**Posudok na habilitačnú prácu Martina Žofku**

**Selected exact solutions of Einstein equations and their properties**

Práca je venovaná profilovej téme relativistickej skupiny Jiřího Bičáka: presným riešeniam Einsteinových rovníc. V prehľadovej časti autor stručne charakterizuje päť úloh na hľadanie gravitačného poľa budeného rôznymi látkovými systémami – pričom pod látkou sa rozumie aj elektromagnetické pole – a na opis pohybu testovacích telies v zadanom gravitačnom poli. (Ak sa zaujímame o testovaciu časticu na geodetike, alebo o testovacie teleso chápané ako súbor častíc, ktoré sa medzi zrážkami pohybujú po geodetikách, môžeme ich časový vývoj považovať takisto za presné riešenie Einsteinových rovníc, pravda, obmedzené na priestor *mimo priestoročasových trubíc okolo svetočiar častíc*, kde je samogravitácia častíc zanedbateľná.) Nasleduje osem článkov venovaných týmto úlohám. V prvom článku sa zostrojuje presné riešenie pre valcovo symetrické magnetické pole v teórii s kozmologickým členom; v ďalších dvoch článkoch sa rozoberá pohyb častíc okolo dvojice extrémnych čiernych dier (čiernych dier, ktorých náboj je v jednotkách $G = 4\pi\epsilon_0 = 1$ rovnako veľký ako hmotnosť, $|Q| = M$) a vyšetruje sa gravitačné pole extrémne nabitej priamky; v ďalšom článku sa skúma „plávanie" telies konečných rozmerov v Schwarzschildovej metrike; v nasledujúcich dvoch článkoch sa zostrojujú viacrozmerné Robinsonove–Trautmanove riešenia (riešenia pripúšťajúce nulovú kongruenciu, ktorá sa rozpína bez šmyku a krútenia) s obyčajným alebo $p$-formovým elektromagnetickým poľom; a v posledných dvoch článkoch sa skúmajú riešenia pre valec, ktorý pozostáva z ideálnej kvapaliny, a pre valcovú šupku v teórii s kozmologickým členom. Už len z vymenovania týchto úloh je zrejmé, aký široký záber autor má. Bližší pohľad na jeho články odhalí, že nesú „ochrannú známku" prác Bičákovej skupiny: vynaliezavosť pri formulácii otázok a vyspelú techniku pri hľadaní odpovedí na ne.

Od článku Bonnora z r. 1953 sa stali obľúbenou témou fyzikov–relativistov, ktorí sa venujú presným riešeniam, *cylindrické elektrovákuové vesmíry* – časovo nezávislé, valcovo symetrické riešenia Einsteinových rovníc s elektromagnetickým poľom ako zdrojom. Einsteinove rovnice pre taký systém vedú na tretiu Painlevého rovnicu, ktorej riešenia sú vo všeobecnosti transcendentné funkcie, existuje však aj úplná klasifikácia analytických riešení. Jedným z nich je Bonnorovo-Melvinovo statické riešenie s čiste magnetickým poľom (BM riešenie), v ktorom sú, v jednotkách, v ktorých aj $c = 1$, funkcie $f$ a $f^{-1}e^{2\gamma}$ vystupujúce pri $-dt^2$ a $dr^2 + dz^2$ dané vzťahmi $f = G^2r^2$ a $e^\gamma = r^{m^2}G^2r$, kde $G = kr^m +$

$k'r^{-m}$. Pri $m = 1$ dostávame *boostovo symetrické riešenie* s $f = f^{-1}e^{2\gamma} = (1 + K^2r^2)^2$. (Musí platiť $kk' > 0$, takže ak položíme $k' = 1$, $k$ môžeme zapísať ako $K^2$. Konštanta $K$ je tá istá ako vo vyjadrení metriky (1.2–3) v prehľadovej časti práce, ale súradnica $r$ je iná.) V článku č. 1 (J. Veselý–Žofka 2019) sa skúma daná úloha v teórii s nenulovou kozmologickou konštantou $\Lambda$. V boostovo symetrickom prípade autori odvodzujú pre intenzitu magnetického poľa $\hat{f}$ (v práci označenú $f$) ako funkciu radiálnej súradnice $\hat{r} =$ obvod kruhu$/(2\pi)$ (v práci označenej $r$) rovnicu druhého rádu, ktorá vedie na analytický výraz pre metriku s $\hat{f}$ ako novou radiálnou súradnicou. Pri $\Lambda = 0$ odtiaľ dostaneme BM riešenie s $m = 1$, ak položíme $\hat{f} = 2K(1 + K^2r^2)^{-2}$. V boostovo nesymetrickom prípade je rovnica pre $\hat{f}$ tretieho rádu a analytické vyjadrenie metriky – analóg BM riešenia s $m \neq 1$ – neexistuje. V práci však nájdeme grafy závislosti intenzity $\hat{f}$ a funkcií $A$, $B$ a $C$, ktoré vystupujú v metrike, od súradnice $\hat{r}$, získané numericky (obr. 1.4).

