$, $a \neq 0$
α – argument komplexního čísla a

Platí: $\cos\alpha = \dfrac{a_1}{|a|} \Rightarrow a_1 = |a| * \cos\alpha$, $\quad \sin\alpha = \dfrac{a_2}{|a|} \Rightarrow a_2 = |a| * \sin\alpha$

x je reálná osa

y je imaginární osa

<u>Příklad 1</u>: Zapište komplexní číslo $a = 5\sqrt{3} + 5i$ v goniometrickém tvaru

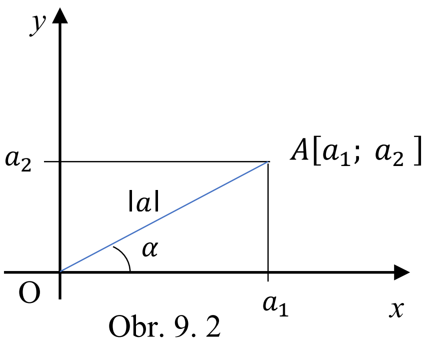
Nejprve potřebuje zjistit $|a|$ tzn. vzdálenost čísla od počátku Gaussovy roviny

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad \Rightarrow \qquad |a| = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + 5^2}$$

$$|a| = \sqrt{75 + 25}$$

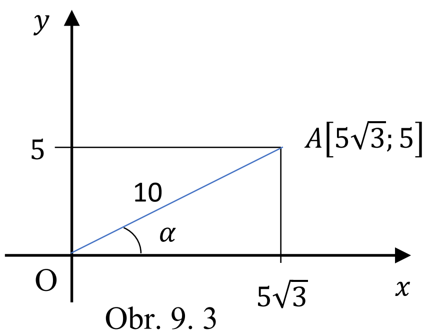
$$|a| = 10$$

Nyní potřebujeme zjistit příslušný úhel α. Aby bylo jasné, co vlastně budeme počítat, znázorním nejprve komplexní číslo v Gaussově rovině. (Obr. 9. 2) (Obr. 9. 3)



Obr. 9. 2

$\Rightarrow$



Obr. 9. 3

$$cos\,\alpha = \frac{a_1}{|a|} \quad \Rightarrow \quad cos\,\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sin\,\alpha = \frac{a_2}{|a|} \quad \Rightarrow \quad sin\,\alpha = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$$

Nyní už jen zjištěné údaje dosadíme do goniometrického tvaru komplexního čísla:

$$a = |a| * (cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha)$$

$$a = 10 * \left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right) = 10 * (cos\,30° + i\,sin\,30°)$$

<u>Příklad 2</u>: Zapište komplexní $a = \frac{2}{5}\,(cos\,330° + i\,sin\,330°)$ číslo v algebraickém tvaru

Tento přechod je jednodušší – stačí určit $cos\,330°$, $sin\,330°$ a vynásobit

$$\Rightarrow a = \frac{2}{5} * \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{1}{5}i$$

Násobení komplexních čísel

Pokud chceme násobit komplexní čísla v algebraickém tvaru, stačí pouze roznásobit závorku závorkou.

<u>Příklad 1</u>: Vynásobte komplexní čísla $a = (3 + 2i)$, $b = (1 – 3i)$ $(i^2) = -1$

$$a * b = (3 + 2i) * (1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2 = 3 - 7i - 6\,(-1) = 3 - 7i + 6 = \underline{9 - 7i}$$

Pro násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru $a = |a| * (cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha)$, $b = |b| * (cos\,\beta + i\,sin\,\beta)$ použijeme vzoreček:

$$a * b = |a| * |b| * [cos\,(\alpha + \beta) + i\,sin\,(\alpha + \beta)]$$

<u>Příklad 2</u>: Určete součin komplexních čísel $a = \frac{3}{5} * (cos\,210° + i\,sin\,210°)$, $b = 6 * (cos\,30° + i\,sin\,30°)$.

Po dosazení do vzorečku: $a * b = \frac{3}{5} * 6 * [cos\,(210° + 30°) + i\,sin\,(210° + 30°)]$

$$\Rightarrow \quad a * b = \frac{18}{5} * (cos\,240° + i\,sin\,240°)$$

V případě, že součet úhlů α, β v argumentu goniometrických funkcí vyjde větší nebo roven 360°, převedeme tento součet na úhel v základní velikosti.

Dělení komplexních čísel

Pro dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru $a = |a| * (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $b = |b| * (\cos\beta + i\sin\beta)$ použijeme vzoreček (podobný jako u součinu): $\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} * [\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)]$

Příklad 1: Určete podíl komplexních čísel $a = 2 * (\cos 315° + i\sin 315°)$,
$b = 4 * (\cos 45° + i\sin 45°)$

Po dosazení do vzorečku: $\frac{a}{b} = \frac{2}{4} * [\cos(315° - 45°) + i\sin(315° - 45°)]$

$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{2} * (\cos 270° + i\sin 270°)$

V případě, že rozdíl úhlů α, β v argumentu goniometrických funkcí vyjde větší nebo roven 360°, převedeme tento součet na úhel v základní velikosti. Může také nastat situace, že rozdíl úhlů vyjde v záporné velikosti. V tom případě tento úhel převedeme opět do základní velikosti.

Umocňování komplexních čísel

Pro umocnění komplexního čísla v goniometrickém tvaru $a = |a| * (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $a \neq 0$, použijeme vzoreček :

$a^n = |a|^n * (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, $n \in N$ ….. Moivreova věta

Příklad 1: Pomocí Moivreovy vypočtěte a^6, je-li $a = -2 - 2i$

Moivreova věta je formulována pro komplexní číslo v goniometrickém tvaru. Proto musíme dané komplexní číslo nejprve převést z algebraického do goniometrického tvaru.

$|a| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a_1}{|a|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{a_2}{|a|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \alpha = 225° = \frac{5}{4}\pi$$

$\Rightarrow \quad a = 2\sqrt{2} * (\cos 225° + i\sin 225°)$

Nyní už můžeme použít Moivreovu větu:

$a^6 = \left(2\sqrt{2}\right)^6 * (cos\ (6 * 225°) + i\ sin\ (6 * 225°)) =$

$= 512 * (cos\,1350° + i\ sin\,1350°)$

$\Rightarrow \quad \underline{a^6 = 512 * (cos\,270° + i\ sin\,270°)}$

Binomická rovnice

Při výčtu oblastí, ve kterých se využívá úhlů, nemohu opomenout zmínit binomické rovnice. Tyto rovnice mají řešení v oboru komplexních čísel. Znázornit je proto můžeme v Gaussově rovině.

Jedná se o rovnice typu $x^n = a$, kde a je komplexní číslo a *n* je přirozené číslo. Pokud a zapíšeme v goniometrickém tvaru:

$a = |a| * (cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha)$, tzn. $x^n = |a| * (cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha)$.

Pak má tato rovnice v oboru komplexních čísel právě n různých kořenů, a to:

$x_k = \sqrt[n]{|a|} * \left(cos\ \frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\ sin\ \frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$, kde $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, *n* je přir. číslo

<u>Příklad 1</u>: V oboru komplexních čísel řešte rovnici $x^4 = -81$.

Nejprve si musíme číslo – 81 (komplexní číslo v algebraickém tvaru) vyjádřit v goniometrickém tvaru.

$a = -81 \qquad \Rightarrow \qquad |a| = \sqrt{(-81)^2 + 0^2} = \sqrt{81^2} = 81$

$$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = \frac{a_1}{|a|} = \frac{-81}{81} = -1 \\ sin\ \alpha = \frac{a_2}{|a|} = \frac{0}{81} = 0 \end{array}\right\} \quad \alpha = 180° = \pi \quad \Rightarrow \quad a = 81 * (cos\ \pi + i\ sin\ \pi)$$

Nyní budeme dosazovat do vzorce $x_k = \sqrt[n]{|a|} * \left(cos\ \frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\ sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$,

pro $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

$x_k = \sqrt[4]{81} * \left(cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$x_0 = 3 * \left(cos\ \frac{\pi + 2 * 0\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi + 2 * 0\pi}{4}\right) = 3 * \left(cos\frac{\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$= 3 * \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\ i$

$$x_1 = 3 * \left(cos\frac{\pi + 2*1*\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi + 2*1*\pi}{4}\right) = 3 * \left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$
$$= 3 * \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i$$

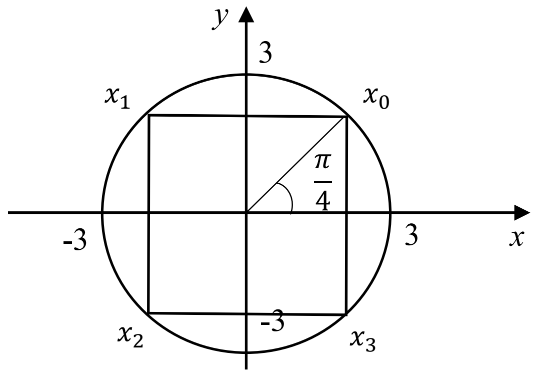
$$x_2 = 3 * \left(cos\frac{\pi + 2*2*\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi + 2*2*\pi}{4}\right) = 3 * \left(cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\frac{5\pi}{4}\right) =$$
$$= 3 * \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x_3 = 3 * \left(cos\frac{\pi + 2*3*\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi + 2*2*\pi}{4}\right) = 3 * \left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right) =$$
$$= 3 * \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Grafické znázornění kořenů – Gaussova rovina (Obr. 9. 3)



[40]

Obr. 9. 3

10. Plochozemě

Všichni považujeme za samozřejmé, že se s úhly setkáváme při matematice, fyzice, zeměpise, astronomii atd., i to, že se bez nich neobejdou např. navigační systémy. Málokoho ale asi napadne, že na úhly můžeme narazit i při pročítání populární literatury. Podařilo se mi objevit knihu, jejíž autor poskytuje velmi neobvyklý pohled na rovinné útvary v tzv. Plochozemi. Autorem je anglický učitel, spisovatel a teolog Edwin Abbott. Kniha byla vydána

[40] HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-318-6, str. 178-192.

již v roce 1884 – byla přeložena do více než třiceti jazyků – do češtiny však až v roce 2013. Někdy bývá označována za matematickou fikci nebo také matematicko-filozofickou fantazii na geometrické téma. Současně je však také sociální satirou. Kritizuje nerovnoprávné postavení žen ve společnosti.

Plochozemě je velmi zvláštní „územní celek“. Obyvatele tvoří výhradně rovinné útvary. Pohled na ně není ale tradiční – tak, jak jsme zvyklí. Na obyvatele nepohlížíme shora, ale z roviny, v níž se nacházejí. Autor pro lepší představu uvádí příklad s pencí ležící na stole. Pokud se na minci díváme shora, vidíme kruh. Když se však skláníme stále níže, tvar se postupně zkresluje. Nejprve tedy vidíme kruh, později elipsu a v okamžiku, kdy se pohledem dostaneme až na hranu stolu, můžeme minci spatřit už pouze jako přímku (Předpokládám, že se má jednat o úsečku, a že označení přímka zde vznikla nepřesným překladem z originálu). Stejný princip platí pro všechny obyvatele Plochozemě. [41]

Přestože všechny rovinné útvary vidíme jako přímky, nejsou si obyvatelé Plochozemě rovni. Nejnižší postavení zaujímají rovnoramenné trojúhelníky – tvoří třídu Vojáků a nejnižších Dělníků. Mají velmi krátkou základnu a úhel u vrcholu ostrý a hrozivý. O stupínek výše stojí Rovnostranné trojúhelníky. Ty tvoří střední třídu. Pětiúhelníky a čtverce jsou považováni za Odborníky a Džentlmeny. Šlechtu tvoří šesti a víceúhelníky. Pokud je množství stran tak velké a délky stran tak malé, že je nelze odlišit od kruhu, patří Plochozemšťan do kruhového - kněžského řádu.

