UNIVERZITA KARLOVA

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tečnové a tětivové mnohoúhelníky

Circumscribed and inscribed polygons

Šárka Matějovská

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2020

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Tečnové a tětivové mnohoúhelníky potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze, 6.12.2020

Poděkování
Ráda bych poděkovala vedoucímu své bakalářské práce, Mgr. Michalu Zambojovi, Ph.D., za jeho cenné rady, důležité připomínky, ochotu a skvělý přístup v této nelehké době. Dále děkuji své rodině za podporu při psaní této práce.

Abstrakt

V této práci „Tečnové a tětivové mnohoúhelníky“ jsou podrobně rozebrány vybrané úlohy z české i zahraniční matematické olympiády a z různých sbírek příkladů. Jedná se především o obtížnější úlohy, které jsou rozšířeny o vlastní řešení. Aby bylo řešení snáze pochopitelné, doplňuji práci teorií, kde jsou dokázány i další věty a vysvětleny různé vlastnosti přispívající k lepšímu porozumění této problematice. Také tu lze najít zobecnění některých úloh a vlastností pro mnohoúhelníky, což je možné uplatnit právě při řešení matematických úloh. Práce je rozdělena do pěti kapitol. V první kapitole jsou zopakovány důležité pojmy z učiva střední školy, které se následně promítají do řešení úloh. Tato kapitola je umístěna hned na začátku, aby se k ní čtenář mohl kdykoli v případě potřeby vrátit. Následující kapitoly jsou zaměřeny postupně na čtyřúhelníky, pětiúhelníky, šestiúhelníky a na závěr na obecné mnohoúhelníky. Každá z těchto čtyř kapitol je pak dále dělena na tětivové a tečnové útvary. Práce je určena pro žáky středních škol a jejich učitele matematiky. Ti ji mohou využít k přípravě na matematické soutěže. Mimo jiné úlohy, které tu předkládám, je lze použít pro zpestření výuky syntetické geometrie. Tato práce si tedy klade za cíl objasnit řešení vybraných úloh týkajících se právě tečnových a tětivových mnohoúhelníků. Celá práce je proložena mnohými obrázky vytvořenými v programu GeoGebra, které podporují snazší pochopení těchto úloh a jejich řešení.

Klíčová slova

tečnový, tětivový, čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník, mnohoúhelník

Abstract

Problems from the Czech and foreign mathematical olympiad and from various mathematical books are analysed elaborately in this thesis 'Circumscribed and inscribed polygons'. It depicts mainly more demanding tasks, which are completed with their solution. This thesis is supplemented by theoretical background, where theorems and properties are explained, in order that their solution is more easily understandable. Furthemore, generalization of some tasks and properties of polygons can be found there. We can use it for dealing with mathematical tasks. This whole thesis is divided in five chapters. The first chapter reviews important concepts from the syllabi of secondary schools. We can find these concepts in the task solutions further in this thesis. This chapter is located at the beginning of this work so that the reader could refer back to it anytime. Other chapters are successively focused on quadrilaterals, pentagons, hexagons and general polygons. Each of these chapters is divided into inscribed and circumscribed figures. This thesis is meant for students of secondary school and their math teachers. They can use it for their preparation for the mathematical competitions. All presented tasks can also be used for varying lectures of synthetic geometry. The aim of this thesis is to clarify the solutions of chosen tasks related to inscribed and circumscribed polygons. The entire thesis is completed with pictures made in the GeoGebra program for easier comprehension of solutions.

Keywords

circumscribed, inscribed, quadrilateral, pentagon, hexagon, polygon

Obsah

1 Úvod **7**

2 Pojmy z učiva střední školy **9**

3 Čtyřúhelníky **11**
3.1 Tětivové čtyřúhelníky 13
3.2 Tečnové čtyřúhelníky 32

4 Pětiúhelníky **51**
4.1 Tětivové pětiúhelníky 51
4.2 Tečnové pětiúhelníky 63

5 Šestiúhelníky **68**
5.1 Tětivové šestiúhelníky 68
5.2 Tečnové šestiúhelníky 76

6 Mnohoúhelníky **83**
6.1 Tětivové mnohoúhelníky 83
6.2 Tečnové mnohoúhelníky 88

7 Závěr **92**

Literatura **93**

Seznam obrázků **97**

Kapitola 1

Úvod

Tato práce si klade za cíl přiblížit žákům středních škol problematiku tětivových a tečnových mnohoúhelníků v různých matematických soutěžích i v těžších matematických úlohách. Mimo jiné může také sloužit jako podpora středoškolským učitelům matematiky při přípravě nadaných žáků na matematické soutěže. Samozřejmě tyto poznatky už zpracovali různí autoři (např. PraSe), ale tato práce je výjimečná vyšší obtížností vybraných problémů. Mým záměrem je ucelit znalosti, které by mohly sloužit žákům k úspěšnému řešení matematických problémů týkajících se tohoto tématu. S těmito znalostmi bude řešení úloh snadnější a lépe pochopitelné. V této oblasti jsou poznatky často roztroušeny mezi několik zdrojů a velmi častá je potřebná znalost cizího jazyka, zejména anglického. Tím se může stát porozumění problematice pro žáky náročnějším. Snaha této práce je předat tyto informace žákům srozumitelněji. Pro zvýšení přehlednosti práce jsou kapitoly řazeny vzestupně v počtu vrcholů mnohoúhelníků. Je důležité také zmínit, že všechny překlady cizojazyčných citací jsou mé vlastní.

Práci začínám zopakováním základních pojmů ze středoškolské matematiky, které dále využívám v následném řešení problémů. Zde si žák může připomenout látku, se kterou se již setkal a jež není součástí tématu tětivových a tečnových mnohoúhelníků. Kapitola je sepsána s důrazem na přehlednost, aby pro žáka bylo vždy snadné se v případě potřeby k danému pojmu vrátit.

V druhé kapitole se zaobírám podrobně tětivovými a tečnovými čtyřúhelníky. Řadím zde úlohy především z matematických olympiád od nejméně krokově náročných po ty složitější. Mimo úloh je v této kapitole možno nalézt i teorii potřebnou k vyřešení těchto problémů, ale i potřebnou k širšímu porozumění tečnovým a tětivovým čtyřúhelníkům.

Tímto způsobem jsou koncipovány i třetí a čtvrtá kapitola. Obsahově jsou však kratší, neboť se tečnové a tětivové pětiúhelníky a šestiúhelníky v matematických olympiádách nevyskytují tak hojně jako tečnové a tětivové čtyřúhelníky. Navíc v mnoha úlohách týkajících se tohoto tématu je součástí řešení „rozřezání“ objektu na jednotlivé trojúhelníky a následné využívání jejich podobností a vlastností, což není pro nás příliš zajímavé. Proto jsou zde uvedeny úlohy, které ke svému řešení využívají jiné vlastnosti.

Závěr této práce tvoří kapitola nazvaná Mnohoúhelníky, kde se nachází hlavně zobecnění předchozích vlastností a úloh, ale i další zajímavé vlastnosti tečnových a tětivových mnohoúhelníků. Čtenář tu ale může také nalézt další matematické úlohy zabývající se právě tečnovými a tětivovými mnohoúhelníky.

Kapitola 2

Pojmy z učiva střední školy

Protože je tato práce určena žákům středních škol, je užitečné se pozastavit u některých pojmů z učiva středních škol, které využíváme v této práci. U následujících vět nebudu uvádět důkazy, protože to není cílem této práce.

Osová souměrnost

Definice 1 ((4), str. 105)**.** ***Osová souměrnost s osou*** *o* ***je shodné zobrazení*** *$O(o)$,* ***které přiřazuje:***

- *každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o.*
- *každému bodu $Y \in o$ bod $Y' = Y$.*

Bod X nazýváme vzorem a bod X' obrazem.

Středový, obvodový a úsekový úhel

Dále bychom se rádi pozastavila u pojmů středový, obvodový a úsekový úhel. Vypůjčíme si tyto definice od Evy Pomykalové z knihy Matematika pro gymnázia, Planimetrie:

Definice 2 ((11), str. 59)**.** *Úhel, jehož vrcholem je střed S kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k, se nazývá* ***středový úhel*** *příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží.*

Definice 3 ((11), str. 60)**.** *Každý úhel AVB, jehož vrchol V je bodem kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k ($V \neq A, V \neq B$), se nazývá* ***obvodový úhel*** *příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží.*

Můžeme si zde dovolit poznámku, že velikost středového úhlu je vždy rovna dvojnásobku obvodového úhlu, jež přísluší témuž oblouku.

Definice 4 ((11), str. 63)**.** *Konvexní úhel BAY (příp. ABX), jehož jedním ramenem je polopřímka AB (popř. BA), ke A, B jsou krajními body oblouku AB kružnice k a druhým ramenem je polopřímka AY (popř. BX), ležící v tečně ke kružnici k v bodě A (popř. B), se nazývá* ***úsekový úhel*** *příslušný k oblouku AB, který v tomto úhlu leží.*

Opět je třeba tuto citaci doplnit o informaci, že úsekový a obvodový úhel

ke stejnému oblouku jsou si rovny.

Mocnost bodu ke kružnici

Znovu v knize Matematika pro gymnázia: Planimetrie od Evy Pomykalové můžeme najít tuto definici:

Definice 5 ((11), str. 83)**.** *Libovolnému bodu M roviny lze přiřadit reálné číslo m, pro něž platí:*

1. $|m| = |MA| \cdot |MB|$, *kde A,B jsou průsečíky dané kružnice k s libovolnou sečnou procházející bodem M.*
2. $m > 0$ *pro body M vně kružnice*
   $m = 0$ *pro body $M \in k$*
   $m < 0$ *pro body M uvnitř kružnice.*

Číslo m se nazývá ***mocnost bodu*** *M* ***ke kružnici*** *k.*

Definice 6 ((1), str. 96)**.** *Množinou všech bodů, jež mají k nesoustředným kružnicím k,l stejnou mocnost, je přímka kolmá ke spojnici středů obou kružnic. Tato přímka se nazývá* ***chordála kružnic*** *k,l.*

Abychom narýsovali chordálu ke dvěma nesoustředným kružnicím k,l, které nemají společný bod, musíme zvolit libovolnou kružnici m, jež obě kružnice protíná a její střed neleží na středné kružnic k,l. Poté sestrojíme chordálu kružnicím k a m (přímka spojující jejich průsečíky). Podobně i chordálu ke kružnicím l a m. Poté již stačí narýsovat kolmici ke středné kružnic k,l vedenou průsečíkem chordál kružnic k,m a l,m.

Definice 7 ((1), str. 96)**.** *Bod, který má ke všem třem kružnicím k,l,m stejnou mocnost, se nazývá* ***chordální střed (potenční bod)*** *těchto kružnic.*

Poznámka. Následující dvě věty uvádíme bez důkazu, protože jsou látkou střední školy. Předpokládáme, že je čtenář již zná a jsou tu uvedeny pouze za účelem opakování.

Sinova věta

Věta 1 ((10), str. 104)**.** *Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky a,b,c, platí:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Kosinova věta

Věta 2 ((10), str. 110)**.** *Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a,b,c a jehož vnitřní úhel proti straně BC má velikost α, platí:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Platí zde cyklická záměna. To znamená, že tento vztah můžeme „přepísmenkovat“. (Za znaky a a můžeme napsat jakoukoli stranu trojúhelníku a úhel, který ji nepřísluší. Za znaky b a c pak můžeme napsat ostatní dvě strany tohoto trojúhelníku.)

Kapitola 3

Čtyřúhelníky

V této práci se budu zabývat tětivovými a tečnovými mnohoúhelníky, popišme si zpočátku obecné čtyřúhelníky. Definic čtyřúhelníku je samozřejmě velké množství. Pro naše účely nám ale postačí tato:

Definice 8 ((1), str. 113)**.** *Nechť A, B, C, D jsou čtyři body v téže rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Čtyřúhelníkem $ABCD$ rozumíme sjednocení trojúhelníků ABC a ACD o společné straně AC, které nemají žádné další společné body.*

Za zmínku také stojí jejich důležitá vlastnost o součtu vnitřních úhlů, kde dokládám i vlastní důkaz, který patří k těm jednodušším.

Věta 3 ((9), str.7)**.** *Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku je $360°$.*

Důkaz. Nechť máme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ (Obrázek 3.1). Rozdělíme si ho podle úhlopříčky AC na dva trojúhelníky ABC a ACD (Definice 8). Díky součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku můžeme napsat:

$$|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCA| = 180°$$
$$|\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle CDA| + |\sphericalangle DAC| = 180°$$

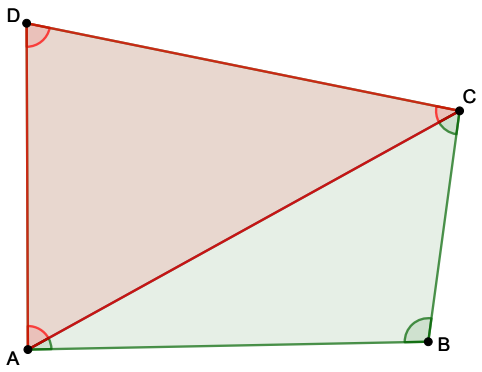
Jestliže tyto dvě rovnosti sečteme, dostáváme:

$$|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle CDA| + |\sphericalangle DAC| = 360°$$
$$|\sphericalangle ABC| + (|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ACD|) + |\sphericalangle CDA| + (|\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle CAB|) = 360°$$

Z toho nám plyne:

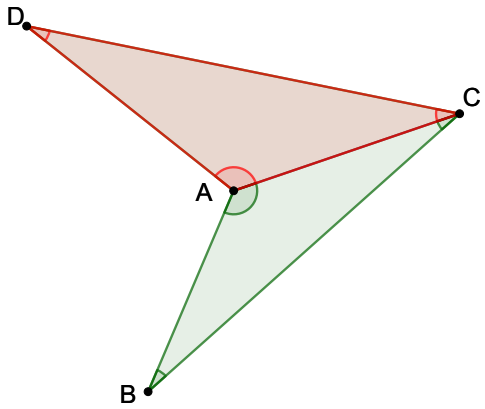
$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCD| + |\sphericalangle CDA| + |\sphericalangle DAB| = 360°$$

Tedy součet vnitřních úhlů konvexního čtyřúhelníku je roven $360\,°$.



Obrázek 3.1: Konvexní čtyřúhelník

Jestliže je čtyřúhelník nekonvexní (Obrázek 3.2), postupujeme podobně, akorát s tím rozdílem, že úhlopříčka, pomocí které rozdělíme čtyřúhelník na dva trojúhelníky, musí ležet v daném čtyřúhelníku. Dostaneme se pak ke stejnému závěru. □



Obrázek 3.2: Nekonvexní čtyřúhelník

3.1 Tětivové čtyřúhelníky

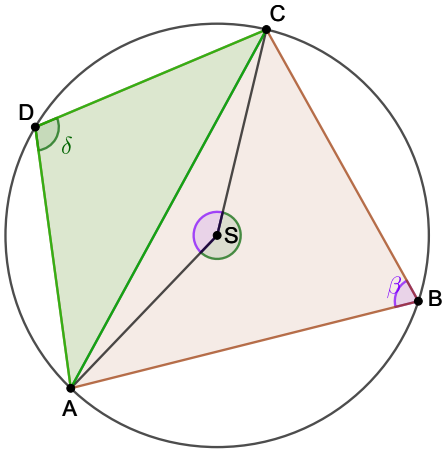
Abychom se mohli zajímat o tětivové čtyřúhelníky, musíme si je nejprve definovat. Proto si vypůjčíme definici od Stanislava Horáka.

Definice 9 ((3), str. 20)**.** *Konvexní čtyřúhelník, který je vepsán do kružnice, se nazývá tětivový.*

Tato kružnice má střed v průsečíku os stran tohoto čtyřúhelníku a její poloměr je vzdálenost středu kružnice od jakéhokoli vrcholu čtyřúhelníku.

Tento čtyřúhelník bude mít i jisté vlastnosti. Mezi ty nejznámější patří právě tato znovu od Stanislava Horáka:

Věta 4 ((3), str. 20)**.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby daný konvexní čtyřúhelník $ABCD$ byl tětivový, je: součet protějších úhlů je $180°$.*



Obrázek 3.3: Tětivový čtyřúhelník

Důkaz. Označme $|\sphericalangle ABC| = \beta$ a $|\sphericalangle ADC| = \delta$ (Obrázek 3.3).

Rozdělíme si důkaz na dvě části:

a) Pokud je čtyřúhelník tětivový, součet protějších úhlů je $180\,°$.
Konvexní čtyřúhelník je rozdělen na dvě části jakoukoli jeho úhlopříčkou. Vezmeme si například úhlopříčku AC. Ta dělí i kružnici čtyřúhelníku opsanou na dva oblouky, kde body B a D přísluší různým obloukům. Využijeme vlastnosti obvodového a středového úhlu pro tětivu AC a vidíme, že pro úhel ASC s vnitřním bodem D platí:

$$|\sphericalangle ASC| = 2\beta$$

Analogicky pro úhel ASC s vnitřním bodem B platí:

$$|\sphericalangle ASC| = 2\delta$$

pro které platí:

$$2\beta + 2\delta = 360\,°$$

Z této rovnosti zjistíme:

$$\beta + \delta = 180\,^\circ$$

Tím jsme dokázali, že součet protějších úhlů v tětivovém čtyřúhelníku je vždy $180\,^\circ$.

b) Pokud $\beta + \delta = 180\,^\circ$, pak je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový.
Díky větě 3 můžeme říct:

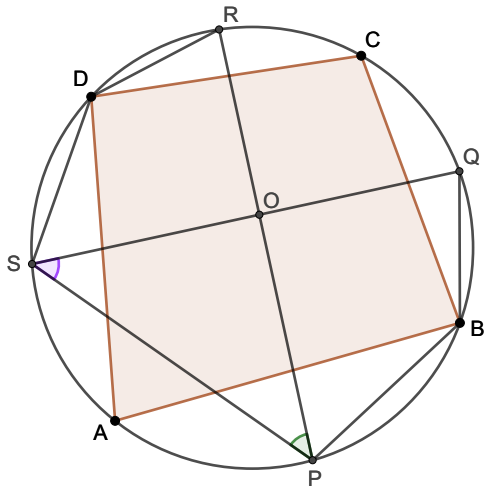
$$|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCD| + |\sphericalangle CDA| = 360^\circ$$
$$|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| = 360^\circ - (|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA|) =$$
$$= 360^\circ - (\beta + \delta) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

Tedy zjišťujeme, že čtyřúhelník $ABCD$ je konvexní, protože žádný z jeho úhlů nemůže být větší než 180°. Pokud sestrojíme trojúhelníku ABC kružnici opsanou, pak díky součtu středových úhlů ke kružnicovým obloukům $2{\cdot}(\beta + \delta) = 360\,^\circ$, leží bod D na téže kružnici, v druhé části oblouku AC nežli bod B. Tedy náš čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový. Idea důkazu je převzata z [(5), str. 165] □

Nejprve bych ráda uvedla úlohu, která se objevila v Kanadské olympiádě roku 1975.

Úloha 1 ((22), úloha 5)**.** *A,B,C,D jsou 4 body na společné kružnici v daném pořadí. Nechť P, Q, R, S jsou středy oblouků ohraničených body AB, BC, CD a DA. Dokažte, že úsečka PR je kolmá k úsečce QS.*

Řešení. Nechť O je průsečík úseček PR a QS. Obvodový úhel $\sphericalangle PSQ$ náleží obloukům ohraničených body PB a BQ. Obvodový úhel $\sphericalangle SPQ$ náleží obloukům SD a DQ (Obrázek 3.4).



Obrázek 3.4: Obvodové úhly PSQ a SPQ

Protože podle zadání P, Q, R a S jsou středy příslušných oblouků, můžeme zapsat:

$$\begin{aligned}
&\text{velikost oblouku } PB = 1/2 \text{ velikosti oblouku } AB\\
&\text{velikost oblouku } BQ = 1/2 \text{ velikosti oblouku } BC\\
&\text{velikost oblouku } SD = 1/2 \text{ velikosti oblouku } AD\\
&\text{velikost oblouku } DR = 1/2 \text{ velikosti oblouku } DC
\end{aligned}$$

Můžeme tedy říct, že dohromady úhly $\sphericalangle PSQ$ a $\sphericalangle SPR$ vymezují oblouk o velikosti poloviny obvodu dané kružnice. Středový úhel nad takto velkým obloukem má velikost 180°, tudíž obvodový úhel k tomuto oblouku má velikost 90°. Tedy:

$$|\sphericalangle PSQ| + |\sphericalangle SPR| = 90°$$

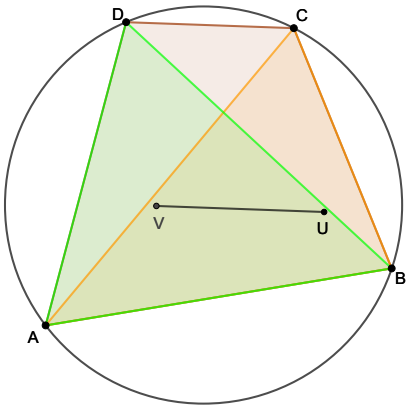
Když se zaměříme na trojúhelník SPO, lze snadno vypočítat velikost $\sphericalangle SOP$:

$$|\sphericalangle SOP| = 180° - (|\sphericalangle PSQ| + |\sphericalangle SPR|) = 90°$$

Tímto jsme tedy dokázali, že úhlopříčky PR a SQ jsou na sebe kolmé. (Srov. [(22)])

Podívejme se na úlohu z matematické olympiády.

Úloha 2 ((34), úloha 2)**.** *Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice průsečíku výšek trojúhelníku ABC s průsečíkem výšek trojúhelníku ABD je rovnoběžná s přímkou CD (Obrázek 3.5).*



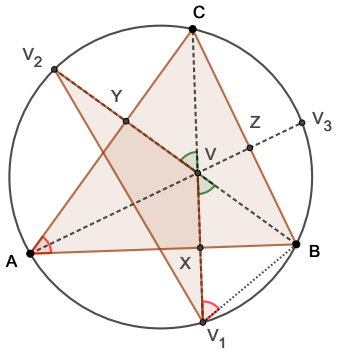
Obrázek 3.5: Ortocentra trojúhelníků ABC a ABD

Řešení. Abychom mohli pochopit jedno z možných řešení této úlohy, musíme se nejprve zaměřit na následující větu. Propůjčili jsem si ji spolu s ideou důkazu od Jaroslava Šedivého:

Věta 5 ((16), str. 26)**.** *Body souměrné s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka leží na kružnici trojúhelníku opsané.*

Důkaz. Důkaz rozdělíme na tři části: Jestliže bude trojúhelník ostroúhlý, poté jestliže bude trojúhelník tupoúhlý a na závěr jestliže bude pravoúhlý.

Označme jako V ortocentrum trojúhelníku ABC, V_1, V_2 a V_3 budou obrazy ortocentra trojúhelníku ABC podle stran c, b a a. Dále označíme X průsečík strany



Obrázek 3.6: Ortocentrum V v ostroúhlém trojúhelníku a jeho obrazy V_1,V_2,V_3

VV_1 a strany AB trojúhelníku ABC, Y průsečík VV_2 a strany AC trojúhelníku ABC a Z průsečík VV_3 a strany BC trojúhelníku ABC.

Nejprve předpokládejme, že trojúhelník je ostroúhlý. Tudíž průsečík výšek nesplývá ani s jedním z vrcholů a obrazy průsečíku podle stran rovněž nesplývají. Pravoúhlé trojúhelníky VBX a VCY jsou podobné podle věty uu. (na obrázku 3.6 jsou vyznačeny zelené shodné úhly obloučky). A tedy:

$$\begin{aligned} \triangle VBX &\simeq \triangle VCY \\ \frac{|VB|}{|VX|} &= \frac{|VC|}{|VY|} \\ 2|VY| \cdot |VB| &= 2|VX| \cdot |VC| \\ |VV_2| \cdot |VB| &= |VV_1| \cdot |VC| \end{aligned}$$

Protože je trojúhelník ABC ostroúhlý, jeho ortocentrum V leží uvnitř tohoto trojúhelníku, tedy i uvnitř úseček CV_1 a BV_2. Můžeme říct, že body V_1, V_2, B, C náleží jedné kružnici, protože splňují podmínku mocnosti bodu V ke kružnici.

Zaměříme se nyní na trojúhelník V_1VB. Víme o něm, že je rovnoramenný, neboť přímka BX je osou strany VV_1. Tedy:

$$|\sphericalangle BV_1V| = |\sphericalangle BVV_1| \tag{3.1}$$

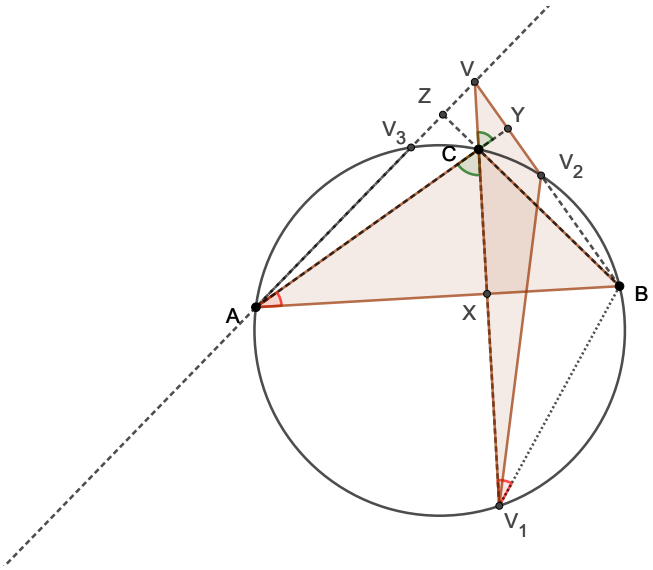
A protože jsou si pravoúhlé trojúhelníky XBV a YBA podobné (věta uu), můžeme říct:

$$|\sphericalangle BVV_1| = |\sphericalangle BVX| = |\sphericalangle YAB| \tag{3.2}$$

a z (3.1) i z (3.2) platí:

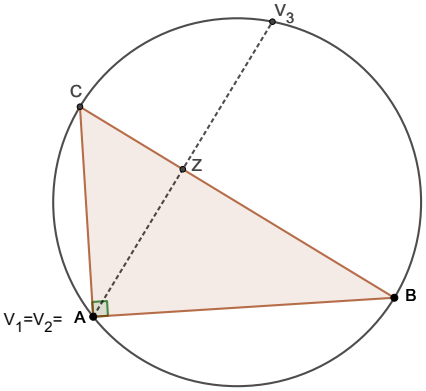
$$|\sphericalangle YAB| = |\sphericalangle BV_1V|$$

Můžeme si všimnout, že úhel BV_1V je shodný s BV_1C a to je obvodový úhel příslušný k tětivě CB. Tento úhel je ale shodný i s úhlem CAB, který se rovněž vypíná nad tětivou CB. A proto i bod A leží na kružnici společné bodům V_1, V_2, B, C. Dále pomocí podobných pravoúhlých trojúhelníků AVX a CVZ jednoduše zjistíme, že body V splňuje podmínku mocnosti bodu ke kružnici. Tedy body V_1, V_2, B, C, A a V_3 leží na té samé kružnici.



Obrázek 3.7: Ortocentrum V v tupoúhlém trojúhelníku a jeho obrazy V_1,V_2,V_3

V další části důkazu se zaměříme na případ, kdy náš trojúhelník ABC má tupý úhel u vrcholu C (Obrázek 3.7). Průsečík výšek opět nesplývá ani s jedním z vrcholů a obrazy průsečíku podle stran rovněž nesplývají. Díky podobnosti pravoúhlých trojúhelníků VYC a VXB (věta uu) docházíme k tomu, že bod V splňuje opět podmínku mocnosti bodu ke kružnici a tedy body V_1, V_2, B, C leží na téže kružnici. Podobnou úvahou o obvodových úhlech jako u případu pro ostroúhlý trojúhelník ABC, dostáváme, že bod A náleží té samé kružnici. Dále pomocí podobných pravoúhlých trojúhelníků AVX a CVZ jednoduše zjistíme, že bod V splňuje podmínku mocnosti bodu ke kružnici. Tedy body V_1, V_2, B, C, A a V_3 leží na té samé kružnici.



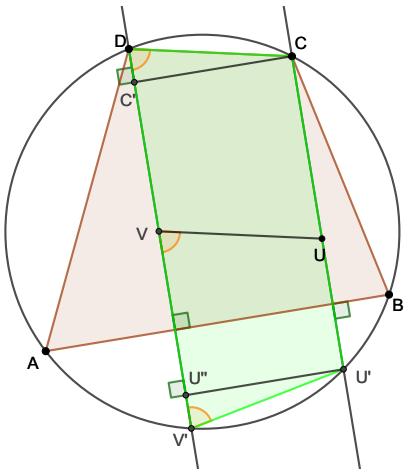
Obrázek 3.8: Pravoúhlý trojúhelník

Pokud je ale trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A (Obrázek 3.8), průsečík výšek s tímto vrcholem splyne. Tedy obrazy ortocentra podle os CA a BA také splynou s bodem A a tudíž leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

Co se týče obrazu ortocentra podle osy BC, také se zobrazí na tutéž kružnici,

protože osa CB je osou souměrnosti oné thaletovy kružnice a zobrazuji bod $V{=}A$, který na kružnici leží. Tímto máme tvrzení dokázané. □

S využitím této věty se můžeme vrátit k řešení naší úlohy 2.



Obrázek 3.9: Úhly v tětivovém čtyřúhelníku

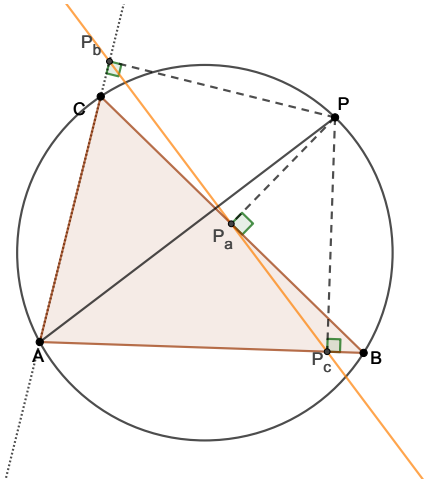
Označíme kružnici, která je opsaná našemu čtyřúhelníku, k, ortocentra trojúhelníků ABC a ABD písmeny U a V. S využitím předchozí věty víme, že tyto ortocentra se podle úsečky AB zobrazí na body U' a V' naší kružnice k. Protože obě přímky CU a DV jsou kolmé na přímku AB, jsou tedy rovnoběžné a čtyřúhelník $DV'U'C$ je tětivový lichoběžník. Protože tětivy DC a $V'U'$ jsou přeponami shodných trojúhelníků $CC'D$ a $U'U''V'$, které vzniknou kolmou projekcí bodů C a U' na úsečku DV', jsou tedy shodné a náš lichoběžník je rovnoramenný (Obrázek 3.9). Díky zachování velikostí úhlů při osové souměrnosti podle strany AB můžeme prohlásit:

$$|\sphericalangle CDV'| = |\sphericalangle U'V'U''| = |\sphericalangle UVV'|$$

a můžeme říct, že přímky CD a UV jsou rovnoběžné.

K řešení následující úlohy potřebujeme znát pojem Simsonova přímka, který je převzat z diplomové práce Kateřiny Hájmové:

Věta 6 ((2), str. 32)**.** *Nechť je dán trojúhelník ABC a bod P. Označme P_a, P_b, P_c paty kolmic vedených bodem P na strany trojúhelníku ABC. Pak body P_a, P_b, P_c leží na přímce právě tehdy, když bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Této přímce se říká Simsonova přímka bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC (Obrázek 3.10).*



Obrázek 3.10: Simsonova přímka

Důkaz. Věta je ekvivalení, proto musíme dokázat nejprve, že pokud bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, pak body P_a, P_b a P_c leží v přímce. Druhou částí důkazu pak bude, že pokud body P_a, P_b a P_c leží v přímce, tak bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

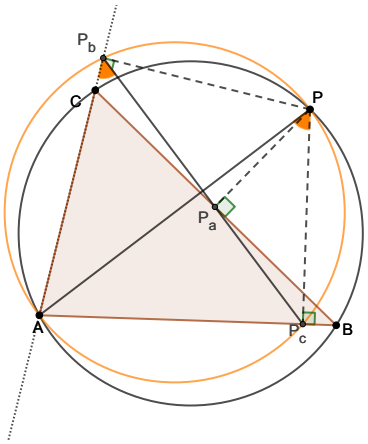
a) Bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, pak body P_a, P_b a P_c leží v přímce.

