PEDAGOGICKÁ
FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Filip Konopka

Kurzweilův-Stieltjesův integrál a jeho zobecnění

Kurzweil-Stieltjes integral and its generalization

Katedra didaktiky matematiky, MFF UK

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Studijní program:	N7504
Studijní obor:	N M (7504T221)

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Na tomto místě bych chtěl poděkovat především vedoucímu své diplomové práce docentu A. Slavíkovi za jeho vstřícný přístup v průběhu psaní práce. Výborně se s ním spolupracovalo. Velmi si vážím toho, že mi vždy odpovídal na mé emaily tak rychle (většinou během pár hodin nebo nejdéle do druhého dne). Všechny naše konzultace v tomto roce probíhaly distanční formou v aplikaci Zoom, což se ukázalo být efektivnější nežli osobní konzultace, protože jsme se mohli spojit kdykoliv z pohodlí domova. Psaní práce mě bavilo a jsem rád, že jsem měl možnost se tomuto tématu věnovat. Také chci na tomto místě poděkovat paní profesorce Vondrové, že mi téma této práce schválila. Poděkování také patří mému kolegovi Václavu Kryštofovy za pomoc s Latexem kdykoliv jsem se na něj obrátil (klidně i uprostřed noci) a také za přečtení mé práce a cenné připomínky. Také děkuji kolegům Dalimolovi Pešovi a Zdeňkovi Silberovi za inspirace a nápady.

Název práce: Kurzweilův-Stieltjesův integrál a jeho zobecnění

Autor: Bc. Filip Konopka

Katedra: Katedra didaktiky matematiky, MFF UK

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme HKS_{α}^{p} integrálem, který je zobecněním HKS integrálu, jeho vlastnostmi a pojmy obyčejná oscilace a p-oscilace, které jsou potřebné k jeho vybudování. Tento integrál je neabsolutně konvergentní a obecnější nežli Lebesgueův integrál. Práce navazuje na nedávné výsledky v oblasti teorie integrálů a jejím cílem je přiblížit tento nový integrál co nejširšímu okruhu zájemců o matematickou analýzu.

Klíčová slova: Integrál, Oscilace, Kurzweilův integrál, HKS_{α}^{p} integrál, HKS_{α} integrál

Title: Kurzweil-Stieltjes integral and its generalization

Author: Bc. Filip Konopka

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Abstract: The thesis deals with the HKS_{α}^{p} integral, which is generalization of the HKS integral, its properties and the concepts of ordinary oscillation and p-oscillation, which are needed for the construction of the integral. This integral is non-absolutely convergent and more general than the Lebesgue integral. This thesis is based on recent results in the theory of integrals and its goal is to introduce this integral to a wide readership interested in mathematical analysis.

Keywords: Integral, Oscillations, Kurzweil integral, HKS_{α}^{p} integral, HKS_{α} integral

Obsah

Úvod

V této práci se zabýváme zejména HKS^p_α integrálem, který je zobecněním Kurzweilova-Stieltjesova integrálu. Tuto jeho novější variantu zavedli J. Malý a K. Kuncová v roce 2019 (publikace [3]). Cílem této diplomové práce bylo prozkoumat, které vlastnosti Kurzweilova-Stieltjesova integrálu se zachovávají při přechodu k HKS^p_α integrálu a sepsat příslušné důkazy. Tato práce přirozeně navazuje na [1], [2] a [3]. Dalším cílem bylo prozkoumat a pečlivě dokázat některé základní vlastnosti integrálu, které jsou v [3] jen letmo zmíněny nebo pokládány za zřejmé. Snažili jsme se o to, aby text byl přístupný co nejširšímu okruhu zájemců o matematickou analýzu, zatímco článek [3] je věnován hlavně specialistům v teorii integrálu. Předpokládáme, že čtenář má znalosti matematické analýzy a Lebesgueova integrálu na úrovni bakalářského studia na MFF UK. Naším hlavním přínosem v této diplomové práci jsou kapitoly 2 a 3.

V první kapitole připomeneme definici Kurzweilova integrálu jako přirozené zobecnění Riemannova integrálu. Jeho prvním zobecněním je HKS integrál, přičemž toto zobecnění spočívá v tom, že místo integrátoru $G(x) = x$ pracujeme s obecným integrátorem. Ukážeme, že HKS integrál lze definovat dvojím způsobem (klasicky i pomocí neurčitého integrálu), a že tyto definice jsou ekvivalentní.

Ve druhé kapitole se věnujeme pojmu oscilace funkce, což je klíčový pojem v definici HKS^p_α integrálu, a zkoumáme její vlastnosti. Symbolem $\operatorname{osc}_p(F,I)$ rozumíme oscilaci funkce F na intervalu I; přičemž rozlišujeme tzv. obyčejnou oscilaci (případ $p = C$) a p-oscilaci (případ $p \in [1,\infty]$), k jejíž definici potřebujeme Lebesgueův integrál. Ukážeme, že funkcionál

$$F \mapsto \operatorname{osc}_p(F,I)$$

je pseudonorma na prostoru měřitelných funkcí na I. Také ukážeme, že pro libovolnou měřitelnou funkci $F : I \to \mathbb{R}$ je funkce

$$p \mapsto \operatorname{osc}_p(F,I)$$

neklesající pro $p \in [1, +\infty]$ a tento výsledek později využijeme při zkoumání tříd integrovatelných funkcí. Dále ukážeme, že pouze pro $p = C$ je oscilace subaditivní vzhledem k intervalu, ale pro $p \in [1, +\infty]$ subaditivní není. V kapitole 3 ukážeme, že v důsledku toho pak neurčitý HKS^p_α je aditivní vzhledem k integračnímu oboru pouze pro $p = C$, ale není aditivní pro $p \in [1, +\infty]$.

Ve třetí kapitole se v první sekci věnujeme nejprve vlastnostem HKS^p_α integrálu, které jsou společné pro $p \in [1, +\infty]$ i $p = C$. Ve druhé sekci se pak věnujeme pouze vlastnostem HKS_α integrálu, což je jeho speciální případ pro $p = C$.

Ve čtvrté kapitole zmíníme i jiné novější typy integrálů a jejich vztah k HKS^p_α integrálu. První sekce je věnována MC_α integrálu, který zavedli T. Ball a D. Preiss v roce 2017 (publikace [8]) a který je ekvivalentní s HK_α integrálem. Tento integrál je zobecněním MC integrálu, který zavedli H. Bendová a J. Malý v roce 2011 (publikace [9]), a který je ekvivalentní s HK integrálem. Ve druhé a třetí sekci zmíníme Denjoyův-Chinčinův integrál a aproximativní derivaci a jejich vztah s HKS^p_α integrálem, čemuž se věnovali J. Malý a K. Kuncová.

1. Kurzweilův integrál

Začátkem 20. století započaly snahy o vybudování teorie neabsolutně konvergentního integrálu, který by byl obecnější nežli Newtonův a zároveň i Lebesgueův integrál. První takový integrál zavedl A. Denjoy v roce 1912. O dva roky později zavedl O. Perron o něco jednodušší integrál, jehož konstrukce byla založena na práci s majorantami a minorantami funkce. Až v roce 1957 J. Kurzweil[1] upravil definici Riemannova integrálu a zkonstruoval tak nový integrál, jehož definice je názornější a podstatně jednodušší než definice těchto přecházejících integrálů. Ukázal, že tento integrál je ekvivalentní s Perronovým integrálem. Nezávisle na něm v roce 1961 tutéž konstrukci integrálu objevil i R. Henstock, proto Kurzweilův integrál nazýváme Henstockův-Kurzweilův integrál neboli HK integrál.

1.1 Přechod od Riemannova integrálu ke Kurzweilovu integrálu

Připomeňme nejprve definici Riemannova integrálu.

Definice 1.1.1. *Dělením intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}$ rozumíme konečnou posloupnost intervalů $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^n$ takových, že*

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \cdots < b_{n-1} = a_n < b_n = b.$$

Definice 1.1.2. *Nechť $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^n$ je dělení intervalu $[a,b]$ a $\{x_i\}_{i=1}^n$ je posloupnost taková, že pro každé $i \in \{1, ..., n\}$ platí*

$$a_i \leq x_i \leq b_i.$$

Pak $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ nazveme ***dělení s význačnými body*** *x_i (ang. tagged partition)*

Riemannův integrál můžeme definovat následujícím způsobem.

Definice 1.1.3 (Riemannův integrál). *Řekneme, že* ***omezená*** *funkce f na intervalu $[a,b]$ je* ***riemannovsky integrovatelná*** *a platí $\int_a^b f = A$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna dělení s význačnými body $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ intervalu $[a, b]$ splňující $|b_i - a_i| < \delta$ pro každé $i \in \{1,...,n\}$ platí:*

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(b_i - a_i) \right| < \varepsilon.$$

Poznámka. Definice Riemannova integrálu založená na horních a dolních součtech (Darbouxova definice) je ekvivalentní s definicí 1.1.3.

[1] Kurzweilův integrál byl poprvé publikován v práci [10]. Britský matematik R. Henstock nezávisle na J. Kurzweilovi objevil v roce 1961 stejnou definici tohoto integrálu. O existenci Kurzweilovy práce se dozvěděl až v roce 1963. Jejich motivací pro zavedení nového integrálu bylo především vysvětlení jistých konvergenčních jevů v teorii obyčejných diferenciálních rovnic. Více o historii Kurzewilova integrálu (i jiných integrálů) lze nalézt v publikaci [11].

Rozdíl mezi Riemannovým a Kurzweilovým integrálem je v tom, že v definici Kurzweilova integrálu hledané δ k zadanému ε nemusí být nutně konstanta, ale připustíme, že δ může být funkce.

Definice 1.1.4. ***Kalibrem*** *nazveme jakoukoliv funkci* $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^+$.

Definice 1.1.5. *Nechť* $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. *Řekneme, že dělení intervalu* $[a,b]$ *s význačnými body* $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ *je **δ-jemné**, pokud*

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \quad [a_i, b_i] \subset (x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)).$$

Definice 1.1.6 (Henstockův-Kurzweilův integrál). *Řekneme, že funkce* f *na intervalu* $[a,b]$ *je **HK-integrovatelná** a platí* $\int_a^b f = A$ *právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemná dělení} \quad \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\text{platí: } \left| A - \sum_{i=1}^n f(x_i)(b_i - a_i) \right| < \varepsilon.$$

Lemma 1.1.7 (Cousinovo lemma). *Pro libovolný kalibr* $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ *je množina všech δ-jemných dělení intervalu* $[a,b]$ *vždy neprázdná.*

Důkaz lze najít v [2, Lemma 6.2.3].

1.2 Příklady

Příklad 1.2.1. Příkladem omezené funkce, která není riemannovsky integrovatelná, je tzv. **Dirichletova funkce** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definovaná následujícím předpisem.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ukažme nejprve, že Dirichletova funkce není riemannovsky integrovatelná.

Uvažujme libovolné dělení $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ intervalu $[0,1]$ s význačnými body x_i. V případě, že všechny význačné body jsou racionální, tedy $x_i \in \mathbb{Q}$, pak $f(x_i) = 1$ a tedy

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)(b_i - a_i) = 1 \neq 0.$$

V případě, že všechny význačné body jsou iracionální, tedy $x_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pak $f(x_i) = 0$ a tedy

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)(b_i - a_i) = 0.$$

Pro libovolné $\delta > 0$ tedy vždy umíme najít dvě různá dělení intervalu $[0,1]$, $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ a $\{[c_i, d_i], y_i\}_{i=1}^m$ tak, že pro všechna i platí $|b_i - a_i| < \delta$ a $|d_i - c_i| < \delta$ a zároveň

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i)(b_i - a_i) - \sum_{i=1}^m f(y_i)(d_i - c_i) \right| = 1 - 0 = 1,$$

tedy funkce f není riemannovsky integrovatelná.

Ukažme, že Dirichletova funkce je HK-integrovatelná a platí

$$(HK)\int_0^1 f \;= 0.$$

K pevně zadanému $\varepsilon > 0$ musíme najít takový kalibr $\delta_\varepsilon : [0,1] \to (0,\infty)$, aby pro všechna δ_ε-jemná dělení $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ intervalu [0,1] s význačnými body x_i platilo:

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(b_i - a_i) - 0 \Big| < \varepsilon.$$

Jelikož racionální čísla tvoří spočetnou množinu, můžeme její prvky uspořádat do posloupnosti a očíslovat $\{q_1, q_2, q_3, ...\}$. K pevně zadanému $\varepsilon > 0$ definujme kalibr následujícím způsobem:

$$\delta(x) := \begin{cases} \varepsilon/2^{i+1} & x = q_i \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Takto definovaná funkce je jistě kalibr, neboť pro $x \in [0,1]$ nabývá pouze kladných hodnot. Uvažujme libovolné δ-jemné dělení $\{[a_k, b_k], x_k\}_{k=1}^n$. Pro každý iracionální význačný bod x_k je $f(x_k) = 0$. Z každé posloupnosti $(x_k)_{k=1}^n$ tedy lze vybrat podposloupnost racionálních čísel $(x_{kj})_{j=1}^m$ a tedy

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(b_i - a_i) = \sum_{j=1}^{m} f(x_{kj})(b_{kj} - a_{kj}).$$

Dirichletova funkce f nabývá v každém racionálním bodě hodnoty 1, tedy

$$f(x_{kj}) = 1, \quad j = 1,..., m.$$

Můžeme tedy odhadovat:

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(b_i - a_i) - 0 \Big| = \sum_{j=1}^{m} f(x_{kj})(b_{kj} - a_{kj}) = \sum_{j=1}^{m} (b_{kj} - a_{kj}) < \sum_{j=1}^{m} 2\delta(x_{kj}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{2\varepsilon}{2^{k_j+1}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{k_j}} \overset{[2]}{<} 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = 2\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2\varepsilon.$$

Důkaz převzat z [6].

[2] Protože význačné body x_k mohly být i krajní body intervalu $[a_k, b_k]$, každý bod se v této posloupnosti může opakovat nanejvýš dvakrát.

Následující příklad je převzat z [2, Example 6.2.14].

Příklad 1.2.2. Uvažujme funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ takovou, že množina

$$M = \{x \in [a,b]; f(x) \neq 0\}$$

má nulovou Lebesgueovu míru. Pak Henstockův-Kurzweilův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje a je roven nule.

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$M_n := \{x \in [a,b];\ n-1 < |f(x)| \leq n\}.$$

Množina M je disjunktním sjednocením množin M_n, tj. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n = M$. Z toho plyne, že každá množina M_n má také nulovou Lebesgueovu míru. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje otevřená množina $G_n \subset [a,b]$ taková, že $M_n \subset G_n$ a zároveň

$$\mu(G_n) < \frac{\varepsilon}{n 2^n}.$$

Nechť $\delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty)$ je kalibr splňující, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro $x \in M_n$ platí

$$(x - \delta_\varepsilon(x), x + \delta_\varepsilon(x)) \cap [a,b] \subset G_n.$$

Pro libovolné δ_ε-jemné dělení $\{[a_i,b_i],x_i\}_{i=1}^m$ intervalu $[a,b]$ pak platí

$$\Big|\sum_{i=1}^{m} f(x_i)(b_i - a_i) - 0\Big| \leq \sum_{i=1}^{m} |f(x_i)|(b_i - a_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i;\, x_i \in M_n} |f(x_i)|(b_i - a_i)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{i;\, x_i \in M_n} (b_i - a_i) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(G_n) < \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\varepsilon}{n 2^n} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

Tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

1.3 Vztah Kurzweilova integrálu k Newtonovu, Riemannovu a Lebesgueovu integrálu

V následujících větách shrneme, že Kurzweilův integrál je obecnější nežli integrál Newtonův, Riemannův a dokonce i Lebesgueův. Důkazy následujících vět lze najít v [5] (věta 4.2, 4.3, 5.1).

Věta 1.3.1 (Vztah Kurzweilova a Newtonova integrálu). *Nechť* $-\infty < a < b < \infty$ *a funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *má Newtonův integrál* $(N) \int_a^b f(x)\,dx$. *Potom existuje Kurzweilův integrál* $(K) \int_a^b f(x)\,dx$ *a platí*

$$(N) \int_a^b f(x)\,dx = (K) \int_a^b f(x)\,dx$$

Věta 1.3.2 (Vztah Kurzweilova a Riemannova integrálu). *Nechť* $-\infty < a < b < \infty$ *a funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *má Riemannův integrál* $(R) \int_a^b f(x)\,dx$. *Potom existuje Kurzweilův integrál* $(K) \int_a^b f(x)\,dx$ *a platí*

$$(R) \int_a^b f(x)\,dx = (K) \int_a^b f(x)\,dx$$

Následující věta uvádí vztah mezi Kurzweilovým a Lebesgueovým integrálem.

Věta 1.3.3 (Vztah Kurzweilova a Lebesgueova integrálu). *Je-li funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *měřitelná, pak má v intervalu* $[a,b]$ *Lebesgueův integrál právě tehdy, když je absolutně integrovatelná v Kurzweilově smyslu*[3] *(tj.* $|f|$ *i* f *jsou integrovatelné). Potom platí*

$$(L) \int_a^b f(x)\,dx = (K) \int_a^b f(x)\,dx$$

Tato věta říká, že třída lebesgueovsky integrovatelných funkcí je podtřídou kurzweilovsky integrovatelných funkcí, přičemž to, o co se liší, jsou pouze neabsolutně integrovatelné funkce v Kurzweilově smyslu.

