Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Výuka základů matematické analýzy na střední škole, případová studie

Teaching basics of calculus at a secondary school, a case study

Bc. Karel Hamšík

Vedoucí práce: prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy - matematika (N M)

Praha 2022

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Výuka základů matematické analýzy na střední škole, případová studie* vypracoval pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 8.7.2022 Karel Hamšík

Poděkování:

Rád bych na tomto místě poděkoval prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za velmi cenné rady, podněty a připomínky k jednotlivým částem práce, za rychlou komunikaci a celkovou zpětnou vazbu během zpracovávání jednotlivých kapitol. Dále pak vyučující, která mi umožnila navštěvovat a pozorovat výuku v semináři, a také všem žákům, kteří se nebáli a zúčastnili se testování.

Abstrakt

V této práci se zabývám výukou základů matematické analýzy na střední škole. Jedná se konkrétně o ty oblasti matematiky (funkce, derivace, integrály), které se následně hlouběji probírají na vysokých školách přírodovědného, technického, ekonomického a dalších zaměření. Jelikož se většina studentů vysokých škol s touto problematikou alespoň v malé míře setká, zajímá mě, do jaké míry jsou žáci po opuštění středoškolských lavic připraveni na setkání s touto látkou, resp. jak moc pojmy z analýzy při studiu střední školy setkali, jak jim rozumí a zda je dokáží používat.

Cílem práce je popsat způsob výuky základů matematické analýzy v konkrétním semináři, kde se tato látka probírala, a následně ověřit schopnost žáků samostatně řešit úlohy z této oblasti matematiky formou souboru didaktických testů a jejich následného rozboru.

Rozbor ukázal, že látka matematické analýzy, jejíž výuka byla pozorována a její výsledky testovány, je žáky z větší části dobře pochopena. Seminář tedy splňuje předpoklady úspěšného úvodu do tohoto učiva, které lze v dalším vysokoškolském vzdělávání úspěšně využít a rozšířit.

Klíčová slova: Výuka analýzy, střední škola, matematická analýza, derivace, integrály, limity, funkce.

Abstract

This thesis deals with teaching the basics of calculus in secondary school. These are specifically those areas of mathematics (functions, derivatives, integrals) that are subsequently discussed in more depth at universities of science, technology, economics, and also other fields. Most university students will encounter these math problems at least to a small extent. Therefore, I am interested in the extent to which pupils are prepared to solve these problems after leaving high school. The second topic that I am interested in is how much the pupils encountered the topics and terms of calculus during their secondary school studies, how they understand them and whether or not they can use them.

The aim of this thesis is to describe the methods used in education of elementary school calculus in a specific seminar where this material is discussed and subsequently verify the ability of the pupils to independently solve problems from this field of mathematics by a set of didactic tests and their subsequent analysis.

The analysis showed that the subject of calculus is for the most part well understood by the pupils. The seminar therefore fulfills the prerequisites for a successful introduction to this subject, which can be successfully expanded on in further higher education.

Key words: teaching calculus, secondary school, calculus, derivation, integral, limits, function.

Obsah

Úvod

Většina žáků středních škol a gymnázií, kteří se po složení maturitní zkoušky chtějí dále vzdělávat, pokračuje ve studiu na vysokých školách. Na mnoha fakultách se setkávají s matematickou analýzou, a to již během prvních let studia. Na základě informací od dalších studentů i z vlastní dřívější zkušenosti mohu říci, že v očích studentů často představuje matematická analýza předmět, který není snadné zvládnout. Pokládám proto za důležité, seznámit žáky středních škol alespoň se základy matematické analýzy. Pokud se to podaří, budou mít budoucí studenti v následném vysokoškolském studiu pravděpodobně menší problémy zvládnout probíranou látku, čímž by se jim studium zjednodušilo.

Cílem práce je popsat způsob výuky základů matematické analýzy v konkrétním semináři, kde se tato látka probírala, a následně ověřit schopnost žáků samostatně řešit úlohy z této oblasti matematiky formou souboru didaktických testů a jejich následného rozboru.

Teoretická část práce se skládá ze dvou kapitol, z nichž první obsahuje přehled matematických pojmů, definic a vět, které se vyskytují v „základních“ kurzech matematické analýzy a se kterými se žáci, navštěvující tyto kurzy, setkávají. Ve druhé kapitole je popsán historický vývoj středoškolské výuky analýzy v Čechách a také obdobný vývoj, resp. současný stav v zahraničí. Dále jsou zde uvedeny dva přístupy k výuce základů analýzy, které přinášejí různé pohledy na to, jak zavádět jednotlivé pojmy. Poslední část této kapitoly se stručně věnuje chybám, kterých se žáci dopouštějí při řešení úloh z infinitezimálního počtu.