Začneme nejtriviálnějším případem a to tím, kdy bod P splývá s jedním z vrcholů trojúhelníku ABC. V tu chvíli s tímto bodem splývají i paty kolmic z bodu P na strany, které tímto vrcholem procházejí. Poslední pata kolmice leží na výšce na stranu trojúhelníku, která tímto bodem neprochází. Tedy body P_a, P_b a P_c leží na jedné přímce a to na výšce trojúhelníku ABC.

V ostatních případech abychom mohli říct, že body P_a, P_b a P_c leží v přímce, musíme dokázat následující:

$$|\sphericalangle P_c P_b A| = |\sphericalangle P_a P_b C|$$

Zaměřme se na čtyřúhelník AP_cPP_b (Obrázek 3.11).



Obrázek 3.11: Kružnice opsaná čtyřúhelníku AP_cPP_b

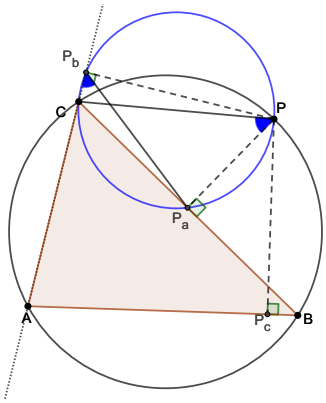
Můžeme o něm prohlásit, že je to tětivový čtyřúhelník, protože jeho vnitřní

úhly $\sphericalangle PP_b$A a $\sphericalangle AP_c$P jsou pravé. Pomocí obvodových úhlů k tětivě AP_c v kružnici opsané tomuto čtyřúhelníku můžeme usoudit:

$$|\sphericalangle P_c P_b A| = |\sphericalangle P_c P A|$$

Analogicky pro čtyřúhelník CP_aPP_b platí (Obázek 3.12):

$$|\sphericalangle P_a P_b C| = |\sphericalangle P_a P C|$$



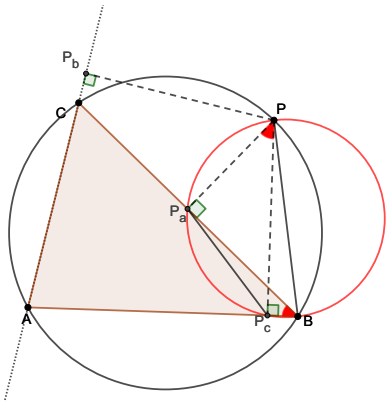
Obrázek 3.12: Kružnice opsaná čtyřúhelníku CP_aPP_b

Můžeme tedy ukázat následující:

$$|\sphericalangle P_c P_b A| = |\sphericalangle P_c P P_a| + |\sphericalangle P_a P A| \tag{3.3}$$
$$|\sphericalangle P_a P_b C| = |\sphericalangle P_a P A| + |\sphericalangle A P C| \tag{3.4}$$

Z rovností 3.3 a 3.4 si můžeme všimnout, že velikosti úhlů $\sphericalangle P_c P_b A$ a $\sphericalangle P_a P_c C$ se rovnají právě tehdy, když:

$$|\sphericalangle P_c P P_a| = |\sphericalangle A P C| \tag{3.5}$$



Obrázek 3.13: Tětivový čtyřúhelník BPP_aP_c

Čtyřúhelník BPP_aP_c je tětivový. (Mohu sestrojit Thaletovu kružnici nad úsečkou BP a body P_a i P_c jí náleží, neboť úhly PP_aB a BP_cP jsou pravé) (Obrázek 3.13).

Když uplatníme vlastnost obvodových úhlů na tětivu P_cP_a vidíme:

$$|\sphericalangle P_cPP_a| = |\sphericalangle P_cBP_a| = |\sphericalangle ABC| \tag{3.6}$$

Z předpokladu víme, že body A, B, C, P leží na kružnici. Opět po uplatnění vlastnosti obvodových úhlů na tětivu AC víme, že:

$$|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle ABC| \tag{3.7}$$

Tudíž z 3.6 a 3.7 dostáváme:

$$|\sphericalangle P_cPP_a| = |\sphericalangle APC|$$

Což je shodné s 3.5 a proto můžeme říct:

$$|\sphericalangle P_cP_bA| = |\sphericalangle P_aP_bC|$$

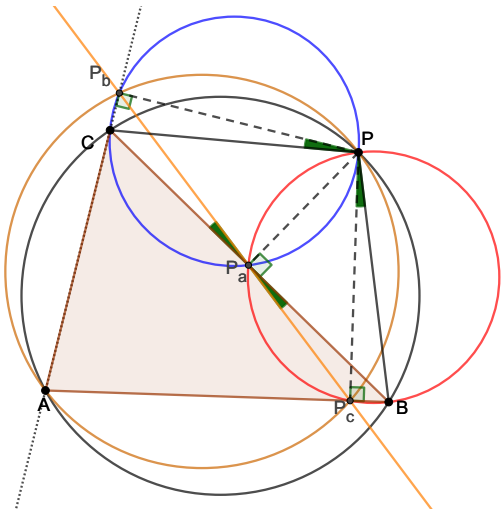
Z čehož nám plyne, že body P_a, P_b, P_c leží na přímce.

Dostáváme se tedy k druhé části důkazu, kde dokazujeme obrácenou implikaci.

b) Pokud body P_a,P_b a P_c leží na přímce, pak bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

Pokud jsou některé z bodů P_a, P_b a P_c totožné, je důkaz zřejmý. Jelikož body leží na stranách našeho trojúhelníku, mohou spolu splynout pouze na některém z vrcholů tohoto trojúhelníku. Zde by ležel bod P (je to jediný průsečík kolmic z bodů P_a,P_b a P_c na přímky a, b a c). A protože každý vrchol trojúhelníku ABC náleží kružnici jemu opsané, i bod P na ní leží.

Pokud jsou některé z bodů P_a, P_b a P_c nesplynou, postupujeme následovně. Úhel CP_aP_b je shodný s úhlem BP_aP_c (úhly vrcholové). Z předchozí části důkazu víme, že čtyřúhelníky CP_aPP_b a BPP_aP_c jsou tětivové (Obrázek 3.14).



Obrázek 3.14: Obrácená implikace Simsonovy přímky

Můžeme tedy s využitím věty o obvodových úhlech nad tětivou CP_b zjistit:

$$|\sphericalangle CPP_b| = |\sphericalangle CP_aP_b| = |\sphericalangle BP_aP_c| = |\sphericalangle BPP_c|$$

a také

$$|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle P_cPC| + |\sphericalangle BPP_c| = |\sphericalangle P_cPC| + |\sphericalangle CPP_b| = |\sphericalangle P_cPP_b| \qquad (3.8)$$

Využijeme toho, že čtyřúhelník AP_cPP_b je tětivový:

$$|\sphericalangle P_cPP_b| = 180\,^\circ - |\sphericalangle CAB|$$

A dosazením do 3.8 můžeme říct:

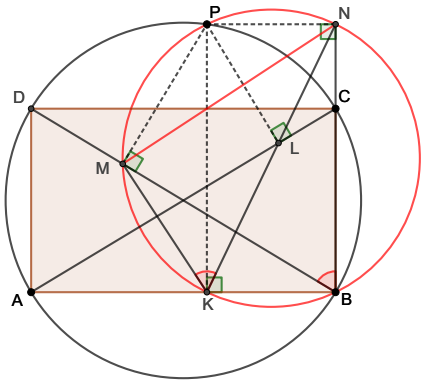
$$|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle P_cPP_b| = 180\,^\circ - |\sphericalangle CAB|$$

tedy čtyřúhelník $ABPC$ je tětivový. [srov. (17), str.51]

□

Nyní se tedy můžeme přesunout na další úlohu z matematické olympiády. Opět si předvedeme jenom jedno z možných řešení.

Úloha 3 ((35), úloha 2)**.** *Na kratším z oblouků CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P. Paty kolmic z bodu P na přímky AB, AC a BD označme postupně K, L a M. Ukažte, že úhel LKM má velikost $45°$, právě když $ABCD$ je čtverec (Obrázek 3.15).*



Obrázek 3.15: Úloha 3 - zadání

Řešení. Budeme se snažit dokázat, že úhly LKM a CBD jsou si rovny. Poté je řešení již zřejmé. Pokud $ABCD$ je čtverec, pak $|\sphericalangle CBD| = 45\,^\circ$ i $|\sphericalangle LKM| = 45\,^\circ$. Patu kolmice z bodu P na přímku BC označíme N. Víme, že body K,L a N leží na Simsonově přímce příslušející bodu P a trojúhelníku ABC. Body K, M i N leží na Thaletově kružnici nad průměrem PB. Z věty o obvodových úhlech nad tětivou MN dostáváme:

$$|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle NKM| = |\sphericalangle NBM| = |\sphericalangle CBD|$$

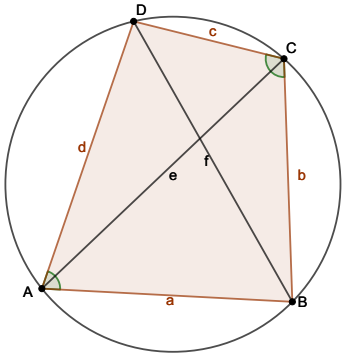
Nyní jsme dokázali, že úhly LKM a CBD jsou si rovny. Pokud by $ABCD$ byl čtverec, $|\sphericalangle CBD| = 45°$ a i úhel LKM by se rovnal 45°. A kdyby $|\sphericalangle LKM| = 45°$, pak i $|\sphericalangle CBD| = 45°$, a náš pravoúhelník $ABCD$ by byl čtverec.

Následující věta i myšlenka důkazu je převzata od Stanislava Horáka z knihy Kružnice:

Věta 7 ((3), str. 21)**.** *O úhlopříčkách e, f tětivového čtyřúhelníka platí tzv. Ptolemaiova věta:*

$$ef = ac + bd,$$

kde a, b, c, d jsou délky stran uvažovaného čtyřúhelníka (Obrázek 3.16).



Obrázek 3.16: Ptolemaiova věta

Důkaz. Strany tětivového čtyřúhelníka ABCD postupně označíme jako a, b, c, d jeho úhlopříčky pak $AC{=}e$ a $BD{=}f$. Nakonec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ budou jeho vnitřní úhly při vrcholech A, B, C a D. Při pohledu na trojúhelníky BCD a ABD zjistíme, že můžeme využít kosinové věty:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha \tag{3.9}$$
$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma \tag{3.10}$$

Protože čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, platí:

$$\alpha + \gamma = 180\,^\circ$$
$$\gamma = 180\,^\circ - \alpha$$

A toho využijeme v (3.10), dostaneme pak:

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180\,^\circ - \alpha)$$

Když využijeme grafu funkce cosinus, můžeme výše uvedenou rovnost přepsat na:

$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha \tag{3.11}$$

Vyjádřením $2\cos\alpha$ z (3.9) a (3.11) dostáváme[1]:

$$2\cos\alpha = \frac{f^2 - a^2 - d^2}{-ad}$$
$$2\cos\alpha = \frac{f^2 - b^2 - c^2}{bc}$$

[1] V následujících rovnicích mohu dělit výrazy ad i bc, protože zastupují délky stran a tudíž jejich součin nemůže být nulový

Z těchto dvou rovností dostáváme rovnici:

$$\frac{f^2 - a^2 - d^2}{-ad} = \frac{f^2 - b^2 - c^2}{bc}$$

Tu můžeme upravovat následovně:

$$\begin{aligned}(f^2 - a^2 - d^2) \cdot bc &= (f^2 - b^2 - c^2) \cdot (-ad) \\ f^2bc + f^2ad &= a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad \\ f^2(bc + ad) &= ab(ac + bd) + cd(ac + bd) \\ f^2(bc + ad) &= (ac + bd)(ab + cd) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Analogicky pro trojúhelníky ABC a ACD dostáváme:

$$e^2(ab + cd) = (ad + bc)(ac + bd) \tag{3.13}$$

Jestliže rovnice (3.12) a (3.13) vynásobíme, získáme:

$$f^2(bc + ad)e^2(ab + cd) = (ac + bd)^2(ab + cd)(ad + bc)$$

Výrazy $(bc + ad)$ a $(ab + cd)$ můžeme bez omezení dělit, oba jsou různé od nuly, protože a,b,c, d zastupují délky úseček a po násobení a sčítání se rozhodně hodnota nerovná nule.

$$f^2e^2 = (ac + bd)^2$$

Protože hodnoty a,b,c,d,e,f jsou kladné, nemusíme při odmocnění použít absolutní hodnotu.

$$ef = ac + bd$$

A tímto jsme dokázali Ptolemaiovu větu. □

Tuto větu hned využijeme v řešení další úlohy. Uvádím opět pouze jedno řešení.

Úloha 4 ((18))**.** *$ABCD$ je tětivový čtyřúhelník; x,y,z jsou popořadě vzdálenosti bodu A od přímek BD, BC a CD (Obrázek 3.17). Dokažte, že:*

$$\frac{BD}{x} = \frac{BC}{y} + \frac{CD}{z}.$$

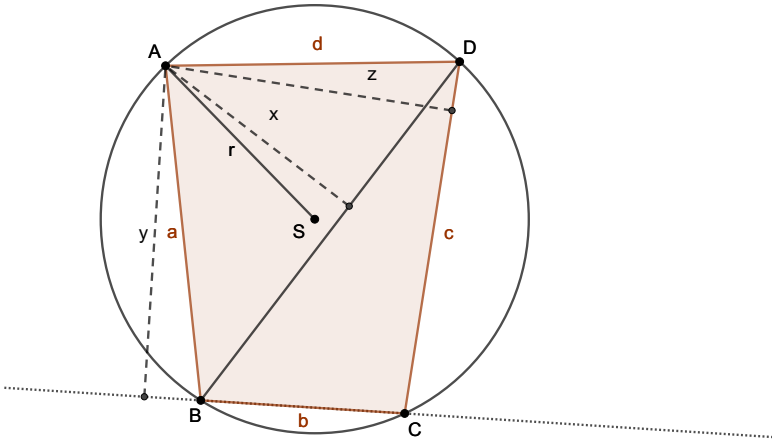
Řešení. Využijeme vzorec pro obsah trojúhelníku pomocí kružnice jemu opsané:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r},$$

kde r je poloměr opsané kružnice.

Vynásobíme tento vzorec dvěma a využijeme pro trojúhelník ABD:

$$2S = \frac{a \cdot d \cdot |BD|}{2r} \tag{3.14}$$



Obrázek 3.17: Úloha 4 - zadání

O obsahu trojúhelníku ABD můžeme ale i říci:

$$S = \frac{x \cdot |BD|}{2}$$

neboť x je výška v trojúhelníku ABD. Vynásobíme tuto rovnici dvěma a dostaneme:

$$2S = x \cdot |BD| \tag{3.15}$$

Z (3.14) a (3.15) usoudíme:

$$x = \frac{a \cdot d}{2r}$$

toho hned využijeme a dosadíme do zadaného podílu:

$$\frac{|BD|}{x} = \frac{2r \cdot |BD|}{a \cdot d} \tag{3.16}$$

Analogicky pomocí trojúhelníků ABC a ACD platí:

$$\frac{|BC|}{y} = \frac{2r \cdot b}{a \cdot |AC|} \tag{3.17}$$

$$\frac{|CD|}{z} = \frac{2r \cdot c}{d \cdot |AC|} \tag{3.18}$$

Vrátíme se k tvrzení, které máme dokázat a dosadíme do něj vztahy 3.16, 3.17 a 3.18:

$$\frac{|BD|}{x} = \frac{|BC|}{y} + \frac{|CD|}{z}$$

$$\frac{2r \cdot |BD|}{a \cdot d} = \frac{2r \cdot b}{a \cdot |AC|} + \frac{2r \cdot c}{d \cdot |AC|}$$

Vynásobíme-li tuto rovnici výrazem $a \cdot d \cdot |AC|$ a vydělíme $2r$ dostaneme:

$$|AC| \cdot |BD| = ac + bd$$

což je Ptolemaiova věta, která platí v každém tětivovém čtyřúhelníku. Tím je tvrzení dokázáno. (Srov. [(18)])

U další úlohy, tentokrát z Americké matematické olympiády v roce 1999, je zajímavé její řešení. Samozřejmě jako u dalších úloh, může být víc možných řešení.

Úloha 5 ((31), úloha 2)**.** *Pro oba páry protějších stran tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ odečtěme větší stranu od menší. Dokažte, že součet těchto rozdílů je přinejmenším dvakrát víc než rozdíl délek jeho úhlopříček.*

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $|AB| \geq |CD|$ a $|AD| \geq |BC|$.
Průsečík úhlopříček označíme jako E. Pokud se zaměříme na trojúhelníky ABE a DCE, zjistíme, že jsou si podobné (věta uu), neboť úhly AEB a DEC jsou shodné (vrcholové úhly) a úhly EBA a ECD jsou také shodné (obvodové úhly ke stejné tětivě AD). Můžeme tedy napsat:

$$\frac{|AB|}{|DC|} = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|BE|}{|CE|}$$

A protože $|AB| \geq |CD|$, tak díky předchozímu vztahu:

$$|AE| \geq |DE| \tag{3.19}$$
$$|BE| \geq |CE| \tag{3.20}$$

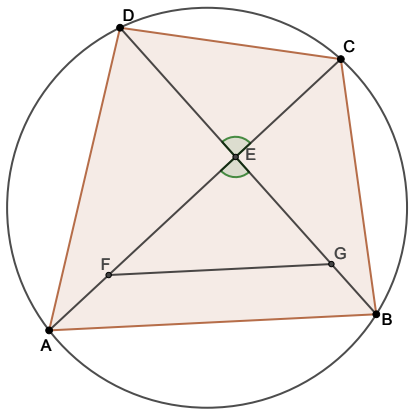
Odečteme-li 3.20 od 3.19, dostaneme:

$$|AE| - |BE| \geq |DE| - |CE|$$
$$|AE| + |CE| \geq |DE| + |BE|$$
$$|AC| \geq |BD|$$

Nyní se vrátíme k zadání naší úlohy, máme dokázat:

$$(|AB| - |CD|) + (|AD| - |BC|) \geq 2 \cdot (|AC| - |BD|)$$

Naneseme na úsečku AE bod F takový, že $|EF| = |ED|$, a na úsečku BE bod G takový, že $|GE| = |EC|$ (Obrázek 3.18).



Obrázek 3.18: Úsečka FG

Vidíme, že úhly DEC a FEG jsou shodné (vrcholové úhly). Z toho plyne, že trojúhelníky DCE a FGE jsou také shodné (věta sus).

Díky této shodnosti můžeme prohlásit, že

$$|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle GFE|$$

Nyní se podíváme na tětivu BC. Víme, že obvodové úhly příslušící této tětivě jsou shodné.

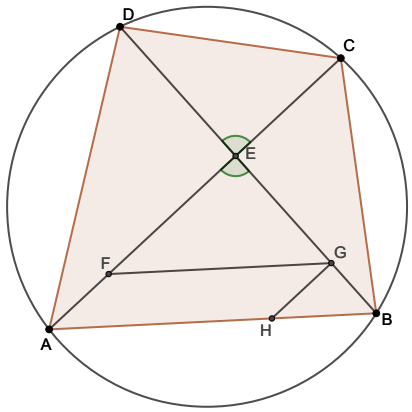
$$|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle BAE|$$

Z předcházejících dvou rovností dostáváme:

$$|\sphericalangle GFE| = |\sphericalangle BAE|$$

Proto můžeme o přímkách AB a FG prohlásit, že se jedná o rovnoběžky. (Svírají stejný úhel s přímkou AC.)

Dále naneseme na přímku AB bod H takový, že $|AH|=|CD|$. Vznikne nám tak rovnoběžník $AHGF$ a trojúhelník HGB (Obrázek 3.19).



Obrázek 3.19: Bod H

O rozdílu úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$ můžeme říct:

$$\begin{gathered}|AC| - |BD| = |AC| - (|BG| + |GE| + |ED|) = \\ = |AC| - (|BG| + |CE| + |EF|) = \\ = |AF| - |BG|\end{gathered}$$

A z vlastností našehoho rovnoběžníku $AHGF$, můžeme říct, že $|AF| = |HG|$, tedy:

$$|AC| - |BD| = |AF| - |BG| = |HG| - |BG| \tag{3.21}$$

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku HGB víme:

$$\begin{gathered}|HG| \leq |BG| + |BH| \\ |HG| - |BG| \leq |BH|\end{gathered}$$

Když tuto nerovnost dosadíme do 3.21 získáme:

$$|AC| - |BD| \leq |BH| \tag{3.22}$$

A protože víme, že bod H vznikl nanesením úsečky CD na AB, připomínáme, že:

$$|BH| = |AB| - |CD|$$

a dosazením do 3.22 dostáváme:

$$|AC| - |BD| \leq |AB| - |CD|$$

Analogicky pomocí trojúhelníků ADE a BCE získáváme nerovnost:

$$|AC| - |BD| \leq |AD| - |BC|$$

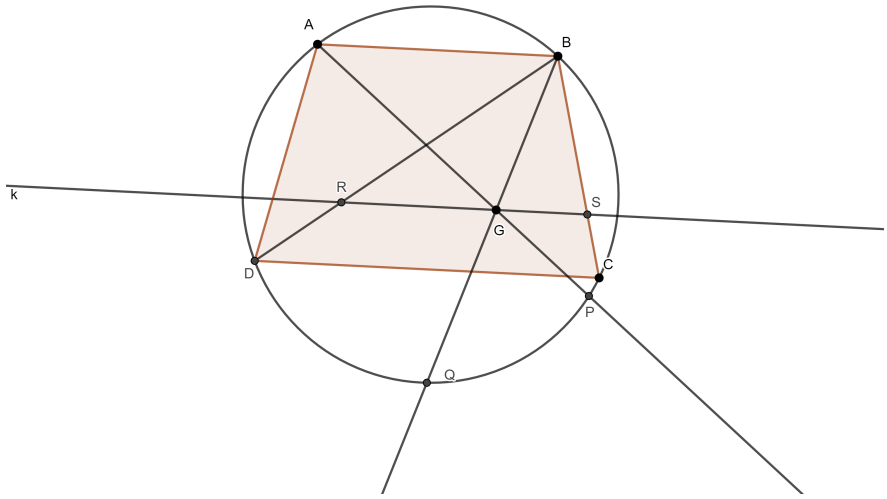
Sečtením těchto dvou nerovností dostaneme:

$$2 \cdot (|AC| - |BD|) \leq (|AB| - |CD|) + (|AD| - |BC|)$$

Což je totožné s nerovností, kterou jsme chtěli dokázat.

Následující úloha je z Americké matematické olympiády roku 2009. V důkazu této úlohy používáme Pascalovu přímku, která je vysvětlena ve větě 11 v kapitole 4: Šestiúhelníky.

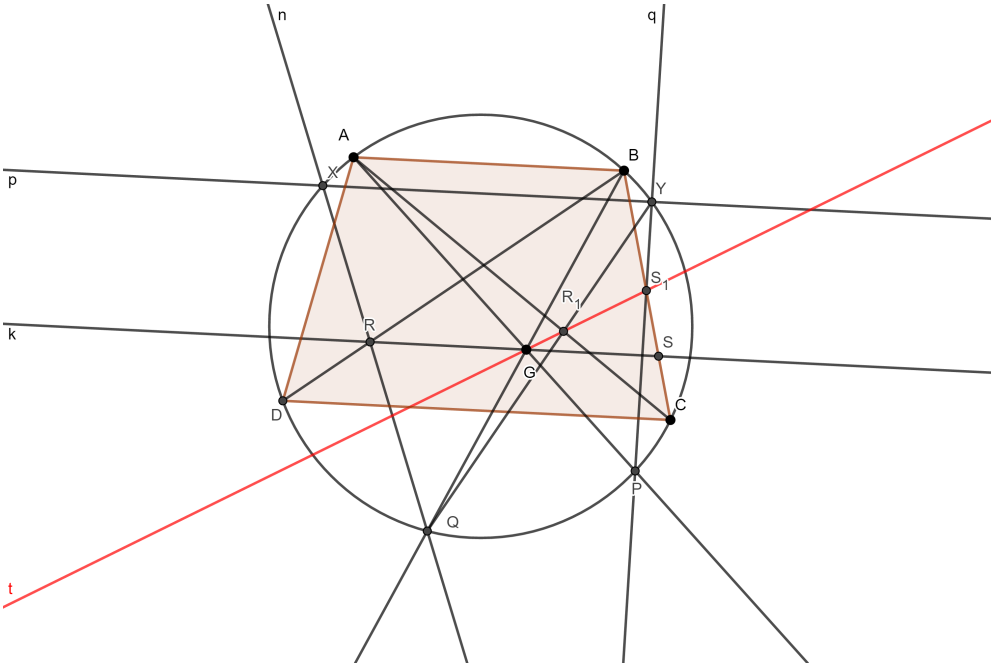
Úloha 6 ((32))**.** *Lichoběžník $ABCD$, kde $AB||CD$, je vepsán do kružnice ω a bod G leží uvnitř trojúhelníku BCD. Polopřímky AG a BG protínají ω postupně v bodech P a Q. Nechť rovnoběžka s AB vedená bodem G protne přímky BD a BC v bodech R a S. Dokažte, že čtyřúhelník $PQRS$ je tětivový pouze tehdy, když přímka BG je osou úhlu CBD (Obrázek 3.20).*



Obrázek 3.20: ÚÚloha 6 - zadání

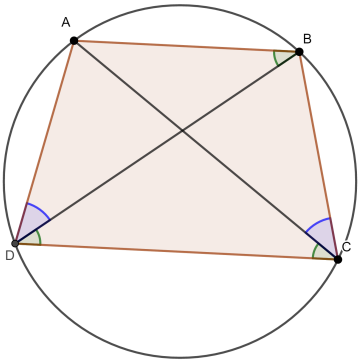
Řešení. Nejprve protáhneme přímku QR tak, aby protla kružnici ω v bodě X. Dále povedeme tímto bodem rovnoběžku s AB, ta nám protne kružnici ω v bodě Y. Označme dále průsečík přímek YP a CB jako S_1 a průsečík přímek AC a QY jako R_1.

Dále se zaměříme na body Y, P, A, C, B, Q. Díky Pascalově větě můžeme říct, že body S_1,R_1,G leží v přímce (Obrázek 3.21).



Obrázek 3.21: Body G, R_1, S_1 na Pascalově přímce

Podívejme se nyní na náš lichoběžník $ABCD$. Prohlédneme-li si úhly ABD a ACD zjistíme, že se rovnají (obvodové úhly příslušné ke společné tětivě AD). Také ale víme, že úhly ABD a BDC jsou shodné (úhly střídavé) (Obrázek 3.22).



Obrázek 3.22: Úhly BDC, ABD a ACD

Můžeme tedy zapsat:

$$|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$$

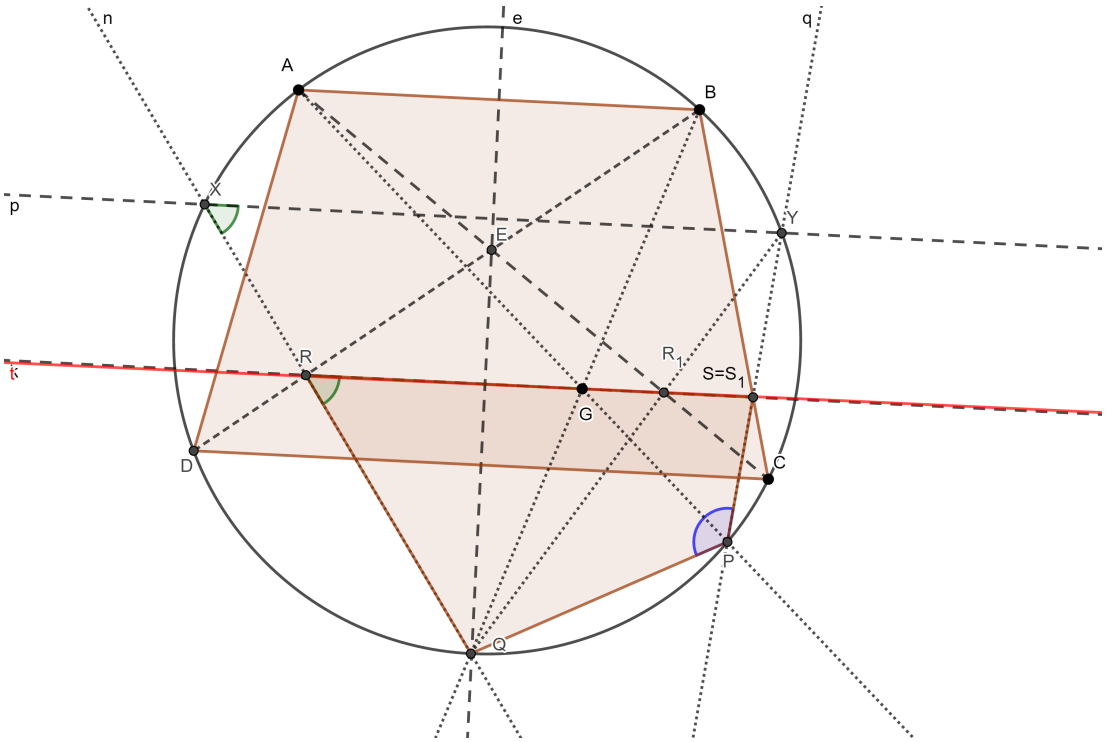
Obraťme svou pozornost na úhly ADB a ACB. Můžeme o nich prohlásit, že jejich velikosti se také rovnají (obvodové úhly příslušné ke společné tětivě AB). Proto tedy platí:

$$|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD|$$

Rovnají se tedy úhly při základně DC a můžeme tedy poznamenat, že lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný. Má tedy i osu souměrnosti.
Rozlišme nyní dva případy:

a) Bod Q leží na ose souměrnosti lichoběžníku $ABCD$.

Jelikož bod R je průsečíkem QX a DB a bod R_1 je průsečíkem přímek AC a QY (tedy přímek osově souměrných s QX a DB podle osy souměrnosti našeho lichoběžníku) je obrazem bodu R bod R_1. Tento bod musí ležet na samodružné přímce RS (je samodružná, neboť je rovnoběžkou samodružných přímek AB a CD). A protože z konstrukce bodu R víme, že bod G na přímce RS leží, musí na této přímce ležet i bod S_1. (Body G, R_1 i S_1 leží na Pascalově přímce a protože body G i R_1 leží na přímce RS, musí na ni ležet i bod S_1). Víme, že bod S_1 leží na přímkách BC i RS stejně tak jako bod S, proto tedy $S = S_1$ (Obrázek 3.23).