[3]Přesněji, existuje-li Lebesgueův integrál dané funkce, pak existuje i Kurzweilův integrál; a zároveň nezáporná funkce je lebesgueovsky integrovatelná právě tehdy, je-li kurzweilovsky integrovatelná.

1.4 Stieltjesův integrál

Integrály Stieltjesova[4] typu se vyznačují tím, že zde integrujeme nikoliv vzhledem k integrační proměnné jako dosud, ale k **funkci** integrační proměnné. Funkci f, kterou integrujeme, nazýváme **integrand**, a funkci G, vzhledem ke které integrujeme, nazýváme **integrátor**. Píšeme

$$\int f(x)\,dG(x) = \int f\,dG.$$

Definice 1.4.1 (HKS integrál - klasická definice). *Řekneme, že funkce f na intervalu $[a,b]$ je* ***HKS-integrovatelná*** *vzhledem k funkci $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ a platí $\int_a^b f\,dG = A$ právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemná dělení} \quad \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\text{platí: } \left| A - \sum_{i=1}^n f(x_i)(G(b_i) - G(a_i)) \right| < \varepsilon.$$

Všimněme si, že v případě, že funkce G je identita, tj. $G(x) = x$, splývá definice HKS integrálu s HK integrálem.

Tvrzení 1.4.2 (Saksovo-Henstockovo lemma). *Nechť $f, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ a existuje Henstockův-Kurzweilův integrál $\int_a^b f dG$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr δ_ε s následující vlastností: Je-li $\{[A_j, B_j], z_j\}_{j=1}^m$ libovolný systém disjunktních intervalů obsažených v intervalu $[a,b]$ splňující, že pro všechna j je $z_j \in [A_j, B_j]$ a zároveň*

$$[A_j, B_j] \subset (z_j - \delta_\varepsilon(z_j), z_j + \delta_\varepsilon(z_j)),$$

potom

$$\sum_{j=1}^m \left| f(z_j)(G(B_j) - G(A_j)) - \int_{A_j}^{B_j} f\,dG \right| < \varepsilon.$$

Důkaz lze najít v [2, Lemma 6.5.1], [2, Corollary 6.5.2].

[4] Matematik Stieltjes se věnoval především řetězovým zlomkům a výpočtu momentů pro hmotu rozloženou na přímce - to pro něj bylo motivací pro studium integrálů. Více o jeho práci lze nalézt v [12, kapitola 6].

HKS integrál můžeme definovat klasicky jako v definici 1.4.1 nebo jej také definovat pomocí neurčitého integrálu. Ukážeme, že tyto dvě definice jsou ekvivalentní.

Definice 1.4.3 (HKS integrál, definice pomocí neurčitého integrálu). *Funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je neurčitým HKS integrálem funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vzhledem k funkci $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemná dělení} \quad \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\text{platí: } \sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i) - f(x_i)(G(b_i) - G(a_i))| < \varepsilon.$$

V takovém případě definujeme určitý integrál jako

$$\int_a^b f dG := F(b) - F(a).$$

Tvrzení 1.4.4. *Klasická definice HKS integrálu (definice 1.4.1) je ekvivalentní s definicí HKS integrálu pomocí neurčitého integrálu (definice 1.4.3).*

Důkaz. Je-li $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ neurčitý integrál funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vzhledem k funkci $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, vezměme $I := F(b) - F(a)$. Pak pro všechna δ_ε-jemná dělení $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ intervalu $[a,b]$ je

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(G(b_i) - G(a_i)) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i) - f(x_i)(G(b_i) - G(a_i))) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| F(b_i) - F(a_i) - f(x_i)(G(b_i) - G(a_i)) \right| < \varepsilon.$$

Existuje-li naopak $\int_a^b f dG$ podle klasické definice, pak podle Saksova-Henstockova lemmatu pro každý δ_ε-jemný systém $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i)(G(b_i) - G(a_i)) - \int_{a_i}^{b_i} f\, dG \right| < \varepsilon.$$

Vezmeme-li

$$F(t) \overset{5}{:=} \int_a^t f\, dg,\ t \in [a,b],$$

pak

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i)(g(b_i) - g(a_i)) - (F(b_i) - F(a_i)) \right| < \varepsilon.$$

□

[5] Je-li $[a,t] \subset [a,b]$, pak existence integrálu na intervalu $[a,b]$ implikuje existenci na intervalu $[a,t]$. Plyne z [2, Theorem 6.2.9].

Stieltjesovy integrály v teorii pravděpodobnosti

Je-li X náhodná veličina se **spojitým** rozdělením a $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je její distribuční funkce; a je-li $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pak střední hodnota transformované náhodné veličiny $g(X)$ je dána vztahem

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dF(x), \tag{1.1}$$

existuje-li integrál vpravo. Tento integrál je Stieltjesův, přičemž integrátor je zde distribuční funkce náhodné veličiny. Ta musí být neklesající, zprava spojitá a navíc musí splňovat, že $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ a $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
Podle *Radonovy-Nikodymovy věty*[6] existuje nezáporná měřitelná funkce f, kterou nazýváme hustota, taková, že pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{1.2}$$

Díky tomu můžeme tento Stieltjesův integrál, jehož integrátorem je distribuční funkce F, převést na „klasický" integrál, jehož integrátorem je identická funkce $G(x) = x$ a ten už dovedeme spočítat (umíme-li najít primitivní funkci k $g(x)f(x)$ v uzavřeném tvaru), tedy

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dF(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\, dx.$$

Má-li náhodná veličina diskrétní rozdělení, tento integrál nemůžeme přepsat pomocí „klasického" integrálu a je nutné pracovat se Stieltjesovým integrálem (1.1)
V teorii pravděpodobnosti pracujeme obvykle s Lebesgueovým-Stieltjesovým integrálem, který je absolutně konvergentní. V případě, že integrál (1.1) neexistuje, řekneme, že náhodná veličina nemá střední hodnotu. Pokud bychom však tímto vztahem definovali střední hodnotu pro Kurzweilův-Stieltjesův integrál, který je neabsolutně konvergentní a obecnější nežli Lebesgueův-Stieltjesův integrál, rozšířili bychom tak pojem střední hodnota náhodné veličiny i pro případy, že integrál (1.1) je neabsolutně konvergentní.

[6] Rozdělení spojité náhodné veličiny X s distribuční funkcí F je pravděpodobnostní míra μ_F, která je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře μ (píšeme $\mu_F << \mu$). To znamená, že pro libovolnou měřitelnou množinu A platí, že je-li $\mu(A) = 0$, pak také $\mu_F(A) = 0$. Podle Radonovy-Nikodymovy věty existuje nezáporná měřitelná funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že pro každou borelovsky měřitelnou množinu A platí:

$$\mu_F(A) = \int_A dF(x) = \int_A f(x)\, d\mu(x). \tag{1.3}$$

Takovou funkci nazýváme hustota (též Radonovy-Nikodymova derivace) a je určena jednoznačně až na množinu nulové Lebesgueovy míry. Tedy pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = \frac{d\mu_F}{d\mu}(x) \tag{1.4}$$

Příklad 1.4.5 (Spojité rozdělení). Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu (0,1), tedy rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

a nechť

$$g(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Potom transformovaná náhodná veličina $g(X)$ nemá střední hodnotu ve smyslu Lebesgue-Stieltjesova integrálu, ale má střední hodnotu ve smyslu HKS integrálu. Získáme totiž

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dF(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Tento integrál je neabsolutně konvergentní a jeho hodnota je přibližně 0,62, ale $\int_0^1 |\frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x})|\, dx$ diverguje.

Příklad 1.4.6 (Diskrétní rozdělení). Nechť X je náhodná veličina nabývající kladných celočíselných hodnot, která má rozdělení určené pravděpodobnostní funkcí

$$P[X = k] = \frac{1}{k(k+1)},\ k \in \mathbb{N}.$$

Tedy je to nezáporná funkce a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} P[X = k] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \overset{7}{=} 1.$$

Nechť

$$g(n) = (n+1) \cdot (-1)^n.$$

Potom transformovaná náhodná veličina $g(X)$ nemá střední hodnotu ve smyslu Lebesgueova-Stieltjesova integrálu, ale má střední hodnotu ve smyslu HKS integrálu.

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dF(x) \overset{8}{=} \sum_{k=1}^{\infty} g(k)\, P[X = k] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(-1)^k \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Tato řada je neabsolutně konvergentní a lze ukázat, že má součet $-\log 2$, ale není absolutně konvergentní.

---

[5]Obecný člen řady můžeme rozložit na parciální zlomky $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ a dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - ... = 1.$$

[8]Má-li náhodná veličina X diskrétní rozdělení, tak existuje konečná nebo spočetná posloupnost $\{x_n, p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ taková, že $x_n \in \mathbb{R}$ a čísla $p_n > 0$ splňují $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} p_n = 1$; přičemž pro distribuční funkci veličiny X platí $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0, x_n \leq x} p_n$. V takovém případě je pravděpodobnostní míra μ_F sčítací a platí $\mu_F(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0, x_n \in A} p_n$ pro libovolnou měřitelnou množinu $A \subset \mathbb{R}$.

2. Oscilace

V této kapitole zavedeme pojem oscilace funkce, což je klíčový pojem, pomocí něhož definujeme HKS^p_α integrál v kapitole 3, a budeme zkoumat její vlastnosti.

2.1 Oscilace a medián

Připomeňme nejprve definici normy v L^p prostoru.

Definice 2.1.1. *Nechť $X \subset \mathbb{R}$ je libovolná množina a $f : X \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná funkce. Pro $p \in [1, \infty)$ definujeme normu f jako*

$$||f||_p = \Big(\int_X |f(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Pro $p = \infty$ definujeme

$$||f||_\infty = \inf \Big\{ \alpha \geq 0; \, |f(x)| \leq \alpha \quad \text{pro skoro všechna } x \in X \Big\},$$

tedy infimum čísel $\alpha \geq 0$ takových, že množina $\{x; |f(x)| \geq \alpha\}$ má nulovou Lebesgueovu míru. Tuto normu nazýváme esenciální supremum.

Definice 2.1.2 (Oscilace). *Nechť $p \in [1, \infty]$ a $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je omezený uzavřený interval. Pak **p-oscilaci** měřitelné funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definujeme jako*

$$\operatorname{osc}_p(F, \, [a, b]) := (b - a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c \in \mathbb{R}} ||F - c||_{L^p}.$$

Pro $p = \infty$ položíme $\frac{1}{p} = 0$.

Obyčejnou oscilací *(C-oscilací) budeme rozumět*

$$\operatorname{osc}(F, \, [a, b]) = \operatorname{osc}_C(F, \, [a, b]) := \frac{1}{2} \sup_{x, y \in [a, b]} \Big| F(y) - F(x) \Big|.$$

Obyčejná oscilace se od oscilace pro $p = \infty$ liší v tom, že nezanedbává množiny nulové Lebesgueovy míry.

Definice je převzata z [3, Definition 2.3]

Poznámka. Multiplikativní konstanta $(b - a)^{-\frac{1}{p}}$ v definici oscilace zajišťuje, že oscilace $\operatorname{osc}_p(F, \, [a, b])$ je neklesající funkce v proměnné p, jak bude zřejmé z důkazu tvrzení 2.2.5.

Poznámka. Obyčejnou oscilaci funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ lze ekvivalentně definovat jako

$$\operatorname{osc}_C(F, \, [a, b]) \stackrel{1}{:=} \frac{1}{2} \Big(\sup_{x \in [a, b]} F(x) - \inf_{x \in [a, b]} F(x) \Big).$$

[1] Z vlastností suprema plyne:

$$\sup_{x, y \in [a, b]} |F(y) - F(x)| = \sup_{x, y \in [a, b]} (F(y) - F(x)) =$$

$$= \sup_{y \in [a, b]} F(y) + \sup_{x \in [a, b]} (-F(x)) = \sup_{y \in [a, b]} F(y) - \inf_{x \in [a, b]} F(x).$$

Poznámka. Zatímco v definici p-oscilace vyžadujeme, aby funkce F byla měřitelná, obyčejnou oscilaci lze definovat i pro neměřitelné funkce.

Definice 2.1.3 (Medián)**.** *Nechť $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Řekneme, že číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ je* ***medián*** *funkce F na $[a,b]$, pokud existuje měřitelná množina $M \subset [a,b]$ taková, že $\mu(M) = \frac{1}{2}(b-a)$ a zároveň*

$$\forall x \in M : F(x) \leq \lambda \quad \wedge \quad \forall x \in [a,b] \setminus M : F(x) \geq \lambda.$$

Definice je převzata z [3, Definition 2.5].

Tvrzení 2.1.4 (Existence mediánu)**.** *Každá měřitelná funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ má medián.*

Důkaz. Označme

$$S_1 := \left\{\lambda \in \mathbb{R}; \quad \mu(F^{-1}((-\infty,\lambda))) \leq \frac{b-a}{2}\right\}$$

$$S_2 := \left\{\lambda \in \mathbb{R}; \quad \mu(F^{-1}((\lambda,+\infty))) \leq \frac{b-a}{2}\right\}$$

Z monotonie míry plyne, že funkce $H_1(\lambda) := \mu(F^{-1}((-\infty,\lambda)))$ je neklesající a funkce $H_2(\lambda) := \mu(F^{-1}((\lambda,+\infty)))$ je nerostoucí a pro $i = 1{,}2$ platí:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq H_i(\lambda) \leq b-a,$$

přičemž

$$\mu(F^{-1}(\mathbb{R})) = \lim_{\lambda \to +\infty} H_1(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} H_2(\lambda) = b-a \in \mathbb{R}.$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$A_k := F^{-1}((-\infty,k)).$$

Tato posloupnost množin splňuje $A_k \subseteq A_{k+1}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, proto z věty o spojitosti míry plyne:

$$\lim_{k \to +\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = b-a.$$

Proto musí existovat nějaké $k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\mu(F^{-1}((-\infty,k))) > \frac{b-a}{2},$$

tedy S_1 je shora omezená množina. Ukažme, že je neprázdná. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$B_k := F^{-1}((-\infty,-k)).$$

Tato posloupnost množin splňuje $B_{k+1} \subseteq B_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a všechny tyto množiny mají konečnou míru, proto podle věty o spojitosti míry platí:

$$\lim_{k \to +\infty} \mu(B_k) = \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) = 0.$$

Proto musí existovat nějaké $k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\mu(F^{-1}((-\infty, -k))) < \frac{b-a}{2},$$

tedy S_1 je neprázdná množina. Analogicky dokážeme, že množina S_2 je neprázdná a zdola omezená.

Protože množina S_1 je shora omezená neprázdná, musí existovat její supremum, a protože množina S_2 je zdola omezená a neprázdná, musí existovat její infimum. Označme

$$\lambda_1 := \sup S_1$$

$$\lambda_2 := \inf S_2$$

Pak musí platit, že

$$\lambda_2 \leq \lambda_1.$$

Kdyby to neplatilo, mohli bychom najít čísla c_1, c_2 taková, že

$$\lambda_1 < c_1 < c_2 < \lambda_2,$$

a v takovém případě by platilo

$$\mu(F^{-1}((-\infty, c_1))) > \frac{b-a}{2} \quad \wedge \quad \mu(F^{-1}((c_2, +\infty))) > \frac{b-a}{2}$$

a to by byl spor, neboť $I_1 := F^{-1}((-\infty, c_1))$ a $I_2 := F^{-1}((c_2, +\infty))$ jsou disjunktní množiny a $I_1 \cup I_2 \subseteq [a,b]$. Musí tedy nastat případ $\lambda_2 < \lambda_1$ nebo $\lambda_2 = \lambda_1$.
V případě, že $\lambda_2 < \lambda_1$, je každé číslo $\xi \in (\lambda_2, \lambda_1)$ mediánem funkce F, neboť pro něj existují $\xi_1 \in S_1$ a $\xi_2 \in S_2$ taková, že

$$\xi_2 < \xi < \xi_1,$$

a tedy

$$\mu(F^{-1}((-\infty, \xi])) \leq \mu(F^{-1}((-\infty, \xi_1))) \leq \frac{b-a}{2},$$

$$\mu(F^{-1}((\xi, +\infty))) \leq \mu(F^{-1}((\xi_2, +\infty))) \leq \frac{b-a}{2},$$

a protože

$$F^{-1}((-\infty, \xi]) \cup F^{-1}((\xi, +\infty)) = [a,b],$$

musí v obou případech nastávat všude rovnost.
V případě, kdy $\lambda_1 = \lambda_2$, platí

$$[a,b] = F^{-1}((-\infty, \lambda_1)) \cup F^{-1}(\{\lambda_1\}) \cup F^{-1}((\lambda_1, +\infty)),$$

přičemž

$$\mu(F^{-1}(-\infty, \lambda_1)) \leq \frac{b-a}{2} \quad \wedge \quad \mu(F^{-1}(\lambda_1, +\infty)) \leq \frac{b-a}{2}, \tag{2.1}$$

neboť z věty o spojitosti míry máme:

$$\mu(F^{-1}((-\infty,\lambda_1)) = \lim_{\lambda \to \lambda_{1-}} \mu(F^{-1}((-\infty,\lambda))$$

Pro každé $\lambda < \lambda_1$. platí $\lambda \in S_1$, a tedy $\mu(F^{-1}((-\infty,\lambda)) \leq \frac{b-a}{2}$. Limitní přechod $\lambda \to \lambda_{1\_}$ pak tuto nerovnost zachová. Druhá nerovnost v (2.1) se ukáže analogicky. Předpokládejme, že obě nerovnosti (2.1) jsou ostré (nastane-li v jednom případě rovnost, pak je ihned vidět, že λ_1 je medián F). Protože funkce

$$h(t) := \mu([a,t] \cap F^{-1}(\{\lambda_1\}))$$

je spojitá na intervalu $[a,b]$, podle věty o nabývání mezihodnot[2] najdeme $t_0 \in [a,b]$ takové, že

$$h(t_0) = \mu([a,t_0] \cap F^{-1}(\{\lambda_1\})) = \frac{b-a}{2} - \mu(F^{-1}(-\infty, \lambda_1)).$$

V takovém případě označme

$$A := [a,t_0] \cap F^{-1}(\{\lambda_1\}),$$

$$B := (t_0, b] \cap F^{-1}(\{\lambda_1\}).$$

Množinu $F^{-1}(\{\lambda_1\})$ lze tedy rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny A, B tak, že

$$F^{-1}(\{\lambda_1\}) = A \cup B$$

a zároveň

$$\mu(A \cup F^{-1}(-\infty, \lambda_1)) = \frac{b-a}{2},$$

$$\mu(B \cup F^{-1}((\lambda_1, +\infty))) = \frac{b-a}{2},$$

přičemž platí

$$\forall x \in A \cup F^{-1}((-\infty, \lambda_1)) : \quad F(x) \leq \lambda_1,$$

$$\forall x \in B \cup F^{-1}((\lambda_1, +\infty)) : \quad F(x) \geq \lambda_1.$$

Tedy λ_1 je medián funkce F.

