



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Patrik Dian

Modely rozložených časových zpoždění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

Studijní program: Finanční matematika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Rád bych poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce prof. RNDr. Tomáši Ciprovi, DrSc. za jeho ochotnu, věnovaný čas a cenné rady při vzniku této práce. Zároveň bych rád poděkoval své rodině a přítelkyni za jejich neustálou podporu v průběhu mého studia.

Název práce: Modely rozložených časových zpoždění

Autor: Patrik Dian

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Cílem této práce je sjednocení teorie o modelech se zpožděnými regresory a o autoregresním modelu rozložených časových zpoždění, který uvažuje zpožděné hodnoty vysvětlované proměnné a jejich následné aplikace na reálných datech. V práci se také pojednává o vlastnostech jednotlivých modelů. Dynamické modely jsou často využívány pro finanční a ekonomická data kvůli schopnosti zachycení zpožděných vlivů na vysvětlovanou proměnnou. Příbuzným tématem jsou modely intervenční analýzy, které jsou důležitou aplikací autoregresních modelů. Hlavním cílem intervenční analýzy je zkoumání vnějších zásahů tzv. intervencí na úroveň časové řady a modelování této intervence pomocí indikátorových proměnných. Závěrem jsou představené modely aplikovány na dva datové soubory a intervenční analýza je využita ke zkoumání vlivu koronavirové pandemie na vývoj časové řady.

Klíčová slova: autoregresní model, geometrický model, intervenční analýza, modely s konečným zpožděním, polynomický model

Title: Distributed lag models

Author: Patrik Dian

Department: Department of probability and mathematical statistics

Supervisor: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Department of probability and mathematical statistics

Abstract: The aim of this bachelor thesis is to unite the theory about distributed lag models and autoregressive distributed lag model, which includes lagged dependent variables and application of these models on real data. The properties of these models are also presented. Dynamic models are highly used for financial and economic data because of their ability to capture lagged effect on dependent variable. As a similar topic there are mentioned models of intervention analysis which are used to examine the external effects on time series and to model the interventions using indicator variables. Finally, applications of mentioned models on two data sets are introduced and analysis of the effect of coronavirus pandemic on time series is demonstrated.

Keywords: Almon DL-model, ARDL model, finite distributed lag model, infinite distributed lag model, intervention analysis, Koyck model

Obsah

Úvod	2
1 Modely rozložených časových zpoždění	3
1.1 Obecný model	3
1.2 Geometrický model	5
1.3 Modely s konečným zpožděním	7
1.3.1 Modely s omezením	8
1.4 Volba délky zpoždění	10
2 Autoregresní model	12
2.1 Obecný model	12
2.2 Koyckův autoregresní model	13
3 Modely intervenční analýzy	14
4 Aplikace	18
4.1 Příklad - modely se zpožděnými regresory	18
4.2 Příklad - modely se zpožděnými proměnnými	21
4.3 Příklad - intervenční analýza	25
Závěr	29
Seznam použité literatury	30
Seznam obrázků	31
Seznam tabulek	32
A Přílohy	33
A.1 První příloha	33
A.2 Druhá příloha	33

Úvod

V praxi důležitým nástrojem pro popis vztahů mezi finančními a ekonomickými proměnnými je regresní analýza a její klasický model lineární regrese. Tento model často využíváme v jeho statické podobě, tedy v situaci, kdy neuvažujeme zpožděný vliv jednotlivých proměnných v regresním modelu. Ekvivalentně bychom mohli říct, že model reaguje na změny vysvětlující proměnné x_t okamžitě, protože uvažujeme pouze současné hodnoty jednotlivých proměnných.

Pracujeme-li s finančními daty, je běžné, že vysvětlovaná proměnná y_t nezávisí pouze na aktuálních hodnotách regresorů x_t , ale také na jejich zpožděných hodnotách x_{t-1}, x_{t-2}, \dots , popřípadě i na zpožděných hodnotách y_{t-1}, y_{t-2}, \dots . Důvodem k zavedení těchto zpožděných proměnných může být náš předpoklad podložený z ekonomické praxe, například víme, že vysvětlovaná proměnná nereaguje na změny okamžitě, ale s určitým zpožděním. Nebo můžeme předpokládat, že současná hodnota vysvětlované proměnné y_t je silně ovlivněna současnou hodnotou regresoru, ale také hodnotou, kterou nabývala před rokem, poté by bylo rozumné tuto zpožděnou proměnnou do modelu zahrnout.

V první kapitole této práce se budeme zabývat modely s rozloženým časovým zpožděním. Jedná se o dynamické regresní modely, které obsahují pouze zpožděné vysvětlující proměnné. Uvedeme si zde několik typů těchto modelů od nejobecnějších až po modely s konečným zpožděním. V této kapitole budeme také uvažovat různé restriktce na regresní parametry (váhy zpoždění). Ve druhé kapitole přidáme možnost zpoždění vysvětlované proměnné. Tento model upravíme a využijeme v poslední teoretické kapitole pro modelování intervencí. V aplikační části ukážeme použití modelů se zpožděnými proměnnými na dvou datových souborech a ukážeme si využití intervenční analýzy, kde budeme zkoumat vliv koronavirové pandemie na vývoj časové řady.

1. Modely rozložených časových zpoždění

1.1 Obecný model

Modely s rozloženým časovým zpožděním řadíme do skupiny dynamických modelů, které jsou často využívány v ekonomii díky své schopnosti zachytit zpožděný vliv regresorů na vysvětlovanou proměnnou, tedy popisují vztahy, kdy vysvětlovaná proměnná nezávisí pouze na proměnných ve stejném čase, ale mají na ni vliv i proměnné, které jsou rozloženy v minulých časových periodách. V této kapitole budou popsány pouze modely se zpožděnou vysvětlující proměnnou, tj. budeme se zde věnovat modelu ve tvaru

$$y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (1.1)$$

kde y je *vysvětlovaná proměnná* (regresand, závislá proměnná), x je *vysvětlující proměnná* (regresor, nezávislá proměnná), jednotlivé koeficienty β_i nazýváme *váhy zpoždění* definující vztah závislosti y na x a ε_t značí reziduální složku modelu v čase t splňující $\mathbb{E} \varepsilon_t = 0$, $\text{var} \varepsilon_t = \sigma^2 < \infty$ a $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pro $\forall t \neq s$. Model (1.1) lze zobecnit pro případ několika vysvětlujících proměnných.

V modelu tvaru (1.1) vidíme, že vliv jednotlivých vysvětlujících proměnných sahá až nekonečně daleko do minulosti, proto je rozumné předpokládat, že váhy jednotlivých zpoždění β_i konvergují k nule pro $i \rightarrow \infty$. Často specifikací daných předpokladů je, že vliv jednotlivých x_{t-i} na y_t klesá pro rostoucí i . Z praktického hlediska se jedná o logický požadavek, jelikož v ekonomii lze očekávat, že změna regresoru x_{t-j} se zpožděním $j \in \mathbb{N}_0$ neovlivní y_t víc, než změna regresoru se zpožděním i splňující $i < j$. Této úvaze se věnujeme v následující sekci.

Jak již bylo zmíněno v předchozím odstavci, vliv x_{t-i} je rozložen do velkého počtu minulých období, proto rozlišujeme (viz Cipra, 2013; Parker, 2012):

- *okamžitý vliv* na vysvětlovanou proměnnou při změně vysvětlující proměnné určený koeficientem

$$\beta_0 = \frac{\partial y_t}{\partial x_t}; \quad (1.2)$$

- *dynamický marginální vliv* na vysvětlovanou proměnnou při změně vysvětlující proměnné ve zpoždění $k \in \mathbb{N}$ určený koeficientem

$$\beta_k = \frac{\partial y_{t+k}}{\partial x_t} = \frac{\partial y_t}{\partial x_{t-k}}; \quad (1.3)$$

- *kumulovaný vliv* na vysvětlovanou proměnnou při změně vysvětlujících proměnných až do zpoždění τ určený konečným součtem koeficientů

$$\beta(\tau) = \sum_{i=0}^{\tau} \beta_i; \quad (1.4)$$

- *dlouhodobý vliv* na vysvětlovanou proměnnou při změně vysvětlujících proměnných určený nekonečným součtem koeficientů

$$\beta = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \quad (1.5)$$

zachycující vliv regresorů po přechodu do rovnovážného stavu.

Dalšími charakteristikami modelu jsou

$$\text{mediánové zpoždění} = \text{nejmenší } q^* \text{ splňující } \frac{\sum_{i=0}^{q^*} \beta_i}{\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i} \geq 0,5$$

a

$$\text{střední zpoždění} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \beta_i}{\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i}.$$

Příklad 1. Vlivy na regresand při dočasné a permanentní změně regresoru.

Inspirováno podle Parker (2012, str. 35–39): Pro jednoduchost uvažujme model s konečným zpožděním ve tvaru

$$y_t = \alpha + 3x_t + 2x_{t-1} + x_{t-2} + \varepsilon_t. \quad (1.6)$$

V první části příkladu předpokládáme, že se v čase t hodnota x zvýší o jednotku a v časech $t+1$ a následujících se vrátí ke své původní hodnotě, tj. ilustrujeme vliv *dočasné* změny regresoru.

- Vidíme, že se v čase t díky našemu předpokladu x_t navýší o jednotku a zbylé vysvětlující proměnné x_{t-1} , x_{t-2} spolu s ε_t zůstávají na stejné úrovni. Kvůli navýšení x v čase t z (1.6) plyne zvýšení y_t o 3. Tento vliv jsme již popsali: jedná se o okamžitý vliv na vysvětlovanou proměnnou (1.2), kde $\beta_0 = 3$.
- V čase $t+1$ přechází rovnice (1.6) do tvaru

$$y_{t+1} = \alpha + 3x_{t+1} + 2x_t + x_{t-1} + \varepsilon_{t+1},$$

kde nyní x_{t+1} a x_{t-1} spolu s ε_{t+1} zůstávají bez změny a x_t se opět zvýší o jednotku. Pak zřejmě v čase $t+1$ se y zvýší o $\beta_1 = 2$ (viz (1.3), kde $k = 1$) a analogicky se v čase $t+2$ zvýší y o $\beta_2 = 1$.

Pro názornost můžeme uvažovat, že proměnné x jsou konstanty, které označíme k . Pak zřejmě s předpokladem o dočasné změně x v čase t dostaneme (viz Wooldridge, 2013, str. 347)

$$\begin{aligned} y_{t-1} &= \alpha + 3k + 2k + k + \varepsilon_{t-1}, \\ y_t &= \alpha + 3(k+1) + 2k + k + \varepsilon_t, \\ y_{t+1} &= \alpha + 3k + 2(k+1) + k + \varepsilon_{t+1}, \\ y_{t+2} &= \alpha + 3k + 2k + (k+1) + \varepsilon_{t+2}, \\ y_{t+3} &= \alpha + 3k + 2k + k + \varepsilon_{t+3}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že v čase $t+3$ a v následujících obdobích změna regresoru vysvětlovanou proměnnou neovlivní.

V druhé části tohoto příkladu nás bude zajímat permanentní změna regresorů. Předpokládáme, že se v čase t hodnota x zvýší o jednotku a zůstane zvýšená i v budoucích periodách, ilustrujeme vliv *permanentní* změny regresoru.

- V čase t je vliv změny x na y stejný jako v případě dočasné změny, jelikož x_{t-1} a x_{t-2} spolu s ε_t zůstávají nezměněny a x_t se zvýšilo o jednotku.
- V čase $t+1$ dostaneme odlišný výsledek v porovnání s dočasnou změnou, jelikož se zvýší obě proměnné x_{t+1} a x_t o jednotku, a proto se zvýší y o $\beta_0 + \beta_1 = 3 + 2 = 5$. Tuto charakteristiku jsme již opět zadefinovali a jedná se kumulovaný vliv na vysvětlovanou proměnnou (1.4).
- V čase $t+2$ bude vliv změny x na y opět odlišný, protože veškeré vysvětlující proměnné budou zvýšené o jednotku a tedy y se zvýší o $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 3 + 2 + 1 = 6$. V časech $t+3$ a dalších zůstane vliv stejný, jako v případě pro $t+2$, a proto dostáváme dlouhodobý vliv na vysvětlovanou proměnnou (1.5).

Pro názornost můžeme opět uvažovat, že proměnné x jsou konstanty, které označíme k . Dostáváme (viz Wooldridge, 2013, str. 348)

$$\begin{aligned} y_{t-1} &= \alpha + 3k + 2k + k + \varepsilon_{t-1}, \\ y_t &= \alpha + 3(k+1) + 2k + k + \varepsilon_t, \\ y_{t+1} &= \alpha + 3(k+1) + 2(k+1) + k + \varepsilon_{t+1}, \\ y_{t+2} &= \alpha + 3(k+1) + 2(k+1) + (k+1) + \varepsilon_{t+2}. \end{aligned}$$

Tento příklad slouží jako demonstrace jednotlivých vlivů na regresand.

U modelu (1.1) dochází k problémům, které plynou z předpokladu zahrnutí nekonečného zpoždění, a to nemožnost odhadnutí nekonečného počtu koeficientů β_i a z toho plynoucí neodhadnutelnost celého modelu. Vystává přirozená otázka, zda není výhodnější nekonečnou řadu zkrátit na řadu o konečné délce q , tato operace ovšem vede k dalšímu problému, jaké zvolit zpoždění q . Pokud bychom takovou úpravu uvažovali, mohla by nastat multikolinearita, tedy lineární závislost sloupců regresní matice $\mathbf{X} = (x_{t,k}) \in \mathbb{R}^{T \times k}$, kde t je časový index, pro který platí $t = 1, \dots, T$, a k je počet pozorování v čase t .