I v této jasně určené hierarchii je však možný postup. Syn má vždy o jednu stranu více než jeho otec. Synem čtverce je pětiúhelník, synem pětiúhelníku šestiúhelník, atd. To se však netýká Vojáků a Dělníků. Ti takto povýšit nemohou. Zcela výjimečně se stane, že se v manželství Rovnoramennému otci narodí Rovnostranný potomek. Často se pak v takovém případě stane, že dítě do té míry napodobuje své rodiče, že opět klesne do třídy Rovnoramenných. Ti jsou v Plochozemi považováni za lůzu.

A jak je to v Plochozemi s ženami? Ty tvoří zvláštní kategorii. Všechny ženy vypadají jako jehla. Jsou proto velmi nebezpečné. Pokud jsou k pozorovateli natočeny bokem, vypadají jako přímka. Pokud se ale natočí ústy, pozorovatel vidí pouze bod. V případě, že se k ženě v tuto chvíli kdokoliv neopatrně přiblíží, může dojít k fatálnímu zranění. Ženy mají velmi podřadné postavení.

Obyvatelé Plochozemě se nejsou schopni navzájem rozeznat zrakem. Poznávají se tedy dotykem. Díky dlouholeté praxi a zkušenostem dospěli k tomu, že není nezbytné, aby se vzájemně museli dotknout všech stran poznávaného mnohoúhelníku. Stačí dotyk na úhel. Je však při tom potřeba dávat velký pozor a být ostražitý. Ostré úhly jsou velmi nebezpečné. Velmi snadno, i neúmyslně, mohou způsobit závažné, nenapravitelné zranění. Aby neohrozil pozorovatele, musí proto poznávaný vždy stát zcela nehybně.

Z toho, co již bylo o Plochozemi řečeno, je zjevné, že úhly zde hrají velmi významnou, dá se říci, stěžejní roli.

---

[41] ABBOTT, Edwin Abbott. *Plochozemě: román mnoha rozměrů*. Brno: B4U, 2013. ISBN 978-80-87222-21-8, str. 18-19.

Dalším důvodem, proč jsou úhly v Plochozemi tak důležité, je to, že mozková kapacita obyvatel se zde měří velikostí vnitřních úhlů při vrcholech – u rovnoramenného trojúhelníku úhlu proti základně.

Autor knihy si za čtenáře klade otázku: „*Co můžete vy v Plochozemi vědět o úhlech, stupních a minutách? My v prostoru úhel vidíme, protože jsme schopni spatřit dvě Přímky sbíhající se jedna k druhé, ale vy, kteří vidíte vždy pouze jednu Přímku nebo útržky Přímek slývající do Přímky jediné – jak byste asi mohli rozeznat úhel, natož zaznamenávat úhly různých velikostí?*“ [42]

Následně se čtenář dočká vysvětlení, že přestože v Plochozemi úhly nevidí, dokáží je poměrně přesně rozeznat. Umožňuje jim to smysl, který je v Plochozemi mnohem důležitější než zrak. A to je hmat. Jeho pomocí a dlouholetým cvikem rozlišují úhly přesněji než občané Prostorozemě zrakem.

U třídy Rovnoramenných začínají obyvatelé s velikostí úhlu na půl stupni. V každé generaci pak roste velikost tohoto úhlu o další půl stupeň – až do 60°. Tvoří tak „Abecedu úhlů“, tj. stupnici po půl stupních – od 0,5° až do 60°. Intelekt takových Rovnoramenných jedinců je tedy maximálně 60°. Jednotlivci s mozkovou kapacitou napřesahující 10° jsou zbaveni občanských práv. [43]

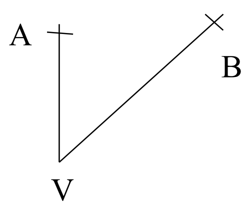
Z právě popsané charakteristiky je zřejmé, že v Plochozemi hraje úhel důležitější roli než v naší „Prostorozemi“. Kniha nabízí velmi zajímavý a zábavný pohled na rovinné útvary.

11. Úlohy na procvičení

11. 1. Zápis úhlu

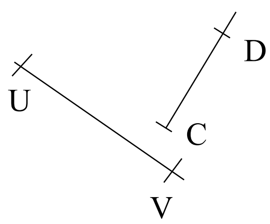
<u>Příklad 1</u>: Rozhodněte, které z polopřímek vymezují úhel. Zdůvodněte, proč. (Obr. 11. 1–11. 5)

a)



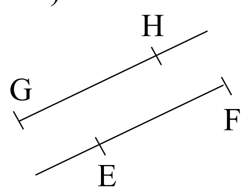
Obr. 11. 1

b)



Obr. 11. 2

c)



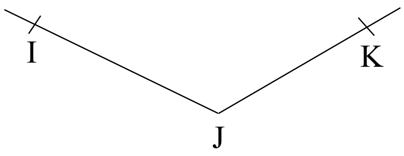
Obr. 11. 3

---

[42] ABBOTT, Edwin Abbott. *Plochozemě: román mnoha rozměrů*. Brno: B4U, 2013. ISBN 978-80-87222-21-8, str. 36

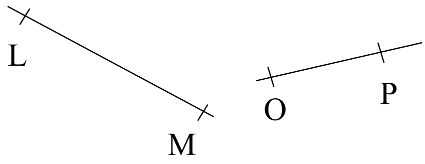
[43] ABBOTT, Edwin Abbott. *Plochozemě: román mnoha rozměrů*. Brno: B4U, 2013. ISBN 978-80-87222-21-8, str. 34-37.

d)



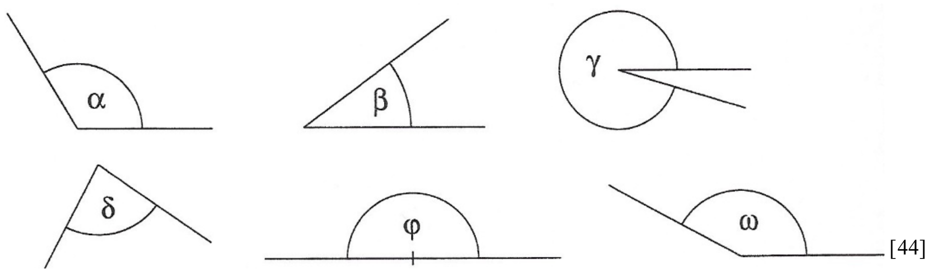
Obr. 11. 4

e)



Obr. 11. 5

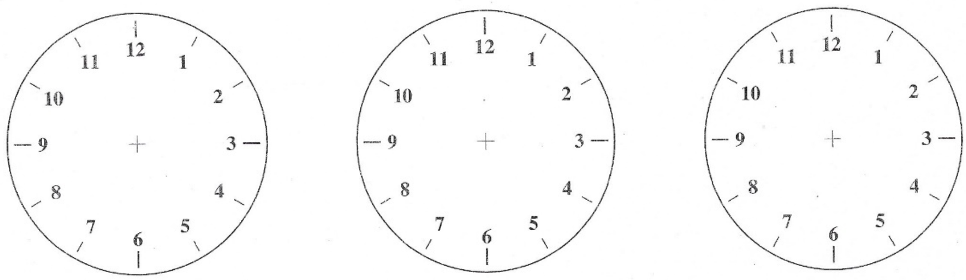
Příklad 2: Rozhodněte, které z úhlů jsou konvexní a nekonvexní, ostré, tupé, pravé, přímé. (Obr. 11. 6)



Obr. 11. 6

Příklad 3: Určete velikosti konvexních úhlů, které svírají hodinové ručičky, pokud ukazují čas: (Obr. 11. 7)

a) 6:00 b) 3:00 c) 8:00



Obr. 11. 7

Příklad 4: Bez použití úhloměru (trojúhelníku s ryskou) sestrojte úhly o velikosti:

a) 135° b) 105° c) 120° d) 75°

Příklad 5: Jana viděla rozhlednu pod úhlem 40°. Petra viděla stejnou rozhlednu pod úhlem 34°. Která z dívek byla k rozhledně blíže? Načrtněte si obrázek.

[44] MOLNÁR, Josef. *Matematika 6: [učebnice pro základní školy]*. Olomouc: Prodos, 1998. ISBN 80-85806-98-3, str.66

11. 2. Operace s úhly

Příklad 1: Převeďte velikost úhlu na stupně a minuty:

a) 158´ b) 328´ c) 421´ d) 555´

Příklad 2: Převeďte velikost úhlu na minuty:

a) 3° 15´ b) 2° 07´ c) 5° 12´ e) 7° 77´

Příklad 3: Převeďte velikost úhlu na stupně a minuty:

a) 2,5° b) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{\circ}$ c) 3,75° d) $\left(3\frac{3}{5}\right)^{\circ}$

e) 12,4° f) 23,7° g) 21.3° 31,25°

Příklad 4: Doplňte mezi velikosti úhlů znak $<, =, >$ tak, aby byl zápis pravdivý.

a) 92° 5600´ b) 380´ 6°20´ c) 3°30´ 330´

Příklad 5: Vypočítejte:

a) 3° 15´+ 7° 22´ b) 42° 33´+57° 59´ c) 87° 55´+73° 44´

d) 22° 54´+ 17° 34´ e) 98° 32´+ 49° 52´ f) 156° 17´+ 79° 58´

Příklad 6: Vypočítejte

a) 15° * 3 b) 15°23´ * 3

23° * 4 24°34´ * 4

28° * 5 36°27´ * 5

24° * 6 29°42´ * 6

Příklad 7: Vypočítejte

a) 74° 55´- 27° 42´ b) 159° 22´- 76° 15´ c) 174° 36´- 96° 29´

d) 85° 15´- 47° 32´ e) 92° 29´ - 54° 55´ e) 122° 47´- 98° 56´

Příklad 8: Vypočítejte

a) 124° 36´: 4 b) 126°: 5

115° 35′: 5	83°: 5
96° 54′: 6	85° 03′: 7
123° 12′: 3	50° 24′: 4

Příklad 9: Vypočítejte velikost úhlu α, jestliže platí:

a) $\alpha + 43° \, 15' = 97°$ b) $76° \, 39' - \alpha = 25° \, 32'$

11. 3. Grafické operace s úhly

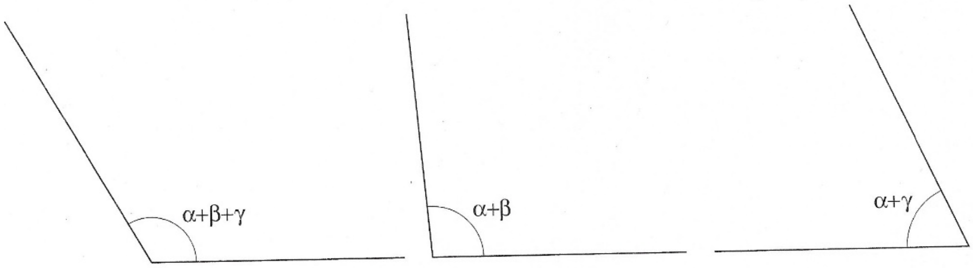
Příklad 1: Sestrojte úhly $\alpha = 48°, \beta = 69°$. Dané úhly graficky sečtěte. Proveďte zkoušku výpočtem. Rozhodněte, o jaký úhel (podle velikosti) se jedná.

Příklad 2: Sestrojte úhly $\gamma = 56°, \delta = 132°$. Graficky určete $\delta - \gamma$. Proveďte zkoušku výpočtem. Rozhodněte, o jaký úhel (podle velikosti) se jedná.

Příklad 3: Sestrojte úhly $\alpha = 37°, \beta = 72°, \gamma = 83°$. Graficky určete $\alpha + \gamma - \beta$. Proveďte zkoušku výpočtem. Rozhodněte, o jaký úhel (podle velikosti) se jedná.