Obrázek 3.23: Samodružný bod Q

A tedy:

$$|\sphericalangle QPY| = |\sphericalangle QPS_1| = |\sphericalangle QPS|$$

Podíváme se nyní na čtyřúhelník $PQXY$. Z konstrukce vidíme, že je tětivový. Tedy:

$$|\sphericalangle YXQ| + |\sphericalangle QPY| = 180°$$

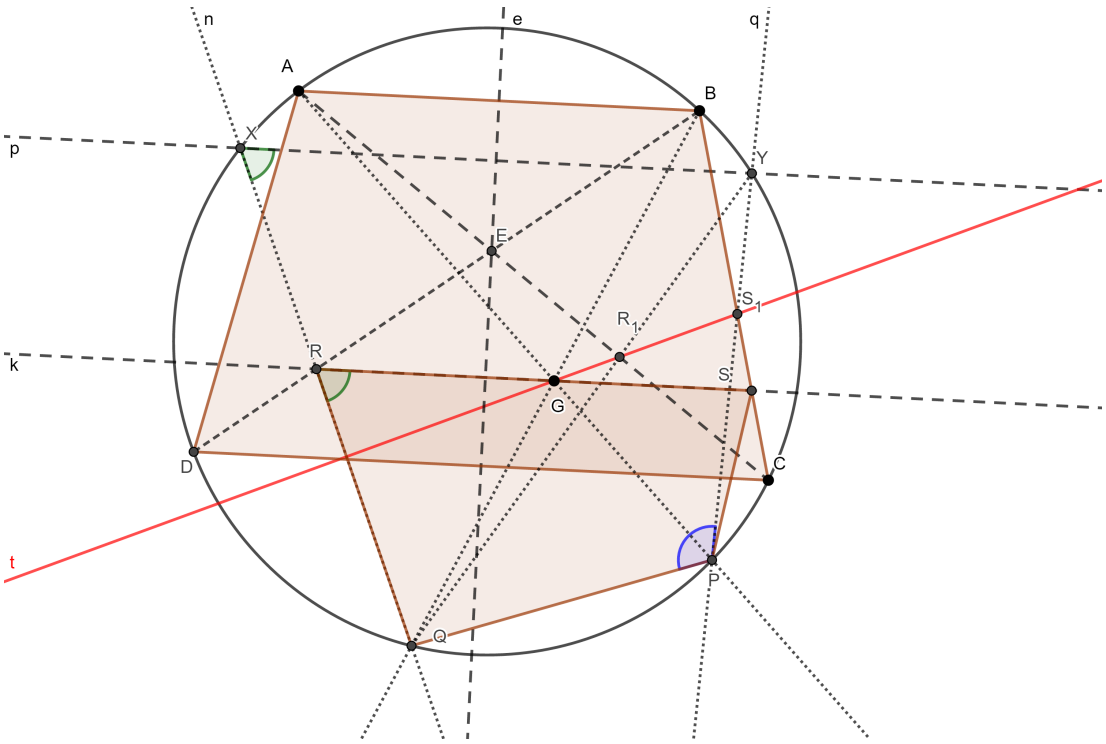
Víme také, že $|\sphericalangle YXQ| = |\sphericalangle SRQ|$ (jsou to tedy úhly souhlasné). Na závěr můžeme napsat:

$$|\sphericalangle SRQ| + |\sphericalangle QPS| = 180°$$

Tedy dokázali jsme, že čtyřúhelník $PQRS$ je tětivový.

A jelikož bod Q leží na ose souměrnosti tětivového čtyřúhelníku $ABCD$, leží přesně uprostřed oblouku CD. Tedy na ose obvodového úhlu CBD. Tím pádem bod G na ni také leží.

b) Bod Q neleží na ose souměrnosti čtyřúhelníku $ABCD$.



Obrázek 3.24: Bod Q neležící na ose souměrnosti lichoběžníku

Jinými slovy přímka BG není osou úhlu CBD. (Bod $Q \in BG$ neleží uprostřed oblouku CD.) V tuto chvíli se přímka QX nezobrazí na QY. Tedy Bod R_1 neleží na přímce RG. Tím pádem bod S_1 nesplyne s bodem S a úhly QPS_1 a QPS jsou různé. Přestože čtyřúhelník $PQXY$ je tětivový, nemůžeme toto říct o čtyřúhelníku $PQRS$.

3.2 Tečnové čtyřúhelníky

V následující kapitole se budeme zabývat tečnovými čtyřúhelníky. Začneme jejich definicí, kterou si propůjčíme z knihy Planimetrie Evy Pomykalové:

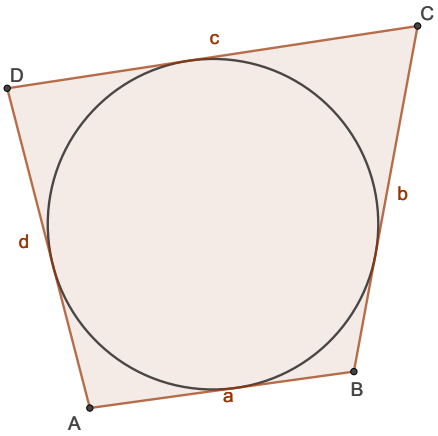
Definice 10 ((11), str. 49)**.** *Čtyřúhelník, kterému lze vepsat kružnici, se nazývá tečnový - jeho strany jsou tečnami vepsané kružnice.*

Střed této kružnice najdeme v průsečíku os jeho úhlů.

Poznámka. V této práci se budeme zabývat pouze konvexními čtyřúhelníky.

Abychom se mohli zabývat dalšími úlohami týkajícími se tohoto tématu, musíme si připomenout důležitou vlastnost tečnových čtyřúhelníků, kterou uvádí Boček a Zhouf ve své knize Planimetrie.

Věta 8 ((1), str. 115)**.** *Čtyřúhelník je tečnový (Obrázek 3.25), právě tehdy, jestliže součet délek jeho dvou protějších stran se rovná součtu délek zbývajících dvou protějších stran,tj.* $a + c = b + d$.

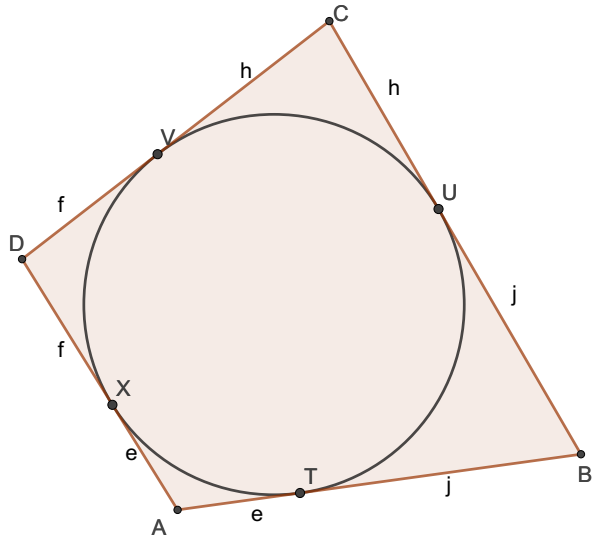


Obrázek 3.25: Tečnový čtyřúhelník

Důkaz. Opět stojíme před větou, která je ve formě ekvivalence. Musíme proto dokázat dvě implikace: když je čtyřúhelník tečnový, jsou si součty délek jeho protějších stran rovny a když jsou si součty délek jeho protějších stran rovny, pak je čtyřúhelník tečnový.

Začněme tedy s první implikací.

Označíme ke stranám a,b,c a d body dotyku kružnice a našeho čtyřúhelníku písmeny T, U, V a X a $|AT| = e$, $|BU| = j$, $|CV| = h$ a $|DX| = f$. Protože víme, že kružnice je souměrná podle každé osy, která prochází jejím středem, můžeme říct, že body dotyku kružnice a každých dvou tečen jsou stejně vzdáleny od společného průsečíku těchto tečen. Proto tedy $|AT| = |AX| = e$, $|BU| = |BT| = j$, $|CV| = |CU| = h$ a $|DX| = |DV| = f$ (Obrázek 3.26).



Obrázek 3.26: Tečnový čtyřúhelník- body dotyku

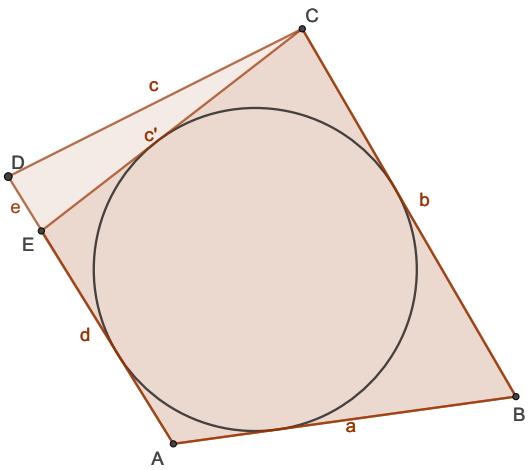
Podle tohoto pojmenování můžeme říct: $e + j = a$, $j + h = b$, $h + f = c$ a $f + e = d$. Vrátíme-li se k dotazovanému tvrzení, můžeme zapsat:

$$e + j + h + f = j + h + f + e$$
$$a + c = b + d$$

Tímto jsme dokázali první implikaci.

Dokázat druhou implikaci je již trochu složitější.

Předpokládejme, že naše kružnice k se dotýká pouze tří stran čtyřúhelníku $ABCD$ přesně tak, jak je vidět na obrázku. Sestrojme tečnu EC různou do tečny CB ke kružnici k a jeji délku označme jako c', zároveň délku úsečky ED jako e. Vytvoříme tak tečnový čtyřúhelník $ABCE$ (víme, že všechny jeho strany se dotýkají kružnice k) (Obrázek 3.27).



Obrázek 3.27: Tečnový čtyřúhelník - druhá implikace

O tomto čtyřúhelníku jistě platí:

$$a + c' = b + d - e \tag{3.23}$$

Z předpokladu však víme:

$$a + c = b + d \tag{3.24}$$

Odečteme- li 3.23 od 3.24, dostaneme:

$$c - c' = e$$

$$e + c' = c \tag{3.25}$$

Pokud body E a D nesplývají, z trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník CED musí platit:

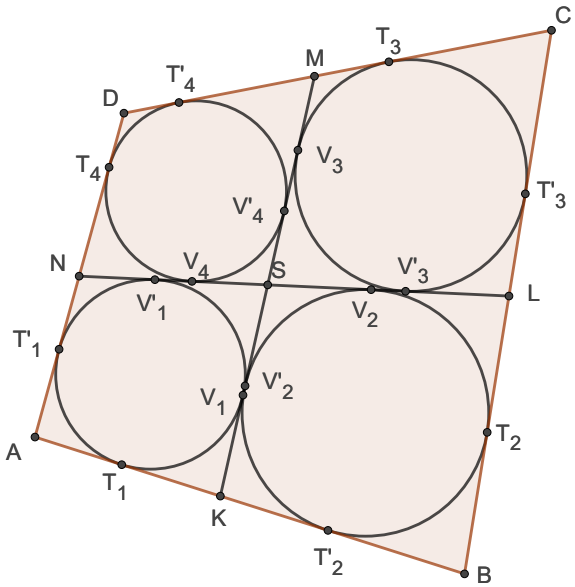
$$e + c' > c$$

A to je ve sporu s 3.25 a proto body E a D musí splynout. Tedy čtyřúhelník $ABCD$ je shodný s čtyřúhelníkem $ABCE$ a proto je tečnový.

□

Podívejme se teď na úlohu z matematické olympiády:

Úloha 7 ((36), úloha 3)**.** *Uvnitř stran AB, BC, CD a DA konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou po řadě zvoleny body K, L, M a N. Označme S průsečík přímek KM a LN. Je-li možno vepsat kružnice čtyřúhelníkům $AKSN$, $BLSK$, $CMSL$ a $DNSM$, je možno vepsat kružnici i čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte.*



Obrázek 3.28: Body dotyku kružnic a čtyřúhelníků $AKSN, BLSK, CMSL, DNSM$

Řešení. Pokud čtyřúhelníky $AKSN$, $BLSK$, $CMSL$ a $DNSM$ jsou tečnové, můžeme označit body dotyku následovně (Obrázek 3.28).

Protože víme, že tečny z bodu ke kružnici jsou osově souměrné, můžeme zapsat:

$$|AT_1| = |AT_1'| \quad |BT_2| = |BT_2'| \quad |CT_3| = |CT_3'| \quad |DT_4| = |DT_4'| \tag{3.26}$$

a dále:

$$|SV_1| = |SV_1'| \quad |SV_2| = |SV_2'| \quad |SV_3| = |SV_3'| \quad |SV_4| = |SV_4'| \tag{3.27}$$

Dále je potřeba připomenout, že společné tečny ke dvěma kružnicím jsou také osově souměrné podle osy úhlu, který svírají. Díky tomu:

$$|T_1T_2'| = |V_1'V_2| \quad |T_2T_3'| = |V_2'V_3| \quad |T_3T_4'| = |V_3'V_4| \quad |T_4T_1'| = |V_4'V_1| \tag{3.28}$$

Dále se podle Definice 10 přesvědčíme, zda náš čtyřúhelník je tečnový:

$$\begin{gathered}|AB| + |CD| = |BC| + |DA| \\ (|AT_1| + |T_1T_2'| + |T_2'B|) + (|CT_3| + |T_3T_4'| + |T_4'D) = \\ (|BT_2| + |T_2T_3'| + |T_3'C|) + (|DT_4| + |T_4T_1'| + |T_1'A|)\end{gathered}$$

Po využití vztahů, které jsme dostali v 3.26 dostáváme:

$$\begin{gathered}|AT_1| + |T_1T_2'| + |BT_2| + |CT_3| + |T_3T_4'| + |DT_4| = \\ |BT_2| + |T_2T_3'| + |CT_3| + |DT_4| + |T_4T_1'| + |AT_1|\end{gathered}$$

Po odečtení stejných hodnot dostáváme:

$$|T_1T_2'| + |T_3T_4'| = |T_2T_3'| + |T_4T_1'|$$

Tuto rovnost lze pomocí 3.28 přepsat na:

$$|V_1'V_2| + |V_3'V_4| = |V_2'V_3| + |V_4'V_1|$$

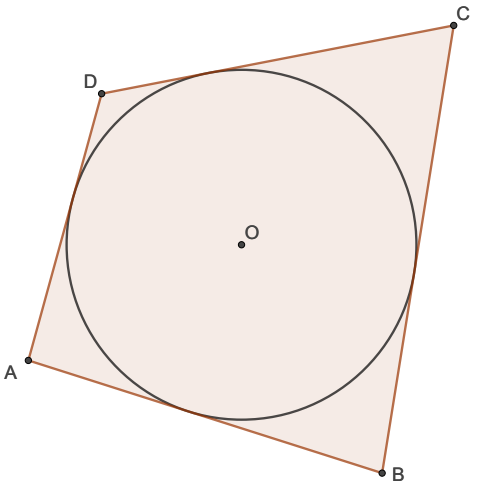
Teď můžeme využít toho, že bod S leží na všech předchozích úsečkách:

$$(|V_1'S| + |SV_2|) + (|V_3'S| + |SV_4|) = (|V_2'S| + |SV_3|) + (|V_4'S| + |SV_1|)$$

Použijeme rovnosti z 3.27 a dostáváme:

$$|SV_1| + |SV_2| + |SV_3| + |SV_4| = |SV_2| + |SV_3| + |SV_4| + |SV_1|$$

Zde vidíme, že pravá strana se rovná levé. Rovnost tedy platí a náš čtyřúhelník $ABCD$ je skutečně tečnový (Obrázek 3.29) (Srov. [(36)]).



Obrázek 3.29: Tečnový čtyřúhelník ABCD

Další zajímavá úloha se zabývá úhlopříčkami a spojnicemi bodů dotyku:

Úloha 8 ((20))**.** *Předpokládejme, že kružnice vepsaná do čtyřúhelníku $ABCD$ se dotýká jeho stran AB, BC, CD a DA postupně v bodech E, F, G a H. Potom přímky EG a FH procházejí bodem M, který je průsečíkem úhlopříček AC a BD.*

Řešení. Abychom tuto úlohu vyřešili, předpokládejme, že existuje průsečík N úseček AC a EG takový, že je různý od bodu M.

Dále budeme využívat toho, že úhly mezi tětivou a tečnami sestrojenými v koncových bodech tětivy jsou shodné, t. j.

$$|\sphericalangle AEN| = |\sphericalangle DGN| \tag{3.29}$$

Můžeme využít také periody funkce sinus a toho, že funkce sinus je lichá. Proto úhel a úhel k němu vedlejší má vždy stejnou hodnotu funkce sinus. Podívejme se tedy na dvojici $\sphericalangle DGN$ a $\sphericalangle CGN$.:

$$\sin \sphericalangle CGN = \sin\left(180^\circ - \sphericalangle DGN\right) = -\sin\left(-\sphericalangle DGN\right) = \sin \sphericalangle DGN \tag{3.30}$$

Ze vztahů 3.29 a 3.30 můžeme usoudit:

$$\sin \sphericalangle AEN = \sin \sphericalangle DGN = \sin \sphericalangle CGN$$

Dále se podíváme na obsahy trojúhelníků. Na to budeme potřebovat vzorec, který využívá funkce sinus.

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

Tento vzorec budeme ale využívat ve tvaru:

$$2S = ab \sin \gamma$$

Použijeme ho nejprve pro trojúhelník AEN:

$$2 \cdot S_{\triangle AEN} = |AN| \cdot |EN| \cdot \sin \sphericalangle ANE = |AE| \cdot |EN| \cdot \sin \sphericalangle AEN \tag{3.31}$$

Pro trojúhelník CGN pak máme:

$$2 \cdot S_{\triangle CGN} = |CN| \cdot |GN| \cdot \sin \sphericalangle CNG = |CG| \cdot |GN| \cdot \sin \sphericalangle CGN \tag{3.32}$$

Když rovnice 3.31 a 3.32 vydělíme, dostaneme:

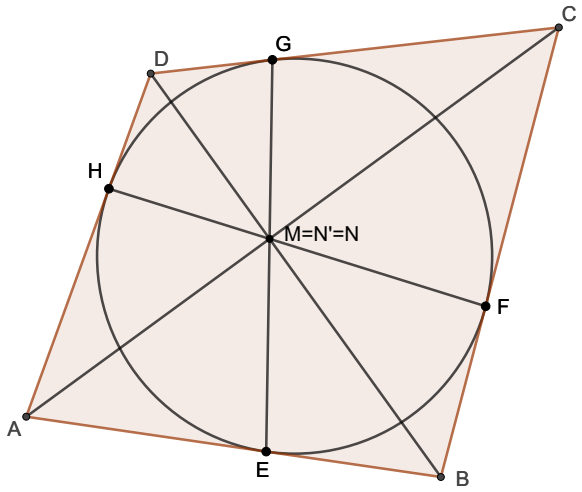
$$\frac{S_{\triangle AEN}}{S_{\triangle CGN}} = \frac{|AN| \cdot |EN|}{|CN| \cdot |GN|} = \frac{|AE| \cdot |EN|}{|CG| \cdot |GN|}$$

A to po vydělení $|EN|$ a vynásobení $|GN|$ (tuto operaci můžeme provést, protože se jedná o délky úseček, u kterých nepředpokládáme, že by byly nulové.) dostáváme pak vztah:

$$\frac{|AN|}{|CN|} = \frac{|AE|}{|CG|}$$

Což znamená, že přímka EG rozděluje úhlopříčku AC v poměru $|AE| : |CG|$.

Dále uplatníme ten samý postup i pro úsečky AC a FH, které předpokládáme, že se protnou v bodě N' (Obrázek 3.30).



Obrázek 3.30: Průsečík úhlopříček a spojnic bodů dotyku

Porovnáme-li obsahy trojúhelníků AHN' a CFN', vyplyne nám, že přímka FH dělí úhlopříčku AC v poměru $|AH| : |CF|$.

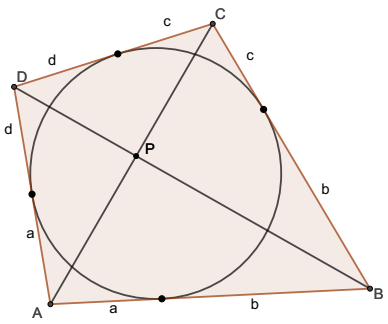
Protože platí, že $|AE|=|AH|$ a $|CG|=|CF|$ (jsou to vzdálenosti dotykových bodů kružnice od společného průsečíku tečen), můžeme říct, že přímka EG a FH rozděluje úhlopříčku AC ve stejném poměru. Proto body N a N' splývají. Úhlopříčka AC tedy prochází průsečíkem úseček EG a FH.

Pokud bychom celou myšlenku aplikovali ještě jednou, tentokrát se však zaměřili na úhlopříčku BD, zjistili bychom, že tato úhlopříčka rovněž prochází bodem N. Proto můžeme říct. že tyto čtyři přímky prochází společným bodem N, který je shodný s průsečíkem úhlopříček M. (Myšlenka důkazu je převzata z [(20)])

Následuje další zajímavá úloha.

Úloha 9 ((21))**.** *Nechť $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník. Označme délky úseček spojující vrcholy A,B, C a D a body dotyku kružnice a čtyřúhelníku jako a, b, c a d. Dále ať bod P je průsečík úhlopříček AC a BD (Obrázek 3.31), potom platí:*

$$\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{a}{c}$$



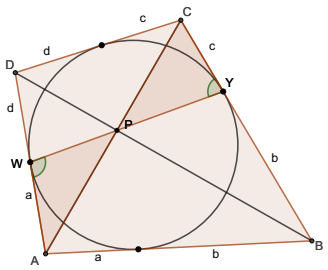
Obrázek 3.31: Tečnový čtyřúhelník - úhlopříčky

Řešení. Označíme body dotyku kružnice a strany AD jako W a strany BC jako Y (Obrázek 3.32). Díky tvrzení dokazovanému v úloze 8 víme, že úhlopříčky a spojnice bodů dotyku se v tečnovém čtyřúhelníku protínají v jednom bodě. Dále víme, že $\sphericalangle CYW$ a $\sphericalangle DWY$ jsou shodné, neboť jsou to úhly mezi tětivou a tečnami sestrojenými v jejích koncových bodech. (Viz. 3.29). Pomocí vedlejšího úhlu k $\sphericalangle DWY$ a protože bod P leží na WY můžeme říct:

$$|\sphericalangle CYP| = |\sphericalangle CYW| = 180° - |\sphericalangle AWY| = 180° - |\sphericalangle AWP|$$

Můžeme tedy prohlásit, že hodnota funkce sinus je pro tyto dva úhly stejná (viz 3.30).

$$\sin \sphericalangle CYP = \sin \sphericalangle AWP \tag{3.33}$$



Obrázek 3.32: Úloha 9 - zadání

Pokud využijeme sinové věty v trojúhelníku AWP, dostáváme:

$$\frac{|AP|}{\sin \sphericalangle AWP} = \frac{|AW|}{\sin \sphericalangle APW}$$
$$|AP| = |AW| \frac{\sin \sphericalangle AWP}{\sin \sphericalangle APW} \tag{3.34}$$

Opět využijeme sinové věty, ale pro trojúhelník CYP

$$\frac{|CP|}{\sin \sphericalangle CYP} = \frac{|CY|}{\sin \sphericalangle CPY}$$
$$|CP| = |CY| \frac{\sin \sphericalangle CYP}{\sin \sphericalangle CPY} \tag{3.35}$$

Dosadíme-li do levé strany zadané rovnice vztahy 3.34 a 3.35 a dále využijeme-li vrcholových úhlů $\sphericalangle CPY$ a $\sphericalangle APW$ a vztahu 3.33 , dostaneme:

$$\frac{|AP|}{|CP|} = \frac{|AW| \frac{\sin \sphericalangle AWP}{\sin \sphericalangle APW}}{|CY| \frac{\sin \sphericalangle CYP}{\sin \sphericalangle CPY}} = \frac{|AW| \frac{\sin \sphericalangle AWP}{\sin \sphericalangle APW}}{|CY| \frac{\sin \sphericalangle AWP}{\sin \sphericalangle APW}} = \frac{|AW|}{|CY|} = \frac{a}{c}.$$

Tím jsme dokázali zadanou rovnost.
Poznámka. Pokud bychom použili Cevovu větu na trojúhelník ABC:

$$\frac{|AE|}{|EB|} \cdot \frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1$$

kde E, Y jsou body dotyku kružnice vepsané čtyřúhelníku $ABCD$ a stran AB a BC a zároveň P je průsečík úhlopříček tohoto čtyřúhelníku, pak zjistíme, že úhlopříčka DB a spojnice AY a CE procházejí jedním bodem.
Analogicky pro trojúhelníky BCD, CDA a DAB.

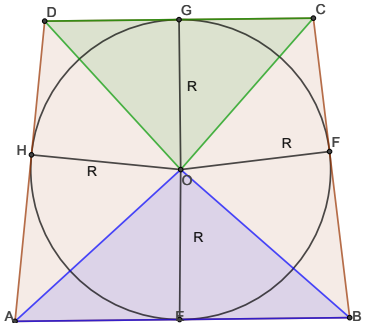
Důkaz Cevovy věty však není v rozsahu této práce, ale je dohledatelný třeba na tomto odkazu [(1), str. 53]

Dále bych se ráda zaměřila na další úlohu z matematické olympiády. Pro úplnost dodávám, že důkaz je pouze inspirovaný vzorovým řešením:

Úloha 10 ((37), úloha 3)**.** *Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD lze vepsat kružnici se středem O. Určete obsah S lichoběžníku, jsou-li dány délky úseček OB a OC.*

Řešení. Nejprve si dokážeme, že součet S_{ABO} a S_{DCO} je roven polovině obsahu našeho čtyřúhelníku $ABCD$, kde O je středem kružnice vepsané.

Postupně na stranách AB, BC, CD a DA označíme body dotyku kružnice a stran písmeny E, F, G a H. Poté zobrazíme poloměry kružnice vepsané (Obrázek 3.33).



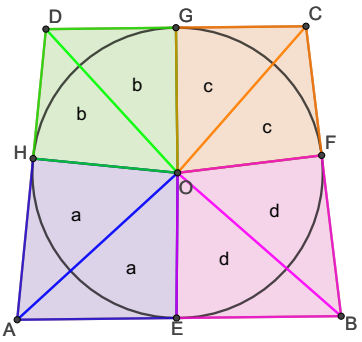
Obrázek 3.33: Trojúhelníky ABO a DCO

Protože spojnice AO je osa úhlu EAH (O je střed kružnice vepsané, který leží na této přímce), pak $|\sphericalangle EAO| = |\sphericalangle OAH|$. Využijeme souměrnosti tečen z jednoho bodu ke kružnici a vidíme, že $|AE| = |AH|$. Můžeme si všimnout, že trojúhelníky AEO a AHO jsou shodné (podle věty Ssu). Tudíž jejich obsahy se rovnají, označíme je jako a.

$$S_{AEO} = S_{AHO} = a$$

Analogicky (Obrázek 3.34):

$$S_{DHO} = S_{DGO} = b$$
$$S_{CGO} = S_{CFO} = c$$
$$S_{BFO} = S_{BEO} = d$$



Obrázek 3.34: Obsahy trojúhelníků

Obsah našeho čtyřúhelníku je tedy součtem obsahů těchto trojúhelníků.

$$S_{ABCD} = S_{AEO} + S_{AHO} + S_{DHO} + S_{DGO} + S_{CGO} + S_{CFO} + S_{BFO} + S_{BEO}$$
$$S_{ABCD} = a + a + b + b + c + c + d + d$$
$$S_{ABCD} = 2 \cdot (a + b + c + d)$$

Můžeme tedy vyjádřit polovinu obsahu čtyřúhelníku $ABCD$:

$$\frac{1}{2} S_{ABCD} = a + b + c + d$$

Dále si můžeme všimnout:

$$S_{ABO} = S_{AEO} + S_{BEO} = a + d$$
$$S_{DCO} = S_{CGO} + S_{DGO} = c + b$$

a

$$S_{DOA} = S_{AHO} + S_{DHO} = a + b$$
$$S_{BOC} = S_{CFO} + S_{BFO} = c + d$$

Dále:

$$S_{ABO} + S_{DCO} = (a + d) + (c + b) =$$
$$= (a + b) + (c + d) = S_{DOA} + S_{BOC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

Tedy součet obsahů těchto dvou trojúhelníků se rovná polovině obsahu čtyřúhelníku. Můžeme dále usoudit, že:

$$S_{ABO} + S_{DCO} = S_{DOA} + S_{BOC}$$

Protože náš lichoběžník je rovnoramenný, $|BC|=|DA|$ a protože vidíme, že výšky v trojúhelnících AOD a BOC na strany AD a BC jsou shodné a jejich velikost je rovna poloměru r kružnice vepsané, můžeme psát:

$$S_{BOC} = \frac{|BC| \cdot R}{2} = \frac{|DA| \cdot R}{2} = S_{DOA}$$

Tedy:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot (S_{DOA} + S_{BOC}) = 2 \cdot (S_{BOC} + S_{BOC}) = 2 \cdot 2 \cdot S_{BOC} = 4 \cdot S_{BOC} \tag{3.36}$$

Dále uplatníme poznatek, že v rovnoramenném lichoběžníku platí:

$$\alpha + \delta = 180^\circ = \beta + \gamma.$$

Úhel CBO je polovina β, protože BO je osa úhlu, obdobně $|\sphericalangle BCO|=\frac{1}{2}\gamma$ a tedy:

$$|\sphericalangle CBO| + |\sphericalangle BCO| = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

Z trojúhelníku BOC můžeme tedy říct:

$$|\sphericalangle BOC| = 180° - (|\sphericalangle CBO| + |\sphericalangle BCO|) = 180° - 90° = 90°$$

Trojúhelník BOC je tedy pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu O. Použijeme tedy vzorec pro obsah trojúhelníku pomocí jeho odvěsen a dostáváme:

$$S_{BOC} = \frac{|BO| \cdot |CO|}{2} \tag{3.37}$$

Když 3.37 dosadíme do 3.36 dostáváme:

$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{BOC} = 4 \cdot \frac{|BO| \cdot |CO|}{2} = 2 \cdot |BO| \cdot |CO|$$

čímž jsme vyjádřili požadovaný obsah lichoběžníku $ABCD$ pomocí daných úseček OB a OC.

Další zajímavá úloha, jejíž autorem je R. Horenský, je opět z matematické olympiády:

Úloha 11 ((38), úloha 3)**.** *V lichoběžníku $ABCD$ $(AB||CD)$ označme E střed ramene BC. Jsou-li oba čtyřúhelníky $ABED$ a $AECD$ tečnové, splňují délky stran lichoběžníku $ABCD$ označené obvyklým způsobem rovnosti*

$$a + c = \frac{b}{3} + d$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}$$

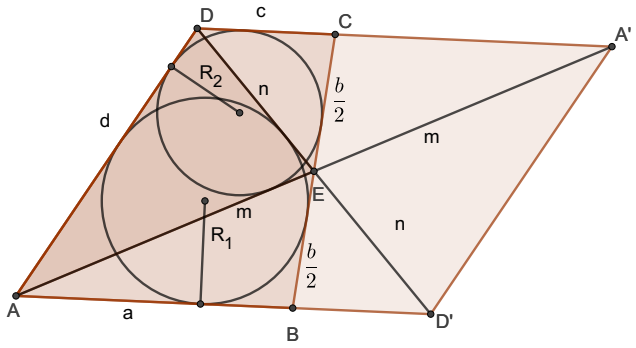
Dokažte.

Řešení. Nejprve přeneseme bod D ve středové souměrnosti podle bodu E na bod D' a bod A ve středové souměrnosti podle bodu E na bod A'. Tím nám vznikne rovnoběžník $AD'A'D$, kde bod E je průsečíkem úhlopříček. Pokud $|AE|$ označíme jako m, pak $|AA'|= 2m$. Pokud $|DE|=n$, pak $|DD'|=2n$. Díky shodnosti trojúhelníků ABE a $A'CE$ (věta sus), můžeme říct, že $|AB| = |CA'| = a$. Analogicky $|CD|= |D'B| = c$. Strany rovnoběžníku tedy jsou: $|AD'| = a + c$ a $|AD| = d$ (Obrázek 3.35).