1.2 Geometrický model

Problémy popsané v posledním odstavci předchozí sekce vedly k zavedení nového a restriktivnějšího modelu. Ve srovnání s (1.1) tento model ponechává nekonečné zpoždění, avšak redukuje počet odhadovaných parametrů na tři. Daní za toto zjednodušení je zvýšení restrikcí na β_i , a proto uvažujme

$$\beta_i = \beta \lambda^i, \quad |\lambda| < 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Koeficienty β_i za platnosti (1.7) klesají geometricky k nule pro $i \rightarrow \infty$. Dosazením (1.7) do (1.1) dostáváme model

$$y_t = \alpha + \beta \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i} + \varepsilon_t \quad (1.8)$$

označovaný jako *geometrický model rozložených časových zpoždění* (někdy také Koyckův model) obsahující pouze tři parametry: intercept α , škálovací parametr

β a parametr λ určující rychlost klesání vah. Geometrický model je speciálním případem racionálního modelu rozložených časových zpoždění (více viz Wooldridge, 2013, str. 637).

Pro určení vlivů rozepíšeme nekonečnou řadu v (1.8) člen po členu:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \beta \lambda x_{t-1} + \beta \lambda^2 x_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t. \quad (1.9)$$

Z předchozího vztahu můžeme snadno určit charakteristiky geometrického modelu, které jsme uvedli v první sekci této kapitoly. Okamžitý vliv definovaný vztahem $\partial y_t / \partial x_t$ (viz (1.2)) je roven β , což lze snadno vidět v upraveném vzorci (1.9). Dlouhodobý vliv lze opět snadno spočítat, a to dle (1.5), přičemž můžeme vytknout parametr β , využít předpoklad $|\lambda| < 1$ a využít součtový vzorec konvergentní geometrické řady

$$\beta \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \beta(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots) = \frac{\beta}{1 - \lambda}. \quad (1.10)$$

Přestože geometrický model rozložených časových zpoždění vyžaduje odhad pouze tří parametrů, setrvávající nevýhodou je nekonečné zpoždění regresorů, a proto aplikujeme Koyckovu transformaci na regresní rovnici (1.9). Koyckova transformace odečítá od regresní rovnice v čase t (1.9) tutéž rovnici v čase $t - 1$ vynásobenou parametrem λ . Sestavíme tedy zpožděnou pomocnou rovnici

$$y_{t-1} = \alpha + \beta x_{t-1} + \beta \lambda x_{t-2} + \beta \lambda^2 x_{t-3} + \cdots + \varepsilon_{t-1}. \quad (1.11)$$

Nyní pouze odečteme od (1.9) λ násobek rovnice (1.11) a dostaneme

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \alpha - \lambda \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1},$$

což lze upravit na

$$y_t = \alpha(1 - \lambda) + \beta x_t + \lambda y_{t-1} + \eta_t, \quad \text{kde } \eta_t = \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1}. \quad (1.12)$$

Přeznačením koeficientů dostaneme

$$y_t = \theta_1 + \theta_2 x_t + \theta_3 y_{t-1} + \eta_t. \quad (1.13)$$

Je zřejmé, že ve srovnání s (1.9) došlo k výraznému zjednodušení, avšak odhad upraveného modelu je stále problematický kvůli korelované reziduální složce η_t , a to může zapříčinit nekonzistentnost odhadů jednotlivých koeficientů.

Model částečného přizpůsobení

Konstrukčně snazší alternativou pro konstrukci (1.12) je využití *modelu částečného přizpůsobení* (viz Cipra, 2013, str. 111). Jedná se opět o dynamický model, kde vysvětlované proměnné trvá určitý časový úsek než se plně přizpůsobí náhodné změně vysvětlující proměnné. Pro tento model zavádíme novou proměnnou y_t^* jejíž hodnotou by byla hodnota y_t , kterou by nabyla, pokud by model okamžitě reagoval na změny vysvětlující proměnné. Jedná se tedy pouze o teoretickou (latentní) hodnotu, která se nedá přímo pozorovat. Předpokládáme, že

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad (1.14)$$

s *přizpůsobovací rovnicí*

$$y_t - y_{t-1} = \lambda(y_t^* - y_{t-1}), \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad (1.15)$$

kde parametr λ značí *rychlost přizpůsobení*: čím menší λ , tím pomalejší přizpůsobení. Přizpůsobovací rovnici (1.15) můžeme interpretovat takto: levá strana rovnice značí skutečný (pozorovaný) přírůstek z času $t - 1$ do t a tento skutečný přírůstek $y_t - y_{t-1}$ bude roven určité poměrné části λ z teoretického přírůstku $y_t^* - y_{t-1}$, který by nastal v případě, že by model reagoval na změny okamžitě.

Poznámka. Pokud platí $\lambda = 1$ (přizpůsobení je okamžité), pak z rovnice (1.15) plyne rovnost $y_t = y_t^*$, tedy skutečná a teoretická hodnota vysvětlované proměnné se rovnají v čase t . Dosazením do (1.14) dostáváme model nezávislejší na zpožděných vysvětlujících proměnných a vliv změny regresoru na vysvětlovanou proměnnou je okamžitý.

Protože y_t^* je neznámá, dosadíme (1.14) do (1.15)

$$y_t - y_{t-1} = \lambda(\alpha + \beta x_t + \varepsilon_t - y_{t-1})$$

a přerovnááním získáme

$$y_t = \lambda\alpha + \lambda\beta x_t + (1 - \lambda)y_{t-1} + \lambda\varepsilon_t.$$

Po přeznačení koeficientů dostaneme

$$y_t = \gamma_1 + \gamma_2 x_t + \gamma_3 y_{t-1} + \nu_t, \quad \text{kde } \nu_t = \lambda\varepsilon_t. \quad (1.16)$$

Při srovnání geometrického modelu získaného Koyckovou transformací (1.13) s (1.16) spočívá jediný rozdíl ve tvaru reziduální složky ν_t , která je nyní nekorelovaná v čase, což umožňuje konzistentní odhad jednotlivých parametrů modelu.

1.3 Modely s konečným zpožděním

S modelem konečného zpoždění jsme se již setkali v příkladu 1, kde jsme si všimli, jaké vlivy na vysvětlovanou proměnnou mají změny regresorů. Uvažovali jsme model (1.6) se zpožděním 2. Nyní uvedeme obecný *model konečného rozloženého časového zpoždění*, který je ve tvaru

$$y_t = \alpha + \sum_{i=0}^q \beta_i x_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (1.17)$$

což lze rozepsat na

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \cdots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t. \quad (1.18)$$

Jedná se opět o dynamický model, pokud ovšem platí $\beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$, pak se jedná o statický model z důvodu absence zpožděných vysvětlujících proměnných.

Jednou z nevýhod modelu s konečným zpožděním je multikolinearita, která se obvykle vyznačuje vysokou korelací mezi jednotlivými regresory $x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-q}$.

Tento jev může zapříčinit vysoké rozptyly odhadnutých regresních parametrů, a to vede k nespolehlivosti modelu.

Druhou nevýhodou tohoto modelu může být délka zpoždění q při malém počtu pozorování T . Za předpokladu, že máme T pozorování a v našem modelu předpokládáme zpoždění q , pak pro model (1.18) máme k dispozici pouze $T - q$ pozorování. Abychom se tomuto problému mohli vyhnout, budeme potřebovat vysoký počet pozorování T v porovnání s hodnotou q (více viz Parker, 2012, str. 41).

1.3.1 Modely s omezením

Obdobně jako v sekci 1.2, kde jsme požadovali, aby β_i pro $i \rightarrow \infty$ geometricky klesaly k nule i v této sekci zavedeme určité restriktce na parametry β_i , které nám sníží počet odhadovaných parametrů. Tuto ideu budeme demonstrovat na příkladech, které vychází z Parker (2012, str. 41–44).

Příklad 2. Lineárně klesající váhy zpoždění.

Předpokládejme, že váhy zpoždění lineárně klesají k nule a každý z parametrů $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ je lineárně klesající poměrnou částí parametru β_0 , ekvivalentně: každý z parametrů β_i je o $1/(1+q)$ násobek β_0 menší než β_{i-1} . Toto omezení zapíšeme takto

$$\beta_i = \frac{q+1-i}{q+1} \beta_0, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Dosazením této restriktce do (1.17) dostáváme

$$y_t = \alpha + \beta_0 \sum_{i=0}^q \frac{q+1-i}{q+1} x_{t-i} + \varepsilon_t.$$

Vidíme, že stačí odhadnout pouze dva parametry, α a β_0 , kde q je známý počet zpoždění. Opět jsme schopni vypočítat charakteristiky: okamžitý vliv (1.2) je roven β_0 , a dlouhodobý vliv (1.5) získáme jako

$$\begin{aligned} \beta_0 \sum_{i=0}^q \frac{q+1-i}{q+1} &= \beta_0 \sum_{i=0}^q \left(1 - \frac{i}{q+1}\right) = \beta_0 \left(q+1 - \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^q i\right) = \\ &= \beta_0 \left[q+1 - \frac{1}{q+1} \left(\frac{q(q+1)}{2}\right)\right] = \beta_0 \left(\frac{q+2}{2}\right). \end{aligned}$$

Příklad 3. Růst vah do zpoždění m a následné klesání.

Předpokládejme, že váhy zpoždění rostou lineárně do zpoždění m a poté lineárně klesají do nuly. Tento vztah zapíšeme

$$\beta_i = \beta_m \left(1 - \frac{|m-i|}{m+1}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2m.$$

Dosazením tohoto vztahu do (1.17) dostaneme

$$y_t = \alpha + \beta_m \sum_{i=0}^{q=2m} \left(1 - \frac{|m-i|}{m+1}\right) x_{t-i} + \varepsilon_t,$$

kde opět můžeme spočítat charakteristiky: okamžitý vliv (1.2) je roven $\beta_m/(m+1)$ a dlouhodobý vliv (1.5) je roven $\beta_m(m+1)$.

Nejčastějším konečně zpožděným modelem s omezením je *polynomický model rozložených časových zpoždění*, u kterého předpokládáme, že parametry se chovají jako funkce definovaná polynomem řádu r , kde $r < q$. Nejprve ukážeme případ, kdy váhy zpoždění leží na parabole a poté budeme uvažovat obecnější případy.

Příklad 4. Váhy zpoždění vyjádřené polynomem řádu 2.

Předpokládejme vyjádření parametrů vztahem

$$\beta_i = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2, \quad i = 0, 1, 2, \dots, q, \quad (1.19)$$

kde α_0, α_1 a α_2 jsou koeficienty kvadratické funkce a dosazením tohoto zjednodušení do (1.17) dostaneme

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \sum_{i=0}^q (\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2) x_{t-i} + \varepsilon_t \\ &= \alpha + \alpha_0 \sum_{i=0}^q x_{t-i} + \alpha_1 \sum_{i=0}^q i x_{t-i} + \alpha_2 \sum_{i=0}^q i^2 x_{t-i} + \varepsilon_t \\ &= \alpha + \alpha_0 z_t^{(0)} + \alpha_1 z_t^{(1)} + \alpha_2 z_t^{(2)} + \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (1.20)$$

kde

$$z_t^{(0)} \equiv \sum_{i=0}^q x_{t-i}, \quad z_t^{(1)} \equiv \sum_{i=0}^q i x_{t-i}, \quad z_t^{(2)} \equiv \sum_{i=0}^q i^2 x_{t-i}.$$

V (1.20) lze už snadno odhadnout jednotlivé parametry a dosazením do (1.19) dostaneme odhady pro původní β_i . Zároveň si můžeme všimnout, že každé $z_t^{(j)}$ pro $j = 0, 1, 2$, je lineární kombinací současné a q zpožděných hodnot $x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-q}$.

Může nastat, že ze vztahu (1.19) nemají parametry očekávané vlastnosti, například nekonvergují k nule nebo nabývají záporných hodnot, což může být zapříčiněno špatnou specifikací modelu. Z tohoto důvodu můžeme některé z vlastností kvadratickému zpoždění vnutit. Budeme požadovat, aby parametry dokonvergovaly k nule ve zpoždění $q + 1$, požadujeme tedy, aby $\beta_{q+1} = 0$, ekvivalentně $\beta_{q+1} = \alpha_0 + \alpha_1(q + 1) + \alpha_2(q + 1)^2 = 0$. Parametry (1.20) musí splňovat omezení $\alpha_0 = -\alpha_1(q + 1) - \alpha_2(q + 1)^2$, což zajistí konvergenci vah zpoždění do nuly.

Mějme nyní obecněji zjednodušení vyjádření parametrů ve tvaru polynomu řádu r

$$\beta_i = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2 + \dots + \alpha_r i^r, \quad i = 0, 1, 2, \dots, q. \quad (1.21)$$

Analogicky jako v příkladu 4 dosazením tohoto vztahu do (1.17) získáme

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \alpha_0 \sum_{i=0}^q x_{t-i} + \alpha_1 \sum_{i=0}^q i x_{t-i} + \dots + \alpha_r \sum_{i=0}^q i^r x_{t-i} + \varepsilon_t \\ &= \alpha + \alpha_0 z_t^{(0)} + \alpha_1 z_t^{(1)} + \dots + \alpha_r z_t^{(r)} + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

I tomuto modelu můžeme vnutit určité vlastnosti obdobně jako v příkladu 4, například (viz Cipra, 2013, str. 113)

$$\beta_{-1} = \alpha_0 + \alpha_1(-1) + \alpha_2(-1)^2 + \dots + \alpha_r(-1)^r = 0,$$

definující nulový vliv $x_{t-(-1)} = x_{t+1}$ na y_t , tj. nulový vliv z budoucího času. Popřípadě

$$\beta_{q+1} = \alpha_0 + \alpha_1(q + 1) + \alpha_2(q + 1)^2 + \dots + \alpha_r(q + 1)^r = 0,$$

definující nulový vliv $x_{t-(q+1)}$ na y_t , tj. nulový vliv ze zpožděného času za uvažovaným useknutím modelu (1.17), který jsme již ukázali v příkladu 4.