Příklad 4: Sestrojte úhly $\alpha = 44°, \beta = 81°, \gamma = 35°$. Graficky určete $\beta - \gamma + \alpha$. Proveďte zkoušku výpočtem. Rozhodněte, o jaký úhel (podle velikosti) se jedná.

Příklad 5: Graficky určete velikost úhlu α (Obr. 11. 8)



[45]

Obr. 11. 8

[45] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Pracovní sešit z matematiky: soubor úloh pro 6. ročník základní školy*. 4., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 9788071964223, str. 20

Příklad 6: Graficky určete velikost úhlu $\gamma = 2\alpha - \beta$, je-li: $\alpha = 36°$, $\beta = 54°$. Výsledek ověřte početně. Doplňte tvrzení: Výsledný úhel je ………..
(ostrý, pravý, tupý, přímý)

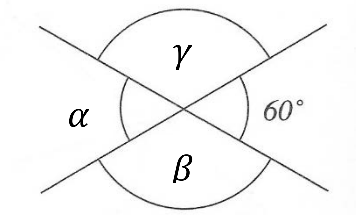
Příklad 7: Graficky určete velikost úhlu $\gamma = \alpha + \frac{\beta}{2}$, je-li: $\alpha = 62°$, $\beta = 74°$. Výsledek ověřte početně. Doplňte tvrzení: Výsledný úhel je ………..
(ostrý, pravý, tupý, přímý

11. 4. Dvojice úhlů

Příklad 1: Rozhodněte o pravdivosti tvrzení.

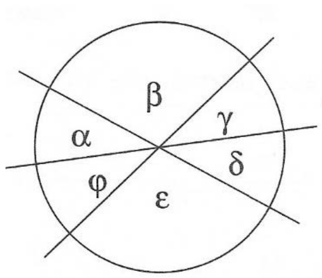
a) Sečtením tří ostrých úhlů lze získat přímý úhel	ANO	NE
b) V trojúhelníku mohou být tři shodné vnitřní úhly	ANO	NE
c) Rozdíl tupého a ostrého úhlu je vždy ostrý úhel	ANO	NE
d) Součet vrcholových úhlů je vždy 180°	ANO	NE
e) Součet vedlejších úhlů je tupý úhel	ANO	NE
f) Pravý úhel je konvexní	ANO	NE

Příklad 2: Určete velikosti všech vyznačených úhlů. (Obr. 11. 9)



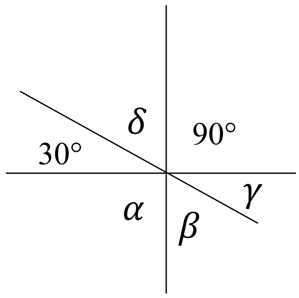
Obr. 11. 9

Příklad 3: Určete velikost všech úhlů – je-li dáno: $\beta = 3\gamma,\ \beta + \gamma = 4\alpha$
(Obr. 11. 10)



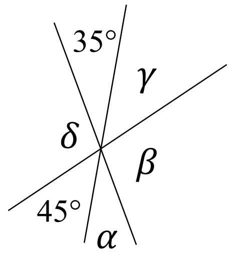
Obr. 11. 10

Příklad 4: Určete velikosti všech úhlů: (Obr. 11. 11), (Obr. 11. 12), (Obr. 11. 13) a)



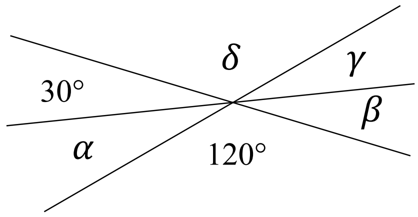
Obr. 11. 11

b)



Obr. 11. 12

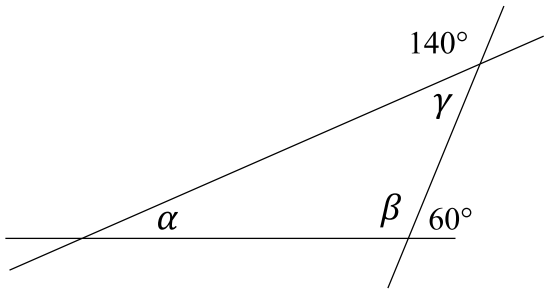
c)



Obr. 11. 13

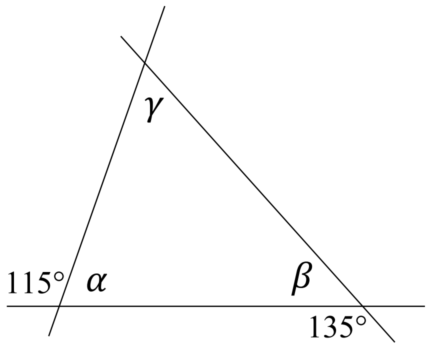
Příklad 5: Určete velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku (součet vnitřních úhlů trojúhelníku je vždy 180°): (Obr. 11. 14), (Obr. 11. 15)

a)



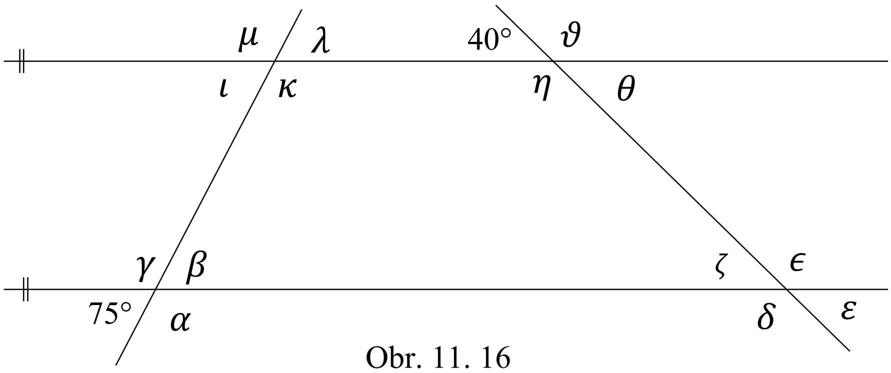
Obr. 11. 14

b)



Obr. 11. 15

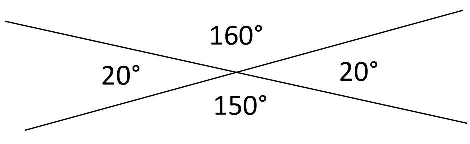
Příklad 6: Určete velikosti všech vyznačených úhlů: (Obr. 11. 16)



Obr. 11. 16

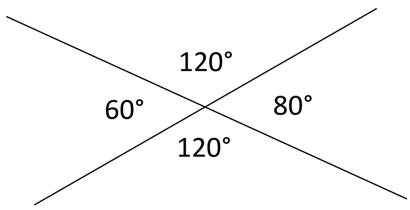
Příklad 7: Najděte chyby a opravte je. (Obr. 11. 17), (Obr. 11. 18)

a)



Obr. 11. 17

b)

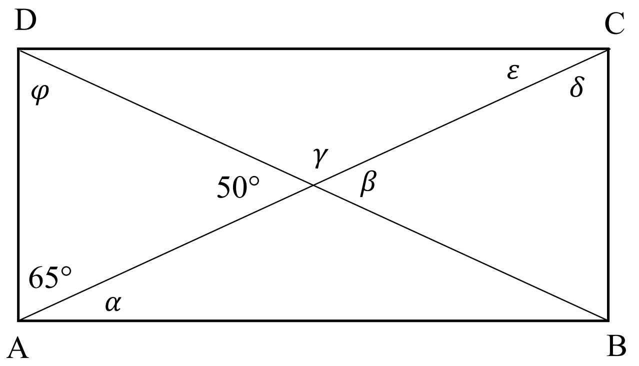


Obr. 11. 18

Příklad 8: Jeden ze dvou vedlejších úhlů je třikrát menší než druhý. Určete velikost obou úhlů.

Příklad 9: Součet dvou vrcholových úhlů je 144°. Určete velikost obou úhlů.

Příklad 10: Napište velikosti všech úhlů vyznačených v obdélníku $ABCD$. (Obr. 11. 19)

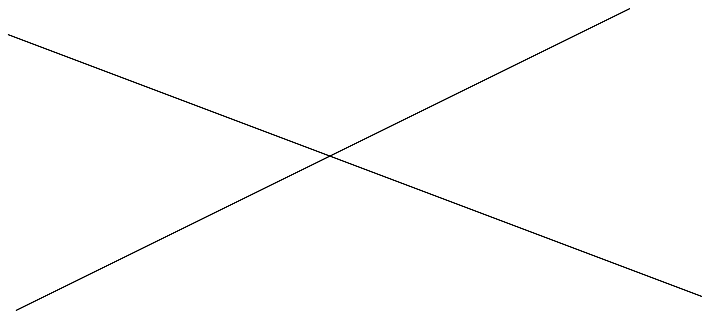


Obr. 11. 19

Příklad 11: Jeden z vedlejších úhlů je o 35° větší než druhý. Určete velikosti obou úhlů.

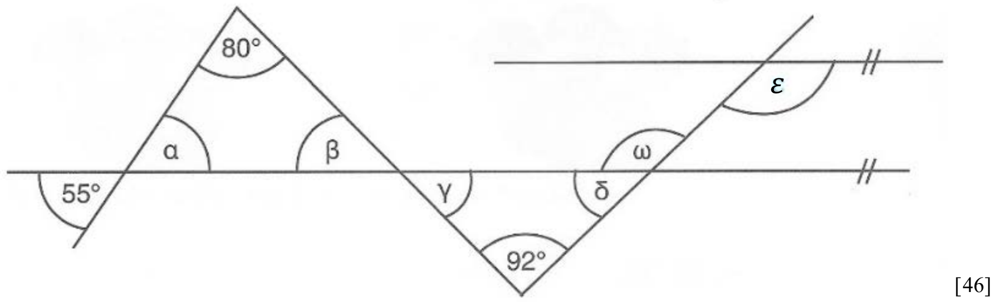
Příklad 12: Dokažte, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°.

Příklad 13: Součet tří ze čtyř vyobrazených úhlů je 240°. Určete velikosti všech úhlů. (Obr. 11. 20)



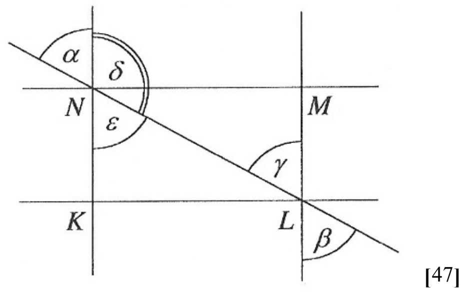
Obr. 11. 20

Příklad 14: Určete velikosti všech úhlů: (Obr. 11. 21)



Obr. 11. 21

Příklad 15: Na obrázku je obdélník $KLMN$. Doplňte názvy dvojic úhlů. (Obr. 11. 22)



Obr. 11. 22

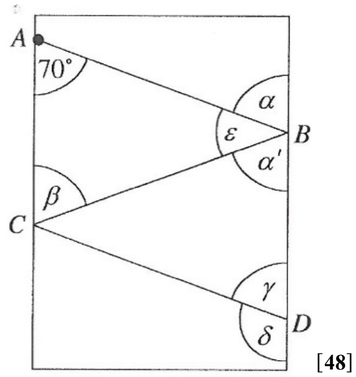
α a γ jsou ……………………
γ a β jsou ……………………
β a ε jsou ……………………
δ a ε jsou ……………………
α a δ jsou ……………………
α a β jsou ……………………

Příklad 16: Kulečníková koule se odrazí od kraje kulečníkového stolu pod stejným úhlem, pod jakým dopadla (úhel odrazu se rovná úhlu dopadu). (Obr. 11. 23) Napište velikosti všech označených úhlů.

---

[46] HERMOCHOVÁ, Dana, Jana PRESOVÁ, Petr KAŠŠÁK, et al. *Hravá matematika 6: pracovní sešit pro 6. ročník ZŠ a víceletá gymnázia: v souladu s RVP ZV*. Praha: Taktik, 2014. ISBN 978-80-87881-18-7, str. 86.