□

Poznámka. Medián nemusí být určen jednoznačně.

Příklad 2.1.5. Mediánem funkce $F : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

může být jakékoliv číslo z intervalu [0,1]. Množina M nechť je interval $[0, 1)$. Potom pro libovolné $\lambda \in [0,1]$ platí, že $F \leq \lambda$ na M a $F \geq \lambda$ na $[0, 2] \setminus M$.

[2] Je-li $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ **spojitá** funkce, pak na $[a,b]$ nabývá všech hodnot mezi $F(a)$ a $F(b)$.

Tvrzení 2.1.6 (Jednoznačnost mediánu)**.** *Medián **spojité** funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ je určen jednoznačně.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existují dva různé mediány λ_1, λ_2 takové, že

$$\lambda_1 < \lambda_2.$$

K nim přísluší z definice mediánu měřitelné množiny $M_1, M_2 \subset [a,b]$, které mají míru $\frac{b-a}{2}$ a platí, že

$$\forall x \in M_1 : F(x) \leq \lambda_1 \quad \wedge \quad \forall x \in [a, b] \setminus M_1 : F(x) \geq \lambda_1$$

$$\forall x \in M_2 : F(x) \leq \lambda_2 \quad \wedge \quad \forall x \in [a, b] \setminus M_2 : F(x) \geq \lambda_2.$$

S využitím těchto vlastností dostáváme:

$$\frac{b-a}{2} = \mu(M_2) \geq \mu(F^{-1}((-\infty,\lambda_2))) \geq \mu(M_1) + \mu(F^{-1}((\lambda_1,\lambda_2))) =$$

$$= \frac{b-a}{2} + \mu(F^{-1}((\lambda_1,\lambda_2))).$$

Z toho plyne, že

$$\mu(F^{-1}((\lambda_1, \lambda_2))) = 0.$$

Vzor otevřeného intervalu (λ_1, λ_2) při spojitém zobrazení F musí být otevřená množina. Z toho plyne, že $F^{-1}((\lambda_1, \lambda_2))$ je otevřená množina nulové míry, tedy musí to být prázdná množina. Tedy pro obor hodnot funkce F musí platit

$$H_F \subset [0, \lambda_1] \cup [\lambda_2, \infty].$$

Protože obraz intervalu $[a,b]$ při spojitém zobrazení F musí být interval, dostáváme, že nutně $H_F \subset [0, \lambda_1]$ nebo $H_F \subset [\lambda_2, \infty]$. Ani jedna z těchto možností ale nemůže nastat, neboť v prvním případě by $\forall x \in [a,b] : F(x) \leq \lambda_1$, tedy λ_2 nemůže být mediánem funkce F; a ve druhém případě by $\forall x \in [a,b] : F(x) \geq \lambda_2$, tedy λ_1 nemůže být mediánem funkce F. Tím získáváme spor s naším předpokladem. □

Příklad 2.1.7. Medián funkce $\sin x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ je roven 0.

Příklad 2.1.8. Medián funkce $\sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ je roven $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Měřitelnou množinou M, jejíž Lebesgueova míra je rovna polovině délky intervalu $[0, \pi]$, je sjednocení intervalů $M = [0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4},\pi]$, přičemž

$$\forall x \in M : \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] : \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Následující věta je i s důkazem převzata z [3, Proposition III.6].

Tvrzení 2.1.9 (Vztah oscilace a mediánu)**.** *Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$ je medián funkce F na intervalu $[a, b]$ a $p \in [1, \infty] \cup \{C\}$. Potom*

$$\mathrm{osc}_p(F, [a, b]) \leq (b-a)^{-\frac{1}{p}} \, ||F - \lambda||_p \leq 2^{1-\frac{1}{p}} \, \mathrm{osc}_p(F, [a, b])$$

Speciálně pro $p = 1$ dostáváme

$$\mathrm{osc}_1(F, [a, b]) = (b-a)^{-1} \, ||F - \lambda||_1.$$

Poznámka. Určit medián funkce může být jednodušší úkon než určit její oscilaci pro dané $p \in [1, \infty]$. V situaci, kdy známe medián funkce a neznáme její oscilaci, můžeme využít odhadu

$$2^{-1+\frac{1}{p}}\, ||F - \lambda||_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \operatorname{osc}_p(F, [a,b]) \leq ||F - \lambda||_p.$$

Důkaz. První nerovnost je zřejmá, neboť pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$ je

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F - c||_p \leq ||F - \lambda||_p.$$

Dokažme druhou nerovnost. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\lambda = 0$. (pokud by byl medián nenulový, přičteme k funkci $-\lambda$ a nezmění to hodnotu oscilací). Nechť $M_+ \subset [a,b]$ je měřitelná množina taková, že $\mu(M_+) = \frac{1}{2}(b-a)$ a zároveň

$$F \geq 0 \text{ na } M_+ \quad \wedge \quad F \leq 0 \text{ na } [a,b] \setminus M_+.$$

Označme $M_- := [a,b] \setminus M_+$. Zvolme $c \geq 0$. Protože funkce $t \mapsto |t|^p$ je pro $p \geq 1$ konvexní, získáváme následující odhady

$$\forall x \in M_+ : |F(x)|^p = |F(x) - c + c|^p = 2^p \Big| \frac{F(x) - c}{2} + \frac{c}{2} \Big|^p \leq$$

$$\leq 2^p \Big(\frac{1}{2}|F(x) - c|^p + \frac{1}{2}c^p \Big) = 2^{p-1}(|F(x) - c|^p + c^p).$$

Pro libovolná čísla $A, B \in \mathbb{R}^+$ a $p \in [1, \infty)$ platí odhad

$$(A + B)^p \geq A^p + B^p,$$

neboť $f(x) = x^p$ je konvexní funkce (pro $p \geq 1$) splňující $f(0) = 0$ a tedy je tzv. superaditivní, to znamená, že pro všechna $x,y \in \mathbb{R}^+$ platí: $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$. Proto

$$|c + |F(x)||^p \geq c^p + |F(x)|^p.$$

Z toho získáváme odhad

$$\forall x \in M_- : \quad |F(x)|^p \leq |c + |F(x)||^p - c^p \leq 2^{p-1}(|c - F(x)|^p - c^p)$$

Integrací přes $[a,b]$ dostaneme

$$\int_a^b |F(x)|^p\, dx = \int_{M_+} |F(x)|^p\, dx + \int_{M_-} |F(x)|^p\, dx \leq$$

$$\leq 2^{p-1} \Big(\int_{M_+} (|F(x) - c|^p + c^p) dx + \int_{M_-} (|F(x) - c|^p - c^p) dx \Big)$$

$$= 2^{p-1} \Big(\int_{M_+} (|F(x) - c|^p) dx + c^p \mu(M_+) + \int_{M_-} (|F(x) - c|^p) dx - c^p \mu(M_-) \Big) =$$

$$= 2^{p-1} \int_a^b |F(x) - c|^p dx,$$

protože množiny M_+ a M_- mají stejnou míru. Tedy

$$\forall c \geq 0 : \int_a^b |F(x)|^p\, dx \leq 2^{p-1} \int_a^b |F(x) - c|^p dx. \tag{2.2}$$

Protože nerovnost (2.3) platí pro každou funkci F, která má nulový medián, můžeme místo ní uvažovat funkci $-F$ a tedy získáme odhad

$$\forall c \geq 0: \int_a^b |F(x)|^p \, dx \leq 2^{p-1} \int_a^b |-F(x)-c|^p dx = 2^{p-1} \int_a^b |F(x)+c|^p dx. \quad (2.3)$$

Z odhadů (2.3) a (2.4) tedy plyne:

$$\forall c \in \mathbb{R}: \int_a^b |F(x)|^p \, dx \leq 2^{p-1} \int_a^b |F(x)-c|^p dx.$$

Proto

$$||F||_p^p \leq 2^{p-1} \left(\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F-c||_p \right)^p$$

Protože funkce $t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$ je pro $p > 1$ rostoucí, můžeme obě strany nerovnice umocnit na $\frac{1}{p}$ a nerovnost se zachová. Tedy

$$||F||_p \leq 2^{\frac{p-1}{p}} \inf_{c \in \mathbb{R}} ||F-c||_p = 2^{\frac{p-1}{p}} (b-a)^{\frac{1}{p}} \operatorname{osc}_p(F, [a,b]).$$

□

2.2 Vlastnosti oscilace

Příklad 2.2.1. Uvažujme funkci $f : [-1{,}1] \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1{,}1] \setminus \{\frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}\} \\ \frac{1}{x} & x \in \{\frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

Pak pro $p = C$ je

$$\operatorname{osc}_C(f, [-1,1]) = +\infty,$$

neboť pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$f\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2^k}} = 2^k,$$

a tedy

$$\operatorname{osc}_C(f,[-1{,}1]) \geq \frac{1}{2} \left| f(2^{-k}) - f(0) \right| = \frac{2^k - 1}{2},$$

přičemž pravá strana roste nade všechny meze.
Zatímco pro $p = \infty$ je

$$\operatorname{osc}_\infty(f, [-1,1]) = \inf_{c \in \mathbb{R}} ||f(x) - c||_\infty = ||f(x) - 1||_\infty = 0,$$

neboť funkce $f(x) - 1$ je skoro všude rovna nule (tedy množina těch x, pro která je tato funkce nenulová, má nulovou Lebesgueovu míru).

Tvrzení 2.2.2. *Je-li F **spojitá** funkce na $[a,b]$, pak*

$$\operatorname{osc}_C(F,\ [a,b]) = \operatorname{osc}_\infty(F,\ [a,b]).$$

Důkaz. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty nabývá spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu svého maxima i minima. Označme tedy

$$M := \max_{x\in[a,b]} F(x),$$

$$m := \min_{x\in[a,b]} F(x).$$

Pro spojitou funkci F na kompaktním intervalu $[a,b]$ tedy platí

$$\operatorname{osc}_C(F,\ [a,b]) = \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[a,b]} \Big|F(y) - F(x)\Big| = \frac{1}{2}(M-m).$$

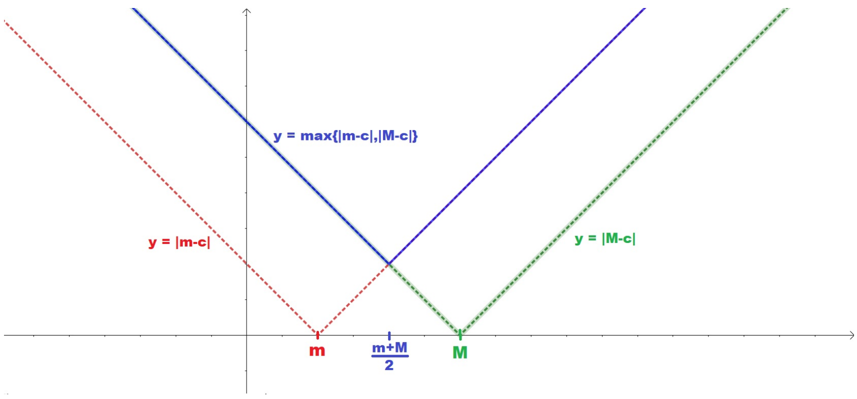
Esenciální supremum (*tj. supremum skoro všude*) spojité funkce je rovno jejímu supremu, tedy $||F||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |F(x)|$. Tedy

$$\operatorname{osc}_\infty(F,\ [a,b]) = \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F(x)-c||_\infty = \inf_{c\in\mathbb{R}} \sup_{x\in[a,b]} |F(x)-c|.$$

Ze spojitosti funkce F plyne spojitost funkce $|F(x)-c|$, kde $c\in\mathbb{R}$. Ta musí nabývat suprema v bodě, kde funkce F nabývá maxima nebo minima. Proto

$$\sup_{x\in[a,b]} |F(x)-c| = \max\{|M-c|, |m-c|\}.$$

Snadno si rozmyslíme, že infimum z těchto hodnot získáme volbou $c = \frac{M+m}{2}$.



Obrázek 2.1: Funkce $y = \max\{|m-c|; |M-c|\}$ nabývá minima pro $c = \frac{M+m}{2}$.

Dostáváme tedy

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \sup_{x\in[a,b]} |F(x)-c| = \max\left\{\left|M - \frac{M+m}{2}\right|, \left|m - \frac{M+m}{2}\right|\right\} = \frac{1}{2}(M-m).$$

□

Tvrzení 2.2.3. *Nechť $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je **omezená** měřitelná funkce a $p \in [1, \infty]$. Označme*

$$A := \inf_{x \in [a,b]} F(x) \quad a \quad B := \sup_{x \in [a,b]} F(x).$$

Pak pro infimum funkce $H(c) = ||F(x) - c||_p$ platí

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} H(c) = \inf_{c \in [A,B]} H(c).$$

Důkaz. Chceme ukázat, že

$$\forall c \in (-\infty, A) \cup (B, \infty) : \inf_{z \in \mathbb{R}} H(z) \leq H(c).$$

Je-li $c \in (B, \infty)$, potom

$$|F(x) - c| = c - F(x) > B - F(x) = |F(x) - B|.$$

Protože funkce $t \mapsto t^p$ je pro $p \in [1, \infty)$ rostoucí, platí implikace

$$x > y \implies x^p > y^p.$$

Proto

$$|F(x) - c|^p > |F(x) - B|^p.$$

Z monotonie integrálu dostaneme

$$\int_a^b |F(x) - c|^p \, dx \geq \int_a^b |F(x) - B|^p \, dx.$$

Protože funkce $t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$ je pro $p \in [1, \infty)$ rostoucí, získáváme

$$\left(\int_a^b |F(x) - c|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_a^b |F(x) - B|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tedy

$$||F(x) - c||_p \geq ||F(x) - B||_p.$$

Tím pádem

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} H(c) = \inf_{c \leq B} H(c).$$

Je-li $c \in (-\infty, A)$, postupujeme analogicky.

$$|F(x) - c| = F(x) - c > F(x) - A = |F(x) - A|.$$

Tedy

$$||F(x) - c||_p \geq ||F(x) - A||_p.$$

V případě $p = \infty$ platí pro $c > B$ nerovnost

$$||F(x) - c||_\infty \geq ||F(x) - B||_\infty$$

a pro $c < A$ platí nerovnost

$$||F(x) - c||_\infty \geq ||F(x) - A||_\infty.$$

Celkem tedy získáváme

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} H(c) = \inf_{c \in [A,B]} H(c).$$

$\square$

Tvrzení 2.2.4 (Trojúhelníková nerovnost pro oscilaci). *Jsou-li F_1 a F_2 měřitelné funkce na intervalu $[a,b]$ a $p \in [1, \infty] \cup \{C\}$, potom*

$$\mathrm{osc}_p(F_1 + F_2,\ [a,b]) \leq \mathrm{osc}_p(F_1,\ [a,b]) + \mathrm{osc}_p(F_2,\ [a,b]).$$

Důkaz. Nechť $p \in [1, \infty]$. Přepišme oscilaci funkce $F_1 + F_2$ z definice.

$$\mathrm{osc}_p(F_1 + F_2,\ [a,b]) = (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c \in \mathbb{R}} ||F_1 + F_2 - c||_{L^p}.$$

Číslo c lze zapsat jako $c = c_1 + c_2$, přičemž

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F_1 + F_2 - c||_{L^p} = \inf_{c_1, c_2 \in \mathbb{R}} ||F_1 - c_1 + F_2 - c_2||_{L^p} \leq$$

$$\leq \inf_{c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \Big(||F_1 - c_1||_{L^p} + ||F_2 - c_2||_{L^p} \Big) =$$

$$= \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} \Big(||F_1 - c_1||_{L^p} \Big) + \inf_{c_2 \in \mathbb{R}} \Big(||F_2 - c_2||_{L^p} \Big).$$

V předposledním kroku jsme využili trojúhelníkovou nerovnost L^p normy a v posledním kroku jsme využili toho, že infimum součtu dvou funkcí přes různé proměnné je aditivní, tedy je rovno součtu jejich infim, tj.

$$\inf_{a,b} (f(a) + g(b)) = \inf_a f(a) + \inf_b g(b).$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{osc}_p(F_1 + F_2,\ [a,b]) &\leq (b-a)^{-\frac{1}{p}} \Big(\inf_{c_1 \in \mathbb{R}} (||F_1 - c_1||_{L^p}) + \inf_{c_2 \in \mathbb{R}} (||F_2 - c_2||_{L^p}) \Big). \\ &= \mathrm{osc}_p(F_1,\ [a,b]) + \mathrm{osc}_p(F_2,\ [a,b]). \end{aligned}$$

Je-li $p = C$, potom

$$\mathrm{osc}_p(F_1 + F_2,\ [a,b]) = \frac{1}{2} \sup_{x,y \in [a,b]} \Big| (F_1 + F_2)(y) - (F_1 + F_2)(x) \Big| =$$

$$= \frac{1}{2} \sup_{x,y \in [a,b]} \Big| F_1(y) + F_2(y) - F_1(x) - F_2(x) \Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \sup_{x,y \in [a,b]} \Big| F_1(y) - F_1(x) \Big| + \frac{1}{2} \sup_{x,y \in [a,b]} \Big| F_2(y) - F_2(x) \Big| =$$

$$= \mathrm{osc}_p(F_1,\ [a,b]) + \mathrm{osc}_p(F_2,\ [a,b]).$$

$\square$

Tvrzení 2.2.5. *Nechť* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je měřitelná funkce, pak*

$$H(p) := \operatorname{osc}_p(F,\, [a,b])$$

*je **neklesající** funkce na intervalu* $[1,\infty)$.