Praktická část práce se skládá ze čtyř kapitol. V první z nich je stanovena metodologie výzkumu, konkrétněji specifikovaný cíl práce a způsoby, kterými ho bylo plánováno dosáhnout. Dále je zde blíže popsán předmět, jehož výuka byla za účelem výzkumu pozorována. V další kapitole je uveden popis výuky, zaměřený na tu její část, která se týkala diferenciálního počtu. Jsou zde uvedeny např. příklady způsobů odvození platnosti některých vět, aplikací diferenciálního počtu apod.

Třetí kapitola praktické části práce se zabývá ověřováním schopnosti žáků řešit úlohy z diferenciálního a integrálního počtu. Jedná se o ověřování formou testů. Ověřují se v nich jak schopnosti zvládnout praktické „mechanické“ výpočty, tak také schopnosti využít získané poznatky při řešení úloh, které vyžadují použití znalostí teorie. Úlohy, které vyžadovaly teoretických znalostí, se v pozorované výuce vyskytovaly zřídka.

Ve čtvrté kapitole se věnuji celkovému rozboru a vyhodnocení praktické části a shrnuji přínos pozorované výuky pro žáky.

Část I

Teoretická část

KAPITOLA 1

Matematické hledisko

Matematická analýza navazuje na předchozí studium funkcí, konkrétně reálných funkcí jedné reálné proměnné. Z toho důvodu jsou žáci středních škol, gymnázií a studenti prvních ročníků vysokých škol nutně seznamováni s množstvím nových pojmů, které na předchozí studium navazují a předchozí znalosti bývají rozšířeny nebo upraveny.

Mezi hlavní pojmy, se kterými jsou žáci seznamováni v úvodních kurzech analýzy většinou, patří: spojitost funkce, limita funkce, derivace funkce, neurčitý a určitý integrál.[1]

V dalším textu této kapitoly jsou uvedeny pojmy, definice a věty, které se vztahují k praktické části práce, tedy derivacím a integrálům.

1.1 Základní pojmy, definice a věty

Poznámka: V celé práci je pojmem funkce rozuměna *reálná funkce jedné reálné proměnné.*

1.1.1 Derivace funkce

Pojem derivace funkce je postaven na pojmu limita. Můžeme ji charakterizovat jako *rychlost změny*, konkrétně „jak moc se změní hodnota funkční hodnoty $f(x)$ při určité změně argumentu x.“

Definice 1.1. Nechť funkce f je definovaná na $U(a)$ ($U^+(a)$, resp. $U^-(a)$), $a \in D_f \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a *vlastní derivaci (vlastní derivaci zprava, zleva)* rovnou $A \in \mathbb{R}$, je–li

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A, \tag{1.1}$$

[1] Ve smyslu Riemannova integrálu.

$$(1.2) \qquad \left(\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A,\ \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A\right),$$

případně

$$(1.3) \qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Jsou–li uvedené limity rovny $+\infty$, resp. $-\infty$, pak říkáme, že f má v bodě a nevlastní derivaci. Derivaci f v bodě a označujeme $\frac{df}{dx}(a)$, $f'(a)$, $\dot{f}(a)$, příslušné derivace zprava (zleva) $f'_+(a)$ ($f'_-(a)$).

Geometricky udává podíl $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ směrnici *sečny*, která prochází body $[a,\ f(a)]$ a $[x,\ f(x)]$. Případ, kdy $x\to a$, znamená, že se hodnota proměnné x neomezeně blíží hodnotě a a ze sečny se stává tečna ke grafu funkce. Uvedený podíl je tedy směrnicí sečny grafu funkce, zatímco derivace (pokud existuje) představuje směrnici *tečny* ke grafu funkce v bodě $[a,\ f(a)]$.
V případě, že derivace f v bodě a je nevlastní, je tečna ke grafu funkce rovnoběžná s osou y, a tedy ji nelze vyjádřit funkčním předpisem lineární funkce $y = Ax + B$.
Pojem *derivace funkce* může mít několik významů:

(1) derivace funkce *v bodě*, tj. hodnota derivace v pevně zvoleném bodě x_0,

(2) derivace funkce jako funkční předpis $f'(x)$, tj. derivace jako předpis funkce.

Derivace a aritmetické operace

Stejně jako u limity funkce je i počítání derivace pomocí definice značně náročné. Z toho důvodu jsou odvozeny vztahy, které usnadní výpočet:

Věta 1.1 (Aritmetické operace s derivacemi)**.** [2] Nechť f a g mají v bodě a vlastní derivaci. Pak platí:

(1) $[f\pm g]'(a) = f'(a)\pm g'(a)$,

(2) $[f\cdot g]'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)$,

(3) $\left[\dfrac{f}{g}\right]'(a) = \dfrac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$ pro $g(a)\neq 0$.

