

Posudek oponenta na disertační práci Mgr. Radka Huška

Structure of Flow-continuous Mappings in Algebraic Context

Předložená práce rámcově spadá do oblasti nenulových toků v grafech. Týká se několika různých aspektů tohoto tématu, například pojmu grupová souvislost nebo počtu dvojitých pokrytí grafu kružnicemi.

Za hlavní výsledky práce považuji následující:

- Věta 2.2 záporně odpovídá na otázku Jaegera et al. z roku 1992, zda Γ -souvislost grafu závisí jen na velikosti abelovské grupy Γ . Autor navázal na existující výsledek L. Mohelníkové (2014) a doplnil jej o další konstrukci. Celkově jde o významný výsledek, který byl publikován v časopise *Journal of Graph Theory* v roce 2019.
- Kapitola 3 se týká problému M. DeVose ohledně vztahu mezi homomorfismy Cayleyových grafů a existencí toku s hodnotami v jisté podmnožině cílové abelovské grupy (hypotéza 3.4). Studuje zesílení požadované vlastnosti (vlastnost 3.9), které umožňuje redukci na kubické grafy a platí pro některé konkrétní grupy nebo zobrazení (bohužel nikoli v obecnosti). Výsledky byly prezentovány na konferenci *EuroComb 2017* a publikovány v časopise *The Electronic Journal of Combinatorics*.
- Kapitoly 4–6 jsou těžištěm práce a vztahují se k metodě pro odhad počtu dvojitých pokrytí grafů kružnicemi (CDC) pomocí ‘lineárních reprezentací’. V kapitole 5 se zavádí potřebný aparát a mj. se zde diskutují souvislosti s důležitým konceptem *edge colouring model*, implicitně zavedeným v článku Freedman et al. [2007]. V kapitole 6 se vytvořený aparát aplikuje pro získání exponenciálního dolního odhadu pro tento počet v grafech typu *flower snark* (věta 6.8) a v rovinných grafech (věta 6.14). Výsledky byly prezentovány na konferenci *EuroComb 2021*.
- Kapitola 7 studuje konstrukce nových tříd grafů typu *snark* pomocí techniky *voltage assignment*. Jednu takovou třídu popisuje věta 7.6.

U všech uvedených témat je patrná autorova značná erudice v oblasti návrhu algoritmů. Jedná se o výpočetně náročné problémy, kde je efektivní návrh a implementace algoritmu pro získání výsledku kritickým faktorem. Implementační otázky jsou podrobně diskutovány (v případě kapitoly 6 možná až příliš detailně).

Vedoucí práce je spoluautorem všech publikací, na kterých je práce založena. Domnívám se, že v takovém případě by v disertaci bylo vhodné zmínit konkrétní přínos doktoranda k jednotlivým výsledkům. Seznam publikací nicméně obsahuje i další dva články, napsané ve spolupráci s jinými spoluautory.

Výsledky obsažené v práci jsou nové a podstatné. Nejzajímavější z hlediska dalšího výzkumu je podle mého názoru algebraická metoda popsaná v kapitolách 4–6, a to i kvůli výše zmíněným dílčím souvislostem s modely inspirovanými statistickou mechanikou.

Text celkově působí konzistentním dojmem, části založené na původních člancích se podařilo spojit do jednotného celku (až na sporadické výjimky, jako je například odkaz na druhého autora na str. 28).

Práce je psána slušnou angličtinou, četnost překlepů a drobných jazykových chyb (např. chybějících členů) je v únosných mezích. Z formálního hlediska k ní nemám výhrady, pouze bych doporučil explicitní zavedení pojmu minor, který se v práci objevuje na několika místech.

Dvě poznámky z věcného resp. stylistického hlediska:

- Komentář k větě 1.41 (speciální případ hypotézy o nenulovém 4-toku pro kubické grafy) správně konstatuje, že celý důkaz dosud není publikován, bylo by ale vhodné citovat článek K. Edwards et al.: Three-edge-colouring doublecross cubic graphs (JCTB 119 (2016), 66–95), který řeší důležitý dílčí případ.
- Algebraický aparát v kapitole 5 je budován dosti obecně, a s ohledem na případné další aplikace lze tento postup doporučit. Pro lepší čitelnost by nicméně bylo vhodné ilustrovat nově definované pojmy na vhodných příkladech již při jejich zavádění a nikoli až při pozdější aplikaci.

Otázky k obhajobě:

- Jsou metody popsané v kapitolách 4–7 v principu aplikovatelné na konstrukci nehamiltonovských kubických grafů s velkou cyklickou souvislostí?
- Dá se metodou z podkapitoly 6.2.2 získat exponenciální odhad na počet CDC pro grafy vnořené na fixní ploše?

Radek Hušek předložil vynikající disertační práci, která splňuje všechny požadavky na práce tohoto typu. Disertace obsahuje řadu zajímavých výsledků a souvislostí a jasně dokládá jeho výzkumné schopnosti. **Doporučuji přijetí práce k obhajobě a udělení akademického titulu Ph.D.**

V Plzni dne 4. dubna 2022.

Prof. RNDr. Tomáš Kaiser, DSc.
Katedra matematiky
Západočeská univerzita v Plzni