Nechť kružnice vepsaná lichoběžníku $ABED$ má poloměr R_1. Dále můžeme prohlásit, že tato kružnice je vepsaná i trojúhelníku $AD'D$. (Dotýká se všech jeho stran). Analogicky kružnice vepsaná lichoběžníku $AECD$ s poloměrem R_2 je vepsaná i trojúhelníku $AA'D$. Můžeme tedy uplatnit větu 8 o součtu stran u tečnového čtyřúhelníku :

$$a + n = \frac{b}{2} + d \tag{3.38}$$

$$c + m = \frac{b}{2} + d \tag{3.39}$$



Obrázek 3.35: Rovnoběžník

Z toho dostáváme:

$$a + n = c + m$$
$$m - n = a - c \tag{3.40}$$

a protože jde o lichoběžník $a \neq c$. Vidíme, že čtyřúhelníky $ABED$ a $AECD$ mají stejný obvod. Dále podle známého vzorce pro obsah tečnového čtyřúhelníku:

$$S = R \cdot s$$

kde s je poloviční obvod tečnového čtyřúhelníku a R je poloměr kružnice vepsané. Rozepíšeme si tento vzorec pro naše dva čtyřúhelníky s tím, že $s = \frac{1}{2}(d+\frac{b}{2}+a+n)$.

$$S_{ABED} = R_1 \cdot s$$
$$S_{AECD} = R_2 \cdot s$$

Tyto rovnosti můžeme přepsat jako:

$$R_1 = \frac{S_{ABED}}{s} \tag{3.41}$$
$$R_2 = \frac{S_{AECD}}{s} \tag{3.42}$$

A z rovností 3.41 a 3.42 můžeme tedy vyjádřit poměr:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{S_{ABED}}{s}}{\frac{S_{AECD}}{s}}$$
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{S_{ABED}}{S_{AECD}} \tag{3.43}$$

Protože body A' a D' jsou stejně vzdáleny od přímky AD (leží na stejné rovnoběžce k AD), můžeme říct, že trojúhelníky $AD'D$ a $AA'D$ mají stejnou výšku ke straně jim obou společné a to AD. Z toho plyne:

$$S_{AA'D} = S_{AD'D} \tag{3.44}$$

Obsah trojúhelníku však můžeme také vyjádřit pomocí kružnice jemu vepsané pomocí známého vzorce:

$$S_{AD'D} = R_1 \cdot \frac{a+c+d+2n}{2} \tag{3.45}$$

$$S_{AA'D} = R_2 \cdot \frac{a+c+d+2m}{2} \tag{3.46}$$

A protože z 3.44 víme, že obsahy těchto dvou trojúhelníků se rovnají, s využitím vztahů 3.45 a 3.46 můžeme psát:

$$R_1 \cdot \frac{a+c+d+2n}{2} = R_2 \cdot \frac{a+c+d+2m}{2}$$
$$R_1(a+c+d+2n) = R_2(a+c+d+2m)$$

Všimneme si, že výrazy $(a+c+d+2n)$ a $(a+c+d+2m)$ se rovnají obvodům trojúhelníků $AA'D$ a $AD'D$ značených jako $o_{AA'D}$ a $o_{AD'D}$. Proto také:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{o_{AD'D}}{o_{AA'D}} = \frac{2m+(a+c)+d}{2n+(a+c)+d} \tag{3.47}$$

Dále pokud označíme výšku lichoběžníku $ABCD$ jako v, můžeme jednoduše napsat tuto rovnost, neboť výšky v trojúhelnících CDE a ABE je polovinou výšky v:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{S_{ABED}}{S_{AECD}} = \frac{S_{ABCD}-S_{CDE}}{S_{ABCD}-S_{ABE}} = \frac{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}c\cdot\frac{1}{2}v}{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}v} = \frac{2a+c}{a+2c} \tag{3.48}$$

Z 3.47 a z 3.48 dostáváme rovnost:

$$\frac{2m+(a+c)+d}{2n+(a+c)+d} = \frac{2a+c}{a+2c}$$

Z předcházející rovnosti a z 3.40, můžeme m a n vyjádřit jako:

$$m = \frac{3a+c-d}{2} \tag{3.49}$$

$$n = \frac{a+3c-d}{2} \tag{3.50}$$

Když dosadíme m a n do 3.38 dostaneme:

$$3(a+c) = b+3d$$
$$a+c = \frac{b}{3}+d$$

a to je náš první požadovaný vztah, díky němuž můžeme vztahy 3.49 a 3.50 přepsat jako:

$$m = a+\frac{b}{6}$$
$$n = c+\frac{b}{6}$$

Když na trojúhelníky ABE a CDE použijeme kosinovou větu pro úhly ABE a DCE dostaneme:

$$\cos|\sphericalangle ABE| = \frac{a^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (a + \frac{1}{6})^2}{2a \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9a} - \frac{1}{3}$$
$$\cos|\sphericalangle DCE| = \frac{c^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (c + \frac{1}{6})^2}{2c \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}$$

Můžeme si však všimnout, že úhly DCE a $D'BE$ jsou střídavé a zároveň úhly ABE a $D'BE$ jsou vedlejší. Tedy součet úhlů ABE a DCE musí být 180°. Díky vlastnostem goniometrických funkcí víme, že jejich hodnoty funkce cosinus jsou opačné. A proto také:

$$\cos|\sphericalangle ABE| + \cos|\sphericalangle DCE| = 0$$
$$\left(\frac{2b}{9a} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

Po upravení dostáváme náš druhý požadovaný vztah:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}$$

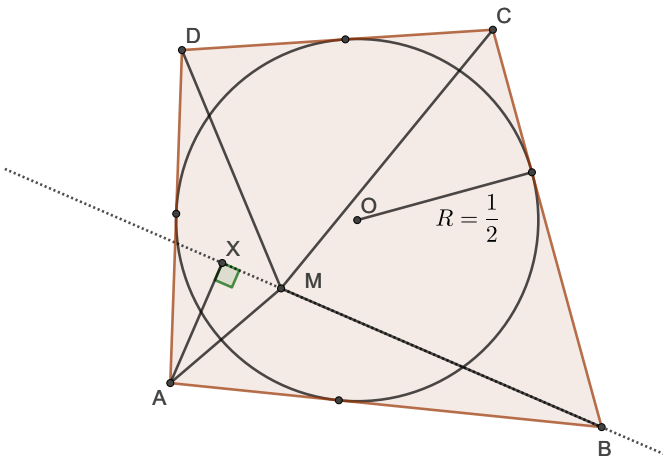
(Srov. [(38)], úloha 3).

Pro řešení další úlohy je třeba znát Jensenovu nerovnost pro čtyřúhelník $s \geq 4R$, kterou vysvětlujeme až v sekci 6.2 přesně v úloze 22.

Úloha 12 ((14), str. 41)**.** *Čtyřúhelník $ABCD$ je opsán kružnici s poloměrem $R = \frac{1}{2}$. Uvnitř tohoto čtyřúhelníku je bod M, pro který platí:*

$$|AM|^2 + |BM|^2 + |CM|^2 + |DM|^2 = 2.$$

Dokažte, že obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je roven jedné.



Obrázek 3.36: Bod X

Řešení. Abychom mohli tuto úlohu dokázat, musíme si nejprve uvědomit, jak můžeme číslo $|AM|^2+|BM|^2$ omezit. Protože, druhá mocnina jakéhokoli čísla je vždy nezáporná, můžeme napsat:

$$(|AM| + |BM|)^2 \geq 0$$

To upravíme následovně:

$$|AM|^2 + 2 \cdot |AM| \cdot |BM| + |BM|^2 \geq 0$$

$$|AM|^2 + |BM|^2 \geq 2 \cdot |AM| \cdot |BM| \tag{3.51}$$

Dále se zaměříme na obsah trojúhelníku AMB, který se budeme snažit opět shora omezit. Výška na stranu BM v tomto trojúhelníku má velikost:

$$v_{BM} = \sqrt{|AM|^2 - |MX|^2},$$

kde X je pata výšky na stranu BM (Obrázek 3.36). Obsah trojúhelníku AMB je tedy:

$$S_{\triangle AMB} = \frac{|BM| \cdot v_{BM}}{2}$$

$$S_{\triangle AMB} = \frac{|BM| \cdot \sqrt{|AM|^2 - |MX|^2}}{2}$$

Dále se přesvědčíme, že:

$$\frac{|AM| \cdot |BM|}{2} \geq S_{\triangle AMB}$$

$$\frac{|AM| \cdot |BM|}{2} \geq \frac{|BM| \cdot \sqrt{|AM|^2 - |MX|^2}}{2}$$

$$|AM| \cdot |BM| \geq |BM| \cdot \sqrt{|AM|^2 - |MX|^2}$$

$$|AM| \geq \sqrt{|AM|^2 - |MX|^2}$$

$$|AM|^2 \geq |AM|^2 - |MX|^2$$

$$0 \geq -|MX|^2$$

A to víme, že platí vždy. Můžeme tedy k vztahu 3.51 připsat:

$$|AM|^2 + |BM|^2 \geq 2 \cdot |AM| \cdot |BM| \geq 4S_{\triangle AMB} \tag{3.52}$$

Analogicky:

$$|BM|^2 + |CM|^2 \geq 2 \cdot |BM| \cdot |CM| \geq 4S_{\triangle BMC} \tag{3.53}$$

$$|CM|^2 + |DM|^2 \geq 2 \cdot |CM| \cdot |DM| \geq 4S_{\triangle CMD} \tag{3.54}$$

$$|DM|^2 + |AM|^2 \geq 2 \cdot |DM| \cdot |AM| \geq 4S_{\triangle DMA} \tag{3.55}$$

Pokud sečteme předcházející vztahy 5.8 až 3.55 dostáváme:

$$2(|AM|^2 + |BM|^2 + |CM|^2 + |DM|^2) \geq 4S_{ABCD}$$

Ze zadání víme, že $|AM|^2 + |BM|^2 + |CM|^2 + |DM|^2 = 2$ a to dosadíme do předchozí nerovnosti:

$$2 \cdot 2 \geq 4S_{ABCD}$$

$$S_{ABCD} \leq 1 \tag{3.56}$$

Dále se zaměříme na obsah čtyřúhelníku $ABCD$. Podle známého vzorce pro obsah tečnového čtyřúhelníku:

$$S = R \cdot s,$$

kde R je poloměr kružnice vepsané, který podle zadání je $\frac{1}{2}$. A tedy:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot s \tag{3.57}$$

Teď využijeme výše zmíněný vztah $s \geq 4R$ a nejprve ho vydělíme 2:

$$s \geq 4R$$
$$\frac{1}{2}s \geq 2R$$

Dále ho dosadíme do předchozí rovnosti 3.57:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot s \geq 2R$$

dosadíme za R zadanou hodnotu $\frac{1}{2}$ a za využijeme 3.56:

$$1 \geq S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot s \geq 2 \cdot \frac{1}{2}$$
$$1 \geq S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot s \geq 1$$

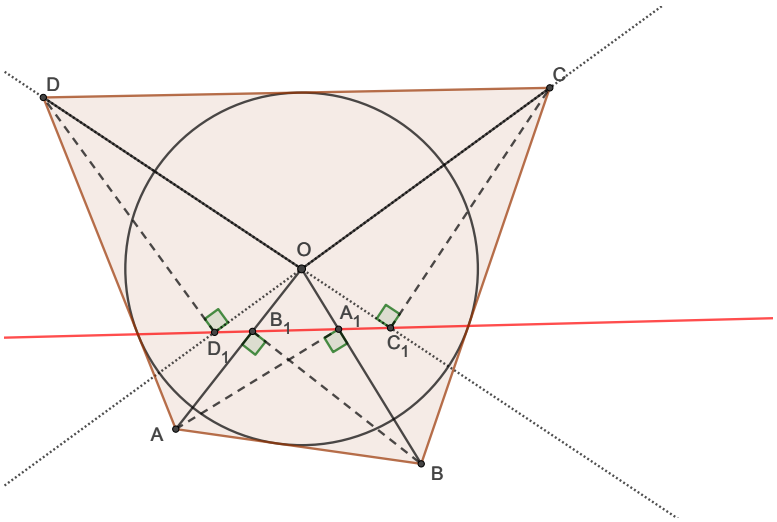
A proto:

$$S_{ABCD} = 1$$
$$s = 2$$

Nyní opět dosadíme do Jensenovy nerovnosti:

$$s \geq 4R$$
$$2 \geq 4 \cdot \frac{1}{2}$$
$$2 = 2$$

V kapitole 6 v úloze 22 se říkáme, že u Jensenovy nerovnosti nastává rovnost, pokud je mnohoúhelník pravidelný. A tím se dozvídáme, že náš čtyřúhelník je pravidelný. Tedy můžeme říct, že náš čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec s délkou strany 1.



Obrázek 3.37: Úloha 13 - zadání

Na závěr této kapitoly si předvedeme úlohu, která využívá souměrnosti podle osy úhlů.

Úloha 13 ((29), str. 44)**.** *Čtyřúhelník $ABCD$ je opsaný kružnici se středem O. Označme výšky z bodů A,B v trojúhelníku AOB jako AA_1,BB_1 a výšky z bodů C, D v trojúhelníku COD jako CC_1 a DD_1. Dokažte, že body A_1, B_1, C_1 a D_1 leží v přímce (Obrázek 3.37).*

Řešení. Abychom mohli dokázat toto tvrzení, musíme si ujasnit jednu vlastnost trojúhelníků. Pokud si označíme úhel AOB jako γ, tak o něm díky funkci kosinus můžeme v pravoúhlém trojúhelníku OBB_1 říct:

$$\cos\gamma = \frac{|B_1O|}{|BO|}$$

a podobně v pravoúhlém trojúhelníku OAA_1:

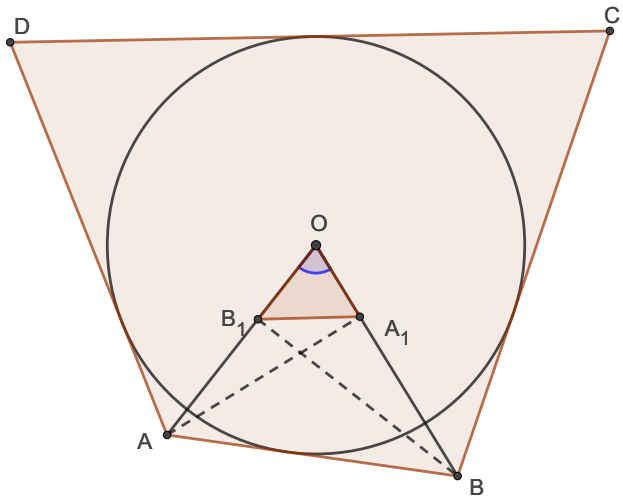
$$\cos\gamma = \frac{|A_1O|}{|AO|}$$

Z těchto dvou rovnic dostáváme následující:

$$\frac{|B_1O|}{|BO|} = \frac{|A_1O|}{|AO|}$$

A proto jsou si trojúhelníky ABO a A_1B_1O podobné (Obrázek 3.38), mají stejný poměr dvou odpovídajících si stran a úhel, který svírají je shodný. Analogicky jsou si podobné i trojúhelníky ABO a A_1BO_1, kde O_1 je pata výšky na stranu AB. Díky tomu, zjišťujeme, že:

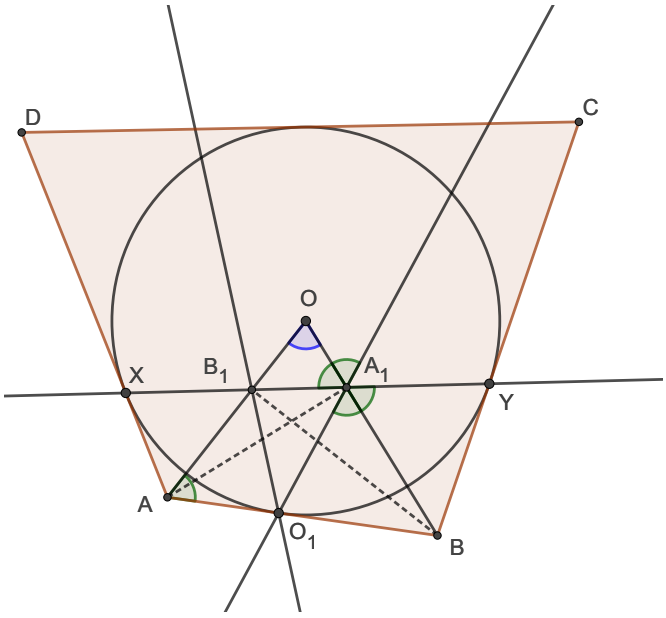
$$|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle OA_1B_1| = |\sphericalangle O_1A_1B|.$$



Obrázek 3.38: Trojúhelník A_1OB_1

Nyní obraťme svoji pozornost k úhlům u bodu A_1 (Obrázek 3.39). Přímka O_1A_1 svírá s přímkou BO úhel O_1A_1B, který je shodný s úhlem B_1A_1O, jenž svírají přímky B_1A_1 a OB. Díky těmto dvěma úhlům a jejich úhlům vrcholovým zjistíme, že přímka BO je osou úhlu, který svírají přímky O_1A_1 a B_1A_1 (toto platí pro všechny trojúhelníky).

Analogicky přímka AO je osou úhlu, který svírají přímky A_1B_1 a O_1B_1.



Obrázek 3.39: Osa úhlu B_1A_1O

A proto také můžeme říct, že přímky O_1B_1 a A_1B_1 jsou osově souměrné podle přímky AO. Přímka AO je ale osou úhlu BAD v tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$. Připomeňme si, že bod O_1 je bod dotyku kružnice vepsané tomuto čtyřúhelníku a strany AB, neboť přímka OO_1 svírá se stranou AB pravý úhel. Proto také se

bod O_1 zobrazí do bodu X dotyku úsečky AD s kružnicí vepsanou.
Jinými slovy: body X, B_1, A_1 leží v jedné přímce. Pokud bod dotyku strany BC a kružnice vepsané čtyřúhelníku $ABCD$ označíme jako Y, podobným postupem, který jsme pravě použili, zjišťujeme, že body Y, A_1, B_1 leží na stejné přímce. A proto body X, B_1, A_1, Y leží na té samé přímce.

Aplikujeme-li celý předešlý postup na trojúhelník DOC, dospějeme k tomu, že body D_1, C_1 leží na přímce XY. Z předcházejícího odstavce víme, že na této přímce leží i body A_1, B_1 a tím dostáváme, že body A_1,B_1,C_1 a D_1 leží na společné přímce XY.

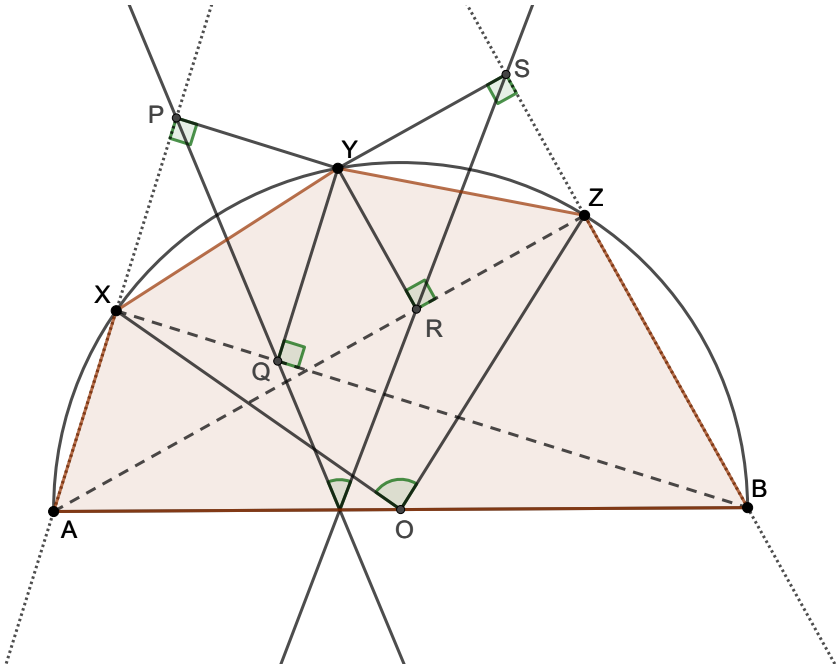
Kapitola 4

Pětiúhelníky

4.1 Tětivové pětiúhelníky

V následující kapitole budeme rozebírat úlohy z matematických soutěží. První úloha je ze soutěže USAMO 2010, úloha 1:

Úloha 14 ((33))**.** *Nechť $AXYZB$ je konvexní pětiúhelník vepsaný do poloviny kružnice s průměrem AB. Označme P, Q, R, S paty kolmice vedené z Y postupně na přímky AX, BX, AZ, BZ. Ukažte že velikost úhlu mezi přímkami PQ a RS je polovinou velikosti $\sphericalangle XOZ$, kde O je střed úsečky AB (Obrázek 4.1).*



Obrázek 4.1: Úloha 14 - zadání

Řešení. Pomocí vlastnosti obvodových úhlů příslušných k tětivám XY a YZ můžeme říct, že:

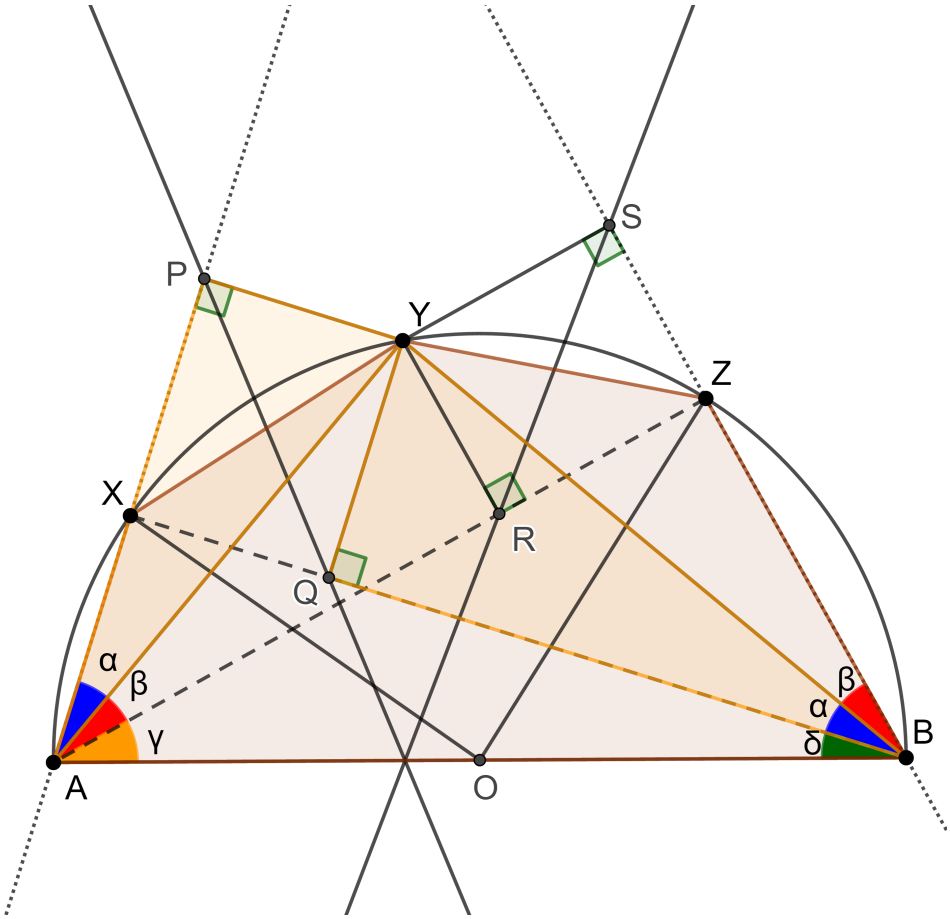
$$|\sphericalangle XAY| = |\sphericalangle XBY| = \alpha$$
$$|\sphericalangle YAZ| = |\sphericalangle YBZ| = \beta$$

Dále označíme úhly $\sphericalangle BAZ, \sphericalangle ABX$ jako γ, δ. Díky kolmosti přímek ze zadání PY a AX, QY a BX, zjistíme, že trojúhelníky BQY a APY jsou pravoúhlé s pravými úhlu u vrcholů P a Q. Navíc již víme, že:

$$|\sphericalangle XAY| = |\sphericalangle PAY| = |\sphericalangle XBY| = |\sphericalangle QBY| = \alpha$$

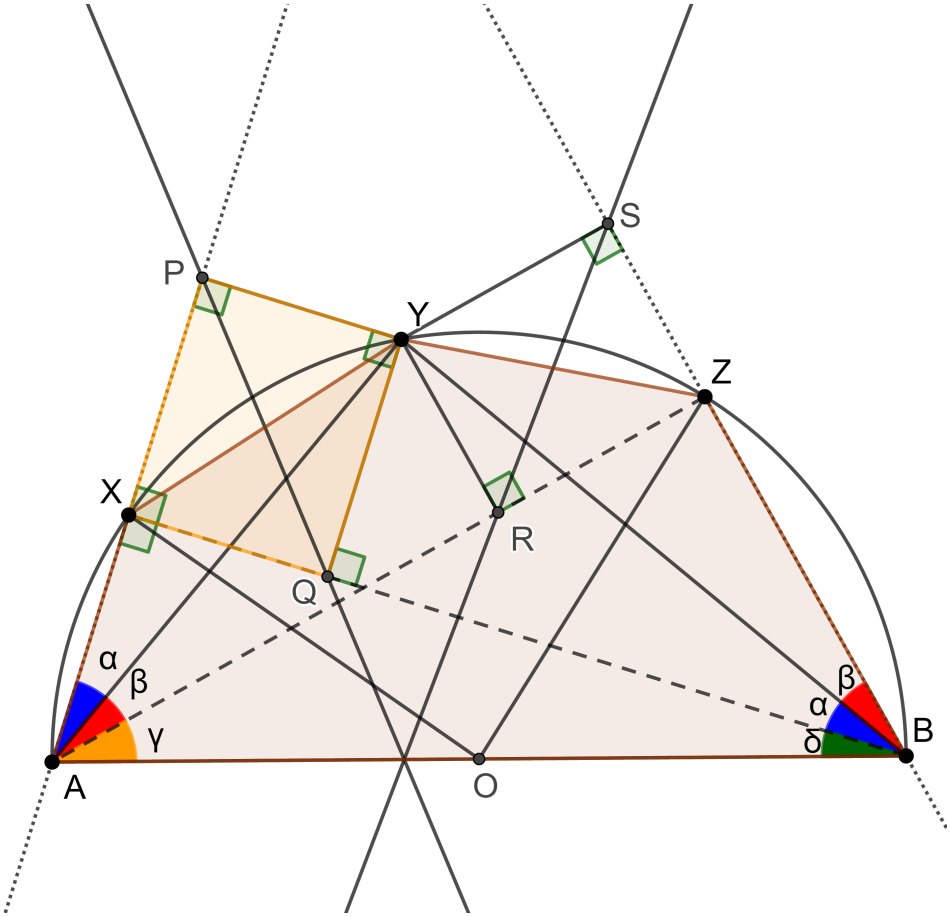
Tedy o $\triangle PAY$ a $\triangle QBY$ víme, že jsou si podobné podle věty uu (Obrázek 4.2). Platí tedy:

$$\frac{|PA|}{|QB|} = \frac{|PY|}{|QY|} = \frac{|AY|}{|BY|} \tag{4.1}$$



Obrázek 4.2: Podobné trojúhelníky PAY a QBY

Obraťme pozornost k čtyřúhelníku $PYQX$. Ze zadání víme, že úhly YPX a YQX jsou pravé. Díky Thaletově větě zjišťujeme že úhel AXB v trojúhelníku BAX je také pravý, tedy i jeho vedlejší úhel BXP, který je shodný s QXP je také pravý. Čtyřúhelník $PYQX$ má tedy tři pravé úhly, tedy je pravoúhelník a bez ostychu můžeme říct, že i úhel PYQ je pravý (Obrázek 4.3).



Obrázek 4.3: Pravoúhelník PYQX

Jestliže znovu využijeme Thaletovu větu, zjistíme, že i úhel AYB v trojúhelníku ABY je pravý.

Porovnejme nyní trojúhelníky PYQ a AYB. Vidíme, že oba dva jsou pravoúhlé a podle rovnosti 4.1 víme, že strany PY a QY, AY a BY jsou ve stejném poměru. Tedy s využitím věty sus, můžeme o trojúhelníkách AYB a PYQ říct, že jsou si podobné. Z toho nám plyne, že:

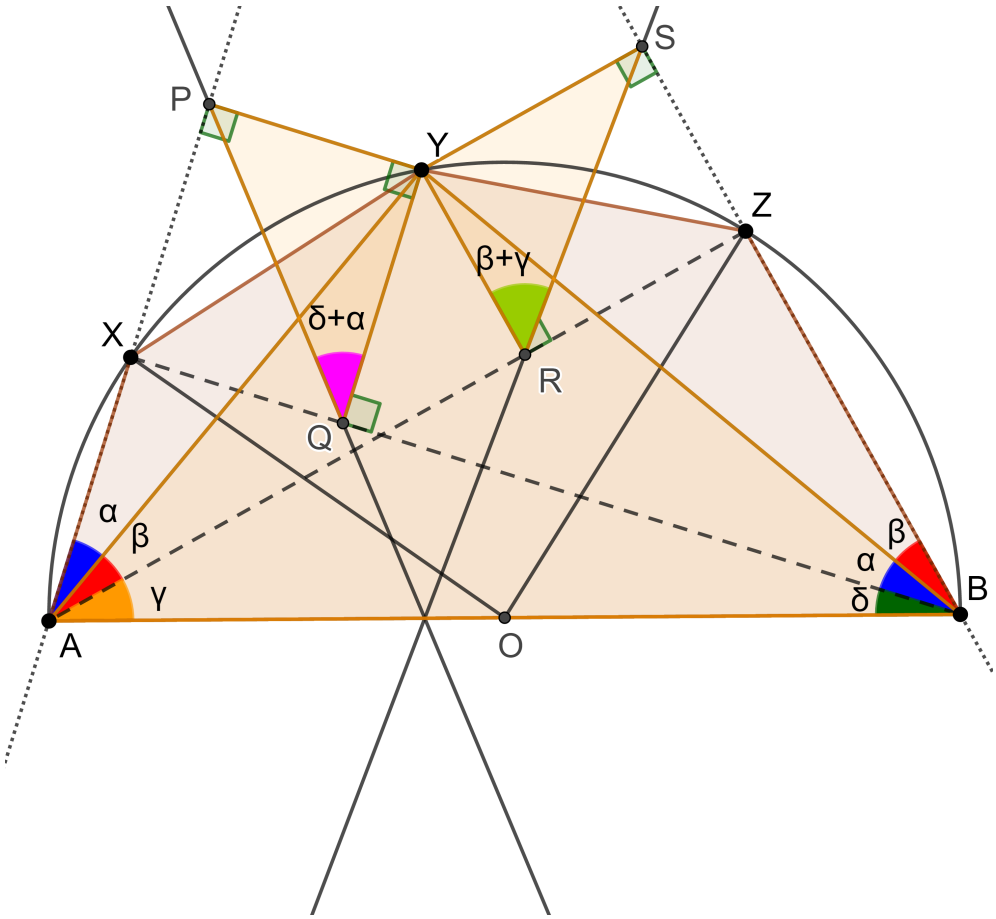
$$|\sphericalangle ABY| = |\sphericalangle PQY| = \delta + \alpha$$

Analogicky pro trojúhelníky RYS a AYB, platí:

$$\frac{|RY|}{|YS|} = \frac{|AY|}{|YB|}$$
$$|\sphericalangle RYS| = |\sphericalangle AYB|$$

Proto tedy trojúhelníky RYS a AYB jsou si podobné podle věty sus (Obrázek 4.4). Z toho nám opět plyne:

$$|\sphericalangle YRS| = |\sphericalangle YAB| = \beta + \gamma$$



Obrázek 4.4: Podobné trojúhelníky ABY, PQY a RSY

Jestliže z bodu Y spustíme kolmici k přímce AB a průsečík těchto přímek označíme jako L, můžeme říct, že body L, R a S leží v jedné přímce, neboť tato přímka se nazývá Simsovova přímka (viz. Věta 6) k bodu Y a trojúhelníku ABZ.

Také ale body L, Q a P jsou součástí Simsonovy přímky tentokrát ale z bodu Y k trojúhelníku ABX.

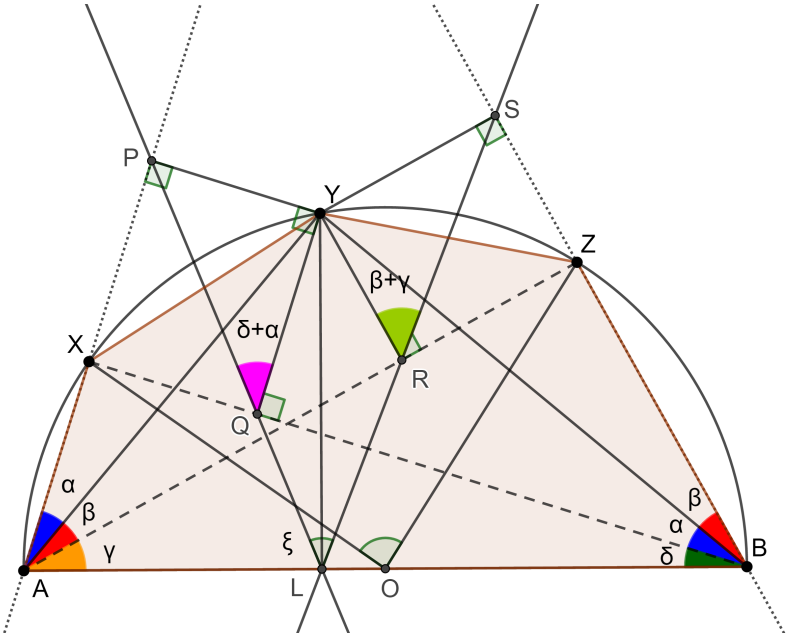
Tímto jsme ukázali, že přímky RS a QP se protínají v bodě L a navíc, že tento bod leží na přímce AB. Tedy kolmá projekce bodu Y na přímku AB je průsečík přímek RS a PQ. Úhel RLQ označíme jako ξ.