1.4 Volba délky zpoždění

Metody popsané v této sekci lze využít jak pro modely se zpožděnou vysvětlující proměnnou (viz předchozí sekce), tak pro modely se zpožděnou vysvětlovanou proměnnou (viz následující kapitola). Volbu délky zpoždění provádíme před odhadováním modelu a je obvykle určena empiricky. Objektívni metody (viz níže) sloužící k určení délky zpoždění nemusí vždy dát stejný výsledek. Z tohoto důvodu neexistuje pouze jedna preferovaná metoda k určení délky zpoždění.

Pokud zvolíme vhodnou délku zpoždění (označme ji q), pak do modelu obvykle zahrneme veškeré zpožděné proměnné od zpoždění 0 do q , jelikož v praxi není běžné, abychom zahrnuli do modelu proměnné x_{t-1} a x_{t-3} a zároveň vynechali proměnnou se zpožděním 2. Toto platí i za předpokladu, že by proměnná se zpožděním 2 nebyla statisticky významná.

Pokud bychom uvažovali sezónní data, je opodstatněné do modelu s krátkým zpožděním přidat regresor se zpožděním 12, abychom zahrnuli informaci o chování ve stejném měsíci minulého roku.

Statistická významnost

První metodou, kterou můžeme využít k volbě délky zpoždění, je využití statistických testů sloužící k testování nulové hypotézy o statistické významnosti jednotlivých koeficientů v modelu. Lze použít dva alternativní přístupy:

(i) Uvažujme model s dlouhým zpožděním a pomocí statistických testů testujeme statistickou nevýznamnost proměnné s největším zpožděním. V případě nezamítnutí nulové hypotézy zkrátíme model. Takto postupujeme dokud nulovou hypotézu zamítnout můžeme, a tím získáme vhodnou délku zpoždění.

(ii) Uvažujme model s velmi krátkým zpožděním a pomocí statistického testu na nevýznamnost jednotlivých proměnných přidáváme do modelu statisticky významné proměnné, dokud nulovou hypotézu zamítnout nemůžeme, a tím alternativně získáme vhodnou délku zpoždění.

Informační kritéria

Další metodou pro určení délky zpoždění je využití informačních kritérií. Dvě nejčastěji používaná informační kritéria jsou: *Akaikovo informační kritérium* (AIC) a *Bayesovo informační kritérium* (BIC), která jsou definována jako

$$AIC = \ln \left(\frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{T} \right) + \frac{2K}{T}, \quad (1.22)$$

$$BIC = \ln \left(\frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{T} \right) + \frac{K \ln T}{T}, \quad (1.23)$$

kde T je počet pozorování, K je počet odhadovaných parametrů a $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$ jsou rezidua.

Obě informační kritéria mají v prvním členu součet čtverců reziduí (měřící jak dobře model vysvětluje vysvětlovanou proměnnou), který budeme chtít minimalizovat, tedy volíme model s takovým K , který má nejmenší hodnotu informačního kritéria (více viz Cípra, 2013; Hill a kol., 2011; Parker, 2012).

2. Autoregresní model

V předchozí kapitole jsme se zabývali modelem rozložených časových zpoždění (1.1), který je speciálním tvarem lineárního regresního modelu obsahující pouze zpožděné regresory, ale neobsahující zpožděnou vysvětlovanou proměnnou. Hlavními problémy modelů představenými výše bylo: pro model s konečným zpožděním, který je speciálním tvarem modelu ARDL(p, q) s $p = 0$ (neobsahující zpožděná y , viz kapitola 1), nalézt bod useknutí. U geometrického modelu využíváme restrikcí na koeficienty β_i , a sice, že musí geometricky klesat k nule, a u obecného modelu musíme pracovat s nekonečným zpožděním, a to pro nás nemusí být výhodné (více viz Hill, Griffiths a Judge, 2001). Proto definujeme zobecněný model rozložených časových zpoždění, který je mnohem flexibilnější. Zároveň je schopný eliminovat korelovanost mezi chybovými členy, což lze docílit přidáváním více zpožděných členů do modelu. Dalším využitím je predikce a využití v intervenční analýze, o které se zmíníme v kapitole 3.

2.1 Obecný model

Zobecněním modelu rozložených časových zpoždění dostaneme *autoregresní model rozložených časových zpoždění*, značíme jako ARDL(p, q) a zapisujeme (viz Cipra, 2013, str. 371)

$$\varphi(B)y_t = \alpha + \beta(B)x_t + \varepsilon_t, \quad (2.1)$$

kde $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p$ je autoregresní operátor (polynom řádu p určující počet zpožděných vysvětlovaných proměnných), $\beta(B) = \beta_0 + \beta_1 B + \dots + \beta_q B^q$ je operátor rozložených časových zpoždění vysvětlující proměnné x (polynom řádu q). Na ε_t nahlížíme jako na stacionární proces ARMA(r, s) definovaný jako

$$\pi(B)\varepsilon_t = \theta(B)u_t,$$

což lze upravit na

$$\varepsilon_t = \frac{\theta(B)}{\pi(B)}u_t = \frac{1 + \theta_1 B + \dots + \theta_s B^s}{1 - \pi_1 B - \dots - \pi_r B^r}u_t,$$

kde u_t je bílý šum. Přitom B je operátor časového posunu, který zpozdí veličinu o jeden časový úsek (viz Cipra, 2013, str. 105), tj.

$$By_t = y_{t-1}; \quad (2.2)$$

umocněním operátoru časového posunu s mocninným exponentem j zpozdíme proměnnou o j časových úseků

$$B^j y_t = B^{j-1}(By_t) = B^{j-1}y_{t-1} = \dots = y_{t-j}.$$

Rozepsáním operátorů v (2.1) získáme názornější zápis modelu ve tvaru

$$y_t = \alpha + \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t. \quad (2.3)$$

Předpokládejme navíc, že operátor $\varphi(B)$ je stacionární, tedy kořeny polynomu $\varphi(z) = 0$ pro $z \in \mathbb{C}$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Pak můžeme (2.1) přepsat do tvaru

$$y_t = \delta + \frac{\beta(B)}{\varphi(B)}x_t + \nu_t, \quad (2.4)$$

kde $\delta = \alpha/(1 - \varphi_1 - \dots - \varphi_p)$ a $\nu_t = \varphi^{-1}(B)\varepsilon_t$ je reziduální složka ve tvaru stacionárního procesu ARMA($p + r, s$).

Jakým způsobem zvolit p a q jsem ukázali v sekci 1.4. V případě, že budeme uvažovat použití informačních kritérií, pak do (1.22) a (1.23) dosadíme za $K = p + q + 2$ odpovídající počtu parametrů, které je třeba odhadnout. Tento počet lze snadno odvodit z (2.3).

2.2 Koyckův autoregresní model

Speciálním případem autoregresního modelu je model ARDL(1,0) nazývaný *Koyckův autoregresní model* (dle Parker, 2012, str. 46–48), který neobsahuje zpožděnou vysvětlující proměnnou, ale pouze zpožděnou vysvětlovanou proměnnou. Zapišeme ve tvaru (všimněme si podobnosti s (1.12))

$$y_t = \alpha + \varphi_1 y_{t-1} + \beta_0 x_t + \varepsilon_t.$$

Předchozí vztah lze přepsat za užití operátoru časového posunu

$$(1 - \varphi_1 B)y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \varepsilon_t, \\ y_t = \frac{\alpha}{1 - \varphi_1 B} + \frac{\beta_0}{1 - \varphi_1 B}x_t + \frac{1}{1 - \varphi_1 B}\varepsilon_t.$$

Nyní za předpokladu stacionarity $-1 < \varphi_1 < 1$, lze předchozí vztah upravit na

$$y_t = \frac{\alpha}{1 - \varphi_1} + \beta_0 \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i x_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i \varepsilon_{t-i}. \quad (2.5)$$

Pokud v (2.5) přeznačíme koeficienty $\delta = \alpha/(1 - \varphi_1)$ a $\theta_i = \beta_0 \varphi_1^i$ získáme model rozložených časových zpoždění (1.1) představený v první kapitole, kde reziduální složka představuje nekonečný MA proces. Můžeme tedy opět určit jednotlivé vlivy, a to okamžitý vliv (1.2):

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \theta_0 = \beta_0,$$

dynamický marginální vliv (1.3):

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_{t-k}} = \theta_k = \beta_0 \varphi_1^k$$

a dlouhodobý vliv (1.5):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_0 \varphi_1^i = \frac{\beta_0}{1 - \varphi_1}.$$

3. Modely intervenční analýzy

Důležitou aplikací ARDL modelů, představených v předchozí kapitole, je využití v *intervenční analýze*, která slouží k modelování *intervencí* (zásahů zvenčí), které značným způsobem ovlivní vývoj časové řady v určitém okamžiku t_0 . Čas t_0 nazýváme *okamžik intervence*, tedy období, ve kterém došlo k určitému zásahu zvenčí, a tím ke změně charakteru časové řady.

Pod pojmem intervence rozumíme například: úspěšnou reklamu, díky které zvýšíme poptávku po našich službách, nebo schválení zákona upravujícího rychlostní limity, a tím snížení úmrtnosti a počtu nehod na silnicích.

Budeme předpokládat, že intervence vzniklá v čase t_0 je pro nás známá, stejně jako časový okamžik t_0 , ve kterém proběhla. Dále budeme předpokládat, že do času t_0 pozorujeme stacionární časovou řadu y_t , kterou jsme schopni popsat pomocí ARMA modelu řádů p a q ve tvaru

$$\phi(B)y_t = \psi(B)\varepsilon_t,$$

kde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ a $\psi(B) = \psi_1 + \psi_2 B + \dots + \psi_q B^q$.

Jako model intervenční analýzy modifikujeme model (2.1) představený v předchozí kapitole, ve kterém namísto regresorů využijeme indikátorové proměnné nabývající hodnot 0 a 1, pomocí nichž budeme modelovat vlivy intervencí na časovou řadu. Proměnná nazývaná *skok* S_t (obr. 3.1a) je prvním typem zmíněných indikátorových proměnných a uvažujeme ji ve tvaru (viz Cipra, 1986, str. 183)

$$S_t = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < t_0, \\ 1, & \text{pro } t \geq t_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Skok reprezentuje trvalý vliv intervence od času t_0 na úroveň časové řady. Druhým typem je *pulz* P_t (obr. 3.1b) definovaný jako

$$P_t = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \neq t_0, \\ 1, & \text{pro } t = t_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

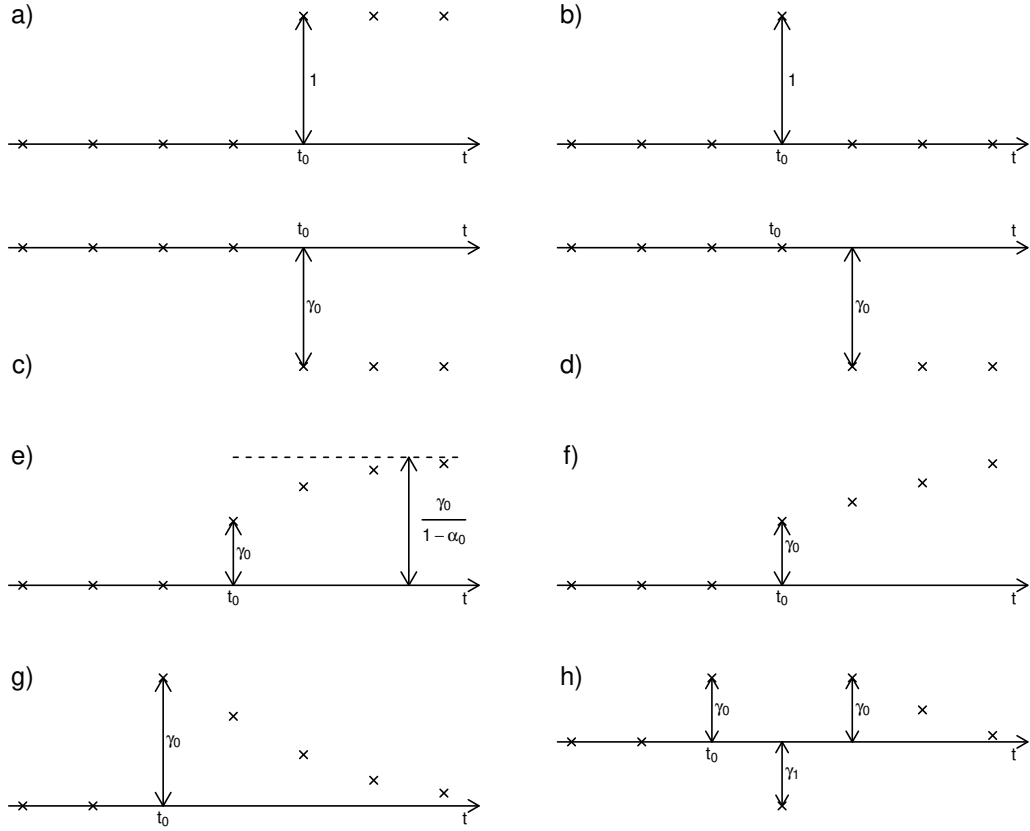
Pulz reprezentuje dočasný vliv intervence v čase t_0 . Tyto indikátorové proměnné využíváme v případě, kdy vliv intervence nelze vyjádřit pomocí kvantitativní proměnné, která by byla reálně nezměřitelná (viz Box a kol., 2015, str. 482). Můžeme si povšimnout jisté podobnosti mezi výše definovanými skoky a pulzy s kvalitativními proměnnými používanými v ekonometrických modelech sloužícími k vyjádření informace, zda například zkoumaná osoba je student či nikoliv.

Všimněme si, že pulzy můžeme nahradit pouze skoky pomocí následujícího předpisu

$$P_t = S_t - S_{t-1} = (1 - B)S_t,$$

kde B je operátor časového posunu (2.2). My ovšem budeme nadále využívat i pulzy P_t kvůli názornosti.

Poznámka. V případě intervence, která má vliv pouze několik následujících časových období, může být výhodnější místo skoku uvažovat posloupnost pulzů s různými velikostmi, které lépe zachycují realitu.