Věta 1.2 (Derivace složené funkce)**.** Nechť f je reálná funkce, g reálná (nebo komplexní) funkce, které mají vlastní derivace $f'(A)$ a $g'(a)$, $A = g(a)$. Potom funkce $f\circ g$ má derivaci v bodě a rovnou $f'(g(a))\cdot g'(a)$.

Pomocí vět 1.1 a 1.2, resp. jejich kombinací lze určovat derivace libovolné elementární funkce.

[2] Důkaz lze najít např. v [6], str. 93.

Derivace vyšších řádů

Nechť funkce f má vlastní derivaci v každém bodě otevřeného intervalu J. Přiřadíme–li každému $x \in J$ číslo rovné derivaci funkce f v bodě x (tj. $f'(x)$), dostaneme funkci definovanou na J, kterou označíme jako f'.[3]

Definice 1.2. Nechť funkce f má vlastní derivaci v každém bodě nějakého $U_\delta(a)$. Nechť její derivace f' má derivaci v bodě a : $(f')'(a) = A$. Potom číslo A nazýváme *druhou derivací* funkce f v bodě a a označujeme ji $f''(a)$ nebo také $\frac{d^2f}{dx^2}(a)$. Indukcí pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme $f^{(k)}(a) := (f^{(k-1)})'(a)$, pokud má pravá strana smysl, a nazýváme ji *k–tou derivací* nebo také *derivací k–tého řádu* funkce f v bodě a. Označujeme ji také $\frac{d^kf}{dx^k}(a)$. Pokládáme $f^{(0)} = f$.

1.1.2 Užití derivací

Jako první významné využití derivací, se kterým se žáci setkávají, je jejich využití při vyšetřování průběhu funkce a konstrukcích grafů funkcí.

V takovém případě se využívá platnost následujících vět:

Věta 1.3 (Znaménko derivace a monotonie)**.** Nechť f má spojitou derivací na otevřeném intervalu[4] $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak jestliže je pro každé $x_0 \in I$ $f'(x_0) > 0$, resp. $f'(x_0) < 0$, pak je funkce f na intervalu I rostoucí, resp. klesající.

Definice 1.3 (Stacionární bod)**.** Nechť funkce f má spojitou derivaci f' a $a \in D_f \cap D_{f'}$. Jestliže platí $f'(a) = 0$, pak bod a nazýváme *stacionárním bodem* funkce f.

Věta 1.4 (Derivace funkce a extrémy)**.** Nechť f je spojitá funkce v bodě a. Jestliže v bodě a nabývá funkce f extrému, potom pro $f'(a)$ platí:

$$f'(a) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad f'(a) \text{ neexistuje.}$$

Věta 1.5 (Znaménko derivace a konvexnost/konkávnost)**.** Nechť f má spojitou druhou derivaci na otevřeném intervalu[5] $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak jestliže je pro každé $x_0 \in I$ $f''(x_0) > 0$, resp. $f''(x_0) < 0$), pak je funkce f na intervalu I konkávní, resp. konvexní.

Příkladem funkce, která nabývá extrému v bodě, v němž neexistuje derivace, může být funkce $f : y = |x|$.

[3] [6], str. 97

[4] V krajních bodech intervalu uvažujeme příslušné jednostranné derivace.

[5] V krajních bodech intervalu opět uvažujeme příslušné jednostranné derivace.

Pro rozhodnutí a určení typu extrému lze použít kombinaci první a druhé derivace, konkrétně konvexnost, resp. konkávnost ve stacionárním bodě.[6] Funkce f má v bodě x_0 extrém, pokud platí $f'(x_0)$ a zároveň $f''(x_0) \neq 0$. Přičemž se jedná o *maximum* v případě, že $f''(x_0) < 0$, resp. o *minimum* v případě, že $f''(x_0) > 0$. O existenci extrému však nemůžeme rozhodnout v případě, že je ve stacionárním bodě druhá derivace nulová.

Situaci, kdy $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, resp. $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $k \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n-1\}$, řeší následující věta:[7]

Věta 1.6. Budiž f funkce, x_0 číslo. Nechť existuje přirozené číslo n tak, že $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, ale $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $0 < k < n$. Potom platí:

1) Je–li n liché, $f^{(n)}(x_0) > 0$, je funkce f rostoucí v bodě x_0.

2) Je–li n liché, $f^{(n)}(x_0) < 0$, je funkce f klesající v bodě x_0.

3) Je–li n sudé, $f^{(n)}(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

4) Je–li n sudé, $f^{(n)}(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

1.1.3 Neurčitý integrál a primitivní funkce

Integraci je možné chápat jako „opačnou operaci“ k derivování. Před tím, než je vyložena teorie neurčitého integrálu