[47] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Základní geometrické útvary: pracovní sešit z matematiky: [pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií]*. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-018-7, str. 43



Obr. 11. 23

11. 5. Úhly příslušné k obvodu kružnice

Příklad 1: Vypočítejte velikost obvodového úhlu k oblouku, který má délku $\frac{5}{12}$ délky kružnice.

Příklad 2: Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, který vznikne, pokud na ciferníku spojíme body označující čísla 2, 7, 10.

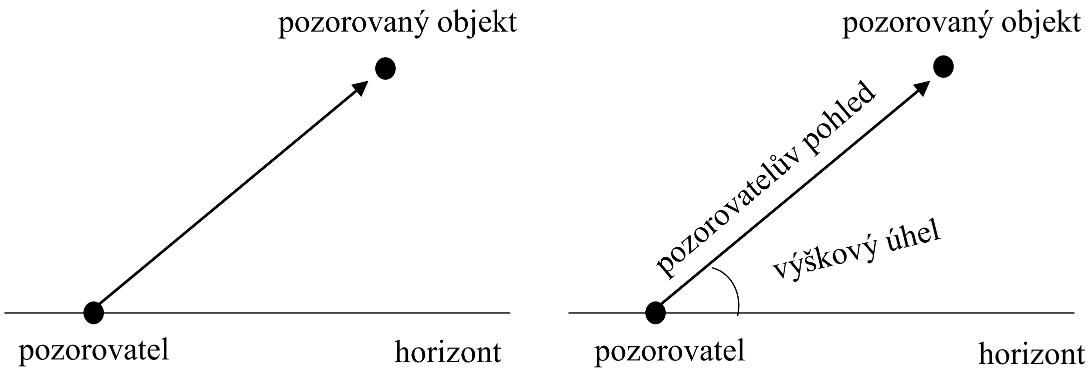
Příklad 3: V tětivovém čtyřúhelníku *ABCD* platí: $\alpha = 54°$, $\beta = 94°$. Určete velikosti zbývajících vnitřních úhlů daného čtyřúhelníku.

11. 6. Goniometrie

V této krátké kapitole se objevuje několik nových pojmů. Aby nedošlo k nedorozumění v tom, co má čtenář počítat, považuji za prospěšné tyto pojmy přiblížit.

Výškový úhel

Pokud pozorovatel vidí sledovaný objekt nad sebou, jedná se o výškový úhel mezi horizontální linií a linií jeho pohledu na objekt. (11. 24)

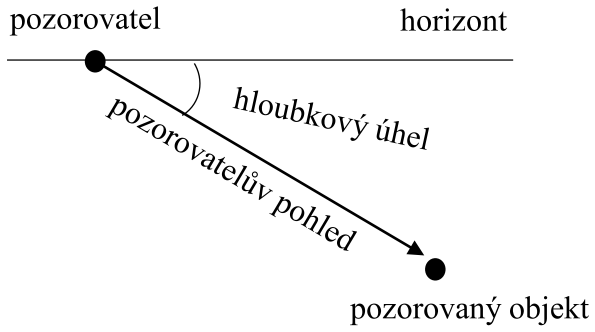


Obr. 11. 24

[48] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Základní geometrické útvary: pracovní sešit z matematiky: [pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií]*. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-018-7, str. 44

Hloubkový úhel

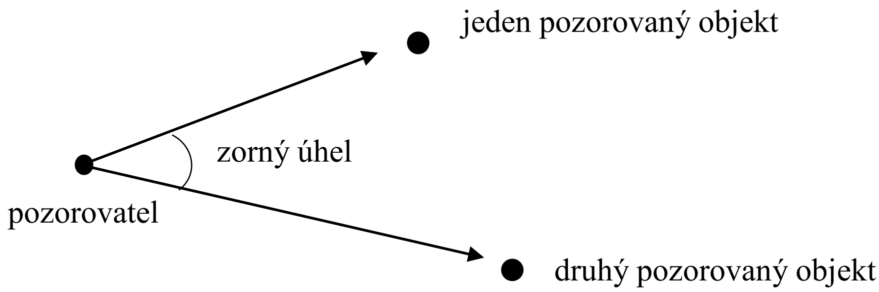
S hloubkovým úhlem je situace obdobná. Pokud pozorovatel vidí sledovaný objekt pod sebou, jedná se o hloubkový úhel mezi horizontální linií a linií jeho pohledu na objekt. (Obr. 11. 25)



Obr. 11. 25

Zorný úhel

Zorným úhlem rozumíme úhel, který svírají „pohledy“ ke dvěma různým objektům nebo dvěma různým částem téhož objektu. (Obr. 11. 26)

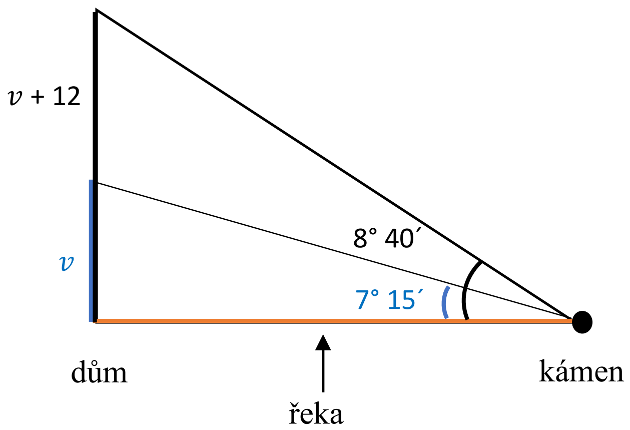


Obr. 11. 26

Příklad 1: Vypočítejte délku tunelu, jestliže vzdálenost konců tunelu od zvoleného místa je 548 m a 376 m. Úhel, pod kterým vidíme oba konce tunelu má velikost 79° 30´.

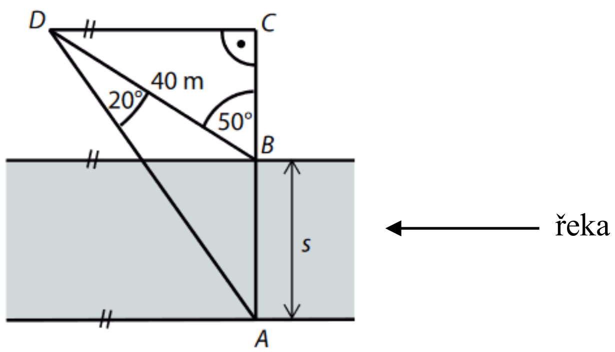
Příklad 2: Letadlo letí ve stálé výšce 2 500 m k letišti. Při prvním měření je letadlo vidět pod výškovým úhlem 25°, při druhém měření pod úhlem 62°. Vypočítejte vzdálenost, kterou letadlo uletělo mezi jednotlivými měřeními.

Příklad 3: Z okna domu stojícího u řeky se díváme kolmo na řeku a vidíme na protějším břehu kámen v hloubkovém úhlu 7° 15´. Z jiného okna, které je o 12 metrů výše vidíme stejný kámen pod úhlem 8° 40´ (Obr. 11. 27). Jak široká je řeka?



Obr. 11. 27

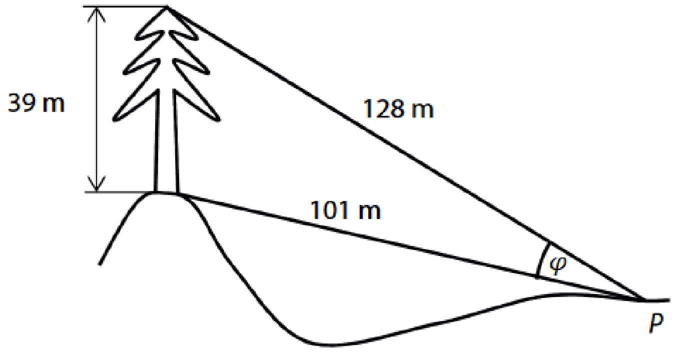
Příklad 4: Na břehu řeky se žáci učili obsluhovat měřicí přístroje – teodolit a laserový dálkoměr. Změřili následující údaje: $|BD| = 40$ m, $|\sphericalangle ADB| = 20°$, $|\sphericalangle CBD| = 50°$, $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD| = 90°$ (Obr. 11. 28). Vypočítejte šířku řeky. [49]



Obr. 11. 28

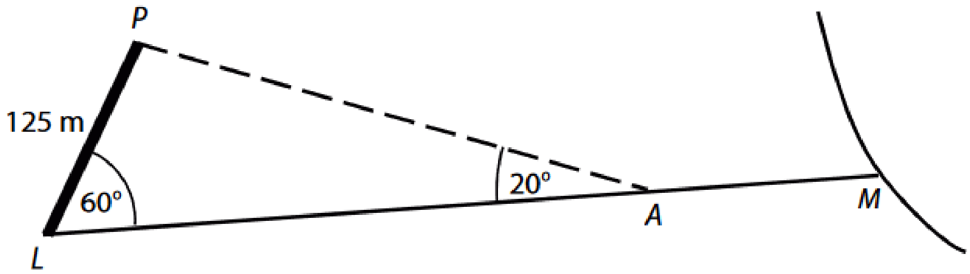
Příklad 5: Svisle rostoucí strom je vysoký 39 m. Místo pozorování P je od paty kmene stromu vzdáleno 101 m a od vrcholu stromu 128 m. Z místa pozorování P se strom od paty kmene po jeho vrchol jeví v zorném úhlu φ. Určete velikost zorného úhlu. (Obr. 11. 29)

49 CERMAT. Statnimaturita-matika.cz: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2017, [cit. 2018-12-30]. Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/maturita-matematika-jaro-2017-test-novy-amos.pdf, str. 13



Obr. 11. 29

Příklad 6: Hranice LP mezi dvěma pozemky má délku 125 metrů. Od jejího levého okraje L vede rovná pěšina LM, která s touto hranicí svírá úhel o velikosti 60°. Na pěšině je stanoviště A, z něhož je hranice LP vidět pod zorným úhlem 20°. Jaká je vzdálenost AL stanoviště A od levého okraje L hranice LP? [51] (Obr. 11. 30)



Obr. 11. 30

11. 7. Komplexní čísla

Příklad 1: Komplexní číslo $a = \frac{7}{3}\sqrt{2} - \frac{7}{3}\sqrt{2}\,i$ zapište v goniometrickém tvaru.

Příklad 2: Vynásobte komplexní čísla $a = 3 * \left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

$b = \frac{2}{9} * \left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

Výpočet ověřte vynásobením daných komplexních čísel v algebraickém tvaru.

Příklad 3: Vypočítejte podíl komplexních čísel $\frac{a}{b}$, $a = cos\ 675° + i\ sin\ 675°$,

$b = cos\ 945° + i\ sin\ 945°$.

Výsledek ověřte vydělením daných komplexních čísel v algebraickém tvaru.

50 CERMAT. Statnimaturita-matika.cz: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2016, [cit. 2018-12-30]. Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/maturita-matematika-didakticky-test-zadani-2016-jaro.pdf, str. 11

51 CERMAT. Statnimaturita-matika.cz: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2015 [cit. 2019-01-01]. Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/matematika-test-zadani-maturita-2015-podzim.pdf, str. 12

Příklad 4: Určete součin komplexních čísel $a = 3 * (cos\ 60° - i\ sin\ 60°)$,

$b = \frac{1}{4} * \left(cos\frac{7\pi}{6} + i\,sin\frac{7\pi}{6}\right)$

Příklad 5: Pomocí Moivreovy věty vypočítejte a^5 mocninu daného komplexního čísla

$a = 3 * (cos\ 210° + i\ sin\ 210°)$.

Výsledek ověřte umocněním daného komplexního čísla v algebraickém tvaru.