Obrázek 3.1: Nejčastější vlivy intervencí.

Využitím různých kombinací skoků (3.1) a pulzů (3.2) v ARDL modelu (2.4) lze modelovat požadovaný typ intervenčního zásahu a jeho postupného odeznívání. V (2.4) jsme uvažovali polynomy $\varphi(B)$ a $\beta(B)$, což byly polynomy řádů p a q . Z praktických důvodů však budeme využívat jednodušších tvarů zmíněných polynomů umožňující modelovat nejčastější průběhy intervenčních změn, které jsou dále zmíněny (viz Box a Tiao, 1975; Cipra, 1986). Zavedme dodatečné značení, které vychází z (2.4)

$$y_t = \mathcal{Y}_t + \nu_t,$$

kde

$$\mathcal{Y}_t = \frac{\beta(B)}{\varphi(B)} x_t. \quad (3.3)$$

V intervenčním kontextu dosadíme v (3.3) za regresor x_t buď skok S_t (3.1), nebo pulz P_t (3.2), a tím modelujeme požadované vlivy intervencí.

- *Okamžitá konstantní změna* (obr. 3.1c):

$$\mathcal{Y}_t = \gamma_0 S_t \quad (3.4)$$

vyjadřuje okamžité zvýšení (resp. snížení) úrovně řady v čase t_0 ve kterém došlo k intervenci, a to o hodnotu γ_0 pro $\gamma_0 > 0$ (resp. $\gamma_0 < 0$).

- *Zpožděná konstantní změna* (obr. 3.1d):

$$\mathcal{Y}_t = \gamma_0 B^d S_t$$

vyjadřuje zpožděný posun úrovně řady o hodnotu γ_0 se zpožděním d časových úseků od intervence v čase t_0 , tedy v čase $t_0 + d$.

- *Okamžitá dynamická změna* (obr. 3.1e):

$$\mathcal{Y}_t = \gamma_0(S_t + \alpha_0 S_{t-1} + \alpha_0^2 S_{t-2} + \dots) = \frac{\gamma_0}{1 - \alpha_0 B} S_t$$

vyjadřuje posun řady o hodnotu $\gamma_0(1 + \alpha_0 + \alpha_0^2 + \dots + \alpha_0^d)$ v čase $t_0 + d$, kde $d = 0, 1, 2, \dots$. Limitně pro $d \rightarrow \infty$ řada dosáhne hodnoty $\gamma_0/(1 - \alpha_0)$. Pokud bychom uvažovali $\alpha_0 = 1$, pak se řada lineárně zvýší o úroveň γ_0 při každém časovém okamžiku (obr. 3.1f).

- *Okamžitá dočasná změna* (obr. 3.1g):

$$\mathcal{Y}_t = \gamma_0(P_t + \alpha_0 P_{t-1} + \alpha_0^2 P_{t-2} + \dots) = \frac{\gamma_0}{1 - \alpha_0 B} P_t \quad (3.5)$$

vyjadřuje posun řady v čase t_0 o hodnotu γ_0 a tento vliv se s časem zmenšuje a posléze zaniká, tedy řada infinitně nabyde úrovně, kterou měla před intervencí.

Všechny výše zmíněné průběhy intervenčních změn lze dále kombinovat a dosáhnout tak vlastních speciálních modelů intervenční analýzy. Například

$$\mathcal{Y}_t = \gamma_0 P_t + \gamma_1 B P_t + \frac{\gamma_0 B^2}{1 - \alpha_0 B} P_t, \quad \gamma_0 > 0, \gamma_1 < 0,$$

reprezentující v čase t_0 zvýšení úrovně řady o γ_0 . Dále v čase $t_0 + 1$, tedy v čase zpožděném o jeden časový úsek od času t_0 , dochází ke snížení úrovně řady o γ_1 . Nakonec v čase $t_0 + 2$ zvýšení řady o γ_0 a následný pokles úrovně řady až do infinitního zániku vlivu intervence (obr. 3.1h).

Příklad 5. (Box a Tiao, 1975, str. 73–74) *Úroveň zplodin v ovzduší v Los Angeles.*

V tomto příkladu se modelují měsíční průměry úrovní zplodin v ovzduší v Los Angeles počínaje lednem 1955 až do prosince 1972. Dále v letech 1955–1960 a 1960–1965 se předpokládá, že nedošlo k žádným intervenčním zásahům, které by významně ovlivnily vývoj časové řady, tedy úrovně zplodin v ovzduší.

Za pozorované období došlo ke dvěma intervencím, označme je I_1 a I_2 , které podstatným způsobem ovlivnily průběh časové řady. Jednalo se o zásahy snažící se snížit znečišťování ovzduší.

I_1 : V roce 1960 (leden) došlo k otevření vnějšího dálničního okruhu a zároveň vydání zákona o úpravě benzínu, který je v Los Angeles a okolí prodáván.

I_2 : Od roku 1966 došlo k zavedení předpisů, které požadovaly změnu motorů v nových vozech.

V čase intervence I_1 můžeme očekávat okamžité snížení úrovně řady. Oba zásahy (jak otevření okruhu, tak prodej benzínu) jsou okamžité změny a lze předpokládat, že většina vozidel začne okamžitě využívat nového a rychlejšího dálničního okruhu. Zároveň většina vozidel natankuje nový typ benzínu, který je

v Los Angeles a okolí prodáván. Mohli bychom proto využít změnu (3.4), jelikož očekáváme, že dojde k okamžitému snížení znečištění v čase intervence I_1 .

U intervence I_2 již nemůžeme předpokládat skokovité snížení znečištění, protože nové motory jsou instalovány pouze do nových vozidel. Pro přesné modelování této intervence by byla výhodná znalost poměru nových vozidel s novým typem motoru ku všem vozidlům v libovolném časovém okamžiku. Tato data ovšem v době modelování nebyla dostupná. Z těchto důvodů uvažujeme, že poměr nových vozidel mezi všemi vozidly každoročně roste o konstantu, ekvivalentně: hladina znečištění se zmenšuje každý rok o konstantní úroveň. Za těchto předpokladů bychom mohli použít změnu (3.5), ve které uvažujeme $\alpha_0 = 1$, jelikož předpokládáme, že se úroveň znečištění každý rok zmenší o určitou konstantu $\gamma_0 < 0$.

Navíc máme znalost o tom, že v letních měsících dochází k znečištění ovzduší ve větší míře než v zimních měsících, což by bylo rozumné zohlednit v modelu. Při těchto znalostech byla navržena systematická složka modelu, která argumenty ovlivňující vývoj řady (viz předchozí odstavec) uvažuje, a sice ve tvaru

$$\gamma_{10}S_{t1} + \frac{\gamma_{20}}{1 - B^{12}}S_{t2} + \frac{\gamma_{30}}{1 - B^{12}}S_{t3}. \quad (3.6)$$

Jednotlivé skoky v (3.6) jsou definovány níže. Skok S_{t1} nám slouží k modelování okamžité změny (3.4), kterou zapříčiní první intervence I_1 . Skoky S_{t2} a S_{t3} slouží k zachycení změn plynoucích z druhé intervence I_2 :

$$S_{t1} = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < \text{leden } 1960, \\ 1, & \text{pro } t \geq \text{leden } 1960; \end{cases}$$

$$S_{t2} = \begin{cases} 0, & \text{pro ostatní měsíce,} \\ 1, & \text{pro letní měsíce, tedy } t = \text{červen} - \text{říjen od roku } 1966; \end{cases}$$

$$S_{t3} = \begin{cases} 0, & \text{pro ostatní měsíce,} \\ 1, & \text{pro zimní měsíce, tedy } t = \text{listopad} - \text{květen od roku } 1966. \end{cases}$$

Jako odhady parametrů v systematické složce (3.6) byly získány hodnoty $\hat{\gamma}_{10} = -1,09$, $\hat{\gamma}_{20} = -0,25$ a $\hat{\gamma}_{30} = -0,07$. Příslušné odhady směrodatných odchylek jsou $\hat{\sigma}_1 = 0,13$, $\hat{\sigma}_2 = 0,07$ a $\hat{\sigma}_3 = 0,06$. Tyto výsledky lze interpretovat tak, že první intervence I_1 okamžitě sníží úroveň znečištění o $-1,09$ jednotek (viz obr. 3.1c). Druhá intervence I_2 bude každý rok v letních měsících snižovat úroveň časové řady o $-0,25$, což lze pozorovat na obr. 3.1f, kde jsme ovšem uvažovali $\gamma_0 > 0$. V průběhu zimních měsíců dojde každý rok ke snížení o $-0,07$ jednotek, a to je dle autorů zanedbatelný rozdíl.

4. Aplikace

4.1 Příklad - modely se zpožděnými regresory

V příloze A.1 jsou uvedena čtvrtletní data od roku 1950 do 2000, celkem tedy $T = 204$ pozorování. V tabulce jsou obsažena data z USA o hrubém domácím produktu GDP (v mld. USD) a peněžní zásobě $M1$.

Veškeré výpočty provedené v tomto příkladě byly provedeny za pomoci statistického softwaru R s doplňujícím balíčkem `dLagM`, který obsahuje funkce pro práci se zpožděnými proměnnými. Poté balíčkem `car` obsahující Durbinův-Watsonův test na autokorelovanost reziduí a balíček `Hmisc` obsahující funkci sloužící ke zpoždění proměnných.

Model s konečným zpožděním

V Cipra (2013, str. 111) byl uvažován lineární regresní model ve kterém chceme vysvětlit proměnnou hrubého domácího produktu GDP za pomoci zpožděných hodnot peněžní zásoby $M1$. Uvažujeme model s konečným zpožděním (1.18), kde $q = 4$, tedy model

$$\ln GDP_t = \alpha + \sum_{i=0}^4 \beta_i \ln M1_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t = 5, \dots, 204. \quad (4.1)$$

Odhad parametrů modelu (4.1) je uveden v tabulce 4.1 ve které si můžeme všimnout vysoké hodnoty koeficientu determinace R^2 , avšak Durbinova-Watsonova testová statistika ($DW = 0,0184$) je téměř nulová, což nasvědčuje pozitivní autokorelovanosti reziduí.

Jelikož jsme odhadli jednotlivé parametry v modelu (4.1), můžeme například spočítat dlouhodobý vliv (1.5) peněžních zásob $M1$ na vysvětlovanou proměnnou GDP jako

$$\beta = \sum_{i=0}^4 \beta_i = 1,3136 - 0,4060 - 0,0552 - 0,2524 - 0,0212 = 0,5788.$$

Geometrický model

Můžeme také uvažovat geometrický model rozložených časových zpoždění (1.8), který uvažuje nekonečné zpoždění vysvětlující proměnné

$$\ln GDP_t = \alpha + \beta \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \ln M1_{t-i} + \varepsilon_t, \quad |\lambda| < 1. \quad (4.2)$$

V sekci 1.2 jsme si dále uvedli úpravu regresní rovnice (4.2), při které od této rovnice odečteme λ násobek tytéž rovnice, ale zpožděné o jeden časový úsek, tedy rovnice v čase $t-1$. Provedením této Koyckovy transformace získáme (viz (1.12))

$$\ln GDP_t = \alpha(1 - \lambda) + \beta \ln M1_t + \lambda \ln GDP_{t-1} + \eta_t, \quad \text{kde } \eta_t = \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1}. \quad (4.3)$$

Proměnná	Koeficient	Směrod. chyba	P-hodnota
intercept	4,9463	0,0568	< 0,0001
ln(M1)	1,3136	0,8678	0,1317
Lag(ln(M1), 1)	-0,4060	1,4893	0,7854
Lag(ln(M1), 2)	-0,0552	1,4939	0,9706
Lag(ln(M1), 3)	-0,2524	1,4901	0,8657
Lag(ln(M1), 4)	-0,0212	0,8783	0,9808
S.E.	0,1087		
R ²	0,9492		

Tabulka 4.1: Výstup R pro model hrubého domácího produktu (4.1) se zpožděnými regresory.

Odhad modelu (4.3) nalezneme v tabulce 4.2, kde v porovnání s tabulkou 4.1 vidíme, že jsme získali větší hodnotu koeficientu determinace R^2 , ale opět Durbinův-Watsonův test na autokorelovanost reziduí zamítá H_0 o nekorelovanosti reziduí s hodnotou testové statistiky $DW = 1,2865$. Opět můžeme spočítat dlouhodobý vliv $M1$ na hrubý domácí produkt dle (1.10)

$$\frac{\beta}{1 - \lambda} = \frac{0,0045}{1 - 0,9906} = 0,4819.$$

Proměnná	Koeficient	Směrod. chyba	P-hodnota
intercept	0,0604	0,0310	0,0523
ln(M1)	0,0045	0,0038	0,2304
Lag(ln(GDP), 1)	0,9906	0,0062	< 0,0001
S.E.	0,0099		
R ²	0,9996		

Tabulka 4.2: Výstup R pro model hrubého domácího produktu (4.3) po aplikaci Koyckovy transformace.

Polynomický model

Doposud jsme si prakticky ukázali model s konečným zpožděním a geometrický model rozložených časových zpoždění. Posledním modelem, který je často využíván a spadá do skupiny modelů obsahující pouze zpožděné regresory je polynomický model. Budeme uvažovat model se zpožděním $q = 12$ ve tvaru

$$\ln GDP_t = \alpha + \sum_{i=0}^{12} \beta_i \ln M1_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t = 13, \dots, 204. \quad (4.4)$$

Dále pro tento model předpokládáme, že parametry β_i lze zapsat jako polynom

Proměnná	Koeficient	Směrod. chyba	P-hodnota
intercept	5,0416	0,0549	< 0,0001
z(0)	0,7714	0,2786	0,0061
z(1)	-0,4986	0,3138	0,1138
z(2)	0,0760	0,0667	0,2557
z(3)	-0,0033	0,0037	0,3757
S.E.	0,1004		
R ²	0,9525		

Tabulka 4.3: Výstup R pro odhad parametrů aproximačního polynomu polynomickeho modelu (4.6).

