Oponentní posudek magisterské práce

Dynamical properties of continua

autorky

Bc. Kláry Karasové

Práce je věnována dynamickým vlastnostem Peanových kontinuí. Je členěna do tří částí.

První část obsahuje všeobecný úvod, zavádí *topologický dynamický systém* - dále TDS, na jednoduchých příkladech popisuje vztah konjugace a semikonjugace dvou TDS. Dále zavádí kompaktní metrický prostor sestávající z množiny všech symbolických posloupností symbolů z konečné množiny. Příklad levého posunu, respektive pravých posunů na tomto prostoru vhodně předjímá problematiku studovanou v následujích částech: levý posun je představen jako zobrazení s vlastností LEO (locally eventually onto), pravé posuny - speciální kontrakce - parametrizované symboly z určující konečné množiny symbolů poskytují příklad samopodobné množiny.
Dále jsou uvedeny definice kontinua, různých typů topologické souvislosti, Peanova continua a také faktu, že komponenty souvislosti Cantorovy množiny jsou jednobodové (topologická dimenze je rovna nule). Pro další části klíčovému objektu Peanova kontinua je věnováno první tvrzení textu - Věta 8 a zbytek první části. Jak je uvedeno, jde o kompilaci výsledků z citované knihy S. B. Nadlera.

Druhou částí práce vstupujeme do originálních partií tezí. Po připomenutí definice *Devaney chaosu* (1. tranzitivita+ 2. hustá množina periodický bodů+ 3. citlivá závislost na počáteční podmínce) autorka komentuje nezávislost jejích tří součástí, připomíná známý výsledek Banks et al., že třetí podmínka již plyne z prvních dvou. Pomocí příkladů (symbolické dynamiky, stanového zobrazení) ilustruje koexistenci podmínek definice. Ukazuje, že je vhodné nahradit podmínku tranzitivity požadavkem vlastnosti LEO a **řeší nosnou otázku, zda je možné sestrojit Devaney chaotické zobrazení na libovolném (nedegenerovaném) Peanově kontinuu. Výsledkem je velmi zajímavé kladné řešení obsažené ve Větě 18.** Konkrétně autorka ukazuje, jak lze na obecném Peanově kontinuu sestrojit zobrazení mající vlastnost LEO a také hustou množinu periodických bodů. Splnění všech tří podmínek z definice Devaney chaosu pak již snadno vyplyne.

Třetí část tezí je věnována *topologickým fraktálům.* Po připomenutí pojmu samopodobné množiny, podobnosti (jako zobrazení), kontrakce, atraktoru iterovaného systému funkcí, autorka soustřeďuje svoji pozornost na obecnější pojem slabé kontrakce a posléze topologické kontrakce. Tato zobecnění vedou k definici topologického atraktoru v Definici 21. V analogii ke starším výsledkům o metrických fraktálech bylo možné dokázat, že každý topologický fraktál je nutně Peanovo continuum. Zásadní se pak stala dosud jen částečně vyřešená otázka, kterou v roce 1985 formuloval Hata: **Je každé Peanovo kontinuum topologickým fraktálem?** Dílčí odpovědi na tuto otázku jsou známy. Z roku 2016 pochází výsledek, že Peanovo kontinuum, které obsahuje volný oblouk, je topologickým fraktálem. Zcela nedávno v roce 2021 byl M. Nowak publikován výsledek, že Peanovo kontinuum obsahující "regenerující fraktál" s neprázdným vnitřkem, je již nutně topologickým fraktálem. **Zásadním příspěvkem pro řešení formulované otázky je totol originální tvrzení z tezí:**
Věta 37. Peanovo kontinuum obsahující nespočetně mnoho lokálních "cut" bodů je topologickým fraktálem.

Další zajímavý výsledek je obsažen ve Větě 41. Dokazuje ekvivalenci dvou otázek položených v nedávné praci M. Nowak z roku 2021.

Formální připomínky

- fakt, že z topologické tranzitivity plyne existence G_δ husté množiny (tranzitivních) bodů s hustou trajektorií, lze snadno ukázat pro každý TDS na kompaktním metrickém prostoru - sr. strana 13 dole
- u řady pojmů doporučuji je definovat nebo alespoň komentovat s odkazem, či změnit pořadí výkladu (souvislost, atraktor IFS, samopodobné zobrazení , metrický atraktor, apod)
- k čemu je značení zavedené před Definicí 21, jeho použití jsem nenašel
- práce obsahuje značný počet překlepů/chyb(contradiction -> contraction strana 20, arbitrily -> arbitrarily, local cut -> cut strana 30, a dosti dalších)

Závěr: Práci hodnotím jako vynikající, hlavní výsledky jsou velmi zajímavé a netriviální.

V Praze, 31. 8. 2022 doc. RNDr. Jozef Bobok, CSc.