Důkaz. Chceme dokázat, že platí

$$\forall p,q \in [1,\infty) \quad p<q \implies H(p) \le H(q).$$

Připomeňme Hölderovu nerovnost[3], která říká, že pro čísla $p,\, q \in [1,\infty]$ splňující $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ a pro měřitelné funkce $f,g : X \to \mathbb{R}^*$, kde $X \subset \mathbb{R}$, platí:

$$||f\,g||_1 \le ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

Nyní použijeme Hölderovu nerovnost na funkce 1 a $|f|^p$ a sdružené exponenty $\frac{q}{q-p}$ a $\frac{q}{p}$, pro něž je součet jejich převrácených hodnot roven 1.

$$|||f|^p \cdot 1||_1 \le |||f|^p||_{\frac{q}{p}} \cdot ||1||_{\frac{q}{q-p}}.$$

To znamená

$$\int_X |f(x)|^p\,dx \le \Big(\int_X (|f(x)|^p)^{\frac{q}{p}}\,dx\Big)^{\frac{p}{q}} \cdot (\mu(X))^{\frac{q-p}{q}}.$$

Umocníme-li obě strany nerovnice na $\frac{1}{p}$, získáme

$$||f||_p \le ||f||_q \cdot (\mu(X))^{\frac{q-p}{pq}},$$

kde $\mu(X) = \mu([a,b]) = b-a$. Z toho dostáváme, že

$$H(p) = \operatorname{osc}_p(F,\, [a,b]) = (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_p$$

$$\le (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_q\, (b-a)^{\frac{q-p}{pq}}$$

$$= (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_q\, (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

$$= (b-a)^{-\frac{1}{q}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_q = \operatorname{osc}_q(F,\, [a,b]) = H(q).$$

□

[3]Hölderova nerovnost je důsledek tzv. **Youngovy nerovnosti**, která říká, že pro libovolné $x \in [0,1]$ a pro všechna $a,b \in \mathbb{R}$ platí:

$$xa + (1-x)b \ge a^x b^{1-x}.$$

Speciálním případem Hölderovy nerovnosti ($p=q=2$) je tzv. **Cauchy-Schwarzova nerovnost**, která říká, že v libovolném prostoru X se skalárním součinem $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ platí:

$$\forall x,y \in X: \quad \langle x\,,y\rangle \le ||x||\,||y||.$$

Následující lemma lze i s důkazem nalézt v [7, Theorem 3.10.7].

Lemma 2.2.6. *Nechť* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je měřitelná funkce a* $||f||_\infty < +\infty$*, pak*

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty.$$

Důkaz. Je-li $f(x) = 0$ skoro všude, pak $||f||_p = 0$ pro všechna $p \in [1,\infty]$ a tvrzení platí triviálně. Předpokládejme tedy, že f není nulová skoro všude. Označme

$$M := ||f||_\infty.$$

Potom pro skoro všechna $x \in [a,b]$ platí

$$f(x) \leq M.$$

a tedy

$$||f||_p \leq ||M||_p.$$

Zvolme $\varepsilon \in (0,1)$ a označme $E := \{x \in [a,b];\, |f(x)| > \varepsilon\, M\}$. Pro $M > 0$ má tato množina nutně kladnou míru. Pak platí

$$\int_a^b |f(x)|^p\, dx \geq \int_E |f(x)|^p\, dx \geq \int_E (\varepsilon\, M)^p\, dx = (\varepsilon\, M)^p\, \lambda(E).$$

Umocněním obou stran nerovnice na $\frac{1}{p}$ získáme

$$||f||_p \geq \varepsilon\, M\, (\lambda(E))^{\frac{1}{p}}.$$

Dohromady tedy máme odhad normy

$$\varepsilon\, M\, (\lambda(E))^{\frac{1}{p}} \leq ||f||_p \leq ||M||_p.$$

Zatím však nevíme, zda $\lim_{p\to\infty} ||f||_p$ existuje. Dostáváme

$$\liminf_{p\to\infty} \varepsilon\, M\, (\lambda(E))^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{p\to\infty} ||f||_p \leq \limsup_{p\to\infty} ||f||_p \leq \limsup_{p\to\infty} ||M||_p,$$

$$\lim_{p\to\infty} \varepsilon\, M\, (\lambda(E))^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{p\to\infty} ||f||_p \leq \limsup_{p\to\infty} ||f||_p \leq \lim_{p\to\infty} ||M||_p,$$

$$\varepsilon\, M \leq \liminf_{p\to\infty} ||f||_p \leq \limsup_{p\to\infty} ||f||_p \leq M.$$

Protože ε jsme mohli volit libovolně blízko 1, získáváme, že limita norem $||f||_p$ existuje a je rovna esenciálnímu supremu funkce f, tedy

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p = M = ||f||_\infty.$$

□

Poznámka. Funkce $H(p) := ||f||_p$, kde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je libovolná měřitelná funkce, obecně nemusí být monotónní. Jak jsme ale dokázali, za předpokladu, že $||f||_\infty < +\infty$ musí vždy existovat její limita v $+\infty$.

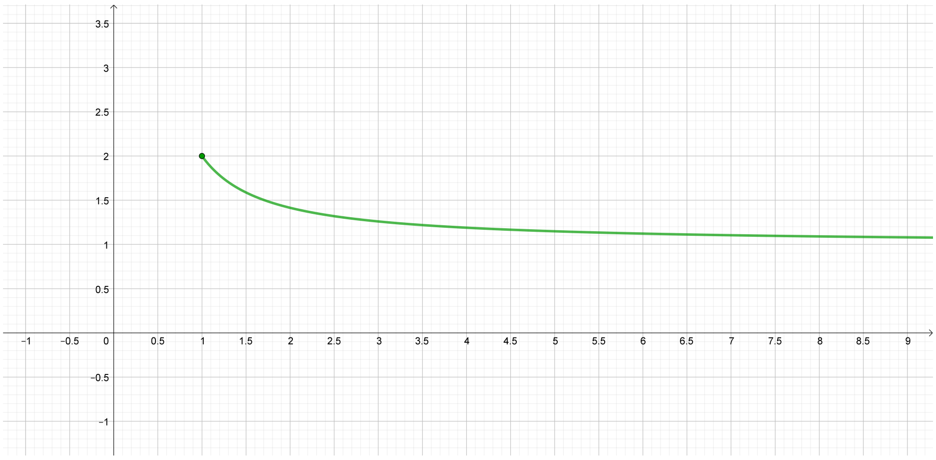
Příklad 2.2.7. Norma konstantní funkce na intervalu délky větší než 1 je klesající funkce v proměnné p. Například norma funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [0,2] \\ 1 & x \in [0,2] \end{cases}$$

je

$$||f||_p = \left(\int_0^2 |1|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}},$$

a to je klesající funkce v proměnné p.



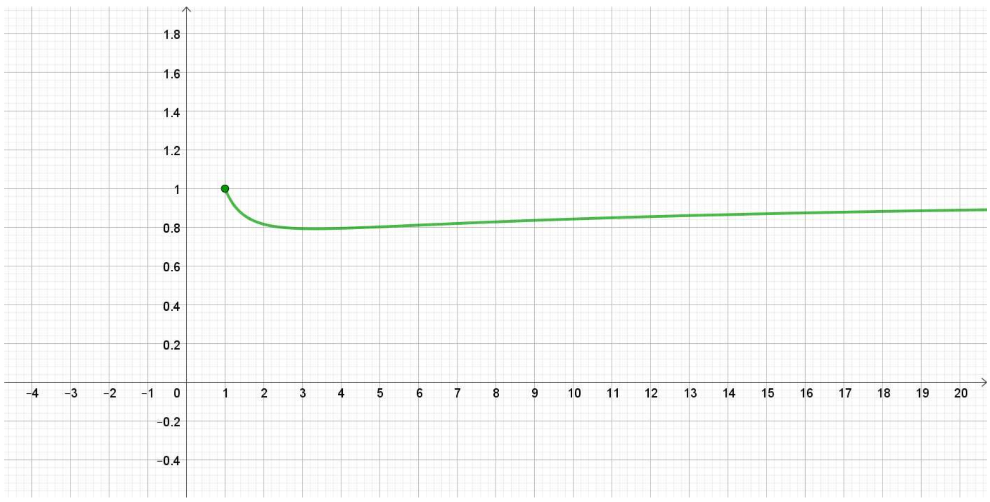
Obrázek 2.2: Graf funkce $H(p) := ||f||_p = 2^{\frac{1}{p}}$

Limitou této funkce v $+\infty$ je esenciální supremum funkce f, tedy $||f||_\infty = 1$.

Příklad 2.2.8. Norma funkce $f(x) = x$ na intervalu $[-1,1]$ je

$$||x||_p = \left(\int_{-1}^1 |x|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{2}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}}$$

a tato funkce monotónní není (příklad 2.3.1). Její limitou v $+\infty$ je $||f||_\infty = 1$.



Obrázek 2.3: Graf funkce $H(p) := ||f||_p = \left(\frac{2}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}}$

Tvrzení 2.2.9. *Nechť $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce a $||F||_\infty < +\infty$, pak*

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{osc}_p(F,\ [a,b]) = \operatorname{osc}_\infty(F,\ [a,b]).$$

Důkaz. Funkce $H(p) := \operatorname{osc}_p(F,\ [a,b])$ je dle tvrzení 2.2.5 monotónní a tedy musí existovat její limita.

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{osc}_p(F,\ [a,b]) = \lim_{p\to\infty} (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_p = \lim_{p\to\infty} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_p$$

Chceme ukázat, že

$$\lim_{p\to\infty} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_p = \inf_{c\in\mathbb{R}} \lim_{p\to\infty} ||F-c||_p = \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_\infty.$$

Dle předchozího lemmatu získáváme, že pro libovolnou konstantu $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{p\to\infty} ||F-c||_p = ||F-c||_\infty.$$

To je bodová konvergence, tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \exists p_0 \in (1,\infty) \quad \forall p \geq p_0 : \Big|\, ||F-c||_p - ||F-c||_\infty \Big| < \varepsilon.$$

Tato konvergence bude dokonce stejnoměrná, protože malá změna hodnoty c způsobí malou změnu výrazu $|\, ||F-c||_p - ||F-c||_\infty \,|$, tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \Big| ||F-c+\delta||_p - ||F-c+\delta||_\infty - (||F-c||_p - ||F-c||_\infty) \Big| < \varepsilon$$

Označme výraz v absolutní hodnotě

$$V(p) := ||F-c+\delta||_p - ||F-c+\delta||_\infty - (||F-c||_p - ||F-c||_\infty)$$

a odhadujme tento výraz nejprve shora. Použitím trojúhelníkové nerovnosti pro normu dostáváme

$$||F-c+\delta||_p \leq ||F-c||_p + ||\delta||_p$$

a zároveň

$$||F-c||_\infty = ||F-c+\delta-\delta||_\infty \leq ||F-c+\delta||_\infty + ||\delta||_\infty,$$

a tedy

$$||F-c+\delta||_\infty \geq ||F-c||_\infty - ||\delta||_\infty.$$

vynásobením obou stran nerovnice -1 dostáváme

$$-||F-c+\delta||_\infty \leq -||F-c||_\infty + ||\delta||_\infty.$$

Dostáváme tedy horní odhad výrazu $V(p)$:

$$V(p) \leq ||F-c||_p + ||\delta||_p - ||F-c||_\infty + ||\delta||_\infty - (||F-c||_p - ||F-c||_\infty) =$$

$$= ||\delta||_p + ||\delta||_\infty = \delta\,(b-a)^{\frac{1}{p}} + \delta = \delta\,((b-a)^{\frac{1}{p}} + 1).$$

Obdobně získáme dolní odhad výrazu $V(p)$. Použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$||F - c + \delta||_p \geq ||F - c||_p - ||\delta||_p,$$
$$-||F - c + \delta||_\infty \geq -||F - c||_\infty - ||\delta||_\infty.$$

Tedy

$$V(p) \geq ||F - c||_p - ||\delta||_p - ||F - c||_\infty - ||\delta||_\infty - (||F - c||_p - ||F - c||_\infty) =$$
$$= -||\delta||_p - ||\delta||_\infty = -\delta\,(b-a)^{\frac{1}{p}} - \delta = -\delta\,((b-a)^{\frac{1}{p}} + 1).$$

Dohromady tedy získáváme odhad

$$-\delta\,((b-a)^{\frac{1}{p}} + 1) \leq V(p) \leq \delta\,((b-a)^{\frac{1}{p}} + 1).$$

Tedy

$$|V(p)| \leq \delta\,((b-a)^{\frac{1}{p}} + 1)$$

K zadanému $\varepsilon > 0$ tedy volme

$$\delta := \frac{\varepsilon}{1 + (b-a)^{\frac{1}{p}}}.$$

Z provedených úprav vyplývá, že

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_0 \in (1, \infty) \quad \forall p \geq p_0 \quad \forall c \in \mathbb{R} : \Big|\, ||F - c||_p - ||F - c||_\infty \Big| < \varepsilon.$$

Chceme ukázat, že

$$\lim_{p \to \infty} \inf_{c \in \mathbb{R}} ||F - c||_p = \inf_{c \in \mathbb{R}} ||F - c||_\infty.$$

Označme

$$g(c) := ||F - c||_\infty,$$
$$g_p(c) := ||F - c||_p.$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. K němu dovedeme najít p_0 takové, že pro všechna $p \geq p_0$ a pro všechna $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\Big|\, g_p(c) - g(c) \Big| < \varepsilon.$$

Vezměme $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ splňující

$$g(c_1) < \inf g + \varepsilon$$
$$g_p(c_2) < \inf g_p + \varepsilon$$

Potom

$$\inf g_p \leq g_p(c_1) = g(c_1) + (g_p(c_1) - g(c_1)) \leq \inf g + \varepsilon + \varepsilon = \inf g + 2\varepsilon,$$
$$\inf g \leq g(c_2) = g_p(c_2) + (g(c_2) - g_p(c_2)) \leq \inf g_p + \varepsilon + \varepsilon = \inf g_p + 2\varepsilon.$$

Tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ umíme najít p_0 takové, že pro všechna $p \geq p_0$ bude platit

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} g(c) - 2\varepsilon \leq \inf_{c \in \mathbb{R}} g_p(c) \leq \inf_{c \in \mathbb{R}} g(c) + 2\varepsilon.$$

Tedy z definice limity

$$\lim_{p \to \infty} \inf_{c \in \mathbb{R}} g_p(c) = \inf_{c \in \mathbb{R}} g(c).$$

□

Lemma 2.2.10. *Nechť $p \in [1,\infty] \cup \{C\}$, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce a $\lambda > 0$. Potom*
$$\operatorname{osc}_p(\lambda F,\ [a,b]) = \lambda \ \operatorname{osc}_p(F,\ [a,b]).$$

Důkaz. V případě $p = C$ je

$$\operatorname{osc}(\lambda F,\ [a,b]) = \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[a,b]} \Big|\lambda F(y) - \lambda F(x)\Big| = \frac{1}{2}\,|\lambda| \sup_{x,y\in[a,b]} \Big|F(y) - F(x)\Big| =$$

$$= \lambda \ \operatorname{osc}(F,\ [a,b]).$$

Ve druhé rovnosti jsme využili vlastnosti suprema

$$\forall \lambda > 0 : \sup(\lambda f(x)) = \lambda \ \sup(f(x)).$$

V případě $p \in [1,\infty]$ je

$$\operatorname{osc}_p(\lambda F,\ [a,b]) = (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||\lambda F - c|| = (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} |\lambda|\, ||F - \frac{c}{\lambda}|| =$$

$$= |\lambda|\,(b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{y\in\mathbb{R}} \ ||F - y|| = \lambda \ \operatorname{osc}_p(F,\ [a,b])$$

Ve druhé rovnosti jsme využili homogenity normy a ve třetí rovnosti jsme využili vlastnosti infima
$$\forall \lambda > 0 : \inf(\lambda f(x)) = \lambda \ \inf(f(x))$$

□

Lemma 2.2.11. *Nechť $p \in [1,\infty] \cup \{C\}$ a $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Potom*
$$\operatorname{osc}_p(-F,\ [a,b]) = \operatorname{osc}_p(F,\ [a,b])$$

Důkaz. Pro $p = C$ je

$$\operatorname{osc}(-F,\ [a,b]) = \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[a,b]} |-F(y) - (-F(x))| = \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[a,b]} |(-1)\cdot(F(y) - F(x))| =$$

$$= \frac{1}{2}|-1| \sup_{x,y\in[a,b]} |(F(y) - F(x))| = \operatorname{osc}(F,\ [a,b]).$$

Pro $p \in [1,\infty]$ je

$$\operatorname{osc}_p(-F,\ [a,b]) = (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||-F - c|| = (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} \ |-1|\, ||F + c|| =$$

$$= (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{y\in\mathbb{R}} \ ||F - y|| = \operatorname{osc}_p(F,\ [a,b]).$$

Ve druhé rovnosti jsme opět využili homogenitu normy.