Parametr	Odhad	Směrod. chyba	P-hodnota
beta0	0,7714	0,2786	0,0062
beta1	0,3455	0,0624	< 0,0001
beta2	0,0519	0,1282	0,6859
beta3	-0,1290	0,1744	0,4605
beta4	-0,2170	0,1510	0,1767
beta5	-0,2318	0,1095	0,0357
beta6	-0,1931	0,0732	0,0090
beta7	-0,1206	0,1115	0,2808
beta8	-0,0340	0,1617	0,8337
beta9	0,0470	0,1753	0,7890
beta10	0,1026	0,1279	0,4236
beta11	0,1132	0,0647	0,0819
beta12	0,0590	0,2840	0,8356

Tabulka 4.4: Výstup R pro dopočtené hodnoty parametrů β_i z (4.5).

řádu $r = 3$ (viz (1.21)). Máme tedy aproximaci

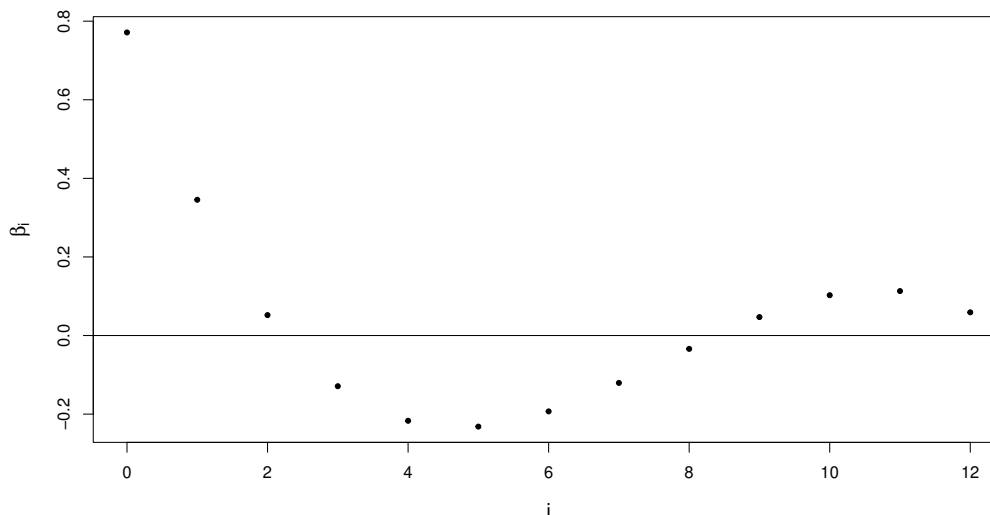
$$\beta_i = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2 + \alpha_3 i^3, \quad i = 0, 1, 2, \dots, q, \quad (4.5)$$

kterou dosadíme do (4.4) a získáme

$$\begin{aligned} \ln GDP_t = \alpha + \alpha_0 \sum_{i=0}^{12} \ln M1_{t-i} + \alpha_1 \sum_{i=0}^{12} i \ln M1_{t-i} + \\ + \alpha_2 \sum_{i=0}^{12} i^2 \ln M1_{t-i} + \alpha_3 \sum_{i=0}^{12} i^3 \ln M1_{t-i} + \varepsilon_t, \end{aligned}$$

a to můžeme upravit podobně jako v (1.20) a získáme

$$\ln GDP_t = \alpha + \alpha_0 z_t^{(0)} + \alpha_1 z_t^{(1)} + \alpha_2 z_t^{(2)} + \alpha_3 z_t^{(3)} + \varepsilon_t, \quad (4.6)$$



Obrázek 4.1: Aproximace parametrů β_i ležící na polynomu řádu 3 dle (4.5).

kde

$$z_t^{(0)} \equiv \sum_{i=0}^{12} \ln M1_{t-i}, \quad z_t^{(1)} \equiv \sum_{i=0}^{12} i \ln M1_{t-i},$$

$$z_t^{(2)} \equiv \sum_{i=0}^{12} i^2 \ln M1_{t-i}, \quad z_t^{(3)} \equiv \sum_{i=0}^{12} i^3 \ln M1_{t-i}.$$

Odhady jednotlivých koeficientů v (4.6) nalezneme v tabulce 4.3, ze kterých spočítáme odhady původních parametrů β_i pomocí (4.5). Dopočtené hodnoty β_i jsou uvedeny v tabulce 4.4. Dlouhodobý vliv $M1$ pro polynomický model na hrubém domácím produktu je

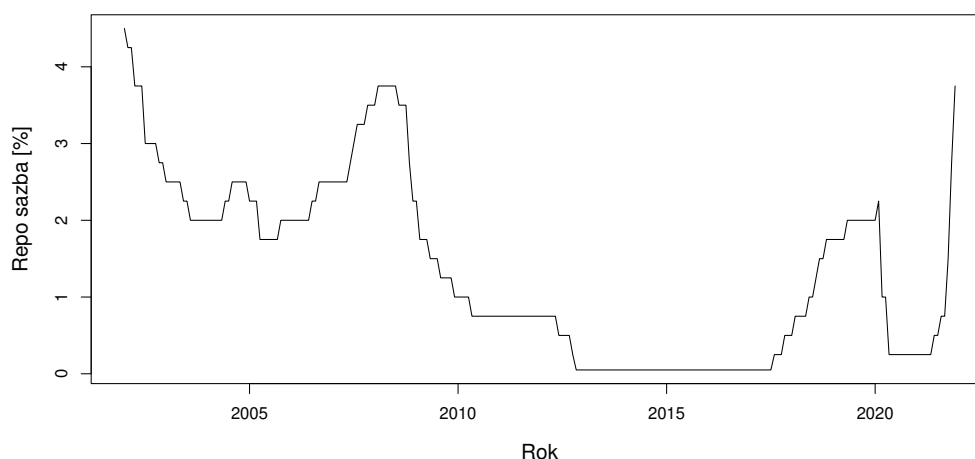
$$\beta = \sum_{i=0}^{12} \beta_i = 0,5651.$$

4.2 Příklad - modely se zpožděnými proměnnými

V příloze A.2 jsou měsíční data od ledna roku 2002 do konce roku 2021, celkem máme $T = 240$ pozorování. Jednotlivé sloupce této tabulky obsahují dvoutýdenní repo sazby $REPO$ (v % p. a.) a index spotřebitelských cen CPI v České republice.

Veškeré výpočty provedené v tomto příkladě byly také provedeny za pomoci statistického softwaru R s doplňujícím balíčkem `dLagM`, který obsahuje funkce pro práci se zpožděnými proměnnými. Poté balíčkem `car` obsahující Durbinův-Watsonův test na autokorelovanost reziduí a balíčkem `Hmisc` obsahující funkci sloužící ke zpoždění proměnné.

Obdobně jako v předchozím příkladu budeme demonstrovat jednotlivé modely rozložených časových zpoždění představené v této práci a zároveň v dalším příkladě využití intervenční analýzy. Vývoj dvoutýdenní repo sazby je silně ovlivňován vnějšími ekonomickými i politickými vlivy. Z tohoto důvodu jsou tato data ideální pro demonstraci intervenční analýzy (viz obrázek 4.2).



Obrázek 4.2: Vývoj 2T-repo sazby od ledna 2002 do prosince 2021.

Model s konečným zpožděním

Nejprve začneme modelem s konečným zpožděním, ve kterém jsme pomocí minimalizace informačních kritérií (1.22), (1.23) a signifikantnosti jednotlivých parametrů modelu dospěli k regresní rovnici se zpožděnými regresory ve tvaru

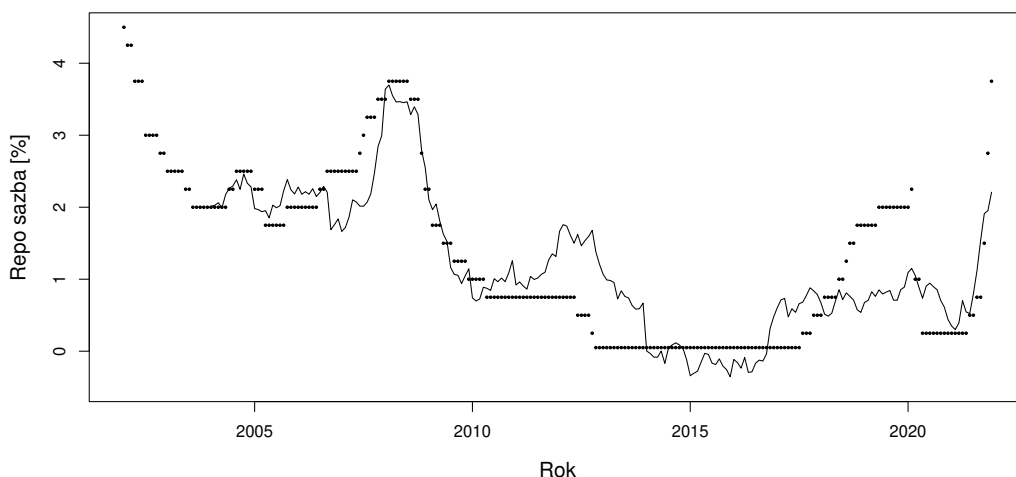
$$REPO_t = \alpha + \beta_0 CPI_t + \beta_1 CPI_{t-12} + \beta_2 CPI_{t-24} + \varepsilon_t, \quad t = 25, \dots, 240. \quad (4.7)$$

Všimněme si, že $REPO$ vyjadřujeme pomocí současné hodnoty CPI a zpožděných hodnot tohoto regresoru o jeden a dva roky. Odhad modelu (4.7) nalezneme v tabulce 4.5. Vidíme, že koeficient determinace R^2 není příliš vysoký, což je zapříčiněno skokovitým vývojem repo sazby. Navíc skoro nulová hodnota testové statistiky $DW = 0,1508$ Durbinova-Watsonova testu naznačuje pozitivní autokorelovanost reziduí. Můžeme také analogicky jako v předchozím příkladu spočítat dlouhodobý vliv (1.5), který je roven

$$\beta = \sum_{i=0}^2 \beta_i = 0,4251 - 0,3564 - 0,1435 = -0,0748.$$

Proměnná	Koeficient	Směrod. chyba	P-hodnota
intercept	7,0691	0,3730	< 0,0001
CPI	0,4251	0,0270	< 0,0001
Lag(CPI, 12)	-0,3564	0,0421	< 0,0001
Lag(CPI, 24)	-0,1435	0,0290	< 0,0001
S.E.	0,5689		
R^2	0,7326		

Tabulka 4.5: Výstup R pro model 2T-repo sazby (4.7) se zpožděnými regresory.



Obrázek 4.3: Vývoj repo sazby za pomoci odhadnutého modelu s konečným zpožděním (4.7).

Geometrický model

Další ze skupiny modelů se zpožděnými regresory je geometrický model, který budeme uvažovat ve tvaru (1.8)

$$REPO_t = \alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i CPI_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (4.8)$$

kde ovšem předpokládáme, že β_i geometricky klesají k nule, tj. $\beta_i = \beta \lambda^i$. Dosažením tohoto předpokladu do (4.8) získáme rovnici (1.9)

$$REPO_t = \alpha + \beta \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i CPI_{t-i} + \varepsilon_t, \quad |\lambda| < 1. \quad (4.9)$$

Aplikací Koyckovy transformace (operace při které se od regresní rovnice v čase t odečítá tatáž rovnice v čase $t - 1$ násobená koeficientem λ) na rovnici (4.9) dostaneme

$$REPO_t = \alpha(1 - \lambda) + \beta CPI_t + \lambda REPO_{t-1} + \eta_t, \quad \text{kde } \eta_t = \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1}. \quad (4.10)$$

Odhad modelu (4.10) nalezneme v tabulce 4.6. Nyní můžeme zpětně dopočítat parametry modelu (4.10), které jsou

$$\hat{\alpha} = 284,6503, \quad \hat{\beta} = 0,0037, \quad \hat{\lambda} = 1,0012.$$

Při bližším pohledu si všimneme korelované reziduální složky v (4.10), což potvrdil i Durbinův-Watsonův test s hodnotou testové statistiky $DW = 1,4271$, tedy zamítáme H_0 ve prospěch pozitivní autokorelovanosti. Dále si také povšimneme koeficientu determinace R^2 , který je značně vysoký, což je zapříčiněno zpožděnou hodnotou $REPO$ v modelu (4.10).

Proměnná	Koeficient	Směrod. chyba	P-hodnota
intercept	-0,3553	0,1510	0,0195
Lag(REPO, 1)	1,0012	0,0140	< 0,0001
CPI	0,0037	0,0015	0,0117
S.E.	0,1964		
R ²	0,9717		

Tabulka 4.6: Výstup R pro geometrický model 2T-repo sazby (4.10).