Příklad 6: V oboru komplexních čísel řešte danou binomickou rovnici $x^3 + 64 = 0$

Příklad 7: V oboru komplexních čísel řešte danou binomickou rovnici

$x^5 = - 4 + 4i\sqrt{3}$.

Řešení

11. 1. Zápis úhlu

Příklad 1: a) $\mapsto VA, \mapsto VB$ a d) $\mapsto JI, \mapsto JK$

Ostatní nejsou polopřímky se společným počátkem

Příklad 2: konvexní – $\alpha, \beta, \delta, \varphi, \omega$

ostré - β, δ tupé - α, ω přímý – φ pravý-žádný nekonvexní - γ

Příklad 3: 6 : 00 = 180° 3 : 00 = 90° 8 : 00 = 120°

Příklad 4:

4. 1. 135° lze sestrojit tak, že **a)** nejprve sestrojíme osu pravého úhlu. Tím získáme úhel o velikosti 45°. Ten pak sečteme s pravým úhlem.

b) sestrojíme osu pravého úhlu, tím získáme úhel o velikosti 45° a ten pak odečteme od přímého úhlu.

4. 2. 105° lze sestrojit tak, že **a)** nejprve sestrojíme úhel o velikosti 15° tak, že úhel o velikosti 60° (jeho konstrukce byla popsána dříve) rozdělíme osou na úhly o velikosti 30° a jeden z nich pak opět osou rozdělíme na úhly s velikostí 15°. Tento úhel přičteme k pravému úhlu.

b) osou rozdělíme úhel o velikosti 60° na dva úhly s velikostí 30°. Jeden z nich pak odečteme od úhlu o velikosti 135° (postup **a**)

4. 3. 120° lze sestrojit tak, že **a)** k pravému úhlu přičteme úhel o velikosti 30°.

b) od přímého úhlu odečteme úhel o velikosti 60°.

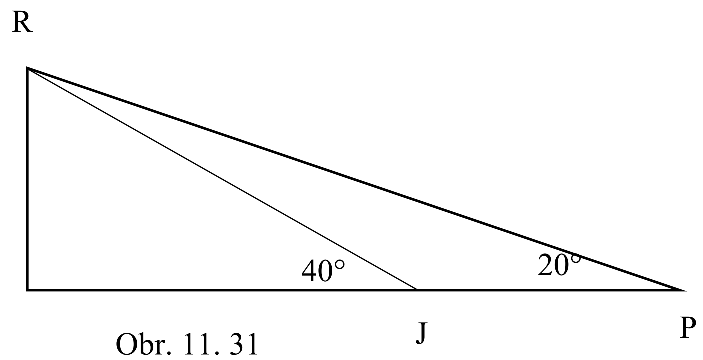
4. 4. 75° lze sestrojit tak, že **a)** sečteme úhly s velikostí 60° a 15°.

b) od pravého úhlu odečteme úhel o velikosti 15°.

c) úhel o velikosti 150° rozdělíme osou na dva úhly s velikostí 75°.

Příklad 5:

K vyřešení této úlohy je dostačující náčrtek (Obr. 11. 31)



Obr. 11. 31

K rozhledně byla blíže Jana.

11. 2. Operace s úhly

Příklad 1: a) 158´= 2° 38´ b) 328´= 5°28´
c) 421´= 7° 01´ d) 555´= 9° 15´

Příklad 2: a) 3° 15´= 3.60´+15´ = 195´ b) 2° 07´= 2.60´+7´= 127´
c) 5° 12´= 5.60´+12´ = 312´ d) 7° 77´= 7.60´+77´= 497´

Příklad 3: a) 2,5° = 2° 30´ b) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{\circ}$ = 1° 40´ c) 3,75° = 3° 45´

d) $\left(3\frac{3}{5}\right)^{\circ}$ = 3° 36´

e) 12,4° = 12° + 0,4 * 60´ = 12° + 24´ = 12° 24´
f) 23,7° = 23° + 0,7 * 60´ = 23° + 42´ = 23° 42´
g) 21,3° = 21° + 0,3 * 60´ = 21° + 18´ = 21° 18´
h) 31,25° = 31° + 0,25 * 60´ = 31° + 15´ = 31° 15´

Příklad 4: a) $92° < 5600'$ $(5520' < 5600')$
b) $380' = 6°\,20'$ $(380' = 380')$
c) $3°30' < 330'$ $(210' < 330')$

Příklad 5: a) 3° 15´ + 7° 22´ = 10° 37´
b) 42° 33´ + 57° 59´ = 99° 92´ = 100° 32´
c) 87° 55´ + 73° 44´ = 160° 99´ = 161° 39´
d) 22° 54´ + 17° 34´ = 39° 88´= 40° 28´
e) 98° 32´ + 49° 52´ = 147° 84´= 148° 24´
f) 156° 17´ + 79° 58´ = 235° 75´ = 236° 15´

Příklad 6: a) 45° b) 15° 23´ * 3 = 45° 69´ = 46° 09´
92° 23° 34´ * 4 = 92° 136´ = 94° 16´
140° 36° 27´ * 5 = 180° 135´ = 182° 15´
144° 29° 42´ * 6 = 174° 252´ = 178° 12´

Příklad 7: a) 47° 13´ b) 83° 07´ c) 78° 07´
d) 85° 15´ - 47° 32´ = 84° 75´ - 47° 32´ = 37° 43´
e) 92° 29´ - 54° 55´ = 91° 89´ - 54° 55´ = 37° 34´
f) 122° 47´ - 98° 56´ = 121° 107´ - 98° 56´ = 23° 51´

Příklad 8: a) 124° 36´ : 4 = 31° 09´
115° 35´ : 5 = 23° 07´
96° 54´ : 6 = 16° 09´
123° 12´ : 3 = 41° 04´

b) 126° : 5 = 125° 60´ : 5 = 25° 12´
83° : 5 = 80° 180´ : 5 = 16° 36´
85° 03´ : 7 = 84° 63´ : 7 = 12° 09´
50° 24´ : 4 = 48° 144´ : 4 = 12° 36´

Příklad 9: a) $\alpha + 43°\ 15' = 97°$
$\alpha = 97° - 43°\ 15'$
$\alpha = 53°\ 45'$

b) $76°\ 39' - \alpha = 25°\ 32'$
$\alpha = 76°\ 39' - 25° 32'$
$\alpha = 51°\ 07'$

11. 3. Grafické operace s úhly

Příklad 1: $\alpha + \beta = 117°$ ….. tupý úhel

Příklad 2: $\delta - \gamma = 76°$ …… ostrý úhel

Příklad 3: $\alpha + \gamma - \beta = 48°$ ….. ostrý úhel

Příklad 4: $\beta - \gamma + \alpha = 90°$ ….. pravý úhel

Příklad 5: Nejprve graficky od $(\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha + \beta) = \gamma$, potom $(\alpha + \gamma) - \gamma = \alpha$

Příklad 6: a) graficky: nejprve $2 * \alpha$, potom $2 * \alpha - \beta$
b) početně: $\gamma = 2 * \alpha - \beta$
$\gamma = 2 * 36° - 54°$
$\gamma = 18°$

Výsledný úhel je ostrý.

Příklad 7: a) graficky: nejprve $\frac{\beta}{2}$, potom $\alpha + \frac{\beta}{2}$

b) početně: $\gamma = 62° + \frac{74°}{2}$

$\gamma = 62° + 37°$

$\gamma = 99°$

Výsledný úhel je tupý.

11. 4. Dvojice úhlů

Příklad 1: a) ANO b) ANO c) NE

d) NE e) NE f) ANO

Příklad 2: $\alpha = 60°$ $\beta = \gamma = 120°$

Příklad 3: $\beta = 3\gamma$

$$\beta + \gamma = 4\alpha$$
$$3\gamma + \gamma = 4\alpha$$
$$4\gamma = 4\alpha$$
$$\gamma = \alpha$$

$$\alpha + 3\alpha + \alpha = 180°$$
$$4\alpha = 180°$$
$$\alpha = 36°$$

$$\alpha = \gamma = \varphi = \delta = 36° \qquad \beta = \varepsilon = 3 * 36° = 108°$$

Příklad 4: a) $\alpha = 90°$ $\beta = \delta = 60°$ $\gamma = 30°$

b) $\alpha = 35°$ $\gamma = 45°$

$\beta = \delta = 180° - (35° + 45°) = 100°$

c) $\beta = 30°$ $\delta = 120°$ $\alpha = \gamma = 30°$

Příklad 5: a) $\beta = 180° - 60° = 120°$ $\gamma = 180° - 140° = 40°$

$\alpha = 180° - (120° + 40°) = 20°$

b) $\alpha = 180° - 115° = 65°$ $\beta = 180° - 135° = 45°$

$\gamma = 180° - (65° + 45°) = 70°$

Příklad 6: $\beta = \iota = \lambda = 75°$ $\alpha = \gamma = \kappa = \mu = 180° - 75° = 105°$

$\theta = \xi = \varepsilon = 40°$ $\eta = \vartheta = \delta = \epsilon = 180° - 40° = 140°$

Příklad 7: a) Chybně je úhel o velikosti 150°. Má být 160°

b) Chybně je úhel o velikosti 80°. Má být 60°.

Příklad 8: $\alpha + 3\alpha = 180°$ $\beta = 135°$

$4\alpha = 180°$

$\alpha = 45°$

Příklad 9: $2\alpha = 144°$

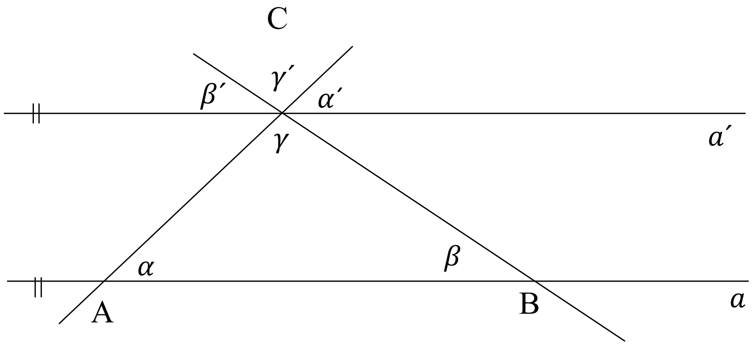
$\alpha = 72°$

Příklad 10: $\alpha = 25°$ $\beta = 50°$ $\gamma = 130°$

$\delta = 65°$ $\varepsilon = 25°$ $\varphi = 65°$

Příklad 11: $\alpha + \alpha + 35° = 180°$
$$2\alpha + 35° = 180°$$
$$2\alpha = 145°$$
$$\alpha = 72°\ 30'$$

Příklad 12: K důkazu použijeme trojúhelník *ABC* (Obr. 11. 32)



Obr. 11. 32

Sestrojíme-li rovnoběžku s přímkou a tak, že $C \in a'$, pak přímka a' vytvoří spolu se stranami trojúhelníku u vrcholu C několik úhlů. Úhel α'je souhlasný s úhlem α. Má proto stejnou velikost jako úhel α. Obdobně to platí s úhly β a β'. Úhly γ, γ' jsou vrcholové. Mají proto také stejnou velikost. Z obrázku je patrné, že $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$. Protože tyto úhly mají stejnou velikost jako jejich „bezčárkoví“ jmenovci, a protože stejnou operaci lze provést pro jakýkoli trojúhelník, je dokázáno, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°.