□

Lemma 2.2.12. *Nechť $p \in [1, \infty] \cup \{C\}$ a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Potom pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí*

$$\operatorname{osc}_p(\lambda F,\, [a, b]) = |\lambda| \operatorname{osc}_p(F,\, [a, b]).$$

Důkaz.

- Pro $\lambda = 0$ je tvrzení triviální.
- Pro $\lambda > 0$ tvrzení plyne z lemmatu 2.2.10.
- Pro $\lambda < 0$ lze přepsat $\lambda F = (-\lambda)(-F)$ a následně použijeme lemmata 2.2.10 a 2.2.11.

□

Připomeňme definici pseudonormy.

Definice 2.2.13 (Pseudonorma). *Nechť X je vektorový prostor nad tělesem T. Zobrazení $L : X \to R$ nazýváme* ***pseudonorma****, pokud splňuje:*

- $\forall x, y \in X : \; L(x + y) \leq L(x) + L(y)$
- $\forall x \in X \, \forall t \in T : L(tx) = |t| \, L(x)$
- $L(0) = 0$

Řekneme, že zobrazení L je ***norma****, pokud navíc splňuje*

- $L(x) = 0 \iff x = 0$

Tvrzení 2.2.14. *Nechť $p \in [1, \infty] \cup \{C\}$. Zobrazení, které libovolné měřitelné funkci $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ přiřadí její oscilaci; tj. funkcionál definovaný předpisem*

$$L(F) := \operatorname{osc}_p(F,\, [a, b])$$

je pseudonorma.

Důkaz. Plyne z tvrzení 2.2.4 a z lemmatu 2.2.12.

□

Poznámka. Oscilace není norma. Tedy není pravda, že

$$\operatorname{osc}_p(F,\, [a, b]) = 0 \iff \forall x \in [a, b] : \quad F(x) = 0,$$

neboť oscilace každé konstantní funkce je nulová.

Lemma 2.2.15 (Subaditivita oscilace vzhledem k intervalu)**.** *Nechť* $c \in [a,b]$ *a* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Pak*

$$\operatorname{osc}(F,\ [a,b]) \leq \operatorname{osc}(F,\ [a,c]) + \operatorname{osc}(F,\ [c,b]). \tag{2.4}$$

Důkaz. Je-li funkce F neomezená na intervalu $[a,b]$, je také neomezená alespoň na jednom z intervalů $[a,c]$ nebo $[c,b]$. Oscilace neomezené funkce je rovna $+\infty$, tedy v takovém případě nastává rovnost a tvrzení platí.

Předpokládejme, že funkce F je omezená na $[a,b]$. Uvažujme následující případy:

- Je-li
$$\sup_{x\in[a,b]} F(x) = \sup_{x\in[a,c]} F(x) \ \text{ a } \ \inf_{x\in[a,b]} F(x) = \inf_{x\in[a,c]} F(x),$$
potom
$$\sup_{x,y\in[a,b]} \Big|F(y) - F(x)\Big| = \sup_{x,y\in[a,c]} \Big|F(y) - F(x)\Big| \leq$$
$$\leq \sup_{x,y\in[a,c]} \Big|F(y) - F(x)\Big| + \sup_{x,y\in[c,b]} \Big|F(y) - F(x)\Big|.$$
Vynásobením nerovnice $\frac{1}{2}$ získáváme požadovanou nerovnost (2.4).
- Je-li
$$\sup_{x\in[a,b]} F(x) = \sup_{x\in[c,b]} F(x) \ \text{ a } \ \inf_{x\in[a,b]} F(x) = \inf_{x\in[c,b]} F(x),$$
potom postupujeme analogicky jako v předchozím případě.
- Nechť
$$\sup_{x\in[a,b]} F(x) = \sup_{x\in[a,c]} F(x),$$
$$\inf_{x\in[a,b]} F(x) = \inf_{x\in[c,b]} F(x).$$
Chceme ukázat, že
$$\operatorname{osc}(F,\ [a,b]) \leq \operatorname{osc}(F,\ [a,c]) + \operatorname{osc}(F,\ [c,b]).$$
Tedy
$$\sup_{x\in[a,b]} F(x) - \inf_{x\in[a,b]} F(x) \leq \sup_{x\in[a,c]} F(x) - \inf_{x\in[a,c]} F(x) + \sup_{x\in[c,b]} F(x) - \inf_{x\in[c,b]} F(x),$$
$$\sup_{x\in[a,b]} F(x) - \inf_{x\in[a,b]} F(x) \leq \sup_{x\in[a,b]} F(x) - \inf_{x\in[a,c]} F(x) + \sup_{x\in[c,b]} F(x) - \inf_{x\in[a,b]} F(x).$$
Od obou stran nerovnice odečteme $\sup_{x\in[a,b]} F(x)$ a přičteme $\inf_{x\in[a,b]} F(x)$ a vidíme, že stačí dokázat
$$0 \leq -\inf_{x\in[a,c]} F(x) + \sup_{x\in[c,b]} F(x).$$
Ekvivalentně
$$\sup_{x\in[c,b]} F(x) \geq \inf_{x\in[a,c]} F(x),$$
a to musí být vždy splněno, protože $[a,c] \cap [c,b] = \{c\}$ a tedy
$$\inf_{x\in[a,c]} F(x) \leq F(c) \leq \sup_{x\in[c,b]} F(x).$$

- V případě, kdy
$$\sup_{x\in[a,b]} F(x) = \sup_{x\in[c,b]} F(x) \text{ a } \inf_{x\in[a,b]} F(x) = \inf_{x\in[a,c]} F(x),$$
postupujeme analogicky jako v předchozím případě.

$\square$

Poznámka. Nerovnost (2.4) platí pouze pro obyčejnou oscilaci (tj. pro $p = C$), ale neplatí pro p-oscilaci pro žádné $p \in [1, \infty]$. Jako protipříklad uvažme funkci danou předpisem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \\ 1 & x \in (1, 2] \end{cases}$$

Na intervalech $[0, 1]$ a $(1, 2]$ má nulovou oscilaci, neboť je tam konstantní a p-oscilace zanedbává množiny nulové Lebesgueovy míry; ale na intervalu $[0, 2]$ má funkce F oscilaci kladnou. Tedy

$$\operatorname{osc}_p(F,\ [0, 2]) > \operatorname{osc}_p(F,\ [0, 1]) + \operatorname{osc}_p(F,\ [1, 2]).$$

Lemma 2.2.16. *Nechť $p \in [1, \infty] \cup \{C\}$ a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce.*

$$\textit{Je-li } [c, d] \subset [a, b], \textit{pak } \operatorname{osc}_p(F,\ [c, d]) \leq \operatorname{osc}_p(F,\ [a, b]).$$

Důkaz. Pro $p = C$ platí

$$\frac{1}{2} \sup_{x,y\in[c,d]} \Big| F(y) - F(x) \Big| \leq \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[a,b]} \Big| F(y) - F(x) \Big|$$

Tedy

$$\operatorname{osc}_C(F,\ [c, d]) \leq \operatorname{osc}_C(F,\ [a, b]).$$

Nechť $p \in [1, \infty]$. Pro Lebesgueův integrál nezáporné funkce f platí

$$\text{Je-li } A \subset B, \text{ potom } \int_A f(x)dx \leq \int_B f(x)dx.$$

Tedy pro libovolnou konstantu $K \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_c^d |F(x) - K|^p\, dx \leq \int_a^b |F(x) - K|^p\, dx.$$

Protože pro $p \in [1, \infty]$ je funkce $t \to t^{\frac{1}{p}}$ rostoucí, platí

$$\Big(\int_c^d |F(x) - K|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_a^b |F(x) - K|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

a tato nerovnost platí tedy i pro infima

$$\inf_{K\in\mathbb{R}} \Big(\int_c^d |F(x) - K|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \inf_{K\in\mathbb{R}} \Big(\int_a^b |F(x) - K|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Tedy

$$\operatorname{osc}_p(F,\ [c, d]) \leq \operatorname{osc}_p(F,\ [a, b]).$$

$\square$

Z předcházejících dvou lemmat ihned získáme tento důsledek.

Důsledek 2.2.17. *Obyčejná oscilace je konečně subaditivní, tedy je-li funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ a existuje-li $n \in \mathbb{N}$ tak, že $[a,b] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, pak platí:*

$$\operatorname{osc}(F, \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]) \leq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}(F, [a_i, b_i]).$$

Poznámka. Tuto vlastnost obyčejné oscilace využijeme ve 3. kapitole při důkazu aditivity HKS_α integrálu vzhledem k integračnímu oboru. (Tvrzení 3.2.2)

Příklad 2.2.18. *Obyčejná oscilace není spočetně subaditivní, tedy je-li funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $[a,b] = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]$, pak obecně* ***neplatí****, že*

$$\operatorname{osc}(F, \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{osc}(F, [a_i, b_i]).$$

Uvažujme funkci danou předpisem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in (1,2] \end{cases}$$

a následující systém intervalů: [0,1], $[\frac{3}{2}$,2], $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$, ..., tedy

$$\forall i \geq 2 \quad [a_i, b_i] = \left[1 + \frac{1}{2^{i-1}}, 1 + \frac{1}{2^{i-2}}\right].$$

Pak platí, že

$$[0,2] = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i].$$

Oscilace funkce F na intervalu $[0,2]$ je rovna 1, ale na každém z intervalů $[a_i, b_i]$ je funkce F konstantní a tedy má zde nulovou oscilaci. Tedy

$$\operatorname{osc}(F, \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]) = 1 > \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{osc}(F, [a_i, b_i]) = 0.$$

2.3 Příklady

Příklad 2.3.1. Spočtěme oscilaci funkce $F(x) = x$ na intervalu $[-1, 1]$.

Protože funkce F je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu [−1,1], získáváme z tvrzení 2.2.2, že pro $p = \infty$ platí

$$\mathrm{osc}_\infty(x,\ [-1,1]) = \mathrm{osc}_C(x,\ [-1,1]) = \frac{1}{2} \sup_{x,y \in [-1,1]} |y - x| = \frac{1}{2}\Big(1 - (-1)\Big) = 1.$$

Spočtěme oscilaci pro $p \in [1, \infty)$.

$$\mathrm{osc}_p(x,\ [-1,1]) = 2^{-\frac{1}{p}} \inf_{c \in \mathbb{R}} ||x - c||_{L^p}.$$

Z definice L^p normy je

$$||x - c||_{L^p} = \Big(\int_{-1}^{1} |x - c|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Hledejme tedy infimum této funkce proměnné c, kde $p \in [1, \infty)$ je parametr. Protože F je omezená měřitelná funkce na [−1,1], z tvrzení 2.2.3 dostáváme, že

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} ||x - c||_{L^p} = \inf_{c \in [-1,1]} ||x - c||_{L^p}.$$

Infimum tedy budeme hledat pro c z intervalu $[-1, 1]$.

Je-li $c \in [-1, 1]$, pak

$$\int_{-1}^{1} |x - c|^p \, dx = \int_{-1}^{c} (c - x)^p \, dx + \int_{c}^{1} (x - c)^p \, dx = -\int_{c+1}^{0} t^p \, dt + \int_{0}^{1-c} t^p \, dt$$

$$= \frac{(c+1)^{p+1}}{p+1} + \frac{(1-c)^{p+1}}{p+1} = \frac{1}{p+1}\Big((c+1)^{p+1} + (1-c)^{p+1}\Big).$$

Označme $H(c) := \int_{-1}^{1} |x - c|^p \, dx$. Derivace této funkce je

$$H'(c) = (c+1)^p - (1-c)^p, \quad c \in [-1, 1].$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$H'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

Rovnice $H'(c) = 0$ má tedy právě jedno řešení a platí

$$\forall c \in (-\infty, 0) : H'(c) < 0 \quad \wedge \quad \forall c \in (0, \infty) : H'(c) > 0.$$

Tedy funkce $H(c)$ je klesající na intervalu $[-1, 0)$ a rostoucí na $(0, 1]$. Z toho plyne, že nabývá minima pro $c = 0$.

$$H(0) = \frac{2}{p+1}$$

Dostáváme tedy

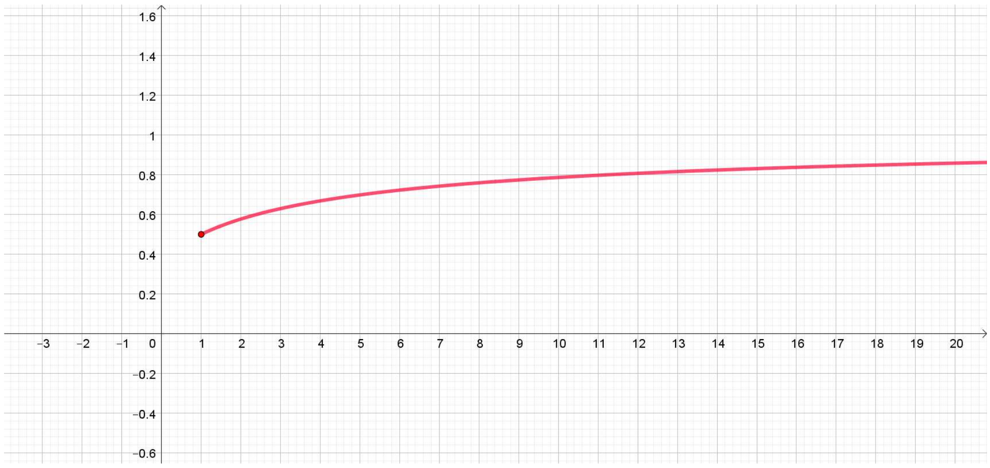
$$\operatorname{osc}_p(x,\ [-1,1]) = 2^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} (H(c))^{\frac{1}{p}} = 2^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Oscilace funkce $F(x) = x$ na intervalu $[-1{,}1]$ je tedy rostoucí funkce v proměnné $p \in [1,\infty]$ a její limita pro p jdoucí do $+\infty$ je rovna jedné.

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to+\infty} e^{\frac{1}{p}\log(\frac{1}{p+1})} = e^{\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\log(\frac{1}{p+1})} = e^0 = 1.$$

Ve druhém kroku jsme ve výpočtu použili větu o limitě složené funkce a ve třetím kroku bychom limitu exponentu vypočítali následujícím způsobem.

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\log(\frac{1}{p+1}) = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}(-\log(p+1)) = -\lim_{p\to+\infty} \frac{\log(p+1)}{p} = 0.$$



Obrázek 2.4: Graf funkce $\operatorname{osc}_p(x,\ [-1,1]) = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$

Poznámka. Jak jsme viděli v Tvrzení 2.2.5, p-oscilace je vždy neklesající funkce v proměnné p (což je zajištěno multiplikativní konstantou $(b-a)^{-\frac{1}{p}}$ v definici oscilace). Poznamenejme ale, že norma funkce $F(x) = x$ na intervalu $[-1{,}1]$, tedy funkce $||x||_p = \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$ monotónní není. (Příklad 2.2.8)

Analogicky bychom mohli spočítat oscilaci funkce $F(x) = x$ na libovolném intervalu tvaru $[-m,m]$ pro $m \in \mathbb{R}^+$ a $p \in [1,\infty]$. Pro $c \in [-m,m]$ je

$$H(c) = \int_{-m}^{m} |x-c|^p\, dx = \frac{1}{p+1}\Big((c+m)^{p+1} + (m-c)^{p+1}\Big),$$

$$H(0) = \frac{1}{p+1}\Big((0+m)^{p+1} + (m-0)^{p+1}\Big) = \frac{2}{p+1}\, m^{p+1}.$$

Dostaneme tedy

$$\operatorname{osc}_p(x,\ [-m,m]) = (2m)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} (H(c))^{\frac{1}{p}} = (2m)^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{2m^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} = m\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Příklad 2.3.2. Spočtěme oscilaci funkce $F(x) = \sin x$ na intervalu $[-\pi,\pi]$.

- Pro **p=C** dostáváme

$$\operatorname{osc}_C(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[-\pi,\pi]} \Big| \sin(y) - \sin(x) \Big| = \frac{1}{2}\Big| \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2}) \Big| =$$

$$= \frac{1}{2}\Big|1 - (-1)\Big| = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

- Pro **p=∞** získáváme z tvrzení 2.2.2, že

$$\operatorname{osc}_\infty(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = osc_C(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = 1,$$

  protože je funkce $\sin x$ spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[-\pi,\pi]$.

Pro $p \in [1,\infty)$ je oscilace dána jako

$$\operatorname{osc}_p(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = (2\pi)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||\sin x - c||_{L^p}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - c|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Protože funkce $\sin x$ je omezená, z tvrzení 2.2.3 dostáváme, že

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - c|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}} = \inf_{c\in[A,B]} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - c|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}},$$

přičemž $A = \inf_{x\in[-\pi,\pi]} \sin x = -1$ a $B = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \sin x = 1$. Víme tedy, že infimum funkce

$$H(c) := \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - c|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

budeme hledat v intervalu $[-1,1]$. Ukážeme, že infimum takové funkce bude vždy nastávat pro $c = 0$ pro všechna $p \in [1,\infty)$.