Autoregresní model

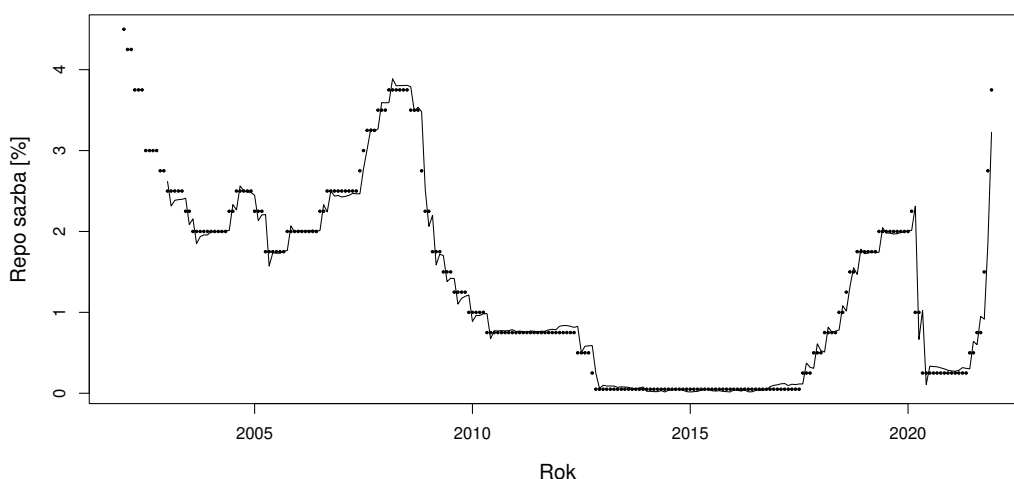
Posledním uvažovaným modelem v tomto příkladu je autoregresní model, který uvažuje možnost zpoždění vysvětlovaných proměnných. K jeho výhodám patří flexibilita a schopnost eliminace autokorelovanosti reziduí. Podobně jako při konstrukci modelu s konečným zpožděním i zde využíváme kombinace minimalizace informačních kritérií (1.22), (1.23), statistické významnosti jednotlivých parametrů modelu a koeficientu determinace R^2 k nalezení optimální délky zpoždění jak pro autoregresní část, tak pro část se zpožděnými regresory v (2.1). Dospěli jsme k autoregresnímu modelu rozložených časových zpoždění ve tvaru

$$REPO_t = \alpha + \beta_0 CPI_t + \beta_1 CPI_{t-12} + \varphi_1 REPO_{t-1} + \varphi_2 REPO_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t = 13, \dots, 240. \quad (4.11)$$

Odhad tohoto modelu nalezneme v tabulce 4.7. Při analýze reziduí a pomocí Durbinova-Watsonova testu pro $DW = 2,0896$ zjišťujeme, že získáváme model s nekorelovanými rezidui, což bylo v sekci o autoregresním modelu prezentováno jako jedna z jeho hlavních výhod. Povšimněme si také vysoké hodnoty koeficientu determinace R^2 a vysoké významnosti použitých regresorů.

Proměnná	Koeficient	Směrod. chyba	P-hodnota
intercept	0,2084	0,1899	0,2737
CPI	0,0408	0,0112	0,0003
Lag(CPI, 12)	-0,0432	0,0125	0,0007
Lag(REPO, 1)	1,2481	0,0684	< 0,0001
Lag(REPO, 2)	-0,2978	0,0673	< 0,0001
S.E.	0,1800		
R ²	0,9732		

Tabulka 4.7: Výstup R pro model 2T-repo sazby (4.11) s využitím autoregresního modelu se zpožděnou vysvětlovanou proměnnou.



Obrázek 4.4: Vývoj repo sazby za pomoci autoregresního modelu (4.11).

4.3 Příklad - intervenční analýza

V příloze A.2 jsou uvedena měsíční pozorování dvoutýdenní repo sazby *REPO* (v % p. a.) od ledna 2002 do prosince 2021 v České republice. S těmito daty budeme pracovat v tomto příkladu.

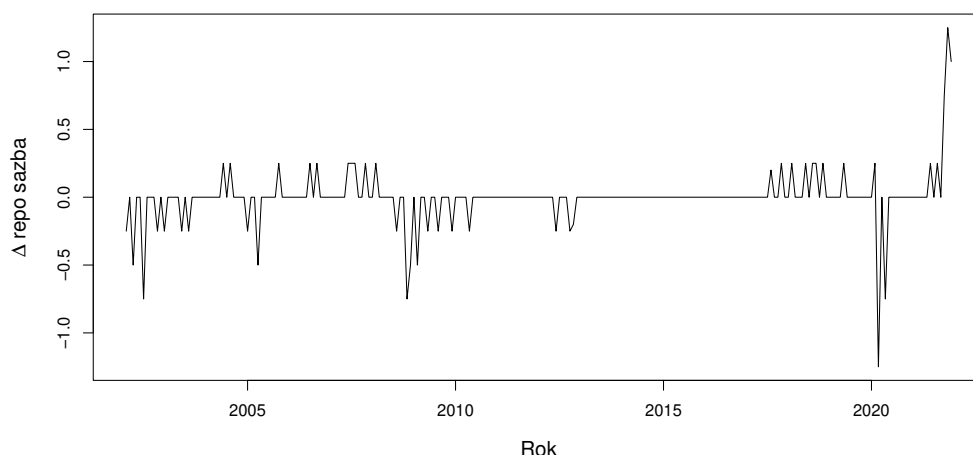
Veškeré výpočty provedené v tomto příkladě byly realizovány za pomoci statistického softwaru R s doplňujícím balíčkem `forecast`, který obsahuje funkce pro práci s intervenční analýzou.

Vyděme z předpokladu, že ve vývoji repo sazby došlo k jedné intervenci I , kterou je uzavření škol a dalších institucí v březnu 2020 v důsledku koronavirové pandemie. Označíme tedy okamžik intervence $t_0 =$ březen 2020. Z obrázku 4.5 si můžeme všimnout, že v březnu došlo k výraznému propadu repo sazby. Tento propad je značný i v květnu 2020, tedy můžeme očekávat zpožděný vliv intervence.

Vzhledem k předpokladu, že do okamžiku intervence t_0 se analyzovaná řada modeluje pomocí stacionárního modelu ARMA, přejdeme nejprve k jejím prvním diferencím, se kterými budeme nadále pracovat (viz obrázek 4.5). Pak vykreslíme autokorelační (ACF) a parciální autokorelační funkci (PACF). Z grafu ACF na obrázku 4.6 určíme hodnotu q . K překročení pásu vymezeného čárkovanou čarou u ACF dochází významně u třetího zpoždění, podobně tomu tak je i u PACF. Pro předintervenční období vývoje diferencí repo sazby identifikujeme model ARMA(3,3).

Nyní budeme chtít najít vhodný model intervenční analýzy. Při podrobném prozkoumání repo sazby na obrázku 4.5 očekáváme, že vliv intervence na úroveň časové řady probíhá ve třech pulzech. První pulz proběhne ihned v okamžiku intervence t_0 (tj. v březnu 2020), další pulz proběhne se zpožděním v čase $t_0 + 1$ (tj. v dubnu 2020) a nakonec zpožděný pulz v čase $t_0 + 2$ (tj. v květnu 2020). Definujme si pulz v čase intervence

$$P_t = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \neq \text{březen 2020,} \\ 1, & \text{pro } t = \text{březen 2020.} \end{cases}$$



Obrázek 4.5: Vývoj diferencí dvoutýdenní repo sazby od ledna 2002 do prosince 2021.

Nyní za pomoci tohoto pulzu definujeme model intervenční analýzy ve tvaru

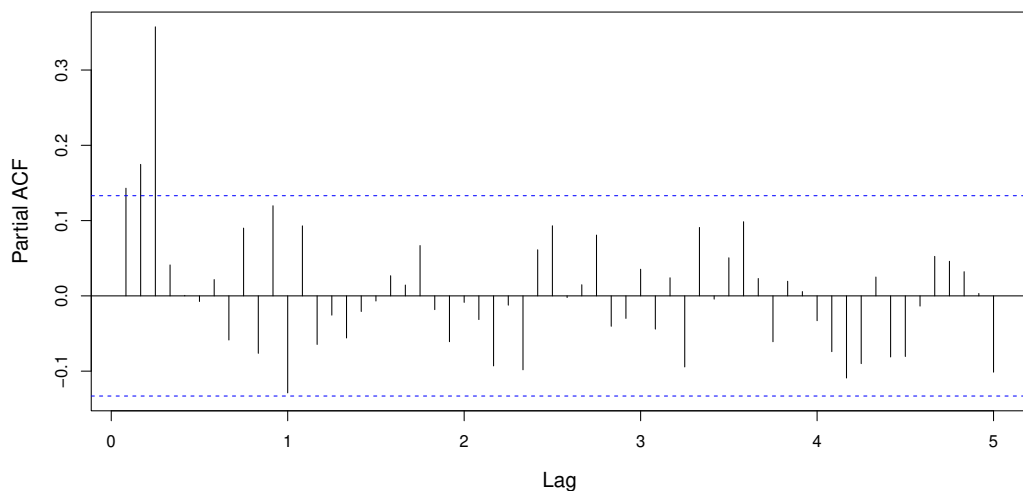
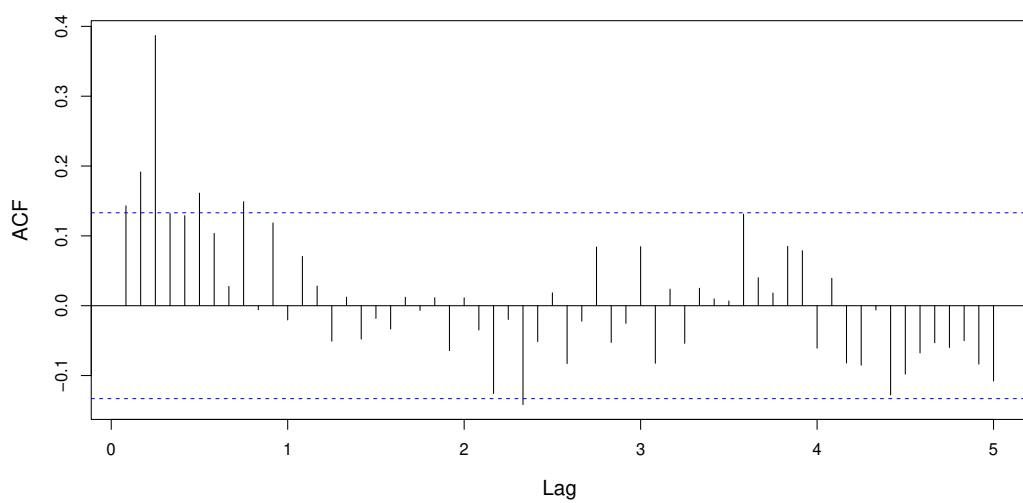
$$\mathcal{Y}_t = \gamma_0 P_t + \gamma_1 P_t B + \gamma_2 P_t B^2 = \gamma_0 P_t + \gamma_1 P_{t-1} + \gamma_2 P_{t-2}, \quad (4.12)$$

kde B je operátor časového zpoždění. Pro předintervenční období diferencovaných repo sazeb jsme identifikovali model ARMA(3,3). My navíc aplikujeme model intervenční analýzy (4.12) a dostaneme pro diferencované repo sazby

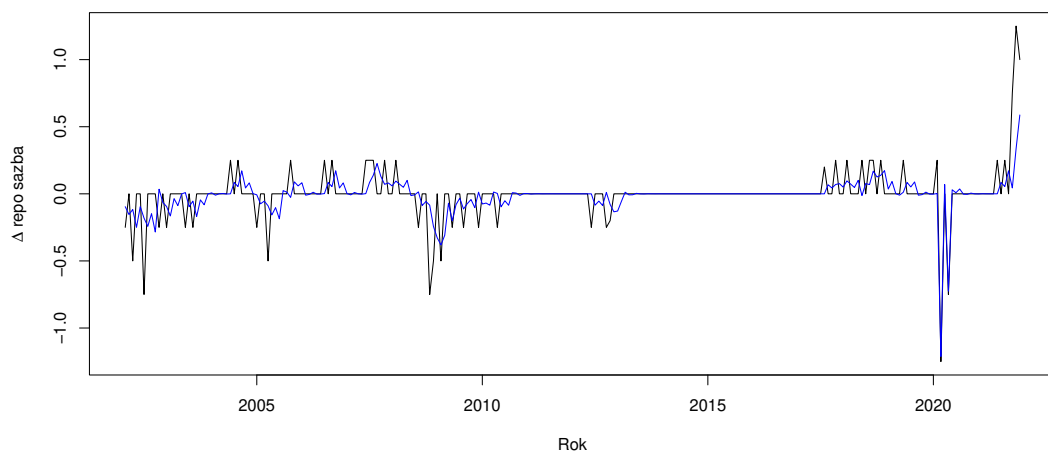
$$\begin{aligned} REPO_t = & \varphi_1 REPO_{t-1} + \varphi_2 REPO_{t-2} + \varphi_3 REPO_{t-3} + \gamma_0 P_t + \\ & + \gamma_1 P_{t-1} + \gamma_2 P_{t-2} + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \psi_3 \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t, \quad t = 4, \dots, 240. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Odhad tohoto modelu nalezneme v tabulce 4.8. Získali jsme odhady pro model intervenční analýzy (4.13) $\hat{\gamma}_0 = -1,3043$, $\hat{\gamma}_1 = -0,0445$ a $\hat{\gamma}_2 = -0,8301$. Tyto výsledky lze interpretovat tak, že vliv intervence na úroveň diferencované časové řady v okamžiku intervence je jednorázový pokles o $\hat{\gamma}_0$. Z tabulky 4.8 vidíme, že pulz zpožděný o jedno období není signifikantní, ale pulz zpožděný o dvě období, tj. v květnu 2020 již signifikantní je, a proto dojde navíc k dalšímu jednorázovému poklesu o $\hat{\gamma}_2$. Můžeme tedy tvrdit, že vliv koronavirové pandemie (intervence) měl významný vliv na úroveň diferencované časové řady. Povšimněme si také, že pro předintervenční období na obrázku 4.7 nedochází k tak přesnému zachycení reality v porovnání s obdobím, ve kterém využíváme model intervenční analýzy. Tento nedostatek způsobuje náš prvotní předpoklad, a sice, že za období od ledna 2002 do března 2020 nedošlo k žádné intervenci.

Ještě je třeba ověřit stacionaritu uvažovaného ARMA modelu. Zjistíme, že kořeny autoregresního polynomu řádu 3 leží vně jednotkového kruhu, je tedy stacionární (viz obrázek 4.8).