Nyní zaměříme svou pozornost na úhel QYR. Můžeme vidět, že úhel LYR je γ. Neboť kdybychom otočili přímku AZ o úhel γ kolem bodu A, přímka AZ a AB by nám splynula, tedy by splynula i kolmice na AB (YL) a kolmice na AZ (YR). Tedy úhel svírající tyto dvě kolmice musí být roven úhlu ZAB a to je γ.

Analogicky pro úhel QYL. Zjistíme tedy, že úhel QYL musí být roven úhlu XBA a to je δ.

Pro úhel QYR tedy platí (Obrázek 4.5):

$$|\sphericalangle QYR| = |\sphericalangle LYR| + |\sphericalangle QYL| = \gamma + \delta \tag{4.2}$$



Obrázek 4.5: Úhel ξ a XOZ

Úhly YQL a YRL jsou vedlejší úhly k PQY a SRY. a tedy:

$$|\sphericalangle LQY| = 180° - |\sphericalangle PQY| = 180° - \alpha - \delta \tag{4.3}$$
$$|\sphericalangle YRL| = 180° - |\sphericalangle SRY| = 180° - \beta - \gamma \tag{4.4}$$

Nyní se zaměříme na čtyřúhelník $LRYQ$ a využijeme věty 3. Navíc, dosadíme vztahy 4.2, 4.3 a 4.4.

$$|\sphericalangle RLQ| + |\sphericalangle LRY| + |\sphericalangle RYQ| + |\sphericalangle YQL| = 360°$$
$$\xi + (180° - \beta - \gamma) + (\gamma + \delta) + (180° - \alpha - \delta) = 360°$$
$$\xi - \alpha - \beta = 0$$
$$\xi = \alpha + \beta$$

Nakonec určíme velkost úhlu $\sphericalangle XOZ$. Můžeme si všimnout, že se jedná o součet středových úhlů $\sphericalangle XOY$ a $\sphericalangle YOZ$ vypínajícími se nad tětivami XY a YZ. V tomto důkazu jsme již označili obvodové úhly k tětivám XY a YZ jako α, β. Proto tedy:

$$|\sphericalangle XOZ| = |\sphericalangle XOY| + |\sphericalangle YOZ| = 2\alpha + 2\beta = 2 \cdot (\alpha + \beta) = 2 \cdot \xi$$

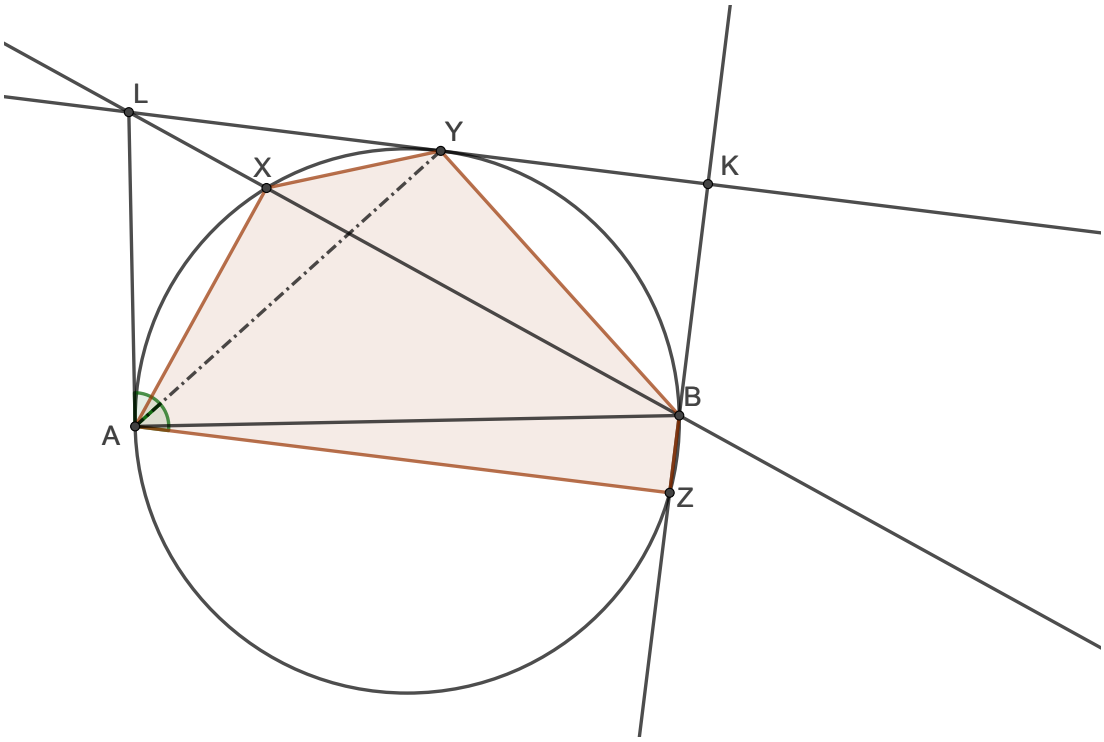
Tedy úhel ξ, který svírají přímky PQ a RS, je polovinou úhlu XOZ a tím je důkaz dokončen.

Další úlohu, kterou zde budu ukazovat je ze soutěže The online math open spring contest z roku 2014. Je spíše algebraického charakteru nežli geometrického, ale přesto je vhodná pro účel této práce.

Úloha 15 ((30), úloha 17)**.** *Nechť $AXYBZ$ je konvexní pětiúhelník vepsaný kružnici s průměrem AB. Tečna vedená z bodu Y protíná přímky BX a BZ v bodech L a K. Předpokládejme, že přímka AY je osou úhlu LAZ a $|AY|=|YZ|$. Pokud minimum možné hodnoty*

$$\frac{|AK|}{|AX|}+\left(\frac{|AL|}{|AB|}\right)^2$$

může být zapsána jako $\frac{m}{n}+\sqrt{k}$, kde m,n,k jsou kladná celá čísla taková, že největší společný násobek čísel m,n je jedna, vypočítejte hodnotu výrazu: $m+10n+100k$ (Obrázek 4.6).



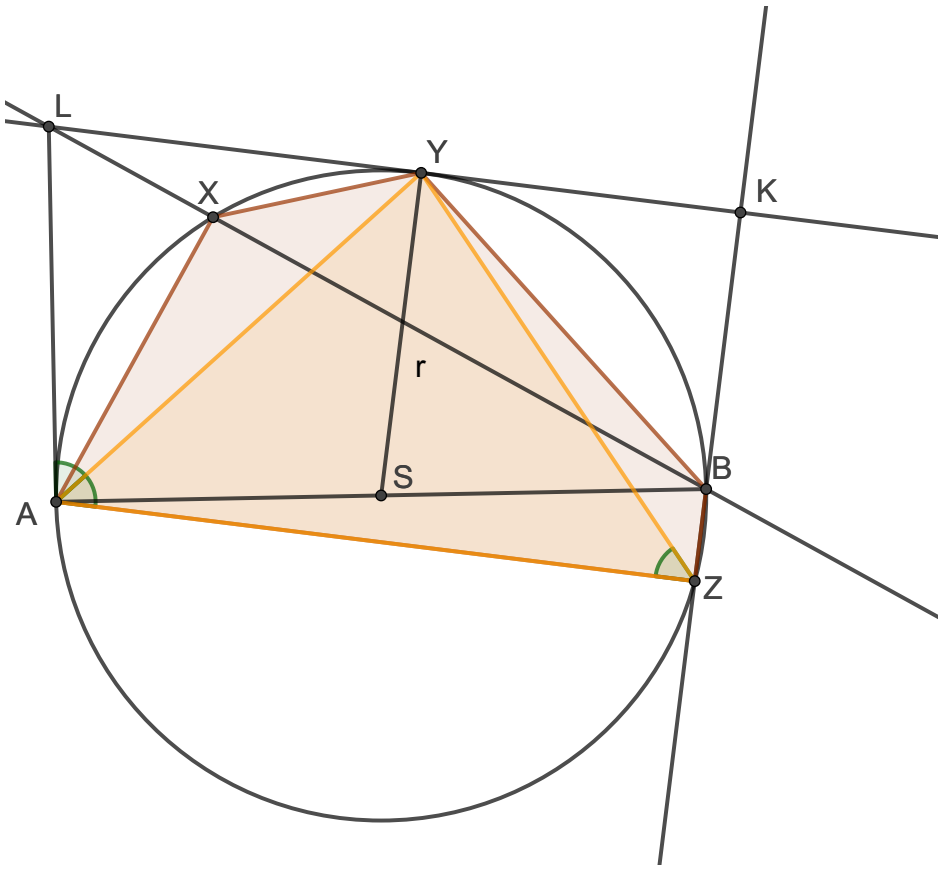
Obrázek 4.6: Úloha 15 - zadání

Řešení. Nejprve označíme střed úsečky AB (tedy i střed kružnice opsané) jako S. A poté vzdálenost $|SA|$ jako r.

Dále se podíváme podrobněji na trojúhelník AYZ. Ze zadání víme, že $|AY|=|YZ|$, proto tento trojúhelník je rovnoramenný se základnou AZ. Úhly při základně jsou také shodné a tedy $|\sphericalangle YAZ| = |\sphericalangle YZA|$. Ze zadání víme také, že přímka AY je osou úhlu LAZ, tedy: $|\sphericalangle YAL| = |\sphericalangle YAZ|$. Spolu s předchozí rovností dostáváme:

$$|\sphericalangle YZA| = |\sphericalangle ZAY| = |\sphericalangle YAL|$$

Protože víme, že úhly YZA a YAL, kde úhel YZA je obvodovým úhlem k tětivě YA, jsou shodné, vidíme, že LA je tečnou k naší kružnici opsané pětiúhelníku $ABCDE$ a úhel LAY je úsekovým úhlem (Obrázek 4.7).



Obrázek 4.7: Rovnoramenný trojúhelník AYZ

Dalším krokem našeho důkazu je přesvědčit se, že trojúhelníky LSY a YBK jsou si podobné.

Začneme s tím, že svou pozornost přesuneme k čtyřúhelníku $ASYL$. Protože víme, že body A,Y jsou body dotyku tečen LA, LK a kružnice opsané a úsečky SA a SY vytínají její poloměr, můžeme říct, že úhly LAS a LYS jsou pravé. Čtyřúhelník $ASYL$ je tedy tětivový. Dále díky souměrnosti tečen ke kružnici podle úhlu, který svírají, víme, že $|AL|= |LY|$. Tuto vzdálenost označme jako h. Jediné dva čtyřúhelníky, kteří splňují tyto dvě vlastnosti jsou čtverec a deltoid. U obou dvou by však přímka LS půlila úhel ASY. Proto můžeme napsat:

$$|\sphericalangle ASL| = |\sphericalangle LSY|$$

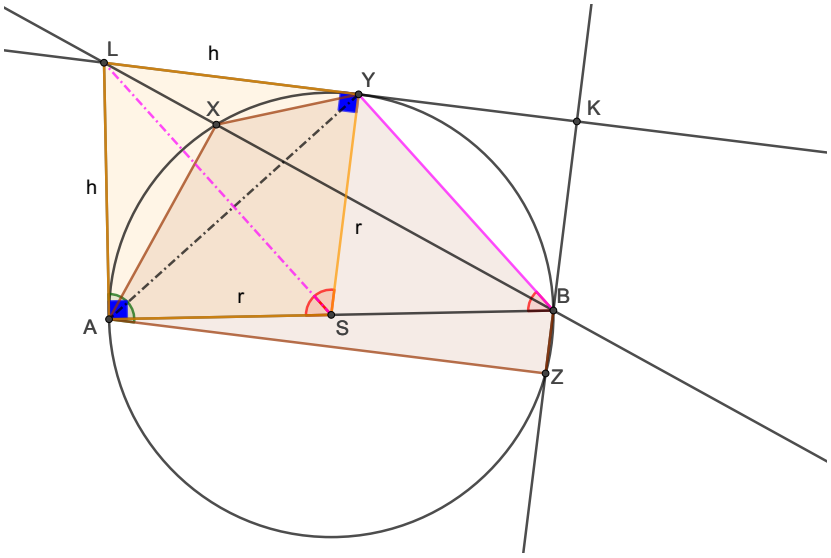
Pokud se znovu podíváme na úsečku AY jako na tětivu, zjistíme, že středový úhel k ní příslušný má velikost:

$$|\sphericalangle ASY| = |\sphericalangle ASL| + |\sphericalangle LSY| = 2 \cdot |\sphericalangle ASL| \tag{4.5}$$

Využijeme-li rovnost 4.5, můžeme velikost obvodového úhlu tětivy AY zapsat jako:

$$|\sphericalangle ABY| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle ASY| = |\sphericalangle ASL|$$

Přímky SL a BY jsou tedy rovnoběžné (Obrázek 4.8).



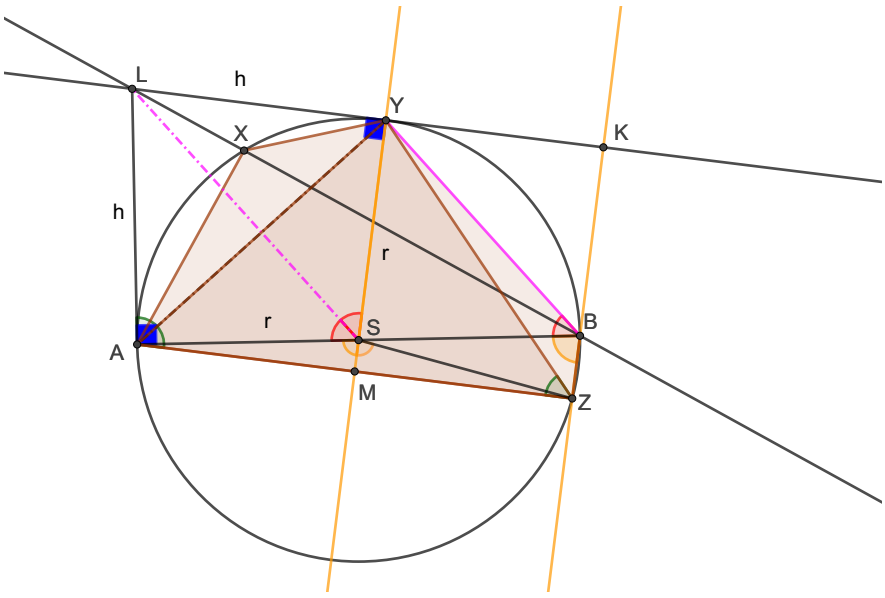
Obrázek 4.8: Čtyřúhelník $ASYL$

Znovu se vrátíme k trojúhelníku AYZ. Protože je rovnoramenný, přímka SY půlí tento trojúhelník na dva shodné trojúhelníky. Tedy půlí i úhel ASZ. Označme průsečík přímek YS a AZ jako M

$$|\sphericalangle ASM| = |\sphericalangle MSZ|$$
$$|\sphericalangle ASZ| = |\sphericalangle ASM| + |\sphericalangle MSZ| = 2 \cdot |\sphericalangle ASM|$$

Pokud se dále zaměříme na tětivu AZ, zjistíme, že její středový úhel je právě úhel ASZ a její obvodový úhel ABZ má tedy velikost:

$$|\sphericalangle ABZ| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle ASZ| = |\sphericalangle ASM|$$



Obrázek 4.9: Rovnoběžné přímky YS a BZ

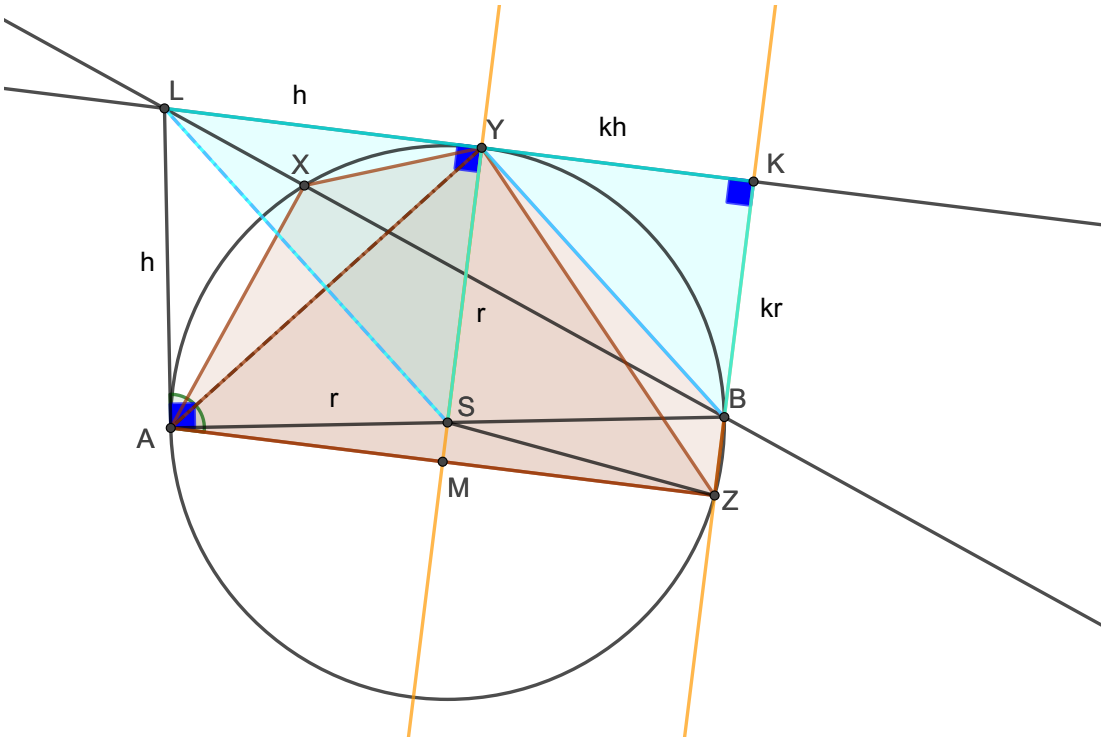
Ukázali jsme si, že přímky YS a BZ jsou tedy rovnoběžné (Obrázek 4.9).

Z toho, že přímky YS a BK jsou rovnoběžné a stejně tak i přímky LS a YB, můžeme usoudit, že trojúhelníky LSY a YBK jsou si podobné. Označme poměr jejich stran jako k a dostaneme (Obrázek 4.10):

$$\begin{aligned} \frac{|KY|}{|YL|} &= k \\ \frac{|KY|}{h} &= k \\ |KY| &= kh \end{aligned} \tag{4.6}$$

a

$$\begin{aligned} \frac{|BK|}{|SY|} &= k \\ \frac{|BK|}{r} &= k \\ |BK| &= rk \end{aligned} \tag{4.7}$$



Obrázek 4.10: Podobné trojúhelníky LSY a YBK

V další části důkazu se již zaměříme na poměr $\frac{|AK|}{|AX|}$. Proto, abychom ho mohli lépe vyjádřit, obrátíme svou pozornost k trojúhelníku BLA. Již víme, že je pravoúhlý, proto můžeme využít Pythagorovu větu:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$|BL|^2 = |AL|^2 + |AB|^2$$
$$|BL|^2 = h^2 + 4r^2 \tag{4.8}$$
$$|BL| = \sqrt{h^2 + 4r^2} \tag{4.9}$$

Obsah tohoto trojúhelníku můžeme vyjádřit několika způsoby. Ten první je následující, rovněž do něj můžeme rovnou dosadit naší označenou stranu h a poloměr r:

$$S = \frac{|AL| \cdot |AB|}{2}$$
$$S = \frac{h \cdot 2r}{2}$$
$$S = hr \tag{4.10}$$

Druhý způsob je pomocí vzorce pro obsah trojúhelníku pomocí výšky na jednu jeho stranu. Využijeme ho, abychom zjistili délku úsečky AX, neboť tato úsečka je kolmá na stranu BL. (Bod X leží na Thaletově kružnici s průměrem AB.) Samozřejmě do něj dosadíme vztah 4.10 a 4.9.

$$S = \frac{|BL| \cdot |AX|}{2}$$
$$hr = \frac{\sqrt{h^2 + 4r^2} \cdot |AX|}{2}$$
$$|AX| = \frac{2hr}{\sqrt{h^2 + 4r^2}} \tag{4.11}$$

Dále si povšimneme, že díky podobnosti trojúhelníků LSY a YBK, vidíme že úhly LYS a YKB jsou shodné a oba dva jsou tedy pravé. Když se podíváme na čtyřúhelník $LABK$, zjistíme, že je taktéž tětivový (úhly LAB a YKB jsou oba dva pravé a dávají dohromady 180°). Můžeme tedy na něj použít Ptolemaiou větu (viz. Věta 7) a dosadit vztahy 4.9, 4.7 a 4.6. Také si vzpomeneme, že délku úseček AL a LY jsme označili jako h a dále poloměr jako r.

$$ef = ac + bd$$
$$|AK| \cdot |BL| = |AL| \cdot |BK| + |AB| \cdot |LK|$$
$$|AK| \cdot \sqrt{h^2 + 4r^2} = hkr + 2r(h + kh)$$
$$|AK| \cdot \sqrt{h^2 + 4r^2} = hkr + 2rh(1 + k)$$
$$|AK| \cdot \sqrt{h^2 + 4r^2} = hr(3k + 2)$$
$$|AK| = \frac{hr(3k + 2)}{\sqrt{h^2 + 4r^2}} \tag{4.12}$$

Do poměru $\frac{|AK|}{|AX|}$ můžeme dosadit vztahy 4.12 a 4.11:

$$\frac{|AK|}{|AX|} = \frac{\frac{hr(3k+2)}{\sqrt{h^2+4r^2}}}{\frac{2hr}{\sqrt{h^2+4r^2}}} = \frac{hr(3k+2)}{2hr} = \frac{3k+2}{2} \tag{4.13}$$

Dále se budeme zajímat o poměr $\frac{|AL|}{|AB|}$. Můžeme o něm pomocí našeho značení říct:

$$\frac{|AL|}{|AB|} = \frac{h}{2r} \tag{4.14}$$

Výraz v zadání můžeme tedy přepsat pomocí našich vztahů 4.13 a 4.14 jako:

$$\frac{|AK|}{|AX|} + \left(\frac{|AL|}{|AB|}\right)^2 = \frac{3k+2}{2} + \left(\frac{h}{2r}\right)^2 \tag{4.15}$$

Pokusíme se teď vyjádřit k v závislosti pouze na h a r. Protože trojúhelník LBK je také pravoúhlý, můžeme opět využít Pythagorovu větu:

$$\begin{aligned} |LB|^2 &= |KL|^2 + |KB|^2 \\ |LB|^2 &= (h+kh)^2 + k^2r^2 \\ |LB|^2 &= h^2(k+1)^2 + k^2r^2 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Protože jsme ale již vyjádřili hodnotu výrazu $|LB|^2$ (viz. 4.8), můžeme pomocí 4.8 a 4.16 napsat následující rovnici:

$$\begin{aligned} h^2 + 4r^2 &= h^2(k+1)^2 + k^2r^2 \\ h^2 + 4r^2 &= h^2k^2 + 2h^2k + h^2 + k^2r^2 \\ 4r^2 - k^2r^2 &= h^2k(k+2) \\ r^2(4-k^2) &= h^2k(k+2) \\ r^2(2-k)(2+k) &= h^2k(k+2) \\ r^2(2-k) &= h^2k \\ k &= \frac{2r^2}{h^2+r^2} \end{aligned}$$

A toho teď využijeme v našem výrazu 4.15:

$$\frac{|AK|}{|AX|} + \left(\frac{|AL|}{|AB|}\right)^2 = \frac{3k+2}{2} + \left(\frac{h}{2r}\right)^2 = \frac{3\frac{2r^2}{h^2+r^2}+2}{2} + \frac{h^2}{4r^2} = \frac{3r^2}{h^2+r^2} + 1 + \frac{h^2}{4r^2} =$$
$$= \frac{3}{1+\frac{h^2}{r^2}} + 1 + \frac{h^2}{4r^2}$$

Pokud zvolíme $x = \frac{h}{r}$ dostáváme:

$$\frac{|AK|}{|AX|} + \left(\frac{|AL|}{|AB|}\right)^2 = \frac{3}{1+x^2} + 1 + \frac{x^2}{4}$$

Tento výraz budeme dále upravovat:

$$\frac{3}{1+x^2}+1+\frac{x^2}{4}=\frac{12+4(1+x^2)+x^2(1+x^2)}{4(1+x^2)}=\frac{12+4+4x^2+x^2+x^4}{4(1+x^2)}=$$
$$=\frac{3+3x^2+12+1+2x^2+x^4}{4(1+x^2)}=\frac{3+3x^2}{4(1+x^2)}+\frac{12}{4(1+x^2)}+\frac{1+2x^2+x^4}{4(1+x^2)}=$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{4}$$

Dostáváme tedy:

$$\frac{|AK|}{|AX|}+\left(\frac{|AL|}{|AB|}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{3}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{4}$$

Dále můžeme použít substituci $t=1+x^2$ a protože $1+x^2$ nabývá pouze kladných hodnot, můžeme omezit t na interval $(0,\infty)$.

$$\frac{|AK|}{|AX|}+\left(\frac{|AL|}{|AB|}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{3}{t}+\frac{t}{4} \tag{4.17}$$

Zaměřme se na výraz $\frac{3}{t}+\frac{t}{4}$ a uvažujme o něm jako o funkci. Můžeme jej rozdělit na dva sčítance a dostáváme dvě funkce, které umíme zakreslit:

$$f(t)=\frac{3}{t}$$
$$g(t)=\frac{t}{4}$$

Podle zadání máme najít minimum tohoto součtu. Nalezneme průsečík P těchto funkcí:

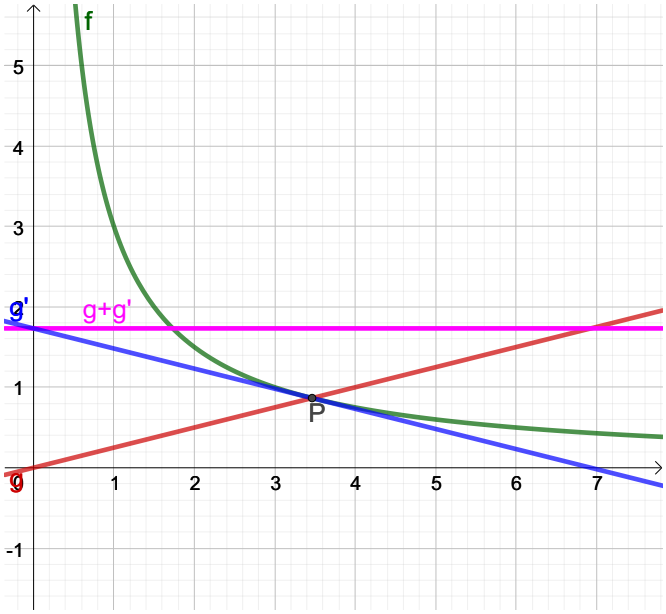
$$\frac{3}{t}=\frac{t}{4}$$
$$t=2\sqrt{3}$$
$$P=\left[2\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

A tímto bodem povedeme funkci g', která bude mít opačný koeficient než funkce g.

$$g'(t)=-\frac{t}{4}+\sqrt{3}$$

Pokud sečteme funkce g a g' dostáváme konstantní funkci $g+g'$: $y=\sqrt{3}$ (Obrázek 4.11). Obraťme svou pozornost na funkce f a g'. Pokud je porovnáme na intervalu $(0,\infty)$ dostáváme:

$$-\frac{t}{4}+\sqrt{3}\leq\frac{3}{t}$$
$$-\frac{t^2}{4}+\sqrt{3}t-3\leq 0$$
$$-\left(\frac{t}{2}-\sqrt{3}\right)^2\leq 0$$



Obrázek 4.11: Funkce f,g,g' a $g+g'$

A to je vždy pravdivé. Tedy funkce f je vždy větší, nebo rovna funkci g' na intervalu $(0,\infty)$. Tedy hodnota součtu funkcí $f+g$, bude vždy větší nebo rovna hodnotě součtu funkcí $g+g'$. Tedy dostáváme, že minimum součtu funkcí $f+g$ je hodnota součtu funkcí $g+g'$ a to je $\sqrt{3}$.

Tedy výraz 4.17, můžeme přepsat jako:

$$\frac{|AK|}{|AX|}+\left(\frac{|AL|}{|AB|}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{3}{t}+\frac{t}{4}\geq\frac{3}{4}+\sqrt{3}$$

Hledaná čísla proto mají hodnoty: $m=3, n=4, k=3$. A proto zadaný výraz má hodnotu:

$$100m+10n+k=100\cdot 3+10\cdot 4+3=343$$

4.2 Tečnové pětiúhelníky

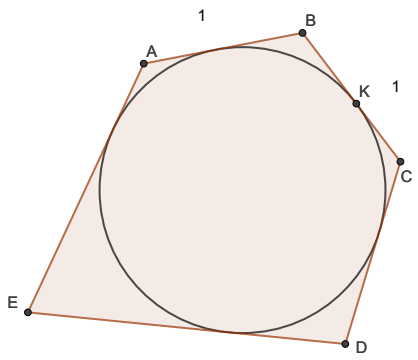
Další velmi zajímavá úloha pochází od Viktora Prasolova:

Úloha 16 ((13), str. 146)**.** *Pětiúhelník $ABCDE$, jehož délky stran jsou celočíselné a $|AB|=|BC|=1$, je opsaný kružnici. Najděte délku úsečky BK, kde K je bod dotyku strany BC a kružnice (Obrázek 4.12).*

Řešení. Délka úsečky BK určitě nebude celočíselná, protože bod K má náležet úsečce BC, kde $|BC|=1$. Proto označme $|BK|=x$. Dále označme body dotyku kružnice a stran AB, CD, DE a EA jako J, L, M a N.

Díky souměrnosti tečen ke kružnici ze společného bodu podle osy úhlu, který tyto dvě tečny svírají, víme, že:

$$|BK|=|BJ|=x$$



Obrázek 4.12: Úloha 16 - zadání

Dále označme $|AJ|$ jako y. Ze zadání je nám jasné, že:

$$|AJ| + |JB| = |AB| = 1$$
$$y + x = 1$$

Opět ze souměrnosti tečen známe:

$$|AJ| = |AN| = y$$

Aby strana AE měla celočíselnou délku, musí úsečka EN měřit $k+x$, kde $k \in N_0$. A tedy:

$$|AE| = |AN| + |NE| = y + (k + x) = y + x + k = 1 + k$$

Dále opět ze souměrnosti tečen víme:

$$|EN| = |EM| = k + x$$

Dále DM musí měřit $l + y$, kde $l \in N_0$. Potom:

$$|ED| = |EM| + |MD| = (k + x) + (l + y) = (x + y) + (k + l) = 1 + k + l$$

číslo $1 + k + l$ je jistě přirozené číslo, neboť součet přirozených čísel je vždy číslo přirozené.

V neposlední řadě se zaměříme na stranu DC. Opět pomocí souměrnosti tečen můžeme říct:

$$|DM| = |DL| = l + y$$

Právě proto je $|CL| = m + x$, kde $m \in N_0$, pak:

$$|DC| = |DL| + |LC| = (l + y) + (m + x) = (x + y) + (l + m) = 1 + l + m$$

kde opět číslo $1 + l + m$ je přirozené.