- Pro **p=1** můžeme využít toho, že medián funkce $\sin x$ na intervalu $[-\pi,\pi]$ je 0 a z Tvrzení 2.1.9 tedy získáváme, že

$$\operatorname{osc}_1(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = (2\pi)^{-1}\, ||\sin x - 0||_1 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, dx =$$

$$= (2\pi)^{-1}\, 2 \int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{1}{2\pi}\, 2 \cdot 2 = \frac{2}{\pi}$$

- Pro $\mathbf{p} \in (1,\infty)$ ukážeme, že funkce

$$h(c) := H^p(c) = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - c|^p\, dx$$

  je rostoucí na intervalu $(0{,}1]$. Analogicky se dokáže, že je tato funkce klesající na $[-1{,}0)$. Z toho potom plyne, že nabývá minima pro $c = 0$.

Podle věty o derivaci integrálu podle parametru získáme

$$h'(c) = \frac{\partial}{\partial c} \int_{-\pi}^{\pi} |c - \sin x|^p \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} p \, |c - \sin x|^{p-1} \operatorname{sgn}(c - \sin x) dx$$

Ověřme předpoklady této věty:

- Funkce $c \mapsto |c - \sin x|^p$ je spojitá pro všechna $c \in [-1{,}1]$, neboť je kompozicí spojitých funkcí, a tedy je měřitelná
- Pro všechna $c \in [-1{,}1]$ a pro všechna $x \in [-\pi{,}\pi]$ existuje vlastní derivace $\frac{\partial}{\partial c} |c - \sin x|^p$, neboť funkce $t \to |t|^p$ je diferencovatelná pro všechna $p > 1$.
- Derivace podle parametru je omezená funkce na omezeném intervalu, tedy k ní dovedeme najít integrovatelnou majorantu s.v.:

  $$\forall c \in [-1{,}1] \quad \Big| p \, |c - \sin x|^{p-1} \operatorname{sgn}(c - \sin x) \Big| \leq p \, 2^{p-1}$$

  a konstantní funkce na omezeném intervalu je integrovatelná.
- Existuje nějaký bod, pro nějž je daný integrál konvergentní, tj.

  $$\exists c_0 \in [-1{,}1] \quad \int_{-\pi}^{\pi} |c_0 - \sin x|^p \, dx < \infty.$$

  Lze volit např. $c_0 = 0$. Integrand je omezená funkce na omezeném intervalu, tedy daný integrál je konvergentní.

Označme

$$M^+ := \{x \in [-\pi{,}\pi] \mid \quad c > \sin x\},$$
$$M^- := \{x \in [-\pi{,}\pi] \mid \quad c < \sin x\}.$$

Potom

$$h'(c) = p \Big(\int_{M^+} (c - \sin x)^{p-1} \, dx \; - \int_{M^-} (\sin x - c)^{p-1} \, dx \Big).$$

K libovolnému $c \in (0{,}1]$ umíme najít takové $\delta > 0$, že

$$M^- = \Big(\frac{\pi}{2} - \delta, \; \frac{\pi}{2} + \delta \Big),$$

přičemž $(-\frac{\pi}{2} - \delta, -\frac{\pi}{2} + \delta) \subset M^+$. Derivaci $h(c)$ pak můžeme zdola odhadnout.

$$h'(c) \geq p \left(\int_{-\frac{\pi}{2}-\delta}^{-\frac{\pi}{2}+\delta} (c - \sin x)^{p-1} \, dx \; - \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} (\sin x - c)^{p-1} \, dx \right) =$$
$$= p \left(\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} (c + \sin y)^{p-1} \, dy \; - \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} (\sin x - c)^{p-1} \, dx \right) =$$
$$= p \left(\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} \Big((c + \sin z)^{p-1} \; - \; (\sin z - c)^{p-1} \Big) \, dz \right) > 0.$$

neboť pro $c \in (0{,}1]$ platí:

$$c + \sin z > \sin z - c$$

a tedy integrand je kladný. Z toho plyne, že funkce h je rostoucí na (0,1].

Analogicky ukážeme, že h je klesající na $[-1,0)$ a z toho plyne, že funkce h nabývá minima v 0. Tedy i funkce $h^{\frac{1}{p}}$ nabývá minima v 0, neboť $t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$ je rostoucí funkce pro libovolné $p \in (1, \infty)$.

Tedy

$$\operatorname{osc}_p(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = (2\pi)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Užitím matematického softwaru tento integrál dovedeme spočítat a po úpravě získáváme

$$\operatorname{osc}_p(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = \pi^{-\frac{1}{2p}} \left(\frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(1+\frac{p}{2})} \right)^{\frac{1}{p}},$$

kde Γ je funkce gama definovaná předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds.$$

Z tvrzení 2.2.5 získáme, že funkce $G(p) := \operatorname{osc}_p(\sin x,\ [-\pi,\pi])$. je monotónní a z tvrzení 2.2.9 dostaneme, že

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{osc}_p(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = \operatorname{osc}_\infty(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = 1.$$

Tedy pro $p \in [1, \infty)$ platí

$$0 < \operatorname{osc}_p(\sin x,\ [-\pi,\pi]) \le 1.$$

Obrázek 2.5: Graf funkce $|\sin x|^p$ na intervalu $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ pro různá p

3. HKS_α^p integrál

V této kapitole se zabýváme vlastnostmi HKS_α^p integrálu, který je zobecněním HKS integrálu.

Definice 3.0.1 (**α-systém**). *Nechť $\alpha \geq 1$ a $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Systém intervalů s význačnými body $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ nazveme **α-systém**, pokud intervaly*

$$(x_i - \alpha(x_i - a_i), x_i + \alpha(b_i - x_i))$$

jsou po dvou disjunktní a jsou všechny obsaženy v I.

*Je-li $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ kalibr, řekneme, že α-systém $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ je **δ-jemný**, pokud*

$$\forall i : [a_i, b_i] \subset (x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)).$$

Poznámka. Systémem v intervalu I budeme rozumět libovolnou množinu nepřekrývajících se intervalů $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^n \subset I$. Dělením intervalu I rozumíme takový systém, který navíc pokrývá interval I, tedy $\bigcup\limits_i [a_i, b_i] = I$.

Následující definice HKS_α integrálu je zobecněním HKS integrálu, přičemž pro $\alpha = 1$ je tato definice ekvivalentní s klasickou definicí HKS integrálu (Definice 1.4.1), jak ukážeme v tvrzení 3.1.9.

Definice 3.0.2 (**HKS_α integrál**). *[3, Definition 3.2] Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $\alpha \geq 1$ a f, F, G jsou **měřitelné funkce** na I. Řekneme, že F je neurčitý HKS_α **integrál** funkce f vzhledem k funkci G, pokud pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon : I \to \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechna δ_ε**-jemné** α**-systémy** $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ v intervalu I platí:*

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}(F - f(x_i)G,\ [a_i, b_i]) < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Značení. Symbolem HK_α budeme rozumět HKS_α pro volbu $G(x) = x$.

Následující definice je zobecněním definice HKS_α integrálu v tom smyslu, že místo obyčejné oscilace pracuje také s p-oscilací.

Definice 3.0.3 (**HKS_α^p integrál**). *[3, Definition 3.2] Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $\alpha \geq 1$ a $p \in [1, \infty]$ nebo $p = C$. Nechť f, F, G jsou **měřitelné funkce** na I. Řekneme, že F je neurčitý HKS_α^p **integrál** funkce f vzhledem k funkci G na intervalu I, pokud pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon : I \to (0,\infty)$ tak, že pro všechny δ**-jemné** α**-systémy** $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ intervalu I platí:*

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p(F - f(x_i)G,\ [a_i, b_i]) < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Značení. Symbolem HK_α^p budeme rozumět HKS_α^p pro volbu $G(x) = x$.

Definice 3.0.4. *Řekneme, že α-systém $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ je **centrovaný**, je-li každý význačný bod x_i středem intervalu $[a_i, b_i]$. HKS_α^p integrál nazýváme centrovaný, uvažujeme-li v definici 3.0.3 pouze centrované α-systémy.*

Poznámka. Z definice je zřejmé, že existence necentrovaného integrálu implikuje existenci centrovaného.

Poznámka. Je-li F neurčitý HKS^p_α integrál funkce f vzhledem k funkci G na I a $C \in \mathbb{R}$ je konstanta, pak i funkce $F + C$ je neurčitý HKS^p_α integrál funkce f vzhledem k funkci G na I, protože přičtení konstanty k libovolné funkci nezmění hodnotu její oscilace.

Poznámka. Je-li $p \in [1,\infty]$, pak k neurčitému integrálu můžeme přičíst funkci, která je nulová skoro všude a získáme opět neurčitý integrál, protože p-oscilace zanedbává množiny nulové Lebesgueovy míry. Proto pro $p \in [1,\infty]$ nemá smysl definovat určitý integrál vztahem $\int_a^b f\,dG = F(b) - F(a)$ jako přírůstek primitivní funkce. Má-li funkce F vlastnost (3.2) a $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce splňující $H(x) = 0$ na $(a,b]$ a $H(a) > 0$, pak funkce $F + H$ je také neurčitým integrálem a splňuje (3.2); nicméně číselná hodnota určitého integrálu by pro tuto funkci byla jiná. Tato definice určitého integrálu má smysl pouze pro HKS_α integrál. (Def. 3.2.7)

Poznámka. Třída HKS^p_α integrovatelných funkcí (pro pevně zvolený integrátor $G : I \to \mathbb{R}$) se s rostoucím α zvětšuje nebo je stejná. Je-li $\alpha_1 < \alpha_2$, pak každý α_2-systém v I je také α_1 systém. Speciálně, třídy HK_α integrovatelných funkcí jsou pro $\alpha \in [1,2]$ totožné a pro $\alpha > 2$ se zvětšují. (dokázáno v [8])

3.1 Vlastnosti HKS^p_α integrálu

Tvrzení 3.1.1. *Nechť $\alpha \geq 1$ a $p, q \in [1,\infty]$. Pro pevně zvolený integrátor $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ označme jako HKS^p_α množinu všech integrovatelných funkcí na intervalu $[a,b]$.*

$$\text{Je-li } p < q, \text{ potom } HKS^q_\alpha \subseteq HKS^p_\alpha.$$

Důkaz. Předpokládejme, že funkce F je neurčitý HKS^q_α integrál funkce f vzhledem k funkci G na $[a,b]$. To znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_q(F - f(x_i)G,\ [a_i, b_i]) < \varepsilon.$$

Z tvrzení 2.2.5 víme, že funkce $H(q) := \operatorname{osc}_q(F,\ I)$ je neklesající, tedy

$$\text{je-li } p < q, \text{ potom } \operatorname{osc}_p(F,\ I) \leq \operatorname{osc}_q(F,\ I).$$

Tedy

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p(F - f(x_i)G,\ [a_i, b_i]) \leq \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_q(F - f(x_i)G,\ [a_i, b_i]) < \varepsilon,$$

z čehož plyne, že F je také neurčitý HKS^p_α integrál funkce f vzhledem k funkci G na $[a,b]$.

□

Poznámka. Inkluze v předchozím tvrzení je ve skutečnosti ostrá, tj. pro $p < q$ platí $HKS^q_\alpha \subset HKS^p_\alpha$. Důkaz lze najít v [3, Theorem 5.5].

Linearita HKS^p_α integrálu

Tvrzení 3.1.2 (Linearita HKS^p_α integrálu vzhledem k integrandu)**.** *Nechť f, g, G jsou měřitelné funkce na $[a,b]$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom platí*

- *Je-li F neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G, pak λF je neurčitý integrál funkce λf vzhledem ke G.* ***(homogenita)***
- *Je-li F_1 neurčitý integrál funkce f_1 vzhledem ke G a F_2 neurčitý integrál funkce f_2 vzhledem ke G, pak $F_1 + F_2$ je neurčitý integrál funkce $f_1 + f_2$ vzhledem ke G.* ***(aditivita)***

Důkaz.

Homogenita

Pro $\lambda = 0$ je tvrzení zřejmé. Uvažujme tedy $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Předpokládáme, že F je neurčitý integrál funkce f vzhledem k funkci G na intervalu $[a,b]$. Tedy dle definice

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p(F - f(x_i)G,\ [a_i, b_i]) < \varepsilon.$$

Chceme ukázat, že potom λF je neurčitý integrál funkce λf vzhledem ke G pro libovolné nenulové číslo λ. Použitím lemmatu 2.2.12 můžeme z oscilace vytknout absolutní hodnotu λ, tedy

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p(\lambda F - \lambda f(x_i)G,\ [a_i, b_i]) = |\lambda| \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p \Big(F - f(x_i)G,\ [a_i, b_i]\Big) < |\lambda|\, \varepsilon =: \varepsilon'.$$

Tedy pro libovolné $\varepsilon' > 0$ vezměme $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{|\lambda|}$ a vidíme, že podmínka z definice integrálu funkce λf vzhledem ke G je splněna.

Aditivita vzhledem k integrandu

Označme $F := F_1 + F_2$. Chceme ukázat, že F je neurčitý integrál funkce $f_1 + f_2$ vzhledem ke G na $[a, b]$. Tedy chceme ukázat, že

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p(F - (f_1(x_i) + f_2(x_i))G,\ [a_i, b_i]) < \varepsilon.$$

Z definice, F_1 je neurčitý integrál funkce f_1 vzhledem ke G na intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon_1} : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_{\varepsilon_1}\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p(F_1 - f_1(x_i)G,\ [a_i, b_i]) < \varepsilon_1.$$

F_2 je neurčitý integrál funkce f_2 vzhledem ke G na intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon_2} : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_{\varepsilon_2}\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p(F_2 - f_2(x_i)G,\ [a_i, b_i]) < \varepsilon_2.$$

K zadanému $\varepsilon > 0$ zvolme

$$\delta_\varepsilon = \min(\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}).$$

Pak každý δ_ε-jemný systém je zároveň δ_{ε_1}-jemný i δ_{ε_2}-jemný. Platí tedy

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p \Big(F - (f_1(x_i) + f_2(x_i))G,\ [a_i, b_i] \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p \Big(F_1 - f_1(x_i)G + F_2 - f_2(x_i)G, [a_i, b_i] \Big) <$$

$$< \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p \Big(F_1 - f_1(x_i)G,\ [a_i, b_i] \Big) + \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p \Big(F_2 - f_2(x_i)G, [a_i, b_i] \Big) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon.$$

Nejprve jsme funkci F rozepsali jako $F_1 + F_2$, poté jsme využili trojúhelníkovou nerovnost pro oscilaci (Tvrzení 2.2.4) a protože předpokládáme, že F_1 je neurčitý integrál funkce f_1 vzhledem ke G a F_2 je neurčitý integrál funkce f_2 vzhledem ke G, umíme součty obou oscilací udělat libovolně malé a tedy i menší než pevně zadané ε.

□

Tvrzení 3.1.3 (Linearita HKS_α^p integrálu vzhledem k integrátoru)**.** *Nechť f, g, G jsou měřitelné funkce na $[a,b]$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom platí*

- *Je-li F neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G, pak λF je neurčitý integrál funkce f vzhledem ke λG.* ***(homogenita)***
- *Je-li F_1 neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G_1 a F_2 neurčitý integrál funkce f vzhledem k G_2, pak $F_1 + F_2$ je neurčitý integrál funkce f vzhledem ke $G_1 + G_2$.* ***(aditivita)***

Důkaz.

Homogenita

Pro $\lambda = 0$ je tvrzení zřejmé. Uvažujme tedy $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Předpokládáme, že F je neurčitý integrál funkce f vzhledem k funkci G na intervalu $[a,b]$. Tedy dle definice

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p(F - f(x_i)G,\ [a_i, b_i]) < \varepsilon.$$

Chceme ukázat, že potom λF je neurčitý integrál funkce f vzhledem ke λG pro libovolné nenulové číslo λ. Použitím lemmatu 2.2.12 můžeme z oscilace vytknout absolutní hodnotu λ, tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p(\lambda F - f(x_i)\lambda G,\, [a_i,b_i]) = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p \Big(F - f(x_i)G,\, [a_i,b_i]\Big) < |\lambda|\, \varepsilon =: \varepsilon'.$$

Tedy pro libovolné $\varepsilon' > 0$ vezměme $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{|\lambda|}$ a vidíme, že podmínka z definice integrálu funkce f vzhledem ke λG je splněna.