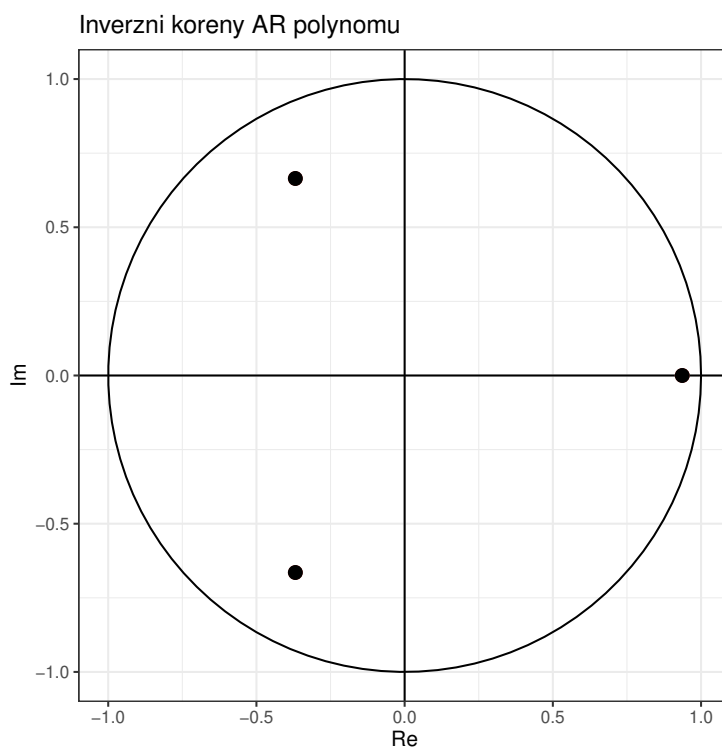
Obrázek 4.6: Autokorelační a parciální autokorelační funkce pro diference repo sazeb.



Obrázek 4.7: Vývoj diferencí repo sazby za pomoci modelu intervenční analýzy.

Proměnná	Koeficient	Směrod. chyba	P-hodnota
Lag(REPO, 1)	0,1992	0,2345	0,3957
Lag(REPO, 2)	0,1129	0,2279	0,6203
Lag(REPO, 3)	0,5410	0,2449	0,0272
Lag(ε , 1)	0,1399	0,2489	0,5741
Lag(ε , 2)	0,1537	0,2264	0,4972
Lag(ε , 3)	-0,1118	0,1969	0,5701
Pulz	-1,3043	0,1352	< 0,0001
Lag(Pulz, 1)	-0,0445	0,1362	0,7441
Lag(Pulz, 2)	-0,8301	0,1349	< 0,0001

Tabulka 4.8: Výstup R pro diferenci 2T-repo sazby při využití intervenční analýzy (4.13).



Obrázek 4.8: Převrácené hodnoty kořenů odhadnutého modelu (4.13).

Závěr

Teoretická část této bakalářské práce se věnovala dynamickým regresním modelům, které uvažují zpoždění jednotlivých proměnných v regresní rovnici. Nejprve jsme si ukázali obecný model rozložených časových zpoždění, který byl v průběhu práce upravován a kladením různých restrikcí na jeho parametry docházelo ke zjednodušování modelu. Kvůli problémům s odhadnutelností plynoucí z obecnosti jsme na váhy zpoždění kladli například předpoklad geometrického klesání k nule, provedli Koyckovu transformaci, a tak dosáhli zjednodušeného modelu pouze se třemi parametry. Následně jsme se omezili pouze na konečné zpoždění regresorů, diskutovány byly výhody, nevýhody a jakým způsobem zvolit délku zpoždění. Další kapitola uvažovala dynamický regresní model, z něhož přidáním možnosti zpoždění vysvětlované proměnné vznikl autoregresní model. Bylo zmíněno, jak zvolit délku zpoždění a ukázali jsme jeho speciální případ. Poslední kapitola o modelech intervenční analýzy využila autoregresního modelu k modelování vlivu intervencí. Zajímalo nás, jakým způsobem ovlivnil vnější zásah vývoj časové řady.

V praktické části byly modely představené v této bakalářské práci aplikovány na dvou datových souborech. Byly spočítány i některé charakteristiky představené v teoretické části. Na závěr jsme studovali, jakým způsobem ovlivnila koronavirová pandemie vývoj dvoutýdenní repo sazby za pomoci intervenční analýzy.

Seznam použité literatury

- BOX, G. E. P. a TIAO, G. C. (1975). Intervention analysis with applications to economic and environmental problems. *Journal of the American Statistical Association*, **70**(349), 70–79. doi: 10.1080/01621459.1975.10480264. URL <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1975.10480264>.
- BOX, G. E. P., REINSEL, G. C., JENKINS, G. M. a LJUNG, G. M. (2015). *Time Series Analysis*. John Wiley and Sons, New York, fifth edition. ISBN 978-1-118-67502-1.
- CIPRA, T. (2013). *Finanční ekonometrie*. Druhé, upravené vydání. Ekopress, Praha. ISBN 978-80-86929-93-4.
- CIPRA, T. (1986). *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*. První vydání. Státní nakladatelství technické literatury, Praha.
- ČESKÁ NÁRODNÍ BANKA. Úrokové sazby: (číslo sestavy = 41549/41273). In: Databáze časových řad ARAD [online]. URL https://www.cnb.cz/cnb/STAT.ARADY_PKG.VYSTUP?p_period=1&p_sort=2&p_des=50&p_sestuid=41549&p_uka=1,2,3,4&p_strid=FBC&p_od=199301&p_do=202203&p_lang=CS&p_format=0&p_decsep=, #dump. Vygenerováno 5. 5. 2022.
- ČESKÝ STATISTICKÝ ÚŘAD. Indexy spotřebitelských cen podle klasifikace COICOP. In: ČSÚ. Veřejná databáze [online]. URL https://vdb.czso.cz/vdbvo2/faces/cs/index.jsf?page=vystup-objekt&z=T&f=TABULKA&skupId=43&katalog=31779&pvo=CEN080&evo=v2300!_CEN-SPO-BAZIC2005-M_1&str=v514&kodjaz=203. Vygenerováno 5. 5. 2022.
- ČESKÝ STATISTICKÝ ÚŘAD. Indexy spotřebitelských cen podle klasifikace ECOICOP. In: ČSÚ. Veřejná databáze [online]. URL https://vdb.czso.cz/vdbvo2/faces/cs/index.jsf?page=vystup-objekt&pvo=CEN083A&z=T&f=TABULKA&skupId=2218&katalog=31779&pvo=CEN083A&evo=v2504!_CEN-SPO-BAZIC2015-EM_1. Vygenerováno 5. 5. 2022.
- HILL, R. C., GRIFFITHS, W. E. a JUDGE, G. G. (2001). *Undergraduate Econometrics*. John Wiley and Sons, New York, second edition. ISBN 978-0-471-33184-1.
- HILL, R. C., GRIFFITHS, W. E. a LIM, G. C. (2011). *Principles of Econometrics*. John Wiley and Sons, New York, fourth edition. ISBN 978-0-470-62673-3.
- PARKER, A. J. (2012). Distributed-lag models. Reed college. Electronic script. URL https://www.reed.edu/economics/parker/312/tschapters/S13_Ch_3.pdf. Accessed: 2022-05-05.
- WOOLDRIDGE, J. M. (2013). *Introductory Econometrics*. South-Western Cengage Learning, Mason, OH, fifth edition. ISBN 978-1-111-53104-1.

Seznam obrázků

3.1	Nejčastější vlivy intervencí.	15
4.1	Aproximace parametrů β_i ležící na polynomu řádu 3 dle (4.5).	21
4.2	Vývoj 2T-repo sazby od ledna 2002 do prosince 2021.	22
4.3	Vývoj repo sazby za pomoci odhadnutého modelu s konečným zpožděním (4.7).	23
4.4	Vývoj repo sazby za pomoci autoregresního modelu (4.11).	25
4.5	Vývoj diferencí dvoutýdenní repo sazby od ledna 2002 do prosince 2021.	26
4.6	Autokorelační a parciální autokorelační funkce pro difference repo sazeb.	27
4.7	Vývoj diferencí repo sazby za pomoci modelu intervenční analýzy.	27
4.8	Převrácené hodnoty kořenů odhadnutého modelu (4.13).	28

Seznam tabulek

4.1	Výstup R pro model hrubého domácího produktu (4.1) se zpožděnými regresory.	19
4.2	Výstup R pro model hrubého domácího produktu (4.3) po aplikaci Koyckovy transformace.	19
4.3	Výstup R pro odhad parametrů aproximačního polynomu polynomičského modelu (4.6).	20
4.4	Výstup R pro dopočtené hodnoty parametrů β_i z (4.5).	20
4.5	Výstup R pro model 2T-repo sazby (4.7) se zpožděnými regresory.	22
4.6	Výstup R pro geometrický model 2T-repo sazby (4.10).	24
4.7	Výstup R pro model 2T-repo sazby (4.11) s využitím autoregresního modelu se zpožděnou vysvětlovanou proměnnou.	24
4.8	Výstup R pro diferenci 2T-repo sazby při využití intervenční analýzy (4.13).	28
A.1	Tabulka čtvrtletních pozorování za období 1950–2000 v USA hrubého domácího produktu GDP (v mld. USD) a peněžní zásoby $M1$ (v mld. USD).	34
A.1	pokračování	35
A.1	pokračování	36
A.2	Tabulka měsíčních pozorování za období 2002–2021 v České republice dvoutýdenní repo sazby $REPO$ (v % p. a.) a indexu spotřebitelských cen CPI	37
A.2	pokračování	38
A.2	pokračování	39

A. Přílohy

A.1 První příloha

Data v první příloze byla převzata z Cipra (2013, str. 65–67). V tabulce A.1 jsou obsažena čtvrtletní data za období 1950–2000 v USA. Konkrétně hrubý domácí produkt *GDP* (v mld. USD) a peněžní zásoba *M1* (v mld. USD).

A.2 Druhá příloha

Data v druhé příloze byla převzata z veřejné databáze ARAD České národní banky a veřejné databáze Českého statistického úřadu. V tabulce A.2 jsou obsažena měsíční data za období 2002–2021 v České republice. Konkrétně dvoutýdenní repo sazby *REPO* (v % p. a.) a indexu spotřebitelských cen *CPI*.

t	rok	čtv.	GDP	M1	t	rok	čtv.	GDP	M1
1	1950	1	1610,5	110,20	36	1958	4	2226,5	138,48
2	1950	2	1658,8	111,75	37	1959	1	2273,0	139,70
3	1950	3	1723,0	112,95	38	1959	2	2332,4	141,20
4	1950	4	1753,9	113,93	39	1959	3	2331,4	141,00
5	1951	1	1773,5	115,08	40	1959	4	2339,1	140,00
6	1951	2	1803,7	116,19	41	1960	1	2391,0	139,80
7	1951	3	1839,8	117,76	42	1960	2	2379,2	139,60
8	1951	4	1843,3	119,89	43	1960	3	2383,6	141,20
9	1952	1	1864,7	121,31	44	1960	4	2352,9	140,70
10	1952	2	1866,2	122,37	45	1961	1	2366,5	141,90
11	1952	3	1878,0	123,64	46	1961	2	2410,8	142,90
12	1952	4	1940,2	124,72	47	1961	3	2450,4	143,80
13	1953	1	1976,0	125,33	48	1961	4	2500,4	145,20
14	1953	2	1992,2	126,05	49	1962	1	2544,0	146,00
15	1953	3	1979,5	126,22	50	1962	2	2571,5	146,60
16	1953	4	1947,8	126,37	51	1962	3	2596,8	146,30
17	1954	1	1938,1	126,54	52	1962	4	2603,3	147,80
18	1954	2	1941,0	127,18	53	1963	1	2634,1	149,20
19	1954	3	1962,0	128,38	54	1963	2	2668,4	150,40
20	1954	4	2000,9	129,72	55	1963	3	2719,6	152,00
21	1955	1	2058,1	131,07	56	1963	4	2739,4	153,30
22	1955	2	2091,0	131,88	57	1964	1	2800,5	154,50
23	1955	3	2118,9	132,40	58	1964	2	2833,8	155,60
24	1955	4	2130,1	132,64	59	1964	3	2872,0	158,70
25	1956	1	2121,0	133,11	60	1964	4	2879,5	160,30
26	1956	2	2137,7	133,38	61	1965	1	2950,1	161,50
27	1956	3	2135,3	133,48	62	1965	2	2989,9	162,20
28	1956	4	2170,4	134,09	63	1965	3	3050,7	164,90
29	1957	1	2182,7	134,29	64	1965	4	3123,6	167,80
30	1957	2	2177,7	134,36	65	1966	1	3201,1	170,50
31	1957	3	2198,9	134,26	66	1966	2	3213,2	171,60
32	1957	4	2176,0	133,48	67	1966	3	3233,6	172,00
33	1958	1	2117,4	133,72	68	1966	4	3261,8	172,00
34	1958	2	2129,7	135,22	69	1967	1	3291,8	174,80
35	1958	3	2177,5	136,64	70	1967	2	3289,7	177,00

Tabulka A.1: Tabulka čtvrtletních pozorování za období 1950–2000 v USA hrubého domácího produktu *GDP* (v mld. USD) a peněžní zásoby *M1* (v mld. USD).