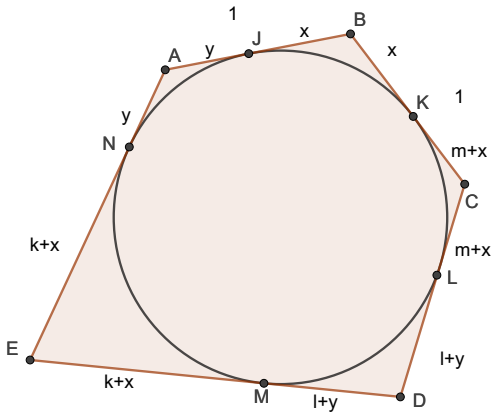
Na závěr se dostáváme ke straně BC. Podle souměrnosti tečen víme, že $|CK| = m + x$, proto:

$$|BC| = |BK| + |KC| = x + (m + x) = 2x + m$$

Máme zadáno, že velikost strany BC je rovna 1. Tedy:

$$|BC| = 1$$
$$2x + m = 1$$

Podívejme se teď na Obrázek 4.13. Neboť číslo m má být celé číslo, musí být



Obrázek 4.13: Délky stran

rovno 1, nebo 0. Jinak (dle předpokladu, že $x > 0$) by rovnice neměla smysl.

Pokud $m = 1$, x je rovno 0. To však nemůže nastat, protože by bod dotyku splýval s vrcholem pětiúhelníku a kružnice by pak nebyla tomuto pětiúhelníku vepsaná.

Proto $m = 0$ a dostáváme:

$$x = \frac{1}{2}$$

Tedy velikost úsečky BK je vždy $\frac{1}{2}$.

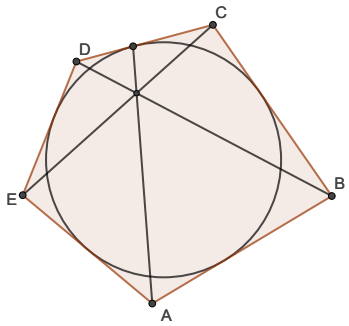
Dále si uvedeme jednu vlastnost tečnových pětiúhelníků.

Věta 9 ((28))**.** *V každém tečnovém pětiúhelníku přímka spojující vrchol a bod dotyku s kružnicí na opačné straně a dvě úhlopříčky procházející koncovými body stran, které jsou sousední k danému vrcholu, se protínají v jednom bodě. (Obrázek 4.14)*

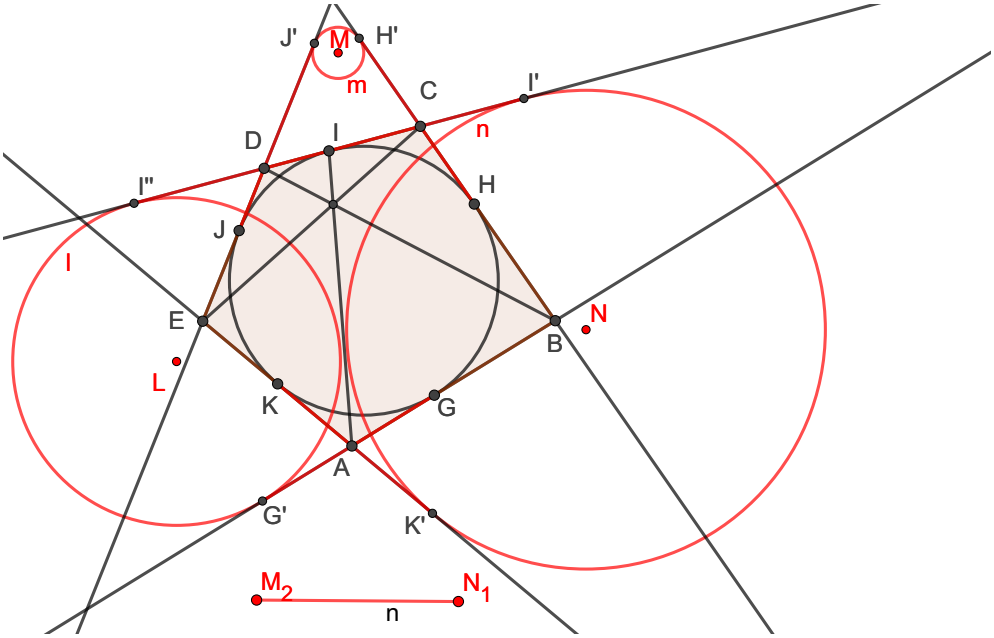
Důkaz. Abychom to dokázali, musíme si zvolit úsečku MN o délce n. Tu naneseme podle Obrázku 4.15 na tečny k naší kružnici v bodech dotyku G, H, I, J, K s pětiúhelníkem $ABCDE$. Vzniknou nám pak úsečky:

$$|GG'| = |HH'| = |II'| = |JJ'| = |KK'| = |II''| = n$$

Dále narýsujeme kružnici l se středem L takovou, aby přímky GG' a II'' byly jejími tečnami a body G' a I'' byly body dotyku. Podobně i kružnice m,n se středy M,N takové, že dvojice přímek HH' a JJ', II' a KK' jsou jejich tečny s body dotyku H' a J', I' a K' (Obrázek 4.15).



Obrázek 4.14: Tečnový pětiúhelník



Obrázek 4.15: Kružnice l,m,n

Zaměřme svou pozornost nyní na úhlopříčku DB. Díky osové souměrnosti tečen z bodu D ke kružnici vepsané víme, že úsečky DI a DJ jsou shodné (body I a J jsou body dotyku kružnice vepsané a stran DC a DE našeho pětiúhelníku). A protože úsečky JJ' a II'' mají stejnou délku n a bod D je jejich průsečíkem, můžeme říct:

$$|DI''| = n - |DI| = n - |DJ| = |DJ'|$$

Připomeňme si, že body J' a I'' jsou body dotyku kružnic m a l a tečen DC a DE. Tedy bod D má stejnou mocnost k těmto kružnicím a leží tedy na jejich chordále. Dále opět díky osové souměrnosti tečen z bodu B ke kružnici vepsané, můžeme prohlásit, že úsečky BH a BG jsou shodné. Úsečky HH' a GG' mají stejnou velikost a to n. Z konstrukce víme, že tyto dvě úsečky nemají společný průsečík. A proto:

$$|BG'| = |BG| + |GG'| = |BH| + |HH'| = |BH'|,$$

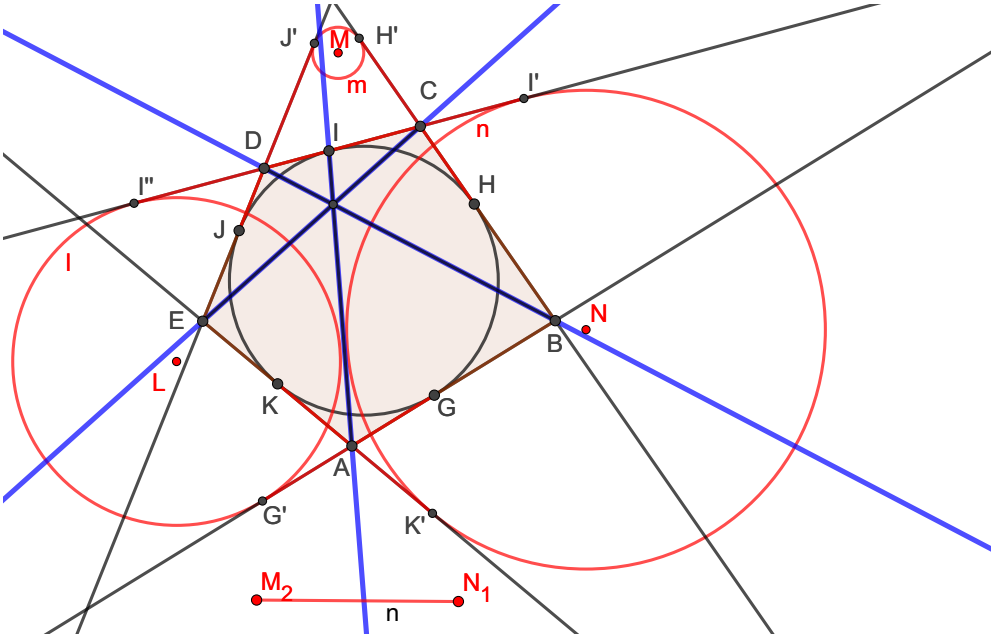
kde body G' a H' jsou opět body dotyku kružnic l a m a tečen AB a CB. Tedy bod B také leží na chordále. Protože na této chordále leží i bod D, zjišťujeme, že úhlopříčka BD splývá s touto chordálou.

Analogicky pro úhlopříčku CE a kružnice m a n.

Dále se budeme zajímat o úsečku AI. Podobně jako v předchozích případech pomocí souměrnosti tečen kružnice vepsané z bodu A a shodnosti úseček GG' a KK', které se protínají, získáme:

$$|AG'| = |GG'| - |AG| = |KK'| - |AK| = |AK'|$$

Tedy opět dostáváme, že bod A leží na chordále kružnic n a l. Podíváme se nyní na bod I. Protože úsečky II'' a II' jsou shodné, ihned vidíme, že i bod I leží na chordále těchto kružnic. Tedy i úsečka AI splývá s chordálou. Víme, že se tyto chordály protínají v potenčním bodě (viz. Definice 7). Tedy i úhlopříčky zadaného pětiúhelníku se protnou v jednom bodě (Obrázek 4.16). □



Obrázek 4.16: Chordály ke kružnicím l,m,n

Poznámka. Mohli bychom se na tuto vlastnost dívat i jako na důsledek Brianchonovy věty 13 uvedené v následující kapitole. Kdyby v šestiúhelníku splynuli dva vrcholy dohromady, vznikne nám tak jeden bod dotyku kružnice vepsané a náš pětiúhelník $ABCDE$. I proto je důkaz Brianchonovy věty a této vlastnosti téměř identický. Uvádíme ho však pro lepší pochopení dané látky.

Kapitola 5

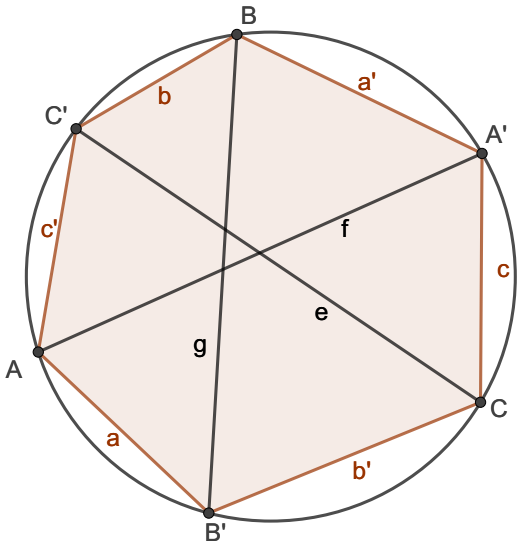
Šestiúhelníky

5.1 Tětivové šestiúhelníky

Uvedeme si rozšíření Ptolemaiovy věty (Věta 7) pro šestiúhelníky.

Věta 10 ((6),str. 577)**.** *(Fuhrmannova) Nechť $AB'CA'BC'$ je tětivový šestiúhelník. Označme délky jeho stran a úhlopříček AA', BB', CC' ve shodně s obrázkem (Obrázek 5.1). Pak platí rovnost:*

$$abc + a'b'c' + aa'e + bb'f + cc'g = efg.$$



Obrázek 5.1: Fuhrmannova věta

Důkaz. Tato věta je zobecněním Ptolemaiovy věty. Budeme ji proto využívat i pro tento důkaz.

Nejprve se zaměříme na tětivový čtyřúhelník $B'CBC'$, který je součástí našeho šestiúhelníku. Použijeme výše zmíněnou Ptolemaiovu větu a dostaneme:

$$e \cdot g = b \cdot b' + |BC| \cdot |B'C'| \tag{5.1}$$

Podobně pro tětivové čtyřúhelníky $ACA'B$, $AB'CC'$ a $AB'BC'$:

$$f \cdot |BC| = a' \cdot |AC| + c \cdot |AB| \tag{5.2}$$
$$|AC| \cdot |B'C'| = c' \cdot b' + a \cdot e \tag{5.3}$$
$$|AB| \cdot |B'C'| = a \cdot b + c' \cdot g \tag{5.4}$$

Vezmeme-li rovnici 5.1 a vynásobíme ji délkou strany f, dostáváme:

$$e \cdot g \cdot f = b \cdot b' \cdot f + |BC| \cdot |B'C'| \cdot f$$

Dosadíme-li v tuto chvíli rovnici 5.2 za výraz $|BC| \cdot f$ v předchozí rovnici, získáme:

$$e \cdot g \cdot f = b \cdot b' \cdot f + |B'C'| \cdot (a' \cdot |AC| + c \cdot |AB|)$$

Po upravení:

$$e \cdot g \cdot f = b \cdot b' \cdot f + |B'C'| \cdot a' \cdot |AC| + |B'C'| \cdot c \cdot |AB|$$

Nyní za výraz $|B'C'| \cdot |AC|$ ve druhém sčítanci předchozí rovnice dosadíme rovnici 5.3:

$$e \cdot g \cdot f = b \cdot b' \cdot f + a' \cdot (c' \cdot b' + a \cdot e) + |B'C'| \cdot c \cdot |AB|$$
$$e \cdot g \cdot f = b \cdot b' \cdot f + a' \cdot c' \cdot b' + a' \cdot a \cdot e + |B'C'| \cdot c \cdot |AB|$$

Na závěr výraz $|B'C'| \cdot |AB|$ v předchozí rovnici nahradíme rovnicí 5.4:

$$e \cdot g \cdot f = b \cdot b' \cdot f + a' \cdot c' \cdot b' + a' \cdot a \cdot e + c \cdot (a \cdot b + c' \cdot g)$$
$$e \cdot g \cdot f = b \cdot b' \cdot f + a' \cdot c' \cdot b' + a' \cdot a \cdot e + c \cdot a \cdot b + c \cdot c' \cdot g$$

Získali jsme Fuhrmannovu větu. Tím je důkaz dokončen. □

V další úloze se budeme zajímat o poměry stran šestiúhelníku.

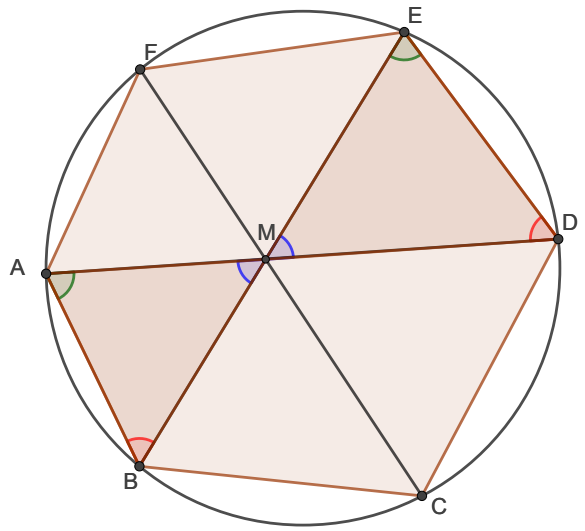
Úloha 17 ((13), str.41)**.** *Úhlopříčky AD, BE a CF tětivového šestiúhelníku $ABCDEF$ se protínají v jednom bodě. Dokažte:*

$$|AB| \cdot |CD| \cdot |EF| = |BC| \cdot |DE| \cdot |AF|.$$

Řešení. Průsečík úhlopříček AD, BE a CF označíme jako M.

Zaměříme se na trojúhelníky ABM a EMD. Víme, že úhly AMB a EDM jsou podobné (vrcholové úhly). Také víme, že úhly DEM a BAM jsou shodné. ($\sphericalangle DEM = \sphericalangle DEB$ a $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BAD$ jsou obvodové úhly ke společné tětivě BD). Proto jsou tyto trojúhelníky podobné (Obrázek 5.2). Můžeme tedy zapsat:

$$\frac{|AM|}{|EM|} = \frac{|BM|}{|DM|} = \frac{|AB|}{|ED|}. \tag{5.5}$$



Obrázek 5.2: Podobné trojúhelníky ABM a EDM

Analogicky dvojice trojúhelníků DMC a FMA, BMC a FME jsou také podobné a proto platí:

$$\frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|DM|}{|FM|} = \frac{|CD|}{|FA|} \tag{5.6}$$

$$\frac{|EM|}{|CM|} = \frac{|FM|}{|BM|} = \frac{|EF|}{|CB|} \tag{5.7}$$

Dále vezmeme poměry $\frac{|AB|}{|ED|}$, $\frac{|CD|}{|FA|}$ a $\frac{|EF|}{|CB|}$ umocníme je všechny na druhou a vynásobíme mezi sebou. Dostáváme výraz:

$$\frac{|AB|^2}{|ED|^2} \cdot \frac{|CD|^2}{|FA|^2} \cdot \frac{|EF|^2}{|CB|^2}$$

Nyní díky vztahům 5.5, 5.6 a 5.7 dostáváme:

$$\frac{|AB|^2}{|ED|^2} \cdot \frac{|CD|^2}{|FA|^2} \cdot \frac{|EF|^2}{|CB|^2} = \frac{|AM|}{|EM|} \cdot \frac{|BM|}{|DM|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} \cdot \frac{|DM|}{|FM|} \cdot \frac{|EM|}{|CM|} \cdot \frac{|FM|}{|BM|} = 1$$

Dostáváme tedy rovnici

$$\frac{|AB|^2}{|ED|^2} \cdot \frac{|CD|^2}{|FA|^2} \cdot \frac{|EF|^2}{|CB|^2} = 1$$

kterou můžeme bezostyšně odmocnit:

$$\frac{|AB|}{|ED|} \cdot \frac{|CD|}{|FA|} \cdot \frac{|EF|}{|CB|} = 1$$

a na závěr vynásobit jmenovateli.

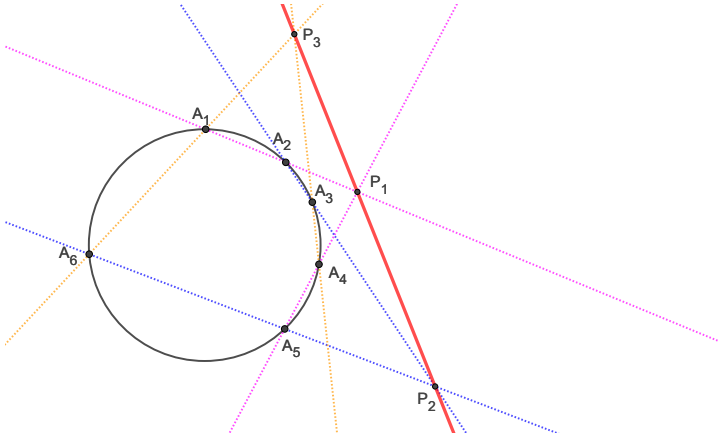
$$|AB| \cdot |CD| \cdot |EF| = |BC| \cdot |DE| \cdot |AF|$$

Dostali jsme tedy požadované tvrzení a tím je důkaz dokončen.

Abychom pochopili řešení nadcházející úlohy, musíme si ukázat následující větu:

Věta 11 ((8),str. 11, pozměněné znění)**.** *Mějme dáno šest bodů $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, které leží na jedné kružnici. Pokud existují průsečíky dvojic přímek $P_1 = A_1A_2 \cap A_4A_5, P_2 = A_2A_3 \cap A_5A_6, P_3 = A_3A_4 \cap A_6A_1$, pak tyto průsečíky leží na jedné přímce p. Tato přímka se nazývá Pascalova přímka (Obrázek 5.3).*

Poznámka. Tato věta obecně platí pro šest bodů na jakékoli kuželosečce, pro naše účely ale postačí kružnice.
Poznámka. Aby existovali všechny tři průsečíky P_1,P_2 i P_3, musí naše dvojice přímek A_1A_2 a A_4A_5, A_2A_3 a A_5A_6, A_3A_4 a A_6A_1 být různoběžné. Právě s takovými body na kružnici a přímkami budeme nyní pracovat.



Obrázek 5.3: Pascalova přímka

Důkaz. Narýsujeme kružnici k, která prochází body P_2,A_5 a A_2.

Dále druhý průsečík přímky A_1A_2 a kružnice k označíme jako B_1 a na závěr druhý průsečík přímky A_4A_5 a kružnice k jako B_2.

Nyní se zaměříme na přímky tvořených body A_3,A_4 a P_2,B_2. Podívejme se na úhel $P_2A_3A_4$, pomocí jeho sousedního vrcholu $A_4A_3A_2$ můžeme napsat:

$$|\sphericalangle P_2A_3A_4| = 180° - |\sphericalangle A_4A_3A_2| \tag{5.8}$$

Díky tomu, že body A_2, A_3, A_4 a A_5 leží na jedné kružnici, víme, že tvoří tětivový čtyřúhelník. A podle věty 4 platí:

$$|\sphericalangle A_4A_5A_2| = 180° - |\sphericalangle A_4A_3A_2| \tag{5.9}$$

Ze vztahů 5.8 a 5.9 dostáváme:

$$|\sphericalangle P_2A_3A_4| = |\sphericalangle A_4A_5A_2|$$

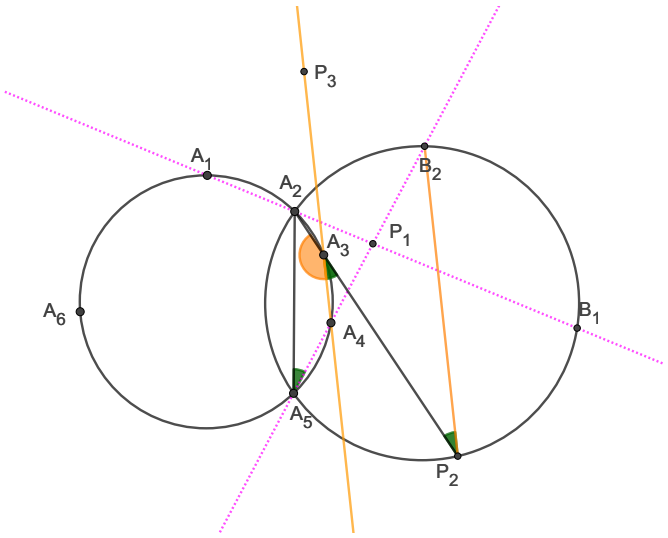
Můžeme si povšimnout, že bod B_2 leží na polopřímce A_5A_4, tudíž předchozí vztah můžeme doplnit:

$$|\sphericalangle P_2A_3A_4| = |\sphericalangle A_4A_5A_2| = |\sphericalangle B_2A_5A_2| \tag{5.10}$$

Díky vlastnostem obvodových úhlů ke společné tětivě A_2B_2 kružnice k, můžeme říct, že úhly $A_2A_5B_2$ a $A_2P_2B_2$ se rovnají a tedy vztah 5.10 můžeme přepsat:

$$|\sphericalangle P_2A_3A_4| = |\sphericalangle A_2P_2B_2|$$

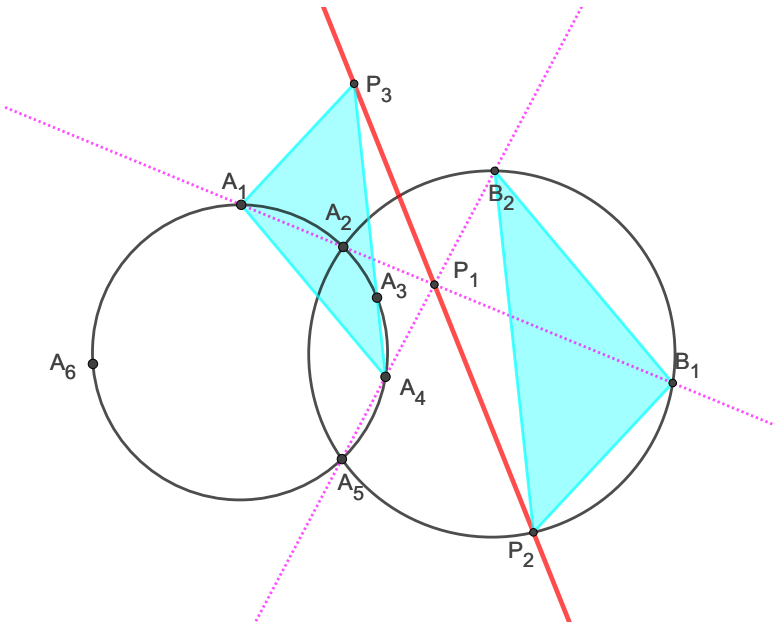
Můžeme si všimnout, že tyto dva úhly jsou střídavé a proto přímky A_3A_4 a P_2B_2 jsou rovnoběžné (Obrázek 5.4).



Obrázek 5.4: Rovnoběžné přímky A_3A_4 a P_2B_2

Analogicky pro přímky A_1A_6 a P_2B_2, A_1A_4 a B_2B_1.

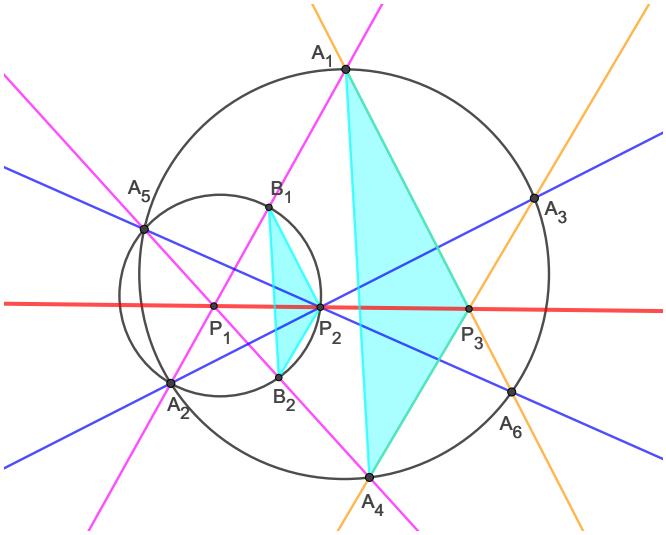
Díky těmto třem párům rovnoběžných přímek, můžeme říct, že trojúhelníky $A_1A_4P_3$ a $B_1B_2P_2$ jsou si podobné. Navíc protože víme, že spojnice vzájemně si odpovídajících bodů A_1B_1 a A_4B_2 se protínají v bodě P_1, jedná se o stejnolehlost se středem v bodě P_1(Obrázek 5.5).



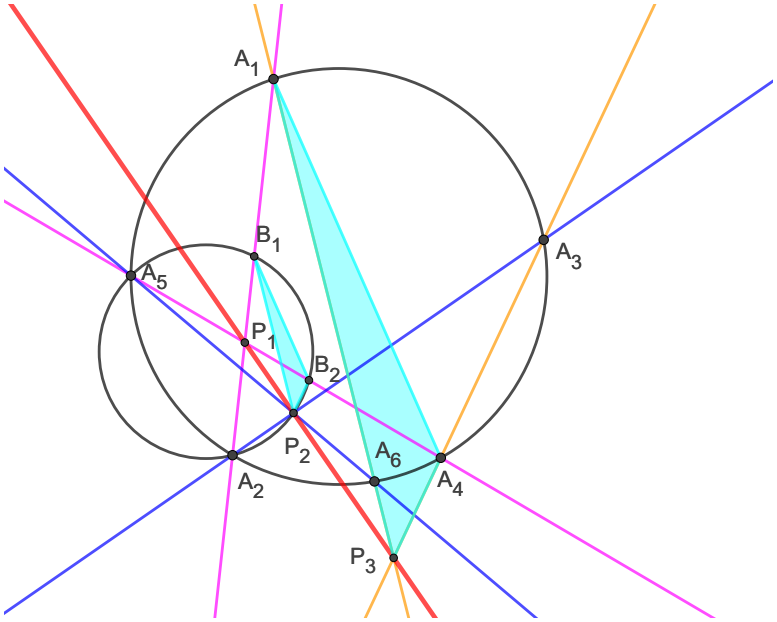
Obrázek 5.5: Trojúhelníky $A_1A_4P_3$ a $B_1B_2P_2$

Tedy tímto bodem musí procházet i spojnice bodů P_3 a P_2 a tím jsme dokázali, že body P_1, P_2 a P_3 leží v jedné přímce.

Samozřejmě body $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ mohou být na kružnici „zpřeházeny“. Podobnou úvahou bychom pak opět dokázali, že body P_1,P_2 i P_3 leží na jedné přímce (Obrázky 5.6 a 5.7). □



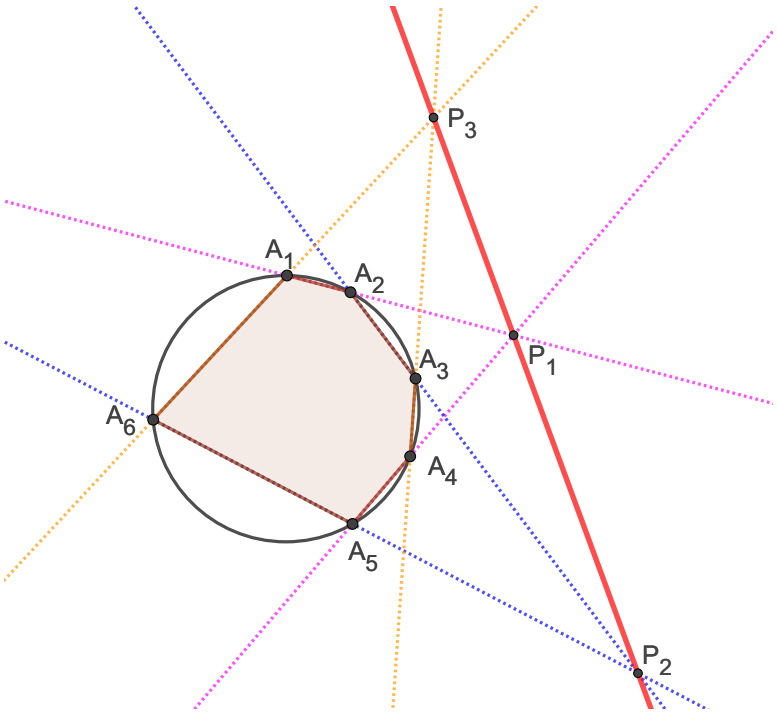
Obrázek 5.6: Příklad „zpřeházení“ bodů $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ na kružnici



Obrázek 5.7: Druhý příklad „zpřeházení“ bodů $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ na kružnici

Pokud by nám daných šest bodů na kružnici tvořilo tětivový konvexní šestiúhelník, mohli bychom předchozí větu zformulovat takto:

Věta 12. *Mějme tětivový šestiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, kde žádné z dvojic stran A_1A_2 a A_4A_5, A_2A_3 a A_5A_6, A_3A_4 a A_6A_1 nejsou rovnoběžné. Pak průsečíky dvojic přímek $P_1 = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $P_2 = A_2A_3 \cap A_5A_6$, $P_3 = A_3A_4 \cap A_6A_1$ leží na jedné přímce p. Tato přímka se nazývá Pascalova přímka. (Obrázek 5.8).*



Obrázek 5.8: Pascalova věta

Důkaz by byl identický s důkazem předchozí věty.

Nadcházející úloha je ze 48. ročníku mezinárodní matematické olympiády ve Vietnamu v roce 2007.