Příklad 13:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \alpha + \beta &= 240° \\ \alpha + \beta &= 180° \end{aligned}\right\} \quad \alpha + 180° = 240° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60°$$

$$\beta = 180° - 60°$$
$$\beta = 120°$$

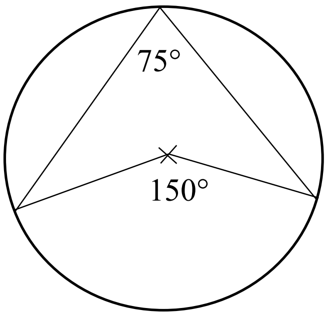
Příklad 14: $\alpha = 55°$
$$\beta = \gamma = 180° - (55° + 80°) = 45°$$
$$\delta = 180° - (92° + 45°) = 43°$$
$$\omega = 180° - 43° = 137°$$
$$\varepsilon = \omega = 137°$$

Příklad 15: α a γ jsou ……souhlasné………………
γ a β jsou ……vrcholové………………
β a ε jsou …….souhlasné………………
δ a ε jsou …….vedlejší…………………
α a δ jsou ……vedlejší…………………
α a β jsou ……střídavé…………………

Příklad 16: $\alpha = 70°$ $\quad\beta = 70°$ $\quad\gamma = 70°$
$\delta = 110°$ $\quad\varepsilon = 40°$ $\quad\alpha' = 70°$

11. 5 Úhly příslušné k obvodu kružnice

Příklad 1: (Obr. 11. 33)

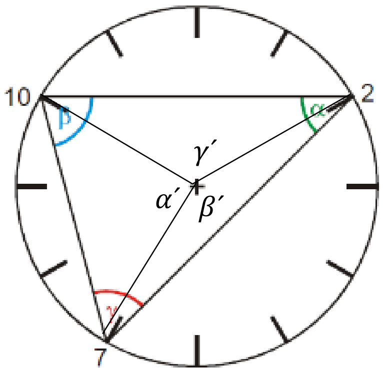


Obr. 11. 33

Délka oblouku je $\frac{5}{12}$ kružnice ⇒ velikost středového úhlu jsou $\frac{5}{12}$ z 360° ⇒ 150°

Velikost obvodového úhlu je polovinou velikosti středového úhlu ⇒ $\frac{150°}{2}$ ⇒ 75°

Příklad 2:



Obr. 11. 34

Všechny tři vyznačené úhly jsou úhly obvodovými – doplníme k nim odpovídající středové úhly – (Obr. 11. 34) jejich velikosti dokážeme snadno zjistit. Obvodové úhlly pak mají velikost polovoční oproti úhlům středovým

1) $\alpha' = 360° * \frac{3}{12} = 90°$

$\alpha = \frac{\alpha'}{2} = 45°$

2) $\gamma' = 360° * \frac{4}{12} = 120°$

$\gamma = \frac{\gamma'}{2} = 60°$

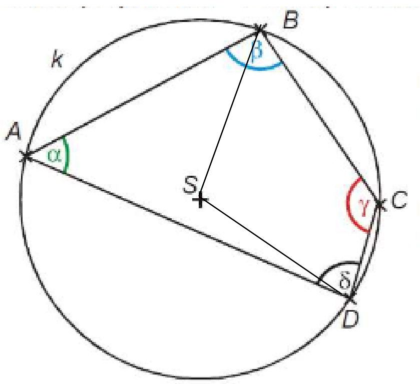
3) $\beta' = 360° * \frac{5}{12} = 150°$

$\beta = \frac{\beta}{2} = 75°$

Zkouška: $\alpha + \beta + \gamma = 45° + 60° + 75° = \underline{180°}$

Příklad 3:

Čtyřúhelník *ABCD* je tětivový ⇒ lze mu opsat kružnici (Obr. 11. 35)



Obr. 11. 35

Úhel α je obvodovým úhlem k menšímu oblouku *BD*, úhel γ je obvodovým úhlem k většímu oblouku *BD* ⇒ $\alpha + \gamma = 180°$ ⇒ $\gamma = 180° - \alpha$

$\gamma = 180° - 54°$ ⇒ $\underline{\gamma = 126°}$

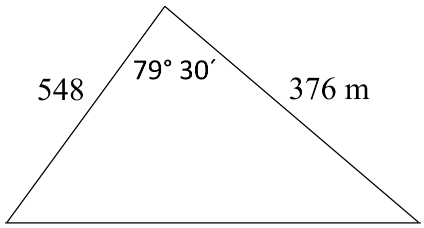
Úhel β je obvodovým úhlem k většímu oblouku *AC*, úhel δ je obvodovým úhlem k menšímu oblouku *AC* ⇒ $\beta + \delta = 180°$ ⇒ $\delta = 180° - \beta$

$\delta = 180° - 94°$ ⇒ $\underline{\delta = 86°}$

Zkouška: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 54° + 94° + 126° + 86° = \underline{360°}$

11. 6. Goniometrie

Příklad 1:



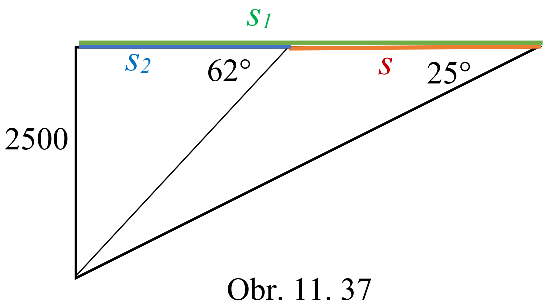
Obr. 11. 36

Z obrázku (Obr. 11. 36) je vidět, že známe dvě strany trojúhelníka a úhel jimi sevřený ⇒ použijeme kosinovou větu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos\gamma$$
$$c^2 = 548^2 + 376^2 - 2 * 548 * 376 * \cos 79{,}5°$$
$$\underline{c = 605 \text{ m}}$$

Tunel je dlouhý 605 metrů.

Příklad 2:



Obr. 11. 37

Na obrázku (Obr. 11. 37) máme dva pravoúhlé trojúhelníky. V obou známe úhel a odvěsnu k tomuto úhlu protilehlou. Vypočítat potřebujeme odvěsnu k úhlu přilehlou ⇒ použijeme funkci tangens.

$$tg\ 25° = \frac{2500}{s_1} \qquad tg\ 25° = \frac{2500}{s_2}$$

$$s_1 = \frac{2500}{tg\ 25°} \qquad s_2 = \frac{2500}{tg\ 62°}$$

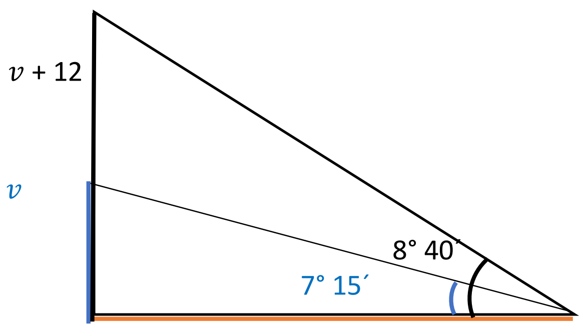
$$s_1 = 5361 \text{ m} \qquad s_2 = 1329 \text{ m}$$

Vzdálenosti ještě musíme odečíst ⇒ $s = s_1 - s_2$

$\underline{s = 4\,032}$ m

Mezi dvěma měřeními letadlo uletělo vzdálenost 4 032 metrů.

Příklad 3:



Obr. 11. 38

Máme zadané dva pravoúhlé trojúhelníky (Obr. 11. 38), ve kterých známe úhel a délku společné odvěsny (šířka řeky) - k tomuto úhlu přilehlé. Dokážeme vyjádřit délku protilehlé odvěsny. Délku společné odvěsny dáme do rovnosti.

$tg\ 7°\ 15´ = \frac{v}{d}$ $\qquad$ $tg\ 8°\ 40´ = \frac{v+12}{d}$

$d = \frac{v}{tg\ 7{,}25°}$ $\qquad$ $d = \frac{v+2}{tg\ 8{,}67°}$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{tg\ 7{,}25°} = \frac{v+12}{tg\ 8{,}67°}$$

$$v * tg\ 8{,}67° = (v + 12) * tg\ 7{,}25°$$

$$0,\ 1525\ v = (v + 12) * 0,\ 1272$$

$$v = 60,\ 33\ \text{m}$$

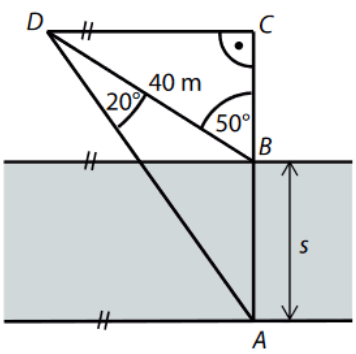
v dosadíme $\Rightarrow d = \frac{60{,}33}{tg\ 7{,}25°} \quad \Rightarrow \quad d = 747$ m

Řeka je široká 474 metry.

Příklad 4:

Výpočet začneme tím, že určíme velikosti dvou vnitřních úhlů trojúhelníku *ABD.*

(Obr. 11. 39)



Obr. 11. 39

$|\sphericalangle ABD| = 180° - 50° = 130°$

$|\sphericalangle DAB| = 180° - (20° + 130°) = 30°$

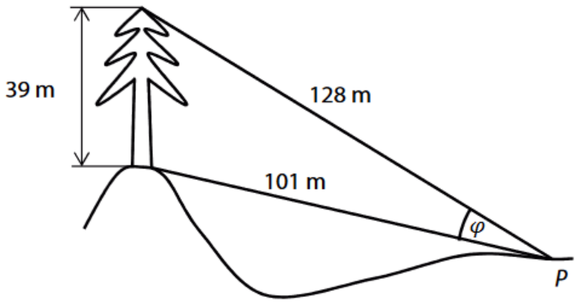
Nyní známe dva vnitřní úhly trojúhelníku a stranu proti jednomu z nich $\Rightarrow$ použijeme sinovou větu

$$\frac{40}{sin\ 30°} = \frac{d}{sin\ 20°} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{40 * sin\ 20°}{sin\ 30°} \quad \Rightarrow$$

$\underline{d = 27,\ 4\ \text{m}}$

Řeka je široká 27, 4 metru.

<u>Příklad 5</u>: (Obr. 11. 40)



Obr. 11. 40

Máme zadané všechny tři strany trojúhelníku – chceme zjistit velikost jednoho vnitřního úhlu ⇒ použijeme kosinovou větu

$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc * \cos\gamma$

$$\Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}$$

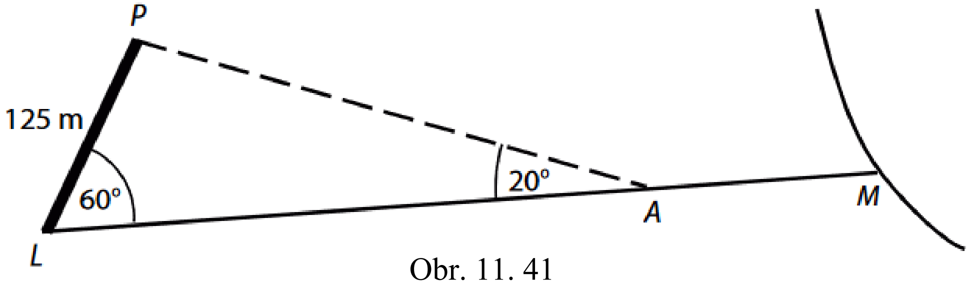
$$\cos\gamma = \frac{101^2 + 128^2 - 39^2}{2 * 101 * 128}$$

$$\cos\gamma = \frac{25064}{25856}$$

$\underline{\gamma = 14°\ 13'}$

Velikost zorného úhlu je 14° 13´.

<u>Příklad 6</u>: (Obr. 11. 41)



Obr. 11. 41

$|AL|$= ?

Nejprve dopočítáme zbývající vnitřní úhel: $|\sphericalangle APL|$ = 180° - (60° + 20°)

$|\sphericalangle APL|$ = 100°

Nyní můžeme použít sinovou větu: $\frac{125}{\sin 20°} = \frac{|AL|}{\sin 100°}$

$$|AL| = \frac{125 * \sin 100°}{\sin 20°}$$

$\underline{|AL| = 360 \text{ m}}$

Vzdálenost *AL* stanoviště *A* od levého okraje *L* hranice *LP* je 360 metrů.