Aditivita vzhledem k integrátoru

Označme $F := F_1 + F_2$. Chceme ukázat, že F je neurčitý integrál funkce f vzhledem ke $G_1 + G_2$ na $[a,b]$. Tedy chceme ukázat, že

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i,b_i], x_i\}_{i=1}^{n}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc} \Big(F - f(x_i)(G_1 + G_2),\, [a_i,b_i]\Big) < \varepsilon.$$

Z definice, F_1 je neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G_1 na intervalu $[a,b]$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon_1} : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_{\varepsilon_1}\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i,b_i], x_i\}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p \Big(F_1 - f(x_i)G_1,\, [a_i,b_i]\Big) < \varepsilon_1.$$

F_2 je neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G_2 na intervalu $[a,b]$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon_2} : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_{\varepsilon_2}\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i,b_i], x_i\}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p \Big(F_2 - f(x_i)G_2,\, [a_i,b_i]\Big) < \varepsilon_2.$$

K zadanému $\varepsilon > 0$ zvolme

$$\delta_\varepsilon = \min(\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}).$$

Pak každý δ_ε-jemný systém je zároveň δ_{ε_1}-jemný i δ_{ε_2}-jemný. Platí tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc} \Big(F - f(x_i)(G_1 + G_2),\, [a_i,b_i]\Big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc} \Big(F_1 - f(x_i)G_1 + F_2 - f(x_i)G_2,\, [a_i,b_i]\Big) <$$
$$< \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc} \Big(F_1 - f(x_i)G_1,\, [a_i,b_i]\Big) + \sum_{i=1}^{n} osc \Big(F_2 - f(x_i)G_2,\, [a_i,b_i]\Big) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon.$$

Nejprve jsme funkci F rozepsali jako $F_1 + F_2$, poté jsme využili trojúhelníkovou nerovnost pro supremum a protože předpokládáme, že F_1 je neurčitý integrál f vzhledem ke G_1 a F_2 je neurčitý integrál k f vzhledem k G_2, umíme součty obou oscilací udělat libovolně malé a tedy i menší než pevně zadané ε.

□

Důkaz následujícího tvrzení lze nalézt v [3, Theorem 3.5].

Tvrzení 3.1.4 (Jednoznačnost HKS^p_α integrálu)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $\alpha \geq 1$, $p \in [1, +\infty]$ a nechť F_1, F_2: $I \to \mathbb{R}$ jsou neurčité HKS^p_α integrály funkce f vzhledem k funkci G na I. Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že $F_1 = F_2 + C$ skoro všude.*

Tvrzení 3.1.5 (Integrál na podintervalu)**.** *Nechť F je neurčitý HKS^p_α integrál funkce f vzhledem ke G na intervalu I. Je-li $J \subset I$ libovolný podinterval, pak F je také neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G na intervalu J.*

Důkaz.
K libovolnému $\varepsilon > 0$ najdeme kalibr $\delta_\varepsilon : I \to (0,\infty)$ takový, že pro všechny δ_ε-jemné α-systémy $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ v intervalu I platí

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}\Big(F - f(x_i)G,\, [a_i, b_i]\Big) < \varepsilon.$$

Každý δ_ε-jemný α-systém $\{[c_i, d_i], x_i\}_{i=1}^n$ v intervalu J je také δ_ε-jemným α-systémem v intervalu I.

□

3.2 Vlastnosti HKS_α integrálu

V této sekci se zabýváme vlastnostmi HKS^p_α integrálu pro $p = C$.

Tvrzení 3.2.1. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $F, G, f : I \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Pak F je neurčitý HKS integrál funkce f vzhledem ke G na I právě tehdy, když F je neurčitý HKS_1 integrál funkce f vzhledem ke G na I.*

Důkaz tvrzení lze nalézt v [3, Proposition 3.7.].

Důkaz. Předpokládejme, že F je neurčitý HKS integrál funkce f vzhledem ke G na I; ukážeme, že potom je také jejím HKS_1 integrálem. Připomeňme, že díky Saksovu-Henstockovu lemmatu jsme ekvivalentně přeformulovali definici HKS integrálu pomocí neurčitého integrálu (def. 1.4.3): F je neurčitým HKS integrálem funkce f vzhledem k funkci G právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemná dělení} \quad \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i) - f(x_i)(G(b_i) - G(a_i))| < \varepsilon.$$

K zadanému $\varepsilon > 0$ uvažujme δ_ε-jemné dělení $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$. Pro libovolné j najdeme $z_j \in [a_j, b_j]$ takové, že $z_j \neq x_j$ a zároveň

$$\begin{aligned}&\Big|F(z_j) - F(x_j) - f(x_j)(G(z_j) - G(x_j))\Big| \\ \geq \frac{1}{4} &\sup_{x,y\in[a_j,b_j]} \Big|F(x) - F(y) - f(x_j)(G(x) - G(y))\Big|.\end{aligned}$$

Ukažme sporem, že takové z_j vždy musí existovat. Pokud by pro každé $z \in [a_j,b_j]$ platilo

$$\begin{aligned}&|F(z) - F(x_j) - f(x_j)(G(z) - G(x_j)| < \\ < \frac{1}{4} &\sup_{x,y\in[a_j,b_j]} \Big|F(x) - F(y) - f(x_j)(G(x) - G(y))\Big|,\end{aligned}$$

pak by pro všechna $x, y \in [a_j,b_j]$ z trojúhelníkové nerovnosti plynulo

$$|F(x) - F(y) - f(x_j)(G(x) - G(y)| \leq$$

$$\leq |F(x)-F(x_j)-f(x_j)(G(x)-G(x_j))|+|F(x_j)-F(y)-f(x_j)(G(x_j)-G(y))| <$$

$$< \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[a_j,b_j]} |F(x) - F(y) - f(x_j)(G(x) - G(y)|,$$

což je ve sporu s definici suprema. Tedy

$$\Big|F(z_j) - F(x_j) - f(x_j)(G(z_j) - G(x_j))\Big| \geq \frac{1}{2} \operatorname{osc}(F - f(x_j)G, [a_j, b_j]).$$

Vezměme

$$[\alpha_j, \beta_j] := \begin{cases} [z_j, x_j] & z_j < x_j \\ [x_j, z_j] & z_j > x_j \end{cases}$$

Potom $\{[\alpha_i, \beta_i], x_i\}_{i=1}^n$ je δ_ε-jemný systém v intervalu $[a,b]$ a tedy

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}(F - f(x_i)G, [a_i, b_i]) \leq 2 \sum_{i=1}^n |F(\beta_i) - F(\alpha_i) - f(x_i)(G(\beta_i) - G(\alpha_i))| < 2\varepsilon.$$

Tedy F je neurčitý HKS_1 integrál funkce f vzhledem ke G.

Opačná implikace je zřejmá. Předpokládáme-li, že F je neurčitý HKS_1 integrál funkce f vzhledem ke G, pak pro všechny δ_ε-jemné systémy v $[a,b]$, a tedy také pro všechna δ_ε-jemná dělení (systémy pokrývající interval $[a,b]$) $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ platí

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}(F-f(x_i)G, [a_i, b_i]) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sup_{x,y\in[a_i,b_i]} \Big|F(x)-F(y)-f(x_i)(G(x)-G(y))\Big| < \varepsilon$$

a tedy platí také

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i) - f(x_i)(G(b_i) - G(a_i))| < 2\varepsilon.$$

$\square$

Tvrzení 3.2.2 (Aditivita HKS_α integrálu vzhledem k integračnímu oboru)**.** *Nechť $f, F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Je-li F neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G na intervalu $[a,c]$ i na intervalu $[c,b]$, pak je neurčitým integrálem funkce f vzhledem ke G na $[a,b]$.*

Důkaz. K zadanému $\varepsilon > 0$ najdeme kalibry $\delta_\varepsilon' : [a,c] \to \mathbb{R}^+$ a $\delta_\varepsilon'' : [c,b] \to \mathbb{R}^+$ tak, že

$$\forall\, \delta_\varepsilon'\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, c_i], x_i\}_{i=1}^n \text{ v } [a,c] : \quad \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}\Big(F - f(x_i)G,\ [a_i, c_i]\Big) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\, \delta_\varepsilon''\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[c_j, b_j], y_j\}_{j=1}^m \text{ v } [c,b] : \quad \sum_{j=1}^m \operatorname{osc}\Big(F - f(y_j)G,\ [c_j, b_j]\Big) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Definujme kalibr $\delta_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ následujícím způsobem:

$$\delta_\varepsilon(x) := \begin{cases} \min\{\delta_\varepsilon', \frac{1}{2}(c-x)\} & x \in [a,c) \\ \min\{\delta_\varepsilon', \delta_\varepsilon''\} & x = c \\ \min\{\delta_\varepsilon'', \frac{1}{2}(x-c)\} & x \in (c,b] \end{cases}$$

Touto konstrukcí kalibru zajistíme, že

$$\forall x < c : \quad x + \delta_\varepsilon(x) \le x + \frac{1}{2}(c-x) < c,$$

$$\forall x > c : \quad x - \delta_\varepsilon(x) \ge x - \frac{1}{2}(x-c) > c.$$

a z toho plyne, že je-li $x \neq c$, pak nutně $c \notin (x - \delta_\varepsilon(x), x + \delta_\varepsilon(x))$.

Pro libovolný δ_ε-jemný α-systém $\{[A_i, B_i], z_i\}_{i=1}^n$ v $[a,b]$ buď c neleží v žádném z intervalů $[A_i, B_i]$ nebo najdeme $m \in \{1, ..., n\}$ takové, že $c \in [A_m, B_m]$ a zároveň $c = z_m$. Předpokládejme tedy, že takový interval v tomto systému existuje (v opačném případě je důkaz tvrzení triviální).

Označme pro jednoduchost zápisu $H_i := F - f(z_i)G$. Pak platí

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}(H_i,\ [A_i, B_i]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \operatorname{osc}(H_i,\ [A_i, B_i]) + \operatorname{osc}(H_m,\ [A_m, B_m]) + \sum_{i=m+1}^{n} \operatorname{osc}(H_i,\ [A_i, B_i]).$$

Využitím lemmatu 2.2.15 (subaditivita oscilace vzhledem k integračnímu oboru) získáváme odhad

$$\operatorname{osc}(H_m,\ [A_m, B_m]) \le \operatorname{osc}(H_m,\ [A_m, c]) + \operatorname{osc}(H_m,\ [c, B_m]),$$

a tedy dohromady získáváme:

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}(H_i,\ [A_i, B_i]) \le \sum_{i=1}^{m-1} \operatorname{osc}(H_i,\ [A_i, B_i]) + \operatorname{osc}(H_m,\ [A_m, c])$$

$$+ \operatorname{osc}(H_m,\ [c, B_m]) + \sum_{i=m+1}^{n} \operatorname{osc}(H_i,\ [A_i, B_i]) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy F je neurčitý integrál f vzhledem ke G na intervalu $[a,b]$.

□

Poznámka. Tvrzení neplatí pro $p \in [1, \infty]$. Ukažme protipříklad.

Příklad 3.2.3. Nechť $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ je identicky nulová funkce, $G : [0,2] \to \mathbb{R}$ je libovolný integrátor a nechť

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in (1,2]. \end{cases}$$

Pak F je neurčitým HKS^p_α integrálem funkce f na intervalu [0,1] i na intervalu [1,2], ale není jejím neurčitým HKS^p_α integrálem na [0,2].

Zvolme $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ a uvažujme libovolný kalibr $\delta_\varepsilon : [0,2] \to (0,2]$. Vezměme δ-jemný α-systém tvořený jediným intervalem

$$\left[1 - \frac{\delta(1)}{2},\ 1 + \frac{\delta(1)}{2}\right] \subseteq [0,2]$$

s význačným bodem $x_1 = 1$. Délka tohoto intervalu je tedy rovna $\delta(1)$. Medián funkce F může být libovolné číslo z intervalu $[0, 1]$ (příklad 2.1.5). Volme tedy medián $\lambda = 0$. Pro $p = 1$ je tedy dle tvrzení 2.1.9

$$\operatorname{osc}_1\left(F - f(1)G, \left[1 - \frac{\delta(1)}{2},\ 1 + \frac{\delta(1)}{2}\right]\right) = \frac{1}{\delta(1)} \int_{1-\frac{\delta(1)}{2}}^{1+\frac{\delta(1)}{2}} F(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\delta(1)} \int_{1}^{1+\frac{\delta(1)}{2}} 1\, dx = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Tedy F není neurčitým HKS^1_α integrálem funkce f na $[0, 2]$ a tedy dle Tvrzení 3.1.1 ani není jejím HKS^p_α integrálem na $[0, 2]$ pro žádné $p \in [1, \infty]$.

Tvrzení 3.2.4 (Jednoznačnost HKS_1 integrálu)**.** *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť F_1, F_2: $J \to \mathbb{R}$ jsou neurčité HKS_1 integrály funkce f vzhledem k funkci G na intervalu J. Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že $F_1 = F_2 + C$.*

Důkaz. Stačí dokázat, že $F_1 - F_2$ je konstantní na libovolném uzavřeném podintervalu $I \subset J$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. K němu najdeme kalibry $\delta_\varepsilon^{'}$, $\delta_\varepsilon^{''} : I \to \mathbb{R}^+$ takové, že

$$\forall\, \delta_\varepsilon^{'}\text{-jemné systémy } \{[c_i,d_i],z_i\}_{i=1}^n \text{ v } I: \quad \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}\Big(F_1 - f(z_i)G,\, [c_i,d_i]\Big) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\, \delta_\varepsilon^{''}\text{-jemné systémy } \{[u_i,v_i],t_i\}_{i=1}^m \text{ v } I: \quad \sum_{i=1}^m \operatorname{osc}\Big(F_2 - f(t_i)G,\, [u_i,v_i]\Big) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Vezměme

$$\delta_\varepsilon := \min(\delta_\varepsilon^{'}, \delta_\varepsilon^{''}),$$

pak každý δ_ε-jemný systém je zároveň $\delta_\varepsilon^{'}$-jemný i $\delta_\varepsilon^{''}$-jemný.

Uvažujme libovolné δ_ε-jemné dělení $\{[a_i,b_i],x_i\}_{i=1}^n$, tj. systém pokrývající interval I. Podle Cousinova lemmatu (Lemma 1.1.7) takový systém musí existovat. Pak

$$\operatorname{osc}(F_1 - F_2, I) \le \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}\Big(F_1 - F_2,\, [a_i,b_i]\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}\Big(F_1 - f(x_i)G + (-F_2 + f(x_i)G),\, [a_i,b_i]\Big) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}\Big(F_1 - f(x_i)G\,, [a_i,b_i]\Big) + \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}\Big(F_2 - f(x_i)G\,, [a_i,b_i]\Big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

V první nerovnosti jsme využili Lemma 28 (subaditivita oscilace vzhledem k intervalu) a ve druhé nerovnosti jsme využili Tvrzení 12 (trojúhelníková nerovnost pro oscilaci) a Lemma 25.

Protože $\varepsilon > 0$ lze volit libovolně malé, dostáváme, že $\operatorname{osc}(F_1 - F_2, I) = 0$, tedy[1] $F_1 - F_2$ je konstantní funkce na intervalu I.

□

Definice 3.2.5 (Regulovaná funkce)**.** *Řekneme, že funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je* ***regulovaná****, pokud má v každém bodě intervalu $[a,b]$ konečné jednostranné limity, tj.*

$$\forall x \in [a,b) \quad \exists \lim_{t\to x_+} f(t) \in \mathbb{R},$$

$$\forall x \in (a,b] \quad \exists \lim_{t\to x_-} f(t) \in \mathbb{R}.$$

[1]

$$\operatorname{osc}(F,I) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sup_{x,y\in I}\Big|F(y) - F(x)\Big| = 0 \Leftrightarrow \forall x,y \in I:\ F(x) = F(y).$$

$$\Leftrightarrow F \text{ je konstantní na } I.$$

Důkaz následujícího tvrzení lze nalézt v [3, Theorem 3.6].

Tvrzení 3.2.6 (Jednoznačnost HKS_α integrálu)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a nechť F_1, F_2: $I \to \mathbb{R}$ jsou neurčité HKS_α integrály funkce f vzhledem k funkci G na I. Nechť F_1, F_2, G jsou regulované funkce. Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že $F_1 = F_2 + C$.*

Definice 3.2.7 (Určitý HKS_α integrál)**.** *Nechť $F, G, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce a $\alpha \geq 1$. Nechť F je neurčitý HKS_α integrál funkce f vzhledem ke G na $[a,b]$. Pro $\alpha = 1$ definujeme určitý integrál vztahem*

$$\int_a^b f\, dG := F(b) - F(a). \tag{3.3}$$

Jsou-li navíc F a G regulované funkce na $[a,b]$, pak určitý HKS_α integrál definujeme vztahem (3.3) i pro $\alpha > 1$.

Tvrzení 3.2.8. *Nechť $\alpha \geq 1$, F je neurčitý HKS_α integrál funkce f vzhledem ke G na $[a,b]$ a nechť $c \in [a,b]$. Pak*

$$\lim_{x \to c} \Big(F(x) + f(c)(G(c) - G(x)) \Big) = F(c). \tag{3.4}$$

Poznámka. Je-li c krajním bodem intervalu $[a,b]$, uvažujeme jednostrannou limitu.