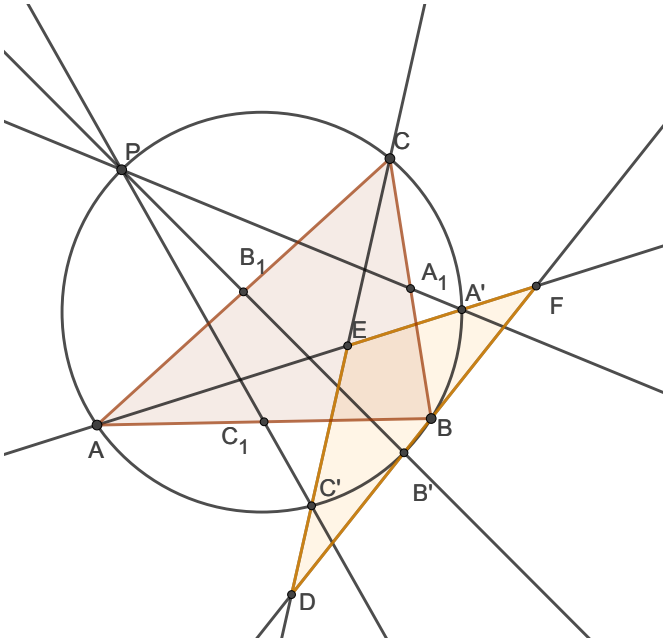
Úloha 18 ((29), str. 43)**.** *Nechť ABC je pevně daný trojúhelník a body A_1, B_1,C_1 jsou středy stran BC, CA, CB. Nechť bod P je libovolný bod na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Přímky PA_1, PB_1, PC_1 protínají kružnici postupně v bodech A', B', C'. Předpokládejme, že body A, B, C, A', B', C' jsou různé a průsečíky přímek AA' a BB', BB' a CC', AA' a CC' jsou vrcholy trojúhelníku. Dokažte, že obsah tohoto trojúhelníku nezávisí na poloze bodu P (Obrázek 5.9).*

Řešení. Označíme průsečíky přímek AA', BB', CC' postupně jako D,E,F. Víme, že body A,B,C, A', B', C',P leží na jedné kružnici, můžeme využít výše zmíněnou větu 11 a tedy body ze zadání:

$$C_1 = AB \cap C'P$$
$$A_1 = BC \cap PA'$$
$$E = CC' \cap A'A$$

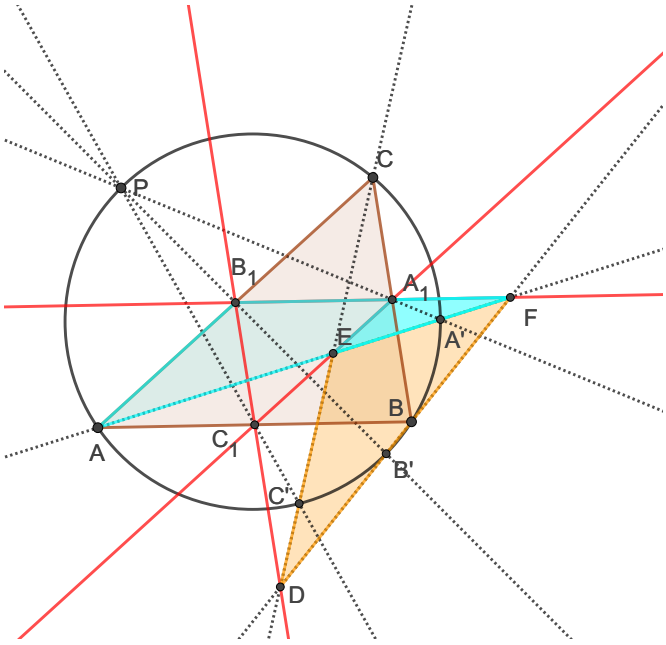
leží na jedné přímce přímce.

Pokud znovu využijeme větu 11, zjistíme, že i body B_1, C_1, D leží na jedné přímce. Totéž platí i pro body B_1,A_1,F.



Obrázek 5.9: Úloha 18 - zadání

Protože úsečky A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 jsou střední příčky zadaného trojúhelníku ABC, můžeme o nich říct, že každá z nich je rovnoběžná se stranami AB, AC, BC a má poloviční délku (Obrázek 5.10).



Obrázek 5.10: Podobné trojúhelníky FA_1E a FB_1A

Když se zaměříme na trojúhelníky AFB_1 a EFA_1 zjistíme, že jsou si podobné podle věty sus, neboť AB_1 je rovnoběžná s EA_1.

$$\frac{|EF|}{|AF|} = \frac{|A_1F|}{|B_1F|} \tag{5.11}$$

Podobně trojúhelníků B_1FD a A_1FB vidíme:

$$\frac{|A_1F|}{|B_1F|} = \frac{|BF|}{|DF|} \tag{5.12}$$

Z předchozích dvou rovností 5.11 a 5.12, můžeme napsat:

$$\frac{|EF|}{|AF|} = \frac{|A_1F|}{|B_1F|} = \frac{|BF|}{|DF|}$$
$$\frac{|EF|}{|AF|} = \frac{|BF|}{|DF|}$$

$$|EF| \cdot |DF| = |BF| \cdot |AF| \tag{5.13}$$

Pokud se zaměříme na trojúhelník DEF, podle známého vzorce pro obsah trojúhelníku pomocí funkce sinus pak dostáváme:

$$S_{DEF} = \frac{1}{2}|EF| \cdot |DF| \cdot \sin \sphericalangle EFD$$

A dosadíme-li vztah 5.13 a uvědomíme-li si, že úhel EFD je shodný s úhlem AFB, dostaneme:

$$S_{DEF} = \frac{1}{2}|BF| \cdot |AF| \sin \sphericalangle AFB = S_{ABF} \tag{5.14}$$

Protože bod F leží na střední příčce, vzdálenost tohoto bodu od přímky AB (velikost výšky na stranu AB) je polovina vzdálenosti bodu C od úsečky AB. Tedy podle dalšího známého vzorce pro obsah trojúhelníku platí:

$$S_{ABF} = \frac{|AB| \cdot d(F, AB)}{2}$$
$$S_{ABF} = \frac{|AB| \cdot d(C,AB)}{4}$$

Z předcházející vztahu a ze vztahu 5.14 vidíme, že:

$$S_{DEF} = S_{ABF} = \frac{1}{2}S_{ABC}$$

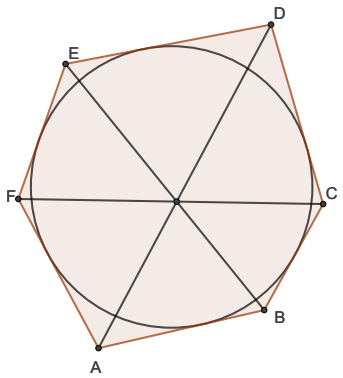
Tedy nezáleží na poloze bodu P.

5.2 Tečnové šestiúhelníky

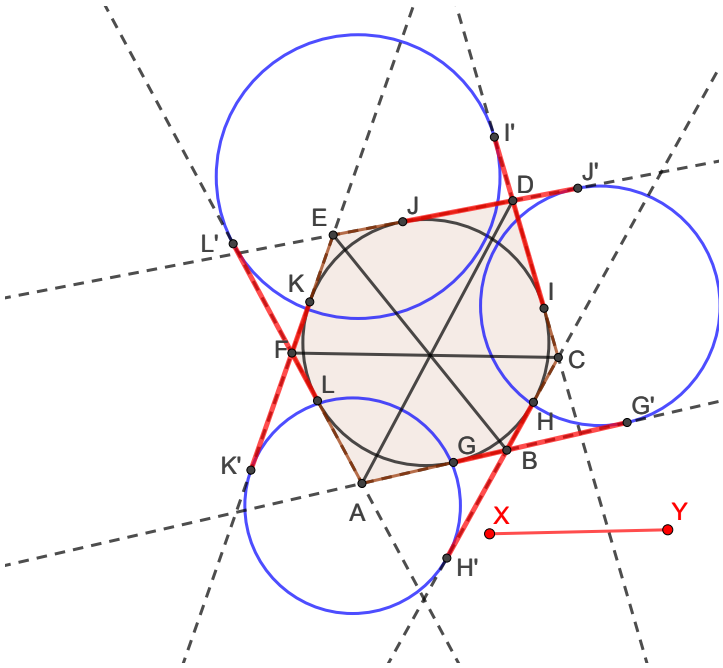
Nejprve si uveďme důležitou vlastnost tečnových šestiúhelníků.
Věta 13 ((7), str. 13, pozměněné znění)**.** *V každém tečnovém šestiúhelníku prochází úhlopříčky spojující opačné vrcholy jedním bodem (Obrázek 5.11).*

Důkaz. Abychom to dokázali, musíme si zvolit úsečku XY o délce x. Tu naneseme podle Obrázku 5.12 na tečny k naší kružnici v bodech dotyku G, H, I, J, K, L se šestiúhelníkem $ABCDEF$. Vzniknou nám pak úsečky:

$$|GG'| = |HH'| = |II'| = |JJ'| = |KK'| = |LL'| = x$$



Obrázek 5.11: Brianchonova věta



Obrázek 5.12: Kružnice l,m,n

Dále narýsujeme kružnice l,m,n takové, že přímky GG' a JJ', HH' a KK', II' a LL' jsou jejich tečny s body dotyku G' a J', H' a K', I' a L', přesně tak, jak je vidět na obrázku (Obrázek 5.12).

Zaměřme svou pozornost nyní na úhlopříčku AD. Díky osové souměrnosti tečen z bodu D ke kružnici vepsané víme, že úsečky DI a DJ jsou shodné (body I a J jsou body dotyku kružnice vepsané a stran DC a DE našeho šestiúhelníku). A protože úsečky JJ' a II' mají stejnou délku x a bod D je jejich průsečíkem, můžeme říct:

$$|DI'| = n - |DI| = n - |DJ| = |DJ'|$$

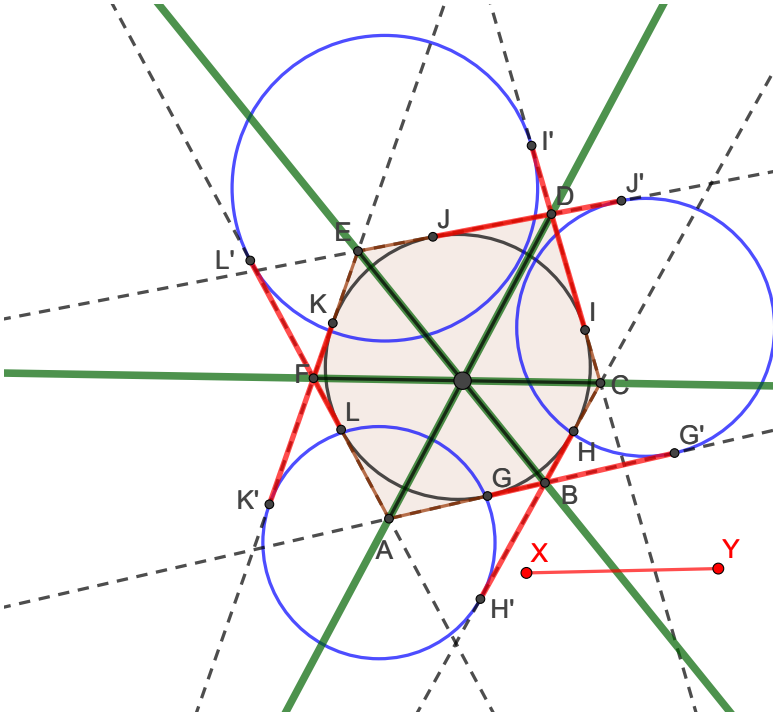
Připomeňme si, že body J' a I' jsou body dotyku kružnic l a n tečen DC a DE. Tedy bod D má stejnou mocnost k těmto kružnicím a leží tedy na jejich chordále. Dále opět díky osové souměrnosti tečen z bodu A ke kružnici vepsané, můžeme prohlásit, že úsečky AG a AL jsou shodné. Úsečky GG' a LL' mají stejnou velikost

a to x. Z konstrukce víme, že tyto dvě úsečky nemají společný průsečík. A proto:

$$|AG'| = |AG| + |GG'| = |AL| + |LL'| = |AL'|,$$

kde body G' a L' jsou opět body dotyku kružnic l a n tečen AB a AF. Tedy bod A leží na chordále kružnic l a n. Protože na této chordále leží i bod D, zjišťujeme, že úhlopříčka A splývá s touto chordálou.

Analogicky pro úhlopříčku CF a kružnice m,n a pro úhlopříčku BE a kružnice m,l, které obě splývají s chordálami těchto kružnic. Víme, že se tyto chordály protínají v potenčním bodě (viz. Definice 7). Tedy i úhlopříčky zadaného šestiúhelníku se protnou v jednom bodě (Obrázek 5.13). □



Obrázek 5.13: Chordály kružnic l,m,n

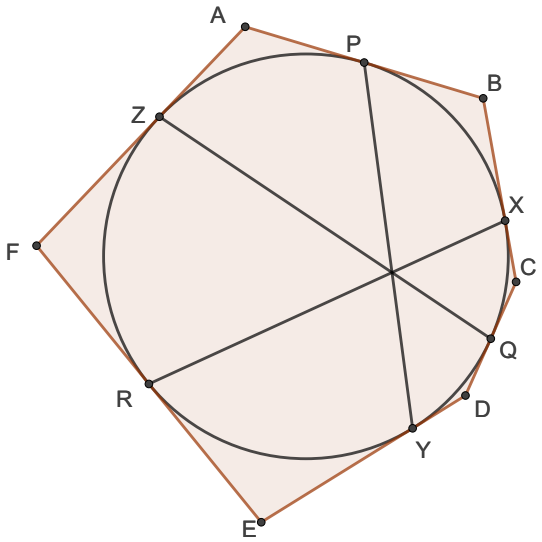
Další úloha je převzata z druhého kola britské matematické olympiády v roce 1999.

Úloha 19 ((27), str. 14)**.** *Nechť $ABCDEF$ je šestiúhelník s vepsanou kružnicí. Kružnice S se dotýká stran AB, CD a EF postupně v jejich středu P, Q a R. Nechť X,Y,Z jsou body dotyku kružnice a se stranami BC, DE a FA. Dokažte, že přímky PY, QZ a RX prochází jedním bodem (Obrázek 5.14).*
Řešení. Nechť kružnice vepsaná má střed v bodě O. Nejprve si označíme velikost úsečky AP jako a. Využijeme toho, že P je střed úsečky AB. Proto:

$$|AP| = |PB| = a$$

Dále využijeme souměrnosti tečen podle osy úhlu, jež svírají, a dozvídáme se:

$$|ZA| = |AP| \quad \text{a} \quad |PB| = |PX|$$



Obrázek 5.14: Úloha 19 - zadání

A také proto tedy můžeme napsat:

$$|ZA| = |AP| = |PB| = |PX| = a \tag{5.15}$$

Pokud bychom protáhli přímky FA a BC, protnou se v jednom bodě S. Využijeme-li souměrnost tečen ke kružnici, dostáváme, že $|SX|=|SZ|$. Protože ale víme, že $|ZA|=|BX| = a$, můžeme říct:

$$|SB| = |SX| - a = |SZ| - a = |SA|$$

Trojúhelník SAB je tedy rovnoramenný, a $|\sphericalangle SAP| = |\sphericalangle SBP|$ tedy i jejich vedlejší úhly jsou si rovny $|\sphericalangle XBP| = |\sphericalangle ZAP|$. Zaměřme se tedy na trojúhelníky ZAP a XBP. Jejich vnitřní úhly ZAP a XBP jsou si rovny. Vidíme, že jsou oba dva rovnoramenné a díky výše zmíněné rovnosti 5.15 víme, že jejich ramena jsou shodná. Tedy $\triangle ZAP \simeq \triangle XBP$ (věta sus) (Obrázek 5.15).

Z tohoto vztahu dále budeme využívat:

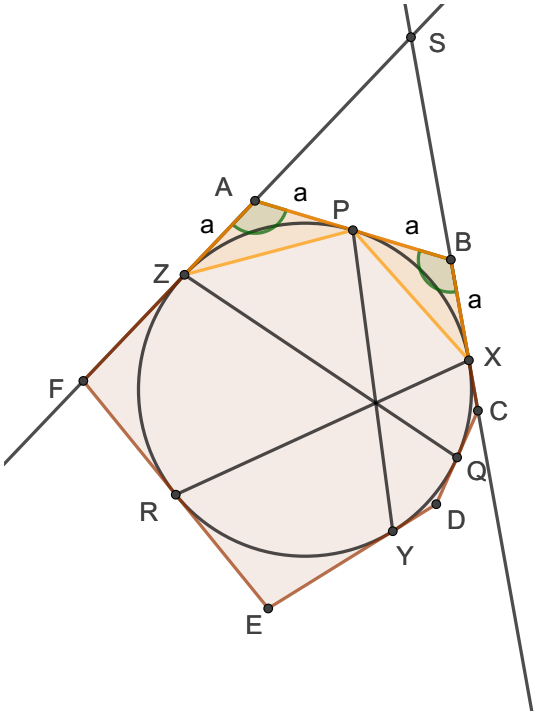
$$|ZP| = |PX|$$

Označme dále $|CQ| = c$, pak analogicky:

$$|XC| = |CQ| = |QD| = |DY| = c$$
$$\triangle XCQ \simeq \triangle YDQ$$
$$|YQ| = |QX|$$

Nakonec nechť $|ER|= d$, pak opět analogicky získáváme:

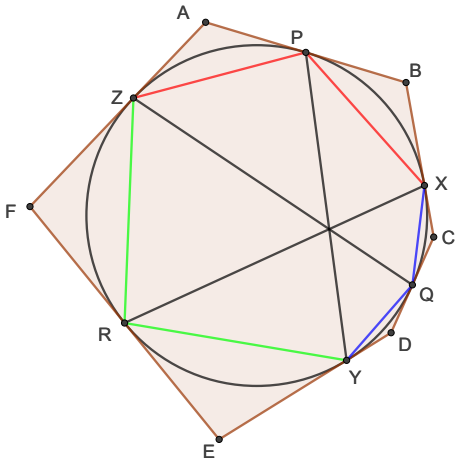
$$|YE| = |ER| = |RF| = |FZ| = d$$
$$\triangle YER \simeq \triangle RFZ$$
$$|YR| = |RZ|$$



Obrázek 5.15: Podobné trojúhelníky ZAP a XBP

Obvod tětivového šestiúhelníku $PXQYRZ$ (Obrázek 5.16) je:

$$o = |PX| + |XQ| + |QY| + |YR| + |RZ| + |ZP|$$
$$o = 2 \cdot (|PX| + |QY| + |YR|)$$



Obrázek 5.16: Tětivový šestiúhelník $PXQYRZ$

Označme střed kružnice vepsané jako O. Středový úhel příslušný k tětivě RQ je součtem středových úhlů příslušných k tětivám RY a YQ. Pokud středový úhel k tětivě RQ sečteme se středovým úhlem k tětivě PX, dostáváme součet středových úhlů k tětivám PX, QY a YR (tedy k polovině obvodu). Můžeme tedy říct, že tento součet je roven 180°.

$$|\sphericalangle ROQ| + |\sphericalangle XOP| = |\sphericalangle ROY| + |\sphericalangle YOQ| + |\sphericalangle XOP| = 180^\circ$$

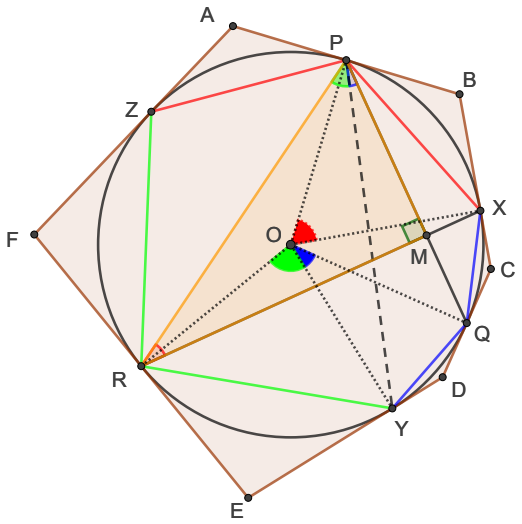
Zaměřme se na součet úhlů RPQ a XRP (musíme si uvědomit, že to jsou obvodové úhly k tětivám RQ a PX).:

$$|\sphericalangle RPQ| + |\sphericalangle XRP| = \frac{|\sphericalangle ROQ| + |\sphericalangle XOP|}{2} =$$
$$= \frac{|\sphericalangle ROY| + |\sphericalangle YOQ| + |\sphericalangle XOP|}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Průsečík tětiv PQ a RX označíme jako M. Dále se podíváme na trojúhelník RPM. O úhlu u vrcholu M, můžeme napsat:

$$|\sphericalangle RMP| = 180^\circ - (|\sphericalangle RPM| + |\sphericalangle MRP|) = 180^\circ - (|\sphericalangle RPQ| + |\sphericalangle XRP|) =$$
$$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

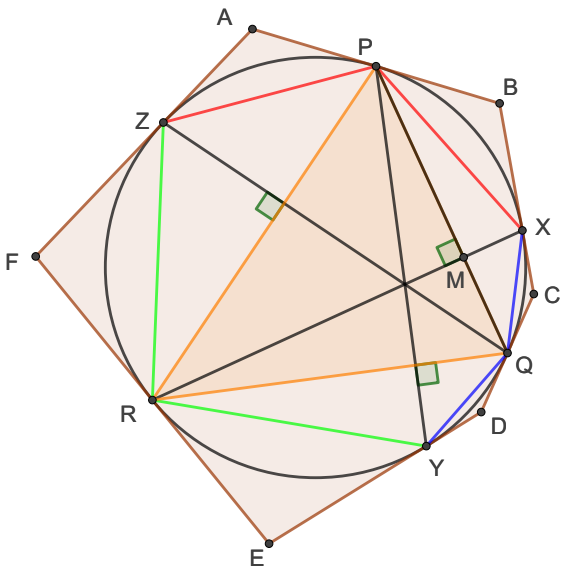
Tedy přímky PQ a RX (RQ a ZP) jsou na sebe kolmé (Obrázek 5.17).



Obrázek 5.17: Pravoúhlý trojúhelník RPM

Podobně pro tětivy RP a QY dostáváme, že přímky RQ a PY (PR a QZ) jsou na sebe kolmé.

Když se nyní podíváme na tětivový trojúhelník PQR, zjistíme, že na přímkách PY, RX a QZ leží výšky tohoto trojúhelníku. O výškách v trojúhelníku víme, že prochází jedním bodem a to ortocentrem trojúhelníku PQR. Tedy i naše přímky PY, RX a QZ prochází tímto bodem (Obrázek 5.18).



Obrázek 5.18: Výšky v trojúhelníku PQR

Poznámka. Kdybychom na tuto úlohu aplikovali Brianchonovu větu, zjistili bychom, že průsečíkem přímek PY, RX a QZ prochází i úhlopříčky zadaného šestiúhelníku $ABCDEF$. Avšak toto platí pouze v tomto případě a nedá se tato vlastnost zobecnit tak jako v úloze 8 v předcházející sekci.

Kapitola 6

Mnohoúhelníky

6.1 Tětivové mnohoúhelníky

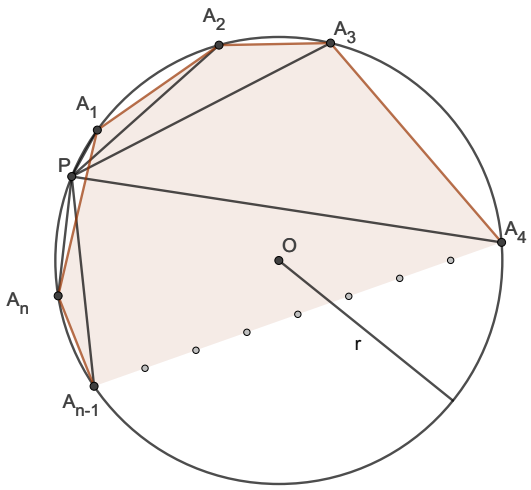
Podobně jako u tětivových čtyřúhelníků nejprve začneme obecnou definicí tětivového mnohoúhelníku.
Využijeme pro to známou definici:

Definice 11 ((12), str.39)**.** *Tětivový n-úhelník je konvexní mnohoúhelník, kterému lze sestrojit opsanou kružnici, tj. kružnici procházející všemi jeho vrcholy.*

Podobně jako u tětivových čtyřúhelníků, kružnice opsaná tomuto mnohoúhelníku má střed na průsečíku os stran našeho mnohoúhelníku. Poloměr této kružnice je vzdálenost od jejího středu k jakémukoli vrcholu.
Nejprve se zaměřme na tuto úlohu:

Úloha 20 ((24))**.** *Nechť $A_1A_2 \dots A_n$ je tětivový mnohoúhelník vepsaný kružnici $\omega = \omega(O, r)$, se středem O a poloměrem r. (Obrázek 6.1). Jestliže se těžiště mnohoúhelníku shoduje se středem O, pak pro každý bod $P \in \omega$, platí:*

$$\sum_{k=1}^{n} |PA_n|^2 = 2nr^2$$



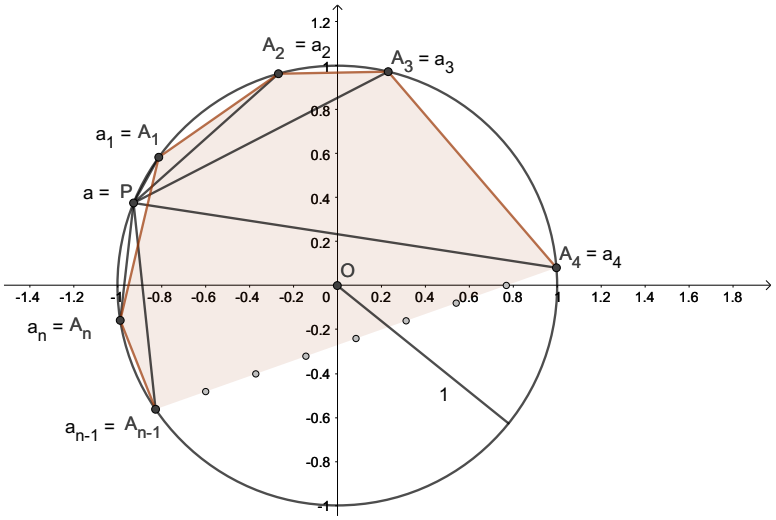
Obrázek 6.1: Úloha 20 - zadání

Jinými slovy: Pokud těžiště mnohoúhelníku splývá se středem kružnice opsané tomuto mnohoúhelníku, pak pro jakýkoli bod P na kružnici opsané mnohoúhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ platí, že součet druhých mocnin velikostí všech spojnic $PA_1 \dots PA_n$ je roven $2nr^2$

Řešení. V tomto důkazu budeme pracovat v Gaussově rovině. Celý mnohoúhelník vložíme do Gaussovy roviny tak, že střed O bude náležet číslu 0. Poloměr r bude mít velikost 1 a každému vrcholu mnohoúhelníku A_k pro $k = 1,2,\dots,n$ přiřadíme jedno komplexní číslo a_k takové, že pro $k = 1, 2, \dots, n$ platí $|a_k|=1$ a navíc, protože se jedná o tětivový mnohoúhelník, jehož těžiště splývá se středem kružnice opsané se středem v počátku Gaussovy roviny, musí platit i $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$

Dále volíme pro bod P takové komplexní číslo a, že také $|a| = 1$ (Obrázek 6.2).

Nejprve provedeme důkaz pro $k = 1$, poté ho zobecníme pro $k = n$. Abychom



Obrázek 6.2: Mnohoúhelník zasazený do Gaussovy roviny

našli velikost úsečky A_1P, musíme vypočítat vzdálenost mezi těmito body. Pokud hledáme analyticky vzdálenost mezi body A_1P, musíme zjistit velikost vektoru $\overrightarrow{A_1P}$

$$\overrightarrow{A_1P} = P - A_1 = a - a_1$$

Podle známého vztahu komplexních čísel víme, že:

$$||A_1P|| = \sqrt{(a - a_1) \cdot \overline{(a - a_1)}}$$

Vyjádřili jsme tedy vzdálenost bodů A_1P. V požadovaném vztahu máme ale tuto vzdálenost na druhou:

$$||A_1P||^2 = (a - a_1) \cdot \overline{(a - a_1)}$$

A tuto rovnost můžeme beztrestně upravit díky vlastnostem komplexně sdružených čísel:

$$||A_1P||^2 = (a - a_1) \cdot (\overline{a} - \overline{a_1})$$
$$||A_1P||^2 = a \cdot \overline{a} - a \cdot \overline{a_1} - a_1 \cdot \overline{a} + a_1 \cdot \overline{a_1}$$
$$||A_1P||^2 = |a|^2 - a \cdot \overline{a_1} - a_1 \cdot \overline{a} + |a_1|^2$$

V začátku důkazu jsme si stanovili, že $|a| = 1$, $|a_k|$=1 a $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$. Z předcházejícího vztahu tedy dostáváme:

$$||A_1P||^2 = 1 - a \cdot 0 - a_1 \cdot 0 + 1 = 2$$

Tím jsme dokázali vztah pro $k = 1$.
Budeme analogicky pokračovat zobecněním pro $k = n$, stále ale budeme používat již zmíněné známé vztahy pro komplexní čísla:

$$\sum_{k=1}^{n} |PA_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} (a - a_k)\overline{(a - a_k)} = \sum_{k=1}^{n} (a - a_k)(\overline{a} - \overline{a_k}) = \tag{6.1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a \cdot \overline{a} - a \cdot \overline{a_k} - a_k \cdot \overline{a} + a_k \cdot \overline{a_k}) = \sum_{k=1}^{n} (|a|^2 - a \cdot \overline{a_k} - a_k \cdot \overline{a} + |a_k|^2) \tag{6.2}$$

Využijeme toho, že sumy mohu rozdělit na jednotlivé sčítance:

$$\sum_{k=1}^{n} |PA_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a|^2 - \sum_{k=1}^{n} a \cdot \overline{a_k} - \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \overline{a} + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \tag{6.3}$$

Dále využijeme znalosti, že koeficient můžeme vytknout ze sumy.

$$\sum_{k=1}^{n} |PA_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a|^2 - a \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} - \overline{a} \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \tag{6.4}$$

A opět využijeme $|a| = 1$, $|a_k|$=1 a $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} |PA_n|^2 = n - a \cdot 0 - \overline{a} \cdot 0 + n = 2n$$

Pojďme si teď celou úlohu zobecnit ještě jednou a to tak, že poloměr kružnice opsané našemu mnohoúhelníku změníme na r. Nejprve si uvědomíme, jak se nám změní naše předpoklady z úvodu důkazu.
Protože všechny vrcholy našeho mnohoúhelníku leží na kružnici s poloměrem r a se s středem v počátku, musí platit $|a_k| = r$ pro všechna $k = 1,2,\ldots n$.A díky splynutí těžiště se středem kružnice opsané platí $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ (Předpoklad 3).
K dokázání této části postupujeme podle předcházející myšlenek z 6.2, 6.3, 6.4 a dostáváme:

$$\sum_{k=1}^{n} |PA_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a|^2 - a \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} - \overline{a} \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

A do této rovnosti dosadíme podle našeho nového předpokladu (Předpoklad 3).

$$\sum_{k=1}^{n} |PA_n|^2 = n \cdot r^2 - a \cdot 0 - \overline{a} \cdot 0 + n \cdot r^2 = 2n \cdot r^2$$

Tím jsme tedy dokázali vztah ze zadání úlohy. (Srov. [(24)])

Samozřejmě abychom mohli mluvit o mnohoúhelnících musíme zdola omezit n na $n \geq 3$. Protože když $n = 1$ jedná se o bod, když $n = 2$ jedná se o úsečku.

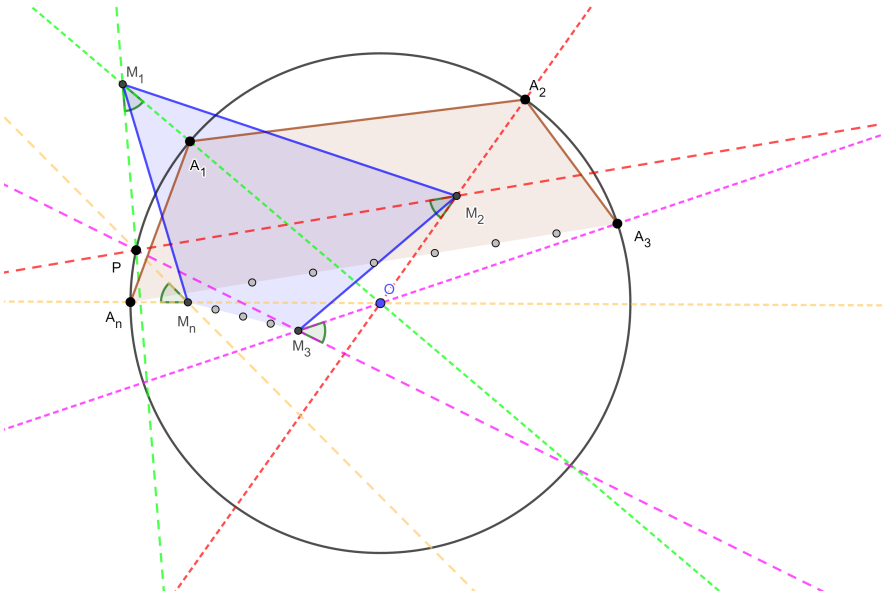
Pokud $n = 3$ jedná se o trojúhelník, který můžeme dále specifikovat. Ze zadání úlohy víme, že střed kružnice opsané musí splývat s těžištěm objektu. Tyto podmínky splňuje pouze rovnostranný trojúhelník.