11. 7. Komplexní čísla

Příklad 1:

$$|a| = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{9} * 2 + \frac{49}{9} * 2} = \sqrt{\frac{98}{9} + \frac{98}{9}} = \sqrt{\frac{196}{9}} = \frac{14}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} cos\alpha &= \frac{a_1}{|a|} = \frac{\frac{7}{3}\sqrt{2}}{\frac{14}{3}} = \frac{7\sqrt{2}}{3} * \frac{3}{14} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\alpha &= \frac{a_2}{|a|} = \frac{-\frac{7}{3}\sqrt{2}}{\frac{14}{3}} = -\frac{7\sqrt{2}}{3} * \frac{3}{14} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \alpha = 315° = \frac{7}{4}\pi$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{14}{3} * (cos\ 315° + i\ sin\ 315°)$$

Příklad 2:

$$a * b = 3 * \frac{2}{9} * \left[cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right) + i\ sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right)\right] = \frac{2}{3} * \left(cos\frac{10\pi}{4} + i\ sin\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$a * b = \frac{2}{3} * \left(cos\frac{5\pi}{2} + i\ sin\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} * \left(cos\frac{\pi}{2} + i\ sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} * (0 + i * 1)$$

$$a * b = \frac{2}{3}\ i$$

$$a = 3 * \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad b = \frac{2}{9} * \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a * b = \frac{2}{3} * \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) * \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{3} * \left(-\frac{2}{4} + i\ \frac{2}{4} + i\ \frac{2}{4} - i^2\frac{2}{4}\right)$$

$$a * b = \frac{2}{3} * \left(-\frac{1}{2} + i + \frac{1}{2}\right)$$

$$a * b = \frac{2}{3}\ i$$

$$\Rightarrow 3 * \left(cos\frac{3\pi}{4} + i\ sin\frac{3\pi}{4}\right) * \frac{2}{9} * \left(cos\frac{7\pi}{4} + i\ sin\frac{7\pi}{4}\right) =$$
$$= 3 * \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) * \frac{2}{9} * \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{3} * \left(-\frac{2}{4} + \frac{2}{4}\ i + \frac{2}{4}\ i - \frac{2}{4}\ i^2\right)$$
$$= \frac{2}{3} * \left(-\frac{1}{2} + i + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\ i$$

Příklad 3:

$$\frac{a}{b} = cos\ (675° - 945°) + i\ sin\ (675° - 945°) = cos\ (-270°) + i\ sin\ (-270°)$$

$$\frac{a}{b} = cos\ 90° + i\ sin\ 90° \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a}{b} = i$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad b = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} * \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} + i^2\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - i^2\frac{1}{2}} = -\frac{\frac{1}{2} - i - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{i}{1}$$

$$\frac{a}{b} = i$$

Příklad 4:

V tomto případě číslo *a* neodpovídá předpisu komplexního čísla v goniometrickém tvaru: $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ⇒ musíme nejprve číslo *a* upravit tak, aby předpisu odpovídalo ⇒ využijeme toho, že funkce *sinus* je lichá ⇒ $-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$ a funkce *kosinus* je sudá ⇒ $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

$$\Rightarrow a = 3 * (\cos 60° - i \sin 60°) = 3 * (\cos(-60°) + i \sin(-60°))$$
$$a = 3 * (\cos 300° + i \sin 300°)$$

Ještě převedeme velikost úhlu v čísle *b* do stupňové míry (nebo naopak *a* do obloukové míry)

$$b = \frac{1}{4} * (\cos 210° + i \sin 210°)$$

Nyní už můžeme použít vzorec pro součin komplexních čísel v goniometrickém tvaru

$$a * b = 3 * \frac{1}{4}[\cos(300° + 210°) + i \sin(300° + 210°)]$$

$$a * b = \frac{3}{4} * (\cos 510° + i \sin 510°) = \frac{3}{4} * (\cos 150° + i \sin 150°)$$

Příklad 5:

a^5, $a = 3 * (\cos 210° + i \sin 210°)$

$$a^5 = 3^5 * (\cos 5 * 210° + i \sin 5 * 210°) = 243 * (\cos 1050° + i \sin 1050°)$$

$$\underline{a^5 = 243 * (\cos 330° + i \sin 330°)} = 243 * \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

Zkouška: $a = 3 * \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow a^5 = 3^5 * \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)^5 = -243 * \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + 5 * \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 * \left(\frac{1}{2}i\right) + 10 * \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 * \left(\frac{1}{2}i\right)^2 + 10 * \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 * \left(\frac{1}{2}i\right)^3 + 5 * \frac{\sqrt{3}}{2} * \left(\frac{1}{2}i\right)^4 + \left(\frac{1}{2}i\right)^5$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\ \frac{1}{2}\right)^5=\frac{9\sqrt{3}}{32}+5*\frac{9}{16}*\frac{1}{2}i+10*\frac{3\sqrt{3}}{8}*\left(-\frac{1}{4}\right)+10*\frac{3}{4}*\left(-\frac{1}{8}i\right)+\frac{5\sqrt{3}}{2}*\frac{1}{16}+\frac{1}{32}i=$$

$$=\frac{9\sqrt{3}}{32}+\frac{45}{32}i-\frac{30\sqrt{3}}{32}-\frac{30}{32}i+\frac{5\sqrt{3}}{32}+\frac{1}{32}i$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\ \frac{1}{2}\right)^5=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow \qquad a^5=-243*\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=243*\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

Příklad 6: $x^3+64=0$

$$x^3=-64$$

$$|x|=\sqrt{0+(-64)^2}=64$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha=\frac{x_1}{|x|}=\frac{-64}{64}=-1 \\ \sin\alpha=\frac{x_2}{|x|}=\frac{0}{64}=0 \end{array}\right\}\quad \alpha=\pi$$

$$\Rightarrow x_k=\sqrt[3]{64}*\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$$

$$x_0=4*\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=4*\left(\frac{1}{2}+i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2+2\sqrt{3}$$

$$x_1=4*\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=4*(\cos\pi+i\sin\pi)=4*(-1+0\ i)=$$
$$=-4$$

$$x_2=4*\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}\ i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)=4*\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=4*\left(\frac{1}{2}-i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$
$$=2-2\sqrt{3}$$

Příklad 7: $x^5=-4+4i\sqrt{3}$

$$|x|=\sqrt{(-4)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16+16*3}=\sqrt{64}=8$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha=\frac{x_1}{|x|}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2} \\ \sin\alpha=\frac{x_2}{|x|}=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}\quad \alpha=120°=\frac{2\pi}{3}$$

Dosadíme do vzorce $x_k = \sqrt[n]{|x|} * \left(cos\ \frac{\alpha+2k\pi}{n}\ \ i\ sin\ \frac{\alpha+2k\pi}{4}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$$\Rightarrow x_k = \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{5} + i\ sin\frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{5}\right)$$

$$x_0 = \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{5} + i\ sin\frac{\frac{2\pi}{3}}{5}\right) = \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{2\pi}{15} + i\ sin\frac{2\pi}{15}\right)$$

$$x_1 = \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{5} + i\ sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{\frac{2\pi+6\pi}{3}}{5} + i\ sin\frac{\frac{2\pi+6\pi}{3}}{5}\right) =$$

$$= \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{8\pi}{15} + i\ sin\frac{8\pi}{15}\right)$$

$$x_2 = \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{5} + i\ sin\frac{\frac{2\pi}{2}+4\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{\frac{2\pi+12\pi}{3}}{5} + i\ sin\frac{\frac{2\pi+12\pi}{3}}{5}\right) =$$

$$= \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{14\pi}{15} + i\ sin\frac{14\pi}{15}\right)$$

$$x_3 = \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{5} + i\ sin\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{\frac{2\pi+18\pi}{3}}{5} + i\ sin\frac{\frac{2\pi+18\pi}{3}}{5}\right) =$$

$$= \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{20\pi}{15} + i\ sin\frac{20\pi}{15}\right) = \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{4\pi}{3} + i\ sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$x_4 = \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{\frac{2\pi}{3}+8\pi}{5} + i\ sin\frac{\frac{2\pi}{3}+8\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{\frac{2\pi+24\pi}{3}}{5} + i\ sin\frac{\frac{2\pi+24\pi}{3}}{5}\right) =$$

$$= \sqrt[5]{8} * \left(cos\frac{26\pi}{15} + i\ sin\frac{26\pi}{15}\right)$$

Závěr

V bakalářské práci se mi podařilo nalézt odpovědi na většinu otázek, které jsem si položila.

Na otázku, kdy naši předkové „objevili“ úhel, je možné odpovědět v podstatě pouze na základě domněnek. Z doby, kdy k tomu, s největší pravděpodobností, došlo (doba kamenná) neexistují žádné záznamy. Nemáme tedy žádný důkaz o tom, že to tak opravdu bylo. Pouze tedy předpokládáme, že takový vývoj byl nevyhnutelný. Aktivně pak lidé s úhly nepochybně museli začít pracovat v době, kdy opustili jeskyně a byli nuceni začít vyměřovat pole, silnice a stavět obydlí. Aby jim mohla být spravedlivě vyměřena daň, musely být jejich pozemky zakresleny. Tam již je nepochybné, že byl úhel běžně užíván. Potvrdila se mi má domněnka, že k hlavnímu pokroku ve znalostech a využívání úhlu došlo v souvislosti s rozvojem astronomie a potřeby navigace. Díky velkému tlaku na potřeby přesnějšího měření úhlů došlo k popsanému vývoji stále dokonalejších přístrojů až k současným elektronickým.

Ve všech, na Základní škole běžně užívaných, učebnicích, je úhel zaveden stejným způsobem – je vymezen dvěma polopřímkami se společným počátkem. V podstatě jedinou odchylkou je učebnice pro Gymnázia, ve které je úhel definován jako průnik polorovin (konvexní úhel) nebo sjednocení polorovin (nekonvexní úhel).

Rozdělení úhlů podle velikosti je, myslím, všeobecně známá skutečnost. K překvapivému zjištění jsem dospěla u dvojic úhlů. V naprosté většině učebnic jsou dvojice souhlasných a střídavých úhlů definovány pomocí dvojice rovnoběžných (a jedné s nimi různoběžné přímky). To je však pouze zvláštní případ. Ve skutečnosti tyto dvojice úhlů najdeme u každé trojice navzájem různých různoběžných přímek (které netvoří svazek). Tyto úhly jsou střídavými nebo souhlasnými, jen nemají stejnou velikost. Protože jsou ale takto definované úhly těžko využitelné k výpočtům, uvádí se v učebnicích většinou definice právě pomocí rovnoběžek.

Novým „objevem“ pro mne byly také úhly doplňkové, výplňkové, styčné a přilehlé. Asi proto, že ani s těmito poznatky se v běžně užívaných učebnicích nesetkáváme.

Velmi mne zaujala kniha (román mnoha rozměrů) Plochozemě. Poskytuje netradiční, zajímavý a humorný náhled do světa rovinných útvarů. Nejsem si jista jedním pojmem. Asi bych místo Přímky volila označení úsečka. Možná došlo k nepřesnosti překladem, možná to tak opravdu mělo být. Kniha je ale opravdu velmi zajímavá. Mohu ji všem vřele doporučit.

Jsem velmi ráda, že jsem si při psaní této práce prostudovala spoustu materiálů – jak historických, tak současných. Zcela jistě mě to posunulo o stupínek dále a až při výuce narazíme na téma úhlů, budu ji moci obohatit o zajímavá fakta (nejen z dějin matematiky), která se často opomíjejí. Pro děti jsou ale určitě zajímavá.

Seznam použitých informačních zdrojů

Tištěné zdroje

ABBOTT, Edwin Abbott. *Plochozemě: román mnoha rozměrů*. Brno: B4U, 2013. ISBN 978-80-87222-21-8

BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4.

BEČVÁŘ, Jindřich a Eduard FUCHS, ed. *Matematika v proměnách věků I: sborník*. Praha: Prometheus, 1998. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-107-8.