Důkaz. K zadanému $\varepsilon > 0$ najdeme kalibr $\delta_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechny δ_ε-jemné α-systémy $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ v intervalu $[a,b]$ platí:

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}(F - f(x_i)G,\ [a_i, b_i]) < \varepsilon.$$

Pokud $c < b$, pak pro libovolné $x \in (c, c + \delta_\varepsilon(c))$ splňující $[c, c + \alpha(x - c)) \subset [a,b]$ uvažujme δ_ε-jemný α-systém tvořený jedním intervalem

$$\{[c, x], c\}.$$

Tedy z definice integrálu plyne, že

$$\operatorname{osc}\Big(F - f(c)G\,, [c, x]\Big) < \varepsilon.$$

Tedy

$$\frac{1}{2} \sup_{t,z \in [c,x]} \Big| F(t) - F(z) - f(c)(G(t) - G(z)) \Big| < \varepsilon$$

a z toho plyne, že

$$\Big| F(x) - F(c) - f(c)(G(x) - G(c)) \Big| < 2\varepsilon. \tag{3.5}$$

Analogicky, pokud $c > a$, pak pro pro libovolné $x \in (c - \delta_\varepsilon(c), c)$ splňující $(c - \alpha(c - x), c] \subset [a,b]$ uvažujme δ_ε-jemný α-systém tvořený jedním intervalem

$$\{[x, c], c\}.$$

Tedy z definice integrálu plyne, že

$$\operatorname{osc}\Big(F - f(c)G\,,[x,c]\Big) < \varepsilon.$$

Tedy

$$\frac{1}{2}\sup_{t,z\in[x,c]}\Big|F(t) - F(z) - f(c)(G(t) - G(z))\Big| < \varepsilon,$$

a z toho plyne, že

$$\Big|F(x) - F(c) - f(c)(G(x) - G(c))\Big| < 2\varepsilon. \tag{3.6}$$

Z odhadů (3.5) a (3.6) tedy získáváme, že pro všechna $x \in (c - \delta_\varepsilon(c), c + \delta_\varepsilon(c))$ splňující

$$\Big(c - \alpha|c - x|, c + \alpha|c - x|\Big) \subset [a,b]$$

platí:

$$\Big|F(x) - F(c) + f(c)(G(c) - G(x))\Big| < 2\varepsilon.$$

□

Tvrzení 3.2.9. *Nechť F je neurčitý HKS_α integrál funkce f vzhledem ke G na intervalu $[a,b]$. Pokud G je regulovaná funkce, pak i F je regulovaná funkce a platí*

$$\forall c \in [a,b) \quad \lim_{x\to c_+} F(x) = F(c) + f(c)\Big(\lim_{x\to c_+} G(x) - G(c)\Big) \tag{3.7}$$

$$\forall c \in (a,b] \quad \lim_{x\to c_-} F(x) = F(c) + f(c)\Big(\lim_{x\to c_-} G(x) - G(c)\Big) \tag{3.8}$$

Důkaz. Dokážeme vztah (3.7). Z předcházejícího tvrzení víme, že pro libovolné $c \in [a,b)$ platí:

$$\lim_{x\to c}\Big(F(x) + f(c)(G(c) - G(x))\Big) = F(c).$$

Předpokládáme, že G je regulovaná funkce, proto musí existovat v každém bodě $c \in [a,b)$ vlastní limita $\lim_{x\to c_+} G(x)$ a tedy existuje vlastní limita

$$\lim_{x\to c_+}\Big(f(c)(G(c) - G(x))\Big).$$

Z věty o aritmetice limit tedy plyne:

$$F(c) = \lim_{x\to c_+}\Big(F(x) + f(c)(G(c) - G(x))\Big) = \lim_{x\to c} F(x) + \lim_{x\to c_+} f(c)(G(c) - G(x)) =$$

$$= \lim_{x\to c_+} F(x) + f(c)\Big(G(c) - \lim_{x\to c} G(x)\Big) = \lim_{x\to c_+} F(x) - f(c)\Big(\lim_{x\to c_+} G(x) - G(c)\Big).$$

Tedy existuje i vlastní limita $\lim_{x\to c_+} F(x)$ a platí (3.7). Analogicky dokážeme vztah (3.8) a existenci vlastní limity $\lim_{x\to c_-} F(x)$ v každém bodě $c \in (a,b]$. To znamená, že funkce F je také regulovaná.

□

Tvrzení 3.2.10. *Nechť F je neurčitý HKS_α integrál funkce f vzhledem ke G na intervalu $[a,b]$. Je-li integrátor G je spojitá funkce, pak i neurčitý integrál F je spojitá funkce. Speciálně, neurčitý HK_α integrál je vždy spojitá funkce.*

Důkaz. Je-li G spojitá na $[a,b]$, je také regulovaná a tedy dle přecházejícího tvrzení splňuje (3.4) a (3.5). Ze spojitosti G plyne, že pro libovolné $x \in [a,b]$ je

$$\lim_{t \to x} (G(t) - G(x)) = 0$$

a tedy z rovností (3.4), (3.5) získáváme

$$\lim_{t \to x} F(t) = F(x),$$

přičemž v krajních bodech intervalu $[a,b]$ uvažujeme jednostranné limity.

□

4. Vztah k ostatním integrálům

4.1 MC_α integrál

H. Bendová a J. Malý v roce 2011 definovali MC integrál, který je ekvivalentní s HK integrálem.

Definice 4.1.1 (MC integrál)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f, F : I \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Řekneme, že funkce F je neurčitý MC integrál (monotonically controlled) funkce f na I, pokud existuje ostře rostoucí funkce $\varphi : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in I$ platí:*

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y-x)}{\varphi(y) - \varphi(x)} = 0. \tag{4.1}$$

Definice je převzata z [9, Definition 1].

Příklad 4.1.2. Ukažme, že funkce $F(x) = x^2$ je neurčitým MC integrálem funkce $f(x) = 2x$ na libovolném otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Za ostře rostoucí funkci $\varphi : I \to \mathbb{R}$ volme například $\varphi(x) = x$. Pro libovolné $x \in I$ platí:

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y-x)}{\varphi(y) - \varphi(x)} = \lim_{y \to x} \frac{y^2 - x^2 - 2x(y-x)}{y - x} =$$

$$= \lim_{y \to x} \frac{y^2 - 2xy + x^2}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{(y-x)^2}{y - x} = \lim_{y \to x} (y - x) = 0.$$

V roce 2017 definovali T.Ball a D.Preiss MC_α integrál, který je zobecněním MC integrálu a je ekvivalentní s HK_α integrálem.

Definice 4.1.3 (MC_α integrál)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f, F : I \to \mathbb{R}$ jsou funkce a $\alpha > 0$. Řekneme, že funkce F je neurčitý MC_α integrál funkce f na I, pokud existuje ostře rostoucí funkce $\varphi : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in I$ platí:*

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y-x)}{\varphi(x + \alpha(y-x)) - \varphi(x)} = 0. \tag{4.2}$$

Definice je převzata z [8, Definition 2].

Tvrzení 4.1.4 (Vlastnosti MC_α integrálu)**.** *Nechť $\alpha > 0$ a F je neurčitý MC_α integrál funkce f na (a,b). Potom platí:*

- *F je spojitá na (a,b).*
- *$F'(x) = f(x)$ pro skoro všechna $x \in (a,b)$.*
- *Pro každé $\beta < \alpha$ je F také neurčitým MC_β integrálem funkce f na (a,b).*

Důkaz lze nalézt v [8, Proposition 4].

Tvrzení 4.1.5 (Vztah MC_α integrálu a HK_α integrálu). *Nechť $\alpha \geq 1$, $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $F, f : I \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Pak F je neurčitým MC_α integrálem funkce f na I právě tehdy, je-li neurčitým HK_α integrálem funkce f na I.*

Důkaz lze nalézt v [3, Theorem 4.1].

Definice 4.1.6 (α-kontrolní funkce). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f, F, G : I \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce a $p \in [1, +\infty] \cup \{C\}$. Řekneme, že funkce $\varphi : I \to \mathbb{R}$ je α-**kontrolní funkce** trojice (f, F, G), pokud je ostře rostoucí na I a pro všechna $x \in I$ platí:*

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{\operatorname{osc}_p(F - f(x)G, [x, x + r])}{\varphi(x + \alpha r) - \varphi(x)} = \lim_{r \to 0_+} \frac{\operatorname{osc}_p(F - f(x)G, [x - r, x])}{\varphi(x) - \varphi(x - \alpha r)} = 0. \quad (4.3)$$

Definice je převzata z [3, sekce 4].

Poznámka. Je-li $p = C$ a $G(x) = x$, je definice (4.3) ekvivalentní s definicí (4.2).

Příklad 4.1.7. Funkce $F(x) = \log x$ je pro libovolné $\alpha > 0$ neurčitým MC_α integrálem funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ na libovolném otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}^+$. Za ostře rostoucí funkci $\varphi : I \to \mathbb{R}$ volme například $\varphi(x) = e^x$. Pro libovolné $x \in I$ platí:

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y - x)}{\varphi(x + \alpha(y - x)) - \varphi(x)} = \lim_{y \to x} \frac{\log y - \log x - \frac{1}{x}(y - x)}{e^{x + \alpha(y - x)} - e^x} =$$

$$= \lim_{y \to x} \frac{\log \frac{y}{x} - \frac{y}{x} + 1}{e^{x + \alpha(y - x)} - e^x} = \lim_{t \to 1} \frac{\log t - t + 1}{e^{x + \alpha x(t - 1)} - e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{t \to 1} \frac{\frac{1}{t} - 1}{\alpha x e^{x + \alpha x(t - 1)}} = \frac{0}{\alpha x e^x} = 0.$$

Tedy $\varphi(x) = e^x$ je α-kontrolní funkce pro trojici $(\frac{1}{x}, \log x, x)$ na $\mathbb{R}^+$.

Tvrzení 4.1.8 (Vztah HKS^p_α integrálu a α-kontrolní funkce). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f, F, G : I \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce a $p \in [1, +\infty] \cup \{C\}$. Pak F je neurčitým HKS^p_α integrálem funkce f vzhledem k funkci G na I právě tehdy, existuje-li α-kontrolní funkce $\varphi : I \to \mathbb{R}$ pro trojici (f, F, G).*

Důkaz lze nalézt v [3, Theorem 4.1].

4.2 Vztah s aproximativní derivací

Definice 4.2.1 (Bod hustoty). *Řekneme, že $x \in \mathbb{R}$ je bodem hustoty množiny $M \subset \mathbb{R}$, pokud*

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{\mu((x - r, x + r) \setminus M)}{2r} = 0. \quad (4.4)$$

Definice 4.2.2 (Aproximativní limita a aproximativní derivace). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}$ je aproximativní limita funkce $F : I \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in I$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje množina $M_\varepsilon \subset I$ taková, že x je bodem hustoty množiny M_ε a současně $|F - A| < \varepsilon$ na M_ε. Píšeme*

$$\operatorname{ap} - \lim_{t \to x} F(t) = A.$$

Aproximativní derivaci funkce F v bodě $x \in I$ definujeme jako aproximativní limitu

$$\operatorname{ap} - F'(x) = \operatorname{ap} - \lim_{t \to x} \frac{F(x) - F(t)}{x - t}.$$

Následující tvrzení o vztahu aproximativní derivace a centrovaného HK_α^p integrálu dokázali J.Malý a K.Kuncová v roce 2019.

Tvrzení 4.2.3 (Vztah aproximativní derivace a HK_α^p integrálu)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $\alpha \geq 1$ a $p \in [1, +\infty]$. Je-li F neurčitý centrovaný HK_α^p integrál funkce f na I, pak f je aproximativní derivací F skoro všude. Je-li F neurčitý centrovaný HK_α integrál funkce f na I, pak $F = f'$ skoro všude.*

Důkaz lze najít v [3, Theorem 6.3]

4.3 Denjoyův-Chinčinův integrál

Definice 4.3.1 (Absolutní spojitost)**.** *Nechť I je interval. Řekneme, že funkce $F : I \to \mathbb{R}$ je absolutně spojitá na množině $E \subset I$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každou konečnou posloupnost nepřekrývajících se intervalů $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^n$ s koncovými body v E platí:*

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta \quad \implies \quad \sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že funkce F je ***zobecněná absolutně spojitá funkce*** *(ACG) na I, pokud F je spojitá na I a zároveň existuje posloupnost podmnožin $E_k \subset I$ taková, že $\bigcup_k E_k = I$ a zároveň F je absolutně spojitá na každé této podmnožině.*

Definice 4.3.2 (Denjoyův-Chinčinův integrál)**.** *Nechť $F, f : I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce F je neurčitý Denjoyův-Chinčinův integrál funkce f, pokud F je zobecněná absolutně spojitá funkce na I a zároveň f je aproximativní derivací F skoro všude na I.*

Tvrzení 4.3.3. *Pro každé $\alpha \geq 1$ existuje funkce, která má Denjoyův-Chinčinův integrál, ale nemá centrovaný HK_α^1 integrál.*

Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v [3, Theorem 5.4].

Závěr

Vlastním přínosem v této diplomové práci jsou výsledky v kapitolách 2 a 3.

Ve druhé kapitole jsme se zabývali vlastnostmi oscilace z různých hledisek. Ukázali jsme, že oscilace jakožto funkcionál $F \mapsto \operatorname{osc}_p(F,I)$ je pseudonorma na prostoru měřitelných funkcí. Pro měřitelnou funkci $F : I \to \mathbb{R}$ a $p \in [1, \infty]$ jsme také zkoumali chování funkce $p \mapsto \operatorname{osc}_p(F,I)$, o které jsme mimo jiné dokázali, že je neklesající a platí pro ni, že

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{osc}_p(F,\, I) = \operatorname{osc}_\infty(F,\, I).$$

Tyto výsledky jsme pak v kapitole 3 využili při zkoumání tříd integrovatelných funkcí a ukázali jsme, že

$$\text{pro } p < q \text{ platí } HKS^q_\alpha \subseteq HKS^p_\alpha.$$

Také jsme zkoumali vlastnosti oscilace vzhledem k intervalu. Jak jsme ukázali, obyčejná oscilace (tj. případ $p = C$) je subaditivní vzhledem k intervalu, tedy splňuje

$$\operatorname{osc}(F,\, [a, b]) \le \operatorname{osc}(F,\, [a, c]) + \operatorname{osc}(F,\, [c, b]).$$

Tuto vlastnost ale p-oscilace nemá. Právě v důsledku toho jsme v kapitole 3 dokázali, že HKS_α integrál je aditivní vzhledem k integračnímu oboru, ale HKS^p_α integrál pro $p \in [1, +\infty]$ tuto vlastnost nemá. Obecně lze říci, že chování obyčejné oscilace je příznivější než chování p-oscilace.

Ve třetí kapitole jsme se nejprve zabývali vlastnostmi HKS^p_α integrálu, které jsou společné pro $p = C$ a $p \in [1, +\infty]$. Dokázali jsme například jejich linearitu vzhledem k integrandu i integrátoru. Poté jsme se zabývali vlastnostmi HKS_α integrálu a dokázali jsme například aditivitu vzhledem k integračnímu oboru, jednoznačnost pro $\alpha = 1$ nebo vztah s regulovaností. Neurčitým HKS_α integrálem nemusí být spojitá ani regulovaná funkce. Jak jsme ale ukázali, je-li integrátorem spojitá, resp. regulovaná funkce, pak neurčitý integrál musí být rovněž spojitá, resp. regulovaná funkce, a to nezávisle na integrandu.

Protože pro $p \in [1, +\infty]$ je oscilace $\operatorname{osc}_p(F,I)$ definována pomocí normy $||\cdot||_p$, která nerozeznává, že se dvě funkce liší pouze na množině nulové Lebesgueovy míry, nemůžeme pro $p \in [1, +\infty]$ definovat určitý HKS^p_α integrálem vztahem

$$\int_a^b f\, dG = F(b) - F(a),$$

neboť přičtením funkce, která je nulová skoro všude k neurčitému integrálu F získáme opět neurčitý integrál; tedy tato definice by nedávala smysl (hodnota určitého integrálu nebyla určena jednoznačně). Tímto vztahem definujeme pouze určitý HKS_1 integrál a za dodatečného předpokladu regulovanosti F i G také určitý HKS_α integrál pro $\alpha > 1$.

Dalším zajímavým tématem jsou nejrůznější příklady funkcí, které jsou integrovatelné v jednom smyslu a nejsou integrovatelné v jiném smyslu. Příklady jsou často technicky náročné, a tak jsme se jim s ohledem na omezený rozsah práce nevěnovali. V publikaci [3] je několik takových příkladů zkonstruováno. Existují i jiné novější verze HK integrálu, jako je například KN integrál, který zavedl P. Krejčí [4]. Dosud zřejmě není vyjasněn vztah mezi KN integrálem a HKS^p_α integrálem, na což nám v této práci nezbyl prostor.

Seznam použité literatury

[1] M. Tvrdý: *Stieltjesův integrál (Kurzweilova teorie)*, Univerzita Palackého v Olomouci, 2012

[2] G. A. Monteiro, A. Slavík, M. Tvrdý: *Kurzweil-Stieltjes Integral. Theory and Applications.* World Scientific, 2019

[3] J. Malý, K. Kuncová: *On a generalization of Henstock-Kurzweil integrals.* Mathematica Bohemica 144 (2019) 393–422

[4] P. Krejčí: *The Kurzweil integral with exclusion of negligible sets.* Mathematica Bohemica 128 (2003) 277-292

[5] Š. Schwabik: *Integrace v R (Kurzweilova teorie).* UK Karolinum, 1999

[6] Steven Kao, Jocelyn Gonzales: *Math 402 - Real Analysis, The Henstock-Kurzweil Integral* (2015) https://bit.ly/3qUgzQ3

[7] L. Pick, A. Kufner, O. John, S. Fučík: *Function spaces.* De Gruyter, 2013

[8] T. Ball, D. Preiss: *Monotonically controlled integrals.* Mathematics Almost Everywhere. In Memory of Solomon Marcus (A. Bellow et al., eds.). World Scientific Publishing, Hackensack (2018)
https://arxiv.org/pdf/1709.04345.pdf

[9] H. Bendová, J. Malý: *An elementary way to introduce a Perron-like integral.* Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. 36. (2011)

[10] J. Kurzweil: *Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter*, Czech. Math. Journal 7(82) (1957)

[11] Š. Schwabik. P. Šarmanová: *Malý průvodce historií integrálu.* (Czech). Praha: Prometheus, 1996

[12] Z. Strakoš: *Metoda konjugovaných gradientů jako dobrodružství jdoucí přes staletí.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 65 (2020)