Když $n \geq 4$ mnohoúhelník nemusí být nutně rovnostranný. Stačí jen aby těžiště mnohoúhelníku splývalo se středem kružnice jemu opsané. (např. obdélník)

Další úloha se zabývá nezávislosti bodu, který leží na kružnici opsané mnohoúhelníku a mnohoúhelníku, který má za vrcholy paty přímek z daného bodu na spojnice AS. Zadání i důkaz je přeložený a inspirovaný [(25)].

Úloha 21. *Předpokládejme, že body $A_i, i = 1,2,\ldots,n (n > 1)$ leží na kružnici k se středem v bodě O a poloměru r. Nechť P je další bod na této kružnici. Bodem P veďme přímky, které svírají s přímkami $OA_i, i = 1,2,\ldots,n$ shodné úhly, které jsou stejně orientovány. Pojmenujme paty těchto přímek $M_i, i = 1,2\ldots,n$. Potom mnohoúhelník $M_1M_2\ldots M_n$ nezávisí na poloze bodu P na kružnici k (Obrázek 6.3).*

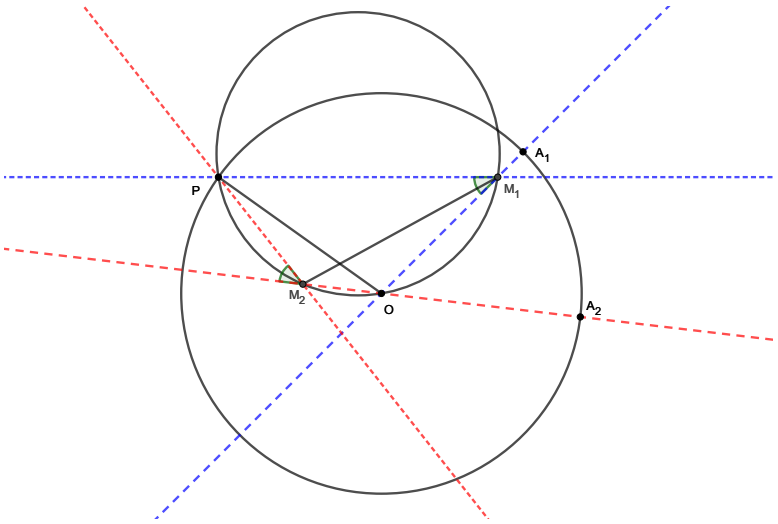
Jinými slovy: Přímky vedené z bodu P svírají stejně orientovaný úhel s přímkami $OA_i, i = 1,2,\ldots,n$ v bodech $M_1,M_2,\ldots M_n$. Mnohoúhelník $M_1M_2\ldots M_n$ bude vždy shodný, ať bod P je kdekoli na kružnici k se středem v bodě O, která je opsána mnohoúhelníku $A_i, i = 1,2,\ldots,n (n > 1)$.



Obrázek 6.3: Úloha 21 - zadání

Řešení. Opět si úlohu zpočátku zjednodušíme pro případ $n = 2$ a následně budeme dokazovat úlohu pro případ n.
Když se $n = 2$, budeme se zajímat o dva případy a to, když se úsečky M_1M_2 a OP budou protínat a když naopak nebudou.
Jestliže se úsečky M_1M_2 a OP protínají, vidíme, že pokud $|\sphericalangle PM_1O| = \alpha$, pak $|\sphericalangle PM_2O| = 180° - \alpha$ a obráceně. Tedy $|\sphericalangle PM_1O| + |\sphericalangle PM_2O| = 180°$ a náš čtyřúhelník PM_2OM_1 je tětivový. Můžeme mu tedy opsat kružnici k_1. Když se

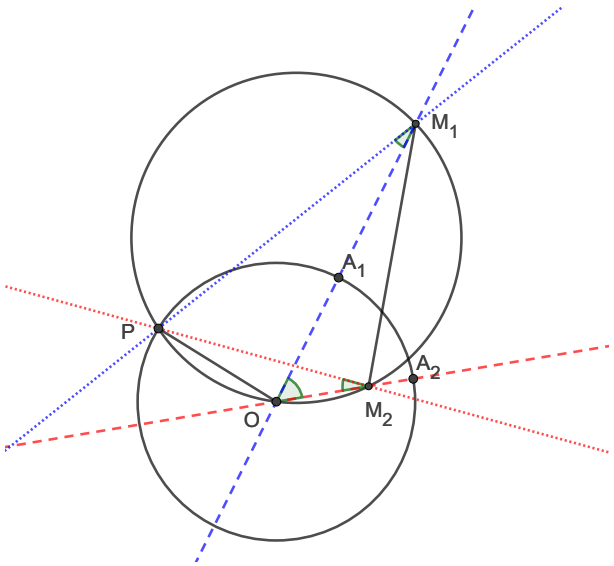
na tuto kružnici podíváme, zjistíme, že úhlopříčka M_1M_2 našeho čtyřúhelníku je její tětivou. Této tětivě přísluší obvodový úhel A_1OA_2, který je nezávislý na poloze bodu P, tedy velikost tětivy M_1M_2 je neměnná (Obrázek 6.4).



Obrázek 6.4: Tětivový čtyřúhelník PM_1OM_2

Pokud se úsečky M_1M_2 a OP neprotínají, znamená to, že body M_1 a M_2 jsou ve stejné polorovině ohraničené přímkou OP. A protože ze zadání víme, že přímky PM_1 a OM_1 svírají shodný stejně orientovaný úhel jako přímky PM_2 a OM_2, tak úhly OM_1P i OM_2P jsou shodné. Tedy body POM_2M_1 leží opět na společné kružnici. Tedy úsečka M_1M_2 je její tětivou a velikost obvodového úhlu A_1OA_2 je opět neměnná, tedy i velikost úsečky M_1M_2 zůstává stejná ať už je bod P kdekoli (Obrázek 6.5).

Pokročíme k dalšímu případu, kdy $n = 3$. V tuto chvíli body $M_1M_2M_3$ tvoří



Obrázek 6.5: Tětivový čtyřúhelník OPM_1M_2

trojúhelník. Díky případu $n = 2$ víme, že délky stran M_1M_2, M_1M_3 a M_2M_3

zůstávají neměnné, ať je bod P kdekoli na kružnici k. Tedy podle věty sss je trojúhelník $M_1M_2M_3$ vždy stejný.
V tuto chvíli můžeme přejít k zobecnění mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_n$. Protože trojúhelníky $M_1M_2M_3$, $M_1M_2M_3$, $\dots$ $M_1M_{n-1}M_n$ které vzniknou rozřezáním našeho mnohoúhelníku $M_1M_2 \dots M_n$, jsou nezávislé na poloze bodu P, sjednocením těchto trojúhelníků dostáváme zpět mnohoúhelník $M_1M_2 \dots M_n$, o kterém můžeme prohlásit, že je vždy shodný, ať je bod P kdekoli na kružnici k.
Tím máme tvrzení dokázáno.

6.2 Tečnové mnohoúhelníky

Opět si nejprve uvedeme definici tečnových mnohoúhelníků.

Definice 12 ((12), str.39)**.** *Tečnový n-úhelník je konvexní mnohoúhelník, v němž lze sestrojit vepsanou kružnici, tj. kružnici dotýkající se všech jeho stran.*

Je potřeba ale zmínit, že střed kružnice vepsané leží na průsečíku všech os vnitřních úhlů mnohoúhelníku. Poloměr této kružnice je vzdálenost jejího středu ke kterékoli straně mnohoúhelníku.
Dále se budeme zabývat důležitou vlastností mnohoúhelníků se sudým počtem stran. Pokud mnohoúhelník označíme jako $A_1A_2 \dots A_n$ a jeho strany obvyklým značením, pak liché strany nazýváme ty s lichým číslem v indexu $(a_1, a_3 \dots)$ a sudé strany budou ty zbylé.

Věta 14. *((26)) U mnohoúhelníků se sudým počtem stran $a_1, a_2, \dots a_n$ se součet délek lichých stran rovná součtu délek sudých stran.*

$$a_1 + a_3 + \dots = a_2 + a_4 + \dots$$

Důkaz. Abychom mohli dokázat tuto větu, potřebujeme nejprve rozdělit strany našeho mnohoúhelníku na dvě části vždy pomocí bodů $M_1, M_2, \dots M_n$ dotyku kružnice a mnohoúhelníku. Dále využijeme souměrnosti tečen ke kružnici ze společného bodu a označíme jednotlivé shodné úsečky následovně (Obrázek 6.6):

$$|A_1M_1| = |A_1M_n| = x_1 \quad |A_2M_2| = |A_2M_1| = x_2 \quad \dots \quad |A_nM_n| = |A_nA_{n-1}| = x_n \tag{6.5}$$

O velikostech úseček $a_1, a_2, \dots a_n$ můžeme pomocí vztahů 6.5 napsat:

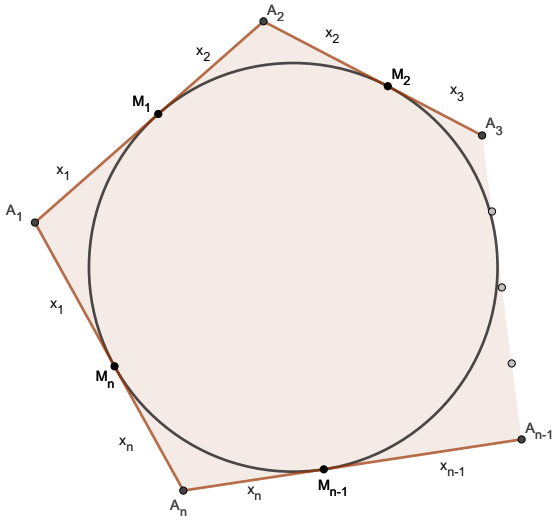
$$a_1 = x_1 + x_2 \quad a_2 = x_2 + x_3 \quad \dots \quad a_n = x_n + x_1 \tag{6.6}$$

Nyní se můžeme vrátit k původnímu tvrzení a dosadit do něj vztahy 6.6:

$$a_1 + a_3 + \dots = a_2 + a_4 + \dots$$
$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots = (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5) + \dots$$

Odtud plyne, že levá strana se rovná pravé a tvrzení je tedy správné. □

Poznámka. Podmínka kružnice vepsané v tomto případě není nutná. Tzn. existují mnohoúhelníky, pro které rovnost platí, avšak nejsou to tečnové mnohoúhelníky.



Obrázek 6.6: Tečnový mnohoúhelník

Abychom pochopili důkaz následující úlohy, která se zabývá poloviční obvodem mnohoúhelníku, musíme se nejprve dozvědět, co je to Jensenova nerovnost.

Věta 15 ((15), str.10)**.** *Nechť f je konvexní funkce na intervalu I. Potom pro libovolná $x_1, \ldots, x_n \in I$ a libovolná $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ taková, že $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ platí:*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Tuto větu si nebudeme dokazovat, protože je to mimo rozsah této práce, ale dychtivý čtenář tuto větu i její důkaz najde v diplomové práci Pavla Šaloma [(15), str.10]. Pro naše účely nám postačí, že ji můžeme využít i pro funkci kotangens na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ neboť na tomto intervalu je funkce konvexní. Proto také platí:

$$\frac{\cot \alpha_1 + \cot \alpha_2 + \cdots + \cot \alpha_n}{n} \geq \cot \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} \tag{6.7}$$

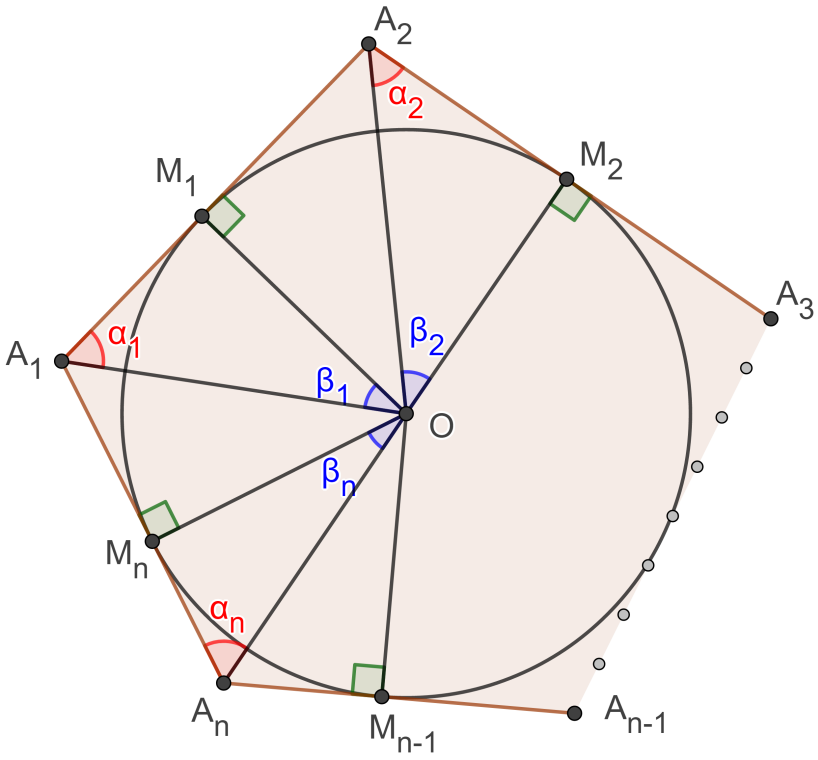
Postoupíme tedy k úloze:

Úloha 22 ((19))**.** *Nechť $A_1A_2 \ldots A_n$ je tečnový mnohoúhelník s poloměrem R a poloviční obvodem s. Ukažte, že platí:*

$$s \geq Rn \cot \frac{(n-2)\pi}{2n}.$$

Kdy nastává rovnost?

Řešení. V tomto důkazu budeme pracovat s mnohoúhelníkem, který je zobrazen na obrázku.
Body dotyku kružnice vepsané a stran A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$ A_nA_1 našeho mnohoúhelníku pojmenujme jako $M_1, M_2, \ldots M_n$. Označme úhly $OA_1M_1, OA_2M_2, \ldots OA_nM_n$



Obrázek 6.7: Pravoúhlé trojúhelníky $A_1M_1O, A_2M_2O, \ldots A_nM_nO$

jako $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. A úhly A_1OM_1, A_2OM_2, $\ldots A_nOM_n$ jako $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ (Obrázek 6.7).

Poté díky pravoúhlým trojúhelníkům A_1OM_1, A_2OM_2 $\ldots A_nOM_n$ a funkci kotangens, můžeme napsat:

$$|A_1M_1| = R \cdot \cot \alpha_1 \tag{6.8}$$
$$|A_2M_2| = R \cdot \cot \alpha_2 \tag{6.9}$$
$$\vdots \tag{6.10}$$
$$|A_nM_n| = R \cdot \cot \alpha_n \tag{6.11}$$

Vyjádříme-li poloviční obvod s pomocí vztahů 6.11,bude se pak rovnat:

$$s = |A_1M_1| + |A_2M_2| + \cdots + |A_nM_n| = \tag{6.12}$$
$$= R \cdot \cot \alpha_1 + R \cdot \cot \alpha_2 + \cdots + R \cdot \cot \alpha_n = \tag{6.13}$$
$$= R \cdot (\cot \alpha_1 + \cot \alpha_2 + \cdots + cot\alpha_n) \tag{6.14}$$

Protože každý trojúhelník A_1OM_1, A_2OM_2, $\ldots A_nOM_n$ je pravoúhlý, úhly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ určitě nebudou větší nežli $\pi/2$ (jinak by byl součet úhlů v trojúhelníku větší než π). Tudíž tedy funkci kotangens můžeme bez následků omezit na interval

$(0, \pi/2)$. Můžeme tedy použít Jensenovu nerovnost pro funkci kotangens 6.7:

$$\frac{\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 + \cdots + cot\alpha_n}{n} \geq \cot\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}.$$

Kterou ale pro následné jednodušší počítání vynásobíme číslem n.

$$\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 + \cdots + \cot\alpha_n \geq n \cdot \cot\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}$$

Když tento vztah znovu vynásobíme tentokrát číslem R:

$$R \cdot (\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 + \cdots + \cot\alpha_n) \geq R \cdot n \cdot \cot\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n},$$

dostáváme na levé straně výraz pro s (viz. 6.14). A proto:

$$s \geq R \cdot n \cdot \cot\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}. \tag{6.15}$$

Víme, že v každém trojúhelníku A_1OM_1, A_2OM_2 $\ldots$ A_nOM_n platí:

$$\alpha_k = \pi/2 - \beta_k \quad pro \quad k = 1, \ldots n.$$

Může potom říct, že:

$$\begin{gathered}\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \\ = (\pi/2 - \beta_1) + (\pi/2 - \beta_2) + \cdots + (\pi/2 - \beta_n) = \\ = n \cdot \pi/2 - (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)\end{gathered}$$

A protože součet $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$ dává dohromady polovinu plného úhlu, můžeme zapsat následující:

$$\begin{gathered}\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \\ = (\pi/2 - \beta_1) + (\pi/2 - \beta_2) + \cdots + (\pi/2 - \beta_n) = \\ = n \cdot \pi/2 - (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) = n \cdot \pi/2 - \pi = \frac{\pi \cdot (n-2)}{2}\end{gathered}$$

A to můžeme dosadit do naší nerovnosti 6.15.

$$s \geq R \cdot n \cdot \cot\frac{\pi \cdot (n-2)}{2n}$$

Tato nerovnice se bude rovnat pouze v jediném případě a to když $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ si budou rovny a za vztahů 6.11 vidíme, že strany A_1M_1, A_2M_2, $\ldots$ A_nM_n jsou si rovny. Tedy jedná se o pravidelný mnohoúhelník. (Srov. (23))
Poznámka. Pokud naším zájmem bude čtyřúhelník, $(n = 4)$, bude pro něj platit:

$$s \geq R \cdot 4 \cdot \cot\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{4} = R \cdot 4 \cdot \cot\frac{\pi \cdot (4-2)}{2 \cdot 4} = R \cdot 4 \cdot \cot\frac{\pi}{4} = R \cdot 4.$$

Tedy:

$$s \geq R \cdot 4$$

což využíváme v předchozích úlohách, hlavně v úloze 12.

Kapitola 7

Závěr

Cílem této práce bylo přiblížit problematiku tětivových a tečnových mnohoúhelníků v různých matematických soutěžích i v těžších matematických úlohách žákům středních škol. Tato práce je rozdělena na několik kapitol. V první kapitole shrnuji poznatky ze střední školy, které dále uvádím v řešení úloh a v důkazech.

Ve druhé kapitole se zabývám tětivovými a tečnovými čtyřúhelníky. Uvádím zde celkem 13 úloh a jejich řešení z matematických olympiád, dalších soutěží i obtížných úloh ze sbírek příkladů matematiky. Mimo jiné tu představuji i známé vlastnosti těchto čtyřúhelníků jako jsou například součet vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku, Ptolemaiovu věta, nebo součet protějších stran tětivového čtyřúhelníku.

Tématem další kapitoly jsou tečnové a tětivové pětiúhelníky. Zde jsou uvedeny celkem tři úlohy ze zahraničních olympiád a sbírek. Na závěr ukazuji vlastnost dvou úhlopříček a spojnici vrcholu s bodem dotyku kružnice a tětivového pětiúhelníku.

V předposlední kapitole se zaměřuji na tětivové a tečnové šestiúhelníky, kde také představuji známé věty jako Fuhrmannova, Pascalova nebo Brianchonova. Je důležité tu zmínit, že právě Brianchonova věta je zobecněním některých vlastností tečnových čtyřúhelníků a pětiúhelníků. Dále Fuhrmannova věta je zobecněním Ptolemaiovy věty. Nakonec je v této kapitole možné nalézt opět tři vyřešené úlohy.

Tečnové a tětivové mnohoúhelníky lze najít v závěrečné kapitole. Nacházejí se tu tři úlohy týkající se tohoto tématu a další vlastnosti těchto objektů.

Myslím si, že jsem cíle práce splnila. Uvedla úlohy z matematických olympiád a podala vlastní řešení. Také jsem zobecnila některé vlastnosti tečnových a tětivových mnohoúhelníků. Navíc díky mnoha vlastním obrázkům je práce více pochopitelná jak pro žáky středních škol tak i pro jejich učitele.

Literatura

[1] BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF. *Planimetrie*. 2., rozš. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2.

[2] HÁJMOVÁ, Kateřina. *Pokročilé partie planimetrie*. [online]. Praha, 2018 [29.10.2020]. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/101034.

[3] HORÁK, Stanislav. *Kružnice.* [online]. 1. vyd. Praha: Mladá Fronta, 1966. ISBN: 23-139-63. Dostupné z: https://docplayer.cz/41081333-Kruznice-stanislav-horak-author-kruznice-czech-praha-mlada-fronta-1966.html.

[4] KUBEŠOVÁ, Naděžda a Eva CIBULKOVÁ. *Matematika: přehled středoškolského učiva.* 2. vyd. Třebíč: Petra Velanová, 2007. Maturita (Petra Velanová). ISBN 978-80-86873-05-3.

[5] KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii*. 1. vyd. Praha: Matematický ústav Akademie věd České republiky, 1996. 249 s. ISBN 80-85823-21-7.

[6] LEISCHNER, Pavel, 2007. Zajímavá zobecnění Ptolemaiovy věty. *Matematika-Fyzika-Informatika*. Časopis pro výuku na základních a středních školách. Praha: Prometheus, **16**(10). ISSN-1210-1761.

[7] LOUČKA, Pavel. *Měření ovality extrudovaného vlákna pomocí tří kamer*. [online]. Brno, 2019 [cit. 4.12.2020]. Diplomová práce. Vysoké učení technické, Fakulta strojního inženýrství. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=193882.

[8] MARTINÍK, Jan. *Svazky kuželoseček*. [online]. Brno, 2016 [cit. 9.11.2020]. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/vuy63/Svazky_kuzelosecek_barevne.pdf.

[9] MRÁZOVÁ, Marta. *Čtyřúhelníky.* [online]. Brno, 2008 [cit. 30.11.2020]. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/csat7/Diplomka_Mrazova.pdf.

[10] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-359-2.

[11] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie.* 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4.

[12] POMYKALOVÁ, Eva *Matematika s nadhledem: od prváku k maturitě*. Plzeň: Fraus, 2019. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-494-7.

[13] ПРАСОЛОВ, Виктор. Задачи по планиметрии. Москва: МЦНМО, 2019. ISBN 5-900916-82-0.

[14] SHARIGUIN, I. *Problemas de geometría*. Moskva: Mir, 1989. 5-03-000657-5.

[15] ŠALOM, Pavel. *Nerovnosti pro nadané žáky středních škol*. [online]. Praha, 2012 [cit. 24.11.2020]. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/pavel_salom/SALOM_DP.pdf.

[16] ŠEDIVÝ, Jaroslav. *O podobnosti v geometrii*. [online]. Praha: Mladá fronta, 1963 [cit. 30.11.2020]. ISBN: 23-151-63. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403480.

[17] ŠVRČEK, Jaroslav a VANŽURA, Jiří, 1988. *Geometrie trojúhelníka*. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury. ISBN 04-017-88.

[18] BOGOMOLNY, Alexander. An Identity in Cyclic Quadrilateral. *Cut The Knot*. [online]. [cit. 30.10.2020]. Dostupné z: https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/IdentityInCyclicQuadrilateral.shtml.

[19] BOGOMOLNY, Alexander. An Inequality on Circumscribed Quadrilateral. *Cut The Knot*. [online]. [cit. 23.11.2020]. Dostupné z: https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/IvanovaCircumscribedQuadrilateral.shtml.

[20] BOGOMOLNY, Alexander. A Property of Circumscribed Quadrilaterals. *Cut The Knot*. [online]. [cit. 28.10.2020]. Dostupné z: https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/CircumQuadri.shtml.

[21] BOGOMOLNY, Alexander. Ceva in Circumscribed Quadrilateral. *Cut The Knot*. [online]. [cit. 03.11.2020]. Dostupné z: https://www.cut-the-knot.org/Generalization/BrianchonCeva.shtml.

[22] BOGOMOLNY, Alexander. CTK Wiki Math - Mathematical Olympiads - 1975 Canadian Mathematical Olympiad, Problem 5. *Cut The Knot*. [online]. Dostupné z: https://www.cut-the-knot.org/wiki-math/index.php?n=Mathematical Olympiads.CMO1975Problem5.

[23] BOGOMOLNY, Alexander. Igor Sharygin's Problem in Circumscribed Quadrilateral. *Cut The Knot*. [online]. [cit. 06.11.2020]. Dostupné z: https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/SharyginViaPeru.shtml.

[24] BOGOMOLNY, Alexander. Moments in a Peculiar Cyclic Polygon. *Cut The Knot*. [online]. Dostupné z: https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/MomentsInCyclicPolygon.shtml.

[25] BOGOMOLNY, Alexander. 400 Bad Request. *Cut The Knot*. [online]. [cit. 04.11.2020]. Dostupné z: https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/ProjectedPoly.shtml#K.

[26] BOGOMOLNY, Alexander. 400 Bad Request. *Cut The Knot*. [online]. [cit. 06.11.2020]. Dostupné z: https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/EvesExtension.shtml#(1).

[27] BMO Problems from the past (1993-2010). *The British Mathematical Olympiad*. [online]. [cit. 09.11.2020]. Dostupné z: https://bmos.ukmt.org.uk/home/bmolot.pdf.

[28] Brianchon2. *Geometrikon*. [online]. [cit. 10.11.2020]. Dostupné z: http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/Brianchon2.html.

[29] International Mathematical Olympiad. *Shortlisted Problems with solutions*. [online]. [cit. 09.11.2020]. Dostupné z: https://www.imo-official.org/problems/IMO2007SL.pdf.

[30] OMO Spring 2014 Solutions. *NIMO - OMO Problems*. [online]. Dostupné z: https://internetolympiad.org/pages/15-omo_problems.

[31] 1999 USAMO Problems/Problem 2. *Art of Problem Solving*. [online]. [cit. 23.11.2020]. Dostupné z: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/1999_USAMO_Problems/Problem_2.

[32] 2009 USAMO Problems/Problem 5. *Art of Problem Solving*. [online]. [cit. 24.11.2020]. Dostupné z: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2009_USAMO_Problems/Problem_5.

[33] 2010 USAMO Problems/Problem 1. *Art of Problem Solving*. [online]. [cit. 16.11.2020]. Dostupné z: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2010_USAMO_Problems/Problem_1.

Seznam úloh z matematické olympiády:

[34] Matematická olympiáda kategorie A pro střední školy. [cit. 16.11.2020] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440742/A58i.pdf.

[35] Matematická olympiáda kategorie A pro střední školy. [cit. 17.11.2020] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440744/A58iii.pdf.

[36] Matematická olympiáda kategorie A pro střední školy. [cit. 18.11.2020] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440648/B51ii.pdf.

[37] Matematická olympiáda kategorie A pro střední školy. [cit. 19.11.2020] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440719/C56ii.pdf.

[38] Matematická olympiáda kategorie A pro střední školy. [cit. 21.11.2020] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440683/A54iii.pdf.

Seznam obrázků

3.1 Konvexní čtyřúhelník . . . 12
3.2 Nekonvexní čtyřúhelník . . . 12
3.3 Tětivový čtyřúhelník . . . 13
3.4 Obvodové úhly PSQ a SPQ . . . 14
3.5 Ortocentra trojúhelníků ABC a ABD . . . 15
3.6 Ortocentrum V v ostroúhlém trojúhelníku a jeho obrazy V_1,V_2,V_3 16
3.7 Ortocentrum V v tupoúhlém trojúhelníku a jeho obrazy V_1,V_2,V_3 . 17
3.8 Pravoúhlý trojúhelník . . . 17
3.9 Úhly v tětivovém čtyřúhelníku . . . 18
3.10 Simsonova přímka . . . 19
3.11 Kružnice opsaná čtyřúhelníku AP_cPP_b . . . 19
3.12 Kružnice opsaná čtyřúhelníku CP_aPP_b . . . 20
3.13 Tětivový čtyřúhelník BPP_aP_c . . . 20
3.14 Obrácená implikace Simsonovy přímky . . . 21
3.15 Úloha 3 - zadání . . . 22
3.16 Ptolemaiova věta . . . 23
3.17 Úloha 4 - zadání . . . 25
3.18 Úsečka FG . . . 26
3.19 Bod H . . . 27
3.20 ÚÚloha 6 - zadání . . . 28
3.21 Body G, R_1,S_1 na Pascalově přímce . . . 29
3.22 Úhly BDC, ABD a ACD . . . 29
3.23 Samodružný bod Q . . . 30
3.24 Bod Q neležící na ose souměrnosti lichoběžníku . . . 31
3.25 Tečnový čtyřúhelník . . . 32
3.26 Tečnový čtyřúhelník- body dotyku . . . 33
3.27 Tečnový čtyřúhelník - druhá implikace . . . 33
3.28 Body dotyku kružnic a čtyřúhelníků $AKSN, BLSK, CMSL, DNSM$ 34
3.29 Tečnový čtyřúhelník ABCD . . . 36
3.30 Průsečík úhlopříček a spojnic bodů dotyku . . . 37
3.31 Tečnový čtyřúhelník - úhlopříčky . . . 38
3.32 Úloha 9 - zadání . . . 38
3.33 Trojúhelníky ABO a DCO . . . 40
3.34 Obsahy trojúhelníků . . . 40
3.35 Rovnoběžník . . . 43
3.36 Bod X . . . 45
3.37 Úloha 13 - zadání . . . 48
3.38 Trojúhelník A_1OB_1 . . . 49

3.39 Osa úhlu B_1A_1O 49

4.1 Úloha 14 - zadání 51
4.2 Podobné trojúhelníky PAY a QBY 52
4.3 Pravoúhelník PYQX 53
4.4 Podobné trojúhelníky ABY, PQY a RSY 54
4.5 Úhel ξ a XOZ 55
4.6 Úloha 15 - zadání 56
4.7 Rovnoramenný trojúhelník AYZ 57
4.8 Čtyřúhelník $ASYL$ 58
4.9 Rovnoběžné přímky YS a BZ 58
4.10 Podobné trojúhelníky LSY a YBK 59
4.11 Funkce f,g,g' a $g + g'$ 63
4.12 Úloha 16 - zadání 64
4.13 Délky stran 65
4.14 Tečnový pětiúhelník 66
4.15 Kružnice l,m,n 66
4.16 Chordály ke kružnicím l,m,n 67

5.1 Fuhrmannova věta 68
5.2 Podobné trojúhelníky ABM a EDM 70
5.3 Pascalova přímka 71
5.4 Rovnoběžné přímky A_3A_4 a P_2B_2 72
5.5 Trojúhelníky $A_1A_4P_3$ a $B_1B_2P_2$ 72
5.6 Příklad „zpřeházení“ bodů $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ na kružnici 73
5.7 Druhý příklad „zpřeházení“ bodů $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ na kružnici . . 73
5.8 Pascalova věta 74
5.9 Úloha 18 - zadání 75
5.10 Podobné trojúhelníky FA_1E a FB_1A 75
5.11 Brianchonova věta 77
5.12 Kružnice l,m,n 77
5.13 Chordály kružnic l,m,n 78
5.14 Úloha 19 - zadání 79
5.15 Podobné trojúhelníky ZAP a XBP 80
5.16 Tětivový šestiúhelník $PXQYRZ$ 80
5.17 Pravoúhlý trojúhelník RPM 81
5.18 Výšky v trojúhelníku PQR 82

6.1 Úloha 20 - zadání 83
6.2 Mnohoúhelník zasazený do Gaussovy roviny 84
6.3 Úloha 21 - zadání 86
6.4 Tětivový čtyřúhelník PM_1OM_2 87
6.5 Tětivový čtyřúhelník OPM_1M_2 87
6.6 Tečnový mnohoúhelník 89
6.7 Pravoúhlé trojúhelníky $A_1M_1O, A_2M_2O, \ldots A_nM_nO$ 90