BEČVÁŘOVÁ, Martina. *Eukleidovy základy, jejich vydání a překlady*. Praha: Prometheus, 2002. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-233-3.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-656-7.

COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro 6. ročník základní školy*. 2., upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007. ISBN 978-80-7168-992-8.

EUKLEIDÉS. *Eukleidovy Základy [Elementa]*. Praha: Jednota českých mathematiků a fysiků, 1907.

HAVLÍČEK, Karel. *Cesty moderní matematiky*. 2., rozš. a přeprac. vyd. Praha: Horizont, 1976. Malá moderní encyklopedie (Horizont).

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ, Anna SUKNIAK, Eva BOMEROVÁ a Kateřina EICHLEROVÁ. *Matematika*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2015-. ISBN 978-80-905756-1-5.

HERMOCHOVÁ, Dana, Jana PRESOVÁ, Petr KAŠŠÁK, et al. *Hravá matematika 6: pracovní sešit pro 6. ročník ZŠ a víceletá gymnázia: v souladu s RVP ZV*. Praha: Taktik, 2014. ISBN 978-80-87881-18-7.

HUDCOVÁ, Milada. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*. 2. vydání. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-318-6.

JEDLIČKOVÁ, Michaela, Peter KRUPKA a Jana NECHVÁTALOVÁ. *Matematika: rovinné útvary*. Ilustroval Martin BAŠAR. Brno: Nová škola, 2015. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-7612.

KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1968.Ch. J. Scriba, P. Schreiber: *5000 Years of Geometry*, 2015

MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd*. 2., rev. vyd. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2011. ISBN 978-80-87053-64-5.

MOLNÁR, Josef. *Matematika 6: [učebnice pro základní školy]*. Olomouc: Prodos, 1998. ISBN 80-85806-98-3.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy: [učebnice zpracovaná podle učebních osnov vzdělávacího programu Základní škola*. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-092-6.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Pracovní sešit z matematiky: soubor úloh pro 6. ročník základní školy*. 4., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 9788071964223.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Základní geometrické útvary: pracovní sešit z matematiky: [pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií]*. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-018-7.

PALKOVÁ, Martina. *Průvodce matematikou 2, aneb, Co byste měli znát z geometrie ze základní školy*. Brno: Didaktis, 2007. Co byste měli znát ze základní školy. ISBN isbn978-80-7358-083-4.
ODVÁRKO, Oldřich a Jana ŘEPOVÁ. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-039-x.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. Dot. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-85849-07-0.

PETRÁNEK, Oldřich. *Matematika 3: pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy*. Dotisk 1. vydání. Praha: SPN, 1980.

STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1963. Malá moderní encyklopedie (Orbis).

ŠAROUNOVÁ, Alena, Jan MAREŠ, Jitka RŮŽIČKOVÁ a Věnceslava VÄTEROVÁ. *Matematika 6*. 2. vydání. Ilustroval Martin MAŠEK. Praha: Prometheus, 2015. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-373-8.

Webové stránky

BAKALÁŘI. Matematika: Základy geometrie: Eukleides jako "otec geometrie" – Khanova škola. *KhanAcademy* [online]. 2018 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: https://khanovaskola.cz/video/48/353/264-eukleides-jako-otec-geometrie

CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ. Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2017, 2017 [cit. 2018-12-30]. Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/maturita-matematika-jaro-2017-test-novy-amos.pdf

CERMAT. Statnimaturita-matika.cz: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2016, [cit. 2018-12-30]. Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/maturita-matematika-didakticky-test-zadani-2016-jaro.pdf

CERMAT. Statnimaturita-matika.cz: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2017, [cit. 2018-12-30]. Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/maturita-matematika-jaro-2017-test-novy-amos.pdf

CERMAT. Statnimaturita-matika.cz: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2015 [cit. 2019-01-01]. Dostupné z:

http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/matematika-test-zadani-maturita-2015-podzim.pdf

Co je to?: Co je to dioptr? [online]. Praha: Superia.cz, 2017 [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: http://cojeto.superia.cz/ruzne/dioptr.php
Encyklopedie Vševěd: Trikvetr [online]. Praha: Netpoint, 2015, 2015 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: http://encyklopedie.vseved.cz/trikvetr

HAVRLANT, Lukáš. Matematika.cz: Orientovaný úhel. *Matematika.cz: Orientovaný úhel* [online]. Brno: Nová média, 2014, 2014 [cit. 2018-12-25]. Dostupné z: https://matematika.cz/orientovany-uhel

HAVRLANT, Lukáš. Matematika.cz: radián. *Matematika.cz: radián* [online]. Brno: Nová média s. r. o, 2013, 2013 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: https://matematika.cz/radian

HAVRLANT, Lukáš. Matematika.cz: úhel. *Matematika.cz: úhel* [online]. Brno: Nová média, s.r.o. 2013, 2013 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: https://matematika.cz/uhel

History of Technology: History of Angle Measurement [online]. Cairo, Egypt April 16-21, 2005: David A. Wallis, United Kingdom, 16-21, 2005 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: www.fig.net/resources/proceedings/fig_proceedings/cairo/papers/wshs_01/wshs01_02_wallis.pdf

KRYNICKÝ, Martin. Matematika ZŠ: Souhlasné a střídavé úhly. *Realistické učebnice matematiky a fyziky: když (se) chcete naučit...* [online]. Strakonice, 2010, 27. 8. 2018 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice/03%20Matematika%20Z%C5%A0/01%206.%20ro%C4%8Dn%C3%ADk/05%20%C3%9Ahel/14%20Souhlasn%C3%A9%20a%20st%C5%99%C3%ADdav%C3%A9%20%C3%BAhly.pdf

KRYNICKÝ, Martin. Učebnice matematiky pro gymnázia: Planimetrie. *Učebnice matematiky pro gymnázia: Planimetrie* [online]. Strakonice: www.realisticky.cz, 2010, 2010 [cit. 2019-01-27]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20S%C5%A0/03%20Planimetrief

KRYNICKÝ, Martin. Učebnice matematiky pro gymnázia: Goniometrie. *Učebnice matematiky pro gymnázia: Goniometrie* [online]. Strakonice: www.realisticky.cz, 2010, 2010 [cit. 2018-12-26]. Dostupné z: http://ucebnice.krynicky.cz/Matematika/index.html#4_goniometrie

Matematika.cz: Orientovaný úhel [online]. Brno: Nová média, 2014 [cit. 2018-12-25]. Dostupné z: https://matematika.cz/orientovany-uhel

Matematika s radostí: goniometrie [online]. Ostrava: Isibalo, 2016 [cit. 2019-02-10]. Dostupné z: http://msr.vsb.cz/goniometrie/trigonometrie

Měření úhlů. *Měření úhlů* [online]. Ivančice: MBCalibr, spol., 2014, 2014 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: http://www.mbcalibr.cz/mereni-uhlu.html

MOTYČKOVÁ, Marie. Goniometrie a trigonometrie: Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole. *Goniometrie a trigonometrie: Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole* [online]. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta UK, 2006, 2006 [cit. 2019-02-26]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/motyckova/Stranky_s_aplety/Uvod.html

REICHL, Jaroslav. Encyklopedie fyziky: Dějiny matematiky a fyziky. *Encyklopedie fyziky: Dějiny matematiky a fyziky* [online]. Praha: Aitis, 2018, 2018 [cit. 2018-12-25]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1545-nazvy-goniometrickych-funkci#

ROKYTA, Mirko. Trisekce úhlu, kvadratura kruhu a jiné podobné "nemožné úlohy". *Trisekce úhlu, kvadratura kruhu a jiné podobné "nemožné úlohy"* [online]. Praha: katedra matematické analýzy MFF

UK Praha [cit. 2019-02-01]. Dostupné z: http://www.talnet.cz/documents/18/39cdd2ad-93d3-4dca-afb4-97796ebeaed8

SCHEIRICH, Petr. Vesmír: Velké umění astronavigace: Od astrolábu po sextant. *Vesmír: Velké umění astronavigace: Od astrolábu po sextant* [online]. Praha: WebActive, 2018, 1. 10. 2018, **2018**(10) [cit. 2019-02-01]. ISSN 1214-4029. Dostupné z: https://www.citacepro.com/dok/gwDH9OrJmERbpq97

Slovník pojmů, odborných výrazů, vysvětlení významu slov a hesel: Definice významu, termínu Dioptr. *Slovník pojmů, odborných výrazů, vysvětlení významu slov a hesel: Definice významu, termínu Dioptr* [online]. Praha: Encyklopedie Kdo je to?, 2017, 2017 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: http://cojeto.superia.cz/ruzne/dioptr.php

SUSSELMILCH, David. Planimetrie: úsekový úhel. *Planimetrie: úsekový úhel* [online]. Praha: TOPlist, 1997, 1997 [cit. 2019-01-27]. Dostupné z: http://planimetrie.kvalitne.cz/uhly_usekovy.html

VLACHOVÁ, Magda. Techmania.cz: Slavní matematici, fyzici a vynálezci. *Techmania.cz: Slavní matematici, fyzici a vynálezci* [online]. Praha: vedci.wz, 2009, 2009 [cit. 2018-12-30]. Dostupné z: http://vedci.wz.cz/historie/12.htm

Velká encyklopedie vesmíru: Trikvetr. *Veká encyklopedie vesmíru: Trikvetr* [online]. Praha: Wikina.cz, 2014, 2014 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: http://www.wikina.cz/a/Trikvetr

WALLIS, David A. History of Technology: History of Angle Measurement. *History of Technology: History of Angle Measurement* [online]. Cairo, Egypt: Pfaraohs to Geoinfrmatics, 2005 [cit. 2019-02-01]. Dostupné z: https://www.fig.net/resources/proceedings/fig_proceedings/cairo/papers/wshs_01/wshs01_02_wallis.pdf

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Astroláb [online]. c2017 [cit. 2018-11-02]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Astrol%C3%A1b&oldid=15397508>

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Groma [online]. c2018 [cit. 2018-11-27]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Groma&oldid=16532450>

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Johannes Hevelius [online]. c2016 [cit. 2018-11-02]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Johannes_Hevelius&oldid=14281303>

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Klaudios Ptolemaios [online]. c2018 [cit. 2018-11-02]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Klaudios_Ptolemaios&oldid=16405621>

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Kvadratura kruhu [online]. c2018 [cit. 2018-11-30]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Kvadratura_kruhu&oldid=15967021>

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Teodolit [online]. c2017 [cit. 2018-11-27]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Teodolit&oldid=15603358>

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Trigonometrie [online]. c2016 [cit. 2018-12-25]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Trigonometrie&oldid=13472061>

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Trisekce úhlu [online]. c2018 [cit. 2018-11-17]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Trisekce_%C3%BAhlu&oldid=16626751>

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Tycho Brahe [online]. c2018 [cit. 2018-11-02]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Tycho_Brahe&oldid=16424412>

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Úhel [online]. c2018 [cit. 2018-11-27]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=%C3%9Ahel&oldid=16077228>

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Úhloměr [online]. c2016 [cit. 2018-11-02]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=%C3%9Ahlom%C4%9Br&oldid=14153200>

Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Zdvojení krychle [online]. c2017 [cit. 2018-11-30]. Dostupný z WWW:<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Zdvojen%C3%AD_krychle&oldid=15400340>

Wikipedia contributors, "George Graham (clockmaker)," *Wikipedia, The Free Encyclopedia,* https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=George_Graham_(clockmaker)&oldid=831393170 (accessed November 2, 2018).

Wikipedia contributors, "Leonard Digges (scientist)," *Wikipedia, The Free Encyclopedia,* https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Leonard_Digges_(scientist)&oldid=829209345 (accessed November 2, 2018).

Wikipedia contributors, "Jesse Ramsden," *Wikipedia, The Free Encyclopedia,* https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Jesse_Ramsden&oldid=856893115 (accessed November 2, 2018).