t	rok	čtv.	GDP	M1	t	rok	čtv.	GDP	M1
71	1967	3	3313,5	180,70	106	1976	2	4301,5	296,40
72	1967	4	3338,3	183,30	107	1976	3	4321,9	300,00
73	1968	1	3406,2	185,50	108	1976	4	4357,4	305,90
74	1968	2	3464,8	189,40	109	1977	1	4410,5	313,60
75	1968	3	3489,2	192,70	110	1977	2	4489,8	319,00
76	1968	4	3504,1	197,40	111	1977	3	4570,6	324,90
77	1969	1	3558,3	200,00	112	1977	4	4576,1	330,50
78	1969	2	3567,6	201,30	113	1978	1	4588,9	336,60
79	1969	3	3588,3	202,10	114	1978	2	4765,7	347,10
80	1969	4	3571,4	203,90	115	1978	3	4811,7	352,70
81	1970	1	3566,5	205,70	116	1978	4	4876,0	356,90
82	1970	2	3573,9	207,60	117	1979	1	4888,3	362,10
83	1970	3	3605,2	211,90	118	1979	2	4891,4	373,60
84	1970	4	3566,5	214,30	119	1979	3	4926,2	379,70
85	1971	1	3666,1	218,70	120	1979	4	4942,6	381,40
86	1971	2	3686,2	223,60	121	1980	1	4958,9	388,10
87	1971	3	3714,5	226,60	122	1980	2	4857,8	389,40
88	1971	4	3723,8	228,20	123	1980	3	4850,3	405,40
89	1972	1	3796,9	234,20	124	1980	4	4936,6	408,10
90	1972	2	3883,8	236,80	125	1981	1	5032,5	418,70
91	1972	3	3922,3	243,30	126	1981	2	4997,3	425,50
92	1972	4	3990,5	249,10	127	1981	3	5056,8	427,50
93	1973	1	4092,3	251,50	128	1981	4	4997,1	436,20
94	1973	2	4133,3	256,90	129	1982	1	4914,3	442,40
95	1973	3	4117,0	258,00	130	1982	2	4935,5	447,90
96	1973	4	4151,1	262,70	131	1982	3	4912,1	457,50
97	1974	1	4119,3	266,50	132	1982	4	4915,6	474,30
98	1974	2	4130,4	268,60	133	1983	1	4972,4	490,20
99	1974	3	4084,5	271,30	134	1983	2	5089,8	504,40
100	1974	4	4062,0	274,00	135	1983	3	5180,4	513,40
101	1975	1	4010,0	276,20	136	1983	4	5286,8	520,80
102	1975	2	4045,2	282,70	137	1984	1	5402,3	530,80
103	1975	3	4115,4	286,00	138	1984	2	5493,8	540,50
104	1975	4	4167,2	286,80	139	1984	3	5541,3	543,90
105	1976	1	4266,1	292,40	140	1984	4	5583,1	551,20

Tabulka A.1: pokračování

t	rok	čtv.	GDP	M1	t	rok	čtv.	GDP	M1
141	1985	1	5629,7	565,70	173	1993	1	6988,7	1038,10
142	1985	2	5673,8	582,90	174	1993	2	7031,2	1075,30
143	1985	3	5758,6	604,40	175	1993	3	7062,0	1105,20
144	1985	4	5806,0	619,10	176	1993	4	7168,7	1129,20
145	1986	1	5858,9	632,60	177	1994	1	7229,4	1140,00
146	1986	2	5883,3	661,20	178	1994	2	7330,2	1145,60
147	1986	3	5937,9	688,40	179	1994	3	7370,2	1152,10
148	1986	4	5969,5	724,00	180	1994	4	7461,1	1149,80
149	1987	1	6013,3	732,80	181	1995	1	7488,7	1146,50
150	1987	2	6077,2	743,50	182	1995	2	7503,3	1144,10
151	1987	3	6128,1	748,50	183	1995	3	7561,4	1141,90
152	1987	4	6234,4	749,40	184	1995	4	7621,9	1126,20
153	1988	1	6275,9	761,10	185	1996	1	7676,4	1122,00
154	1988	2	6349,8	778,80	186	1996	2	7802,9	1115,00
155	1988	3	6382,3	784,60	187	1996	3	7841,9	1095,80
156	1988	4	6465,2	786,10	188	1996	4	7931,3	1080,50
157	1989	1	6543,8	782,70	189	1997	1	8016,4	1072,00
158	1989	2	6579,4	773,90	190	1997	2	8131,9	1066,20
159	1989	3	6610,6	782,00	191	1997	3	8216,6	1065,30
160	1989	4	6633,5	792,10	192	1997	4	8272,9	1073,40
161	1990	1	6716,3	800,80	193	1998	1	8396,3	1080,30
162	1990	2	6731,7	809,70	194	1998	2	8442,9	1077,60
163	1990	3	6719,4	821,10	195	1998	3	8528,5	1076,20
164	1990	4	6664,2	823,90	196	1998	4	8667,9	1097,00
165	1991	1	6631,4	838,00	197	1999	1	8733,5	1102,20
166	1991	2	6668,5	857,40	198	1999	2	8771,2	1099,80
167	1991	3	6684,9	871,20	199	1999	3	8871,5	1093,40
168	1991	4	6720,9	895,90	200	1999	4	9049,9	1124,80
169	1992	1	6783,3	935,80	201	2000	1	9102,5	1113,70
170	1992	2	6846,8	954,50	202	2000	2	9229,4	1105,30
171	1992	3	6899,7	988,70	203	2000	3	9260,1	1096,00
172	1992	4	6990,6	1024,00	204	2000	4	9303,9	1088,10

Tabulka A.1: pokračování

t	datum	REPO	CPI	t	datum	REPO	CPI
1	2002/01	4,50	77,5	41	2005/05	1,75	80,5
2	2002/02	4,25	77,5	42	2005/06	1,75	81,0
3	2002/03	4,25	77,5	43	2005/07	1,75	81,2
4	2002/04	3,75	77,5	44	2005/08	1,75	81,2
5	2002/05	3,75	77,4	45	2005/09	1,75	81,0
6	2002/06	3,75	77,1	46	2005/10	2,00	81,7
7	2002/07	3,00	77,5	47	2005/11	2,00	81,5
8	2002/08	3,00	77,4	48	2005/12	2,00	81,4
9	2002/09	3,00	77,0	49	2006/01	2,00	82,6
10	2002/10	3,00	76,7	50	2006/02	2,00	82,6
11	2002/11	2,75	76,6	51	2006/03	2,00	82,6
12	2002/12	2,75	76,7	52	2006/04	2,00	82,6
13	2003/01	2,50	77,1	53	2006/05	2,00	83,0
14	2003/02	2,50	77,3	54	2006/06	2,00	83,2
15	2003/03	2,50	77,2	55	2006/07	2,25	83,6
16	2003/04	2,50	77,4	56	2006/08	2,25	83,8
17	2003/05	2,50	77,4	57	2006/09	2,50	83,2
18	2003/06	2,25	77,4	58	2006/10	2,50	82,7
19	2003/07	2,25	77,5	59	2006/11	2,50	82,7
20	2003/08	2,00	77,3	60	2006/12	2,50	82,8
21	2003/09	2,00	77,0	61	2007/01	2,50	83,6
22	2003/10	2,00	77,0	62	2007/02	2,50	83,8
23	2003/11	2,00	77,4	63	2007/03	2,50	84,1
24	2003/12	2,00	77,5	64	2007/04	2,50	84,7
25	2004/01	2,00	78,9	65	2007/05	2,50	85,0
26	2004/02	2,00	79,1	66	2007/06	2,75	85,2
27	2004/03	2,00	79,1	67	2007/07	3,00	85,6
28	2004/04	2,00	79,1	68	2007/08	3,25	85,9
29	2004/05	2,00	79,5	69	2007/09	3,25	85,6
30	2004/06	2,25	79,6	70	2007/10	3,25	86,1
31	2004/07	2,25	79,9	71	2007/11	3,50	86,9
32	2004/08	2,50	79,9	72	2007/12	3,50	87,3
33	2004/09	2,50	79,2	73	2008/01	3,50	89,9
34	2004/10	2,50	79,6	74	2008/02	3,75	90,2
35	2004/11	2,50	79,6	75	2008/03	3,75	90,1
36	2004/12	2,50	79,6	76	2008/04	3,75	90,4
37	2005/01	2,25	80,2	77	2008/05	3,75	90,8
38	2005/02	2,25	80,4	78	2008/06	3,75	91,0
39	2005/03	2,25	80,3	79	2008/07	3,75	91,5
40	2005/04	1,75	80,4	80	2008/08	3,50	91,4

Tabulka A.2: Tabulka měsíčních pozorování za období 2002–2021 v České republice dvoutýdenní repo sazby *REPO* (v % p. a.) a indexu spotřebitelských cen *CPI*.

t	datum	REPO	CPI	t	datum	REPO	CPI
81	2008/09	3,50	91,2	121	2012/01	0,75	97,4
82	2008/10	3,50	91,2	122	2012/02	0,75	97,7
83	2008/11	2,75	90,7	123	2012/03	0,75	97,8
84	2008/12	2,25	90,5	124	2012/04	0,75	97,8
85	2009/01	2,25	91,9	125	2012/05	0,75	98,0
86	2009/02	1,75	91,9	126	2012/06	0,50	98,2
87	2009/03	1,75	92,1	127	2012/07	0,50	98,1
88	2009/04	1,75	92,0	128	2012/08	0,50	98,0
89	2009/05	1,50	92,0	129	2012/09	0,50	97,9
90	2009/06	1,50	92,0	130	2012/10	0,25	98,2
91	2009/07	1,50	91,7	131	2012/11	0,05	97,9
92	2009/08	1,25	91,5	132	2012/12	0,05	98,0
93	2009/09	1,25	91,2	133	2013/01	0,05	99,3
94	2009/10	1,25	91,1	134	2013/02	0,05	99,4
95	2009/11	1,25	91,2	135	2013/03	0,05	99,5
96	2009/12	1,00	91,4	136	2013/04	0,05	99,5
97	2010/01	1,00	92,5	137	2013/05	0,05	99,3
98	2010/02	1,00	92,5	138	2013/06	0,05	99,7
99	2010/03	1,00	92,7	139	2013/07	0,05	99,5
100	2010/04	1,00	93,1	140	2013/08	0,05	99,3
101	2010/05	0,75	93,2	141	2013/09	0,05	98,9
102	2010/06	0,75	93,2	142	2013/10	0,05	99,1
103	2010/07	0,75	93,5	143	2013/11	0,05	99,0
104	2010/08	0,75	93,2	144	2013/12	0,05	99,4
105	2010/09	0,75	93,0	145	2014/01	0,05	99,5
106	2010/10	0,75	92,8	146	2014/02	0,05	99,6
107	2010/11	0,75	93,0	147	2014/03	0,05	99,6
108	2010/12	0,75	93,5	148	2014/04	0,05	99,6
109	2011/01	0,75	94,1	149	2014/05	0,05	99,7
110	2011/02	0,75	94,2	150	2014/06	0,05	99,7
111	2011/03	0,75	94,3	151	2014/07	0,05	100,0
112	2011/04	0,75	94,5	152	2014/08	0,05	99,9
113	2011/05	0,75	95,0	153	2014/09	0,05	99,6
114	2011/06	0,75	94,9	154	2014/10	0,05	99,8
115	2011/07	0,75	95,1	155	2014/11	0,05	99,5
116	2011/08	0,75	94,9	156	2014/12	0,05	99,5
117	2011/09	0,75	94,7	157	2015/01	0,05	99,5
118	2011/10	0,75	94,9	158	2015/02	0,05	99,7
119	2011/11	0,75	95,3	159	2015/03	0,05	99,8
120	2011/12	0,75	95,7	160	2015/04	0,05	100,1

Tabulka A.2: pokračování

t	datum	REPO	CPI	t	datum	REPO	CPI
161	2015/05	0,05	100,4	201	2018/09	1,50	105,6
162	2015/06	0,05	100,5	202	2018/10	1,50	106,0
163	2015/07	0,05	100,4	203	2018/11	1,75	105,9
164	2015/08	0,05	100,2	204	2018/12	1,75	106,0
165	2015/09	0,05	100,0	205	2019/01	1,75	107,1
166	2015/10	0,05	100,0	206	2019/02	1,75	107,3
167	2015/11	0,05	99,6	207	2019/03	1,75	107,5
168	2015/12	0,05	99,5	208	2019/04	1,75	107,6
169	2016/01	0,05	100,1	209	2019/05	2,00	108,3
170	2016/02	0,05	100,2	210	2019/06	2,00	108,5
171	2016/03	0,05	100,1	211	2019/07	2,00	108,9
172	2016/04	0,05	100,7	212	2019/08	2,00	109,0
173	2016/05	0,05	100,5	213	2019/09	2,00	108,4
174	2016/06	0,05	100,6	214	2019/10	2,00	108,9
175	2016/07	0,05	100,9	215	2019/11	2,00	109,2
176	2016/08	0,05	100,8	216	2019/12	2,00	109,4
177	2016/09	0,05	100,5	217	2020/01	2,00	111,0
178	2016/10	0,05	100,8	218	2020/02	2,25	111,3
179	2016/11	0,05	101,2	219	2020/03	1,00	111,2
180	2016/12	0,05	101,5	220	2020/04	1,00	111,0
181	2017/01	0,05	102,3	221	2020/05	0,25	111,4
182	2017/02	0,05	102,7	222	2020/06	0,25	112,1
183	2017/03	0,05	102,7	223	2020/07	0,25	112,6
184	2017/04	0,05	102,7	224	2020/08	0,25	112,6
185	2017/05	0,05	102,9	225	2020/09	0,25	111,9
186	2017/06	0,05	102,9	226	2020/10	0,25	112,1
187	2017/07	0,05	103,4	227	2020/11	0,25	112,1
188	2017/08	0,25	103,3	228	2020/12	0,25	111,9
189	2017/09	0,25	103,2	229	2021/01	0,25	113,4
190	2017/10	0,25	103,7	230	2021/02	0,25	113,6
191	2017/11	0,50	103,8	231	2021/03	0,25	113,8
192	2017/12	0,50	103,9	232	2021/04	0,25	114,4
193	2018/01	0,50	104,5	233	2021/05	0,25	114,6
194	2018/02	0,75	104,5	234	2021/06	0,50	115,2
195	2018/03	0,75	104,4	235	2021/07	0,50	116,4
196	2018/04	0,75	104,7	236	2021/08	0,75	117,2
197	2018/05	0,75	105,2	237	2021/09	0,75	117,4
198	2018/06	1,00	105,6	238	2021/10	1,50	118,6
199	2018/07	1,00	105,8	239	2021/11	2,75	118,8
200	2018/08	1,25	105,9	240	2021/12	3,75	119,3

Tabulka A.2: pokračování