Prehľadová časť práce obsahuje aj ďalší bonus oproti článku: poruchový výpočet boostovo symetrického riešenia s magnetickým poľom málo odlišným od homogénneho, $\hat{f} \sim \hat{f}_0 = \sqrt{\Lambda}$. Tu však mám jednu výhradu. Keď počítame zložku metrického tenzora $g_{\phi\phi} \propto \hat{f}'^2/\hat{f}^3$ do prvého opravného rádu v poruchovom parametri $\gamma$, mali by sme do čitateľa dosadiť funkciu $\hat{f}$ zrátanú do *druhého* rádu v $\gamma$. Ak to spravíme, dostaneme namiesto približného vzťahu $g_{\phi\phi} \propto \gamma^2(1 - 3\gamma\cos\chi)\sin^2\chi$, kde $\chi = \sqrt{2\Lambda}\hat{r}$, vzťah $g_{\phi\phi} \propto \gamma^2[1 + (4/3)\gamma\cos\chi]\sin^2\chi$. Táto chyba krásy, pravda, nemá vplyv na pointu: pri $\chi = \epsilon$ a $\chi = \pi - \epsilon$, $\epsilon \ll 1$, funkcia $g_{\phi\phi}$ vyzerá ináč než predtým ($g_{\phi\phi} \propto \gamma^2[1 \pm (4/3)\gamma]\epsilon^2$ namiesto $\gamma^2(1 \mp 3\gamma)\epsilon^2$), ale opäť platí, že koeficienty pri $\epsilon^2$ nemožno *zároveň* nastaviť na tú istú hodnotu, takže plochy s konštantnými súradnicami $(t, z)$ sú aspoň na jednom póle singulárne (majú na ňom hrot). Ostatne, to je okamžite vidieť, ak si uvedomíme, že dané riešenie je limitou presného riešenia, keď je funkcia $\mathcal{M}$, definovaná v rovnici (1.47), nezáporná len na malom intervale okolo $\hat{f}_0$.

Zaujímavou triedou presných riešení sú statické riešenia budené zdrojmi, ktoré majú náboj zhodný s hmotnosťou, $Q_i = M_i$ – presnejšie, zhodný s hmotnosťou, alebo *líšiaci sa od nej globálnym znamienkom*, $Q_i = \pm M_i$. (Náboje $Q_i$ vystupujúce v rovnici (2.2) spadajú pod prvý prípad.) Tieto riešenia navrhli nezávisle Majumdar a Papapetrou r. 1947. V článkoch č. 2 a 3 (Ryzner–Žofka 2015, 2016) sa skúmajú dva príklady takých riešení, dvojica nabitých čiernych dier a nabitá priamka, zatiaľ čo v prehľadovej časti práce autor rozoberá, s odvolávkou na článok Ryzner–Žofka (2019), tretí príklad – *retiazku čiernych* *dier*. Okrem retiazky, kde majú čierne diery rovnakú hmotnosť, takže pole ďaleko od nich sa zhoduje s poľom nabitej priamky, autor uvažuje aj retiazku so striedavým znamienkom hmotnosti a retiazku získanú dimenzionálnou redukciou 5-rozmernej teórie. Keďže v takej teórii sa nesumujú potenciály $1/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|$ ale $1/(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)^2$ – zo 4-rozmerného pohľadu preto, lebo retiazka „zdedí" z dodatočného rozmeru skalárne pole, ktoré prispieva k pravej strane Einsteinových rovníc –, riešenie sa dá zapísať v uzavretom tvare.

Pozrime sa v krátkosti na zvyšných päť článkov. V článku č. 4 (V. Veselý–Žofka 2019) sa študuje voľný pád oscilujúcej činky v Schwarzschildovej metrike. Článok má najmä didaktický význam, lebo ukazuje, že ak v relativistickej teórii objavíme jav, ktorý sa v Newtonovej teórii nevyskytuje, môže to byť preto, že naša teória nie je *dôsledne* relativistická. Tak je to aj s „plávaním" činky, ktorá sa pomaly roztiahne a rýchlo stlačí: ako ukazuje hračkový model z prehľadovej časti práce, kde činku reprezentuje dvojica častíc s kladnou hmotnosťou, ktoré si vymenia po jednej častici so zápornou hmotnosťou, „plávanie" je artefakt pochádzajúci z toho, že činka nerešpektuje konečnú rýchlosť prenosu interakcie. V článkoch č. 5 a 6 (Ortaggio–Podolský–Žofka 2008, 2015) sú zmapované Robinsonove-Trautmanove priestoročasy s počtom rozmerov $D > 4$. Pre riešenie tejto úlohy bolo asi kľúčové, že sa podarilo ukázať (po rozsiahlych výpočtoch – „after considerable algebraic manipulations"), že spojenie plôch s konštantnými súradnicami $(u, r)$ do priestoročasu zadáva jediná funkcia $H(r)$, ktorá má navyše pri párnom $D > 6$ jednoduché analytické vyjadrenie. Článok č. 7 (Bičák–Ledvinka–Schmidt–Žofka 2004) podáva vyčerpávajúci opis valcov z ideálnej kvapaliny, ktoré majú okolo seba Levi-Civitovu metriku – chápanú globálne, so zahrnutím parametra kóničnosti –, a v článku č. 8 (Žofka–Bičák 2008) sa rovnako dôkladne vyšetrujú valcové šupky v teórii s $\Lambda \neq 0$. Tento článok predstavuje so svojím dvojčaťom, článkom Bičák–Žofka (2002), kde sa uvažuje prípad $\Lambda = 0$, podrobnú „cestovnú mapu" pre valcové šupky. Martin Žofka k nej prispel aj pekným článkom z r. 2005 o nekonečnej cievke ako zdroji pre BM riešenie, ktorý napísal s nedávno zosnulým Jiřím Langrom.

Práca bola skontrolovaná systémom Turnitin. Navrhujem ju uznať za habilitačnú a autorovi udeliť titul „docent".

30. júna 2020 Vladimír Balek

*Katedra teoretickej fyziky FMFI UK, Mlynská dolina, 842 28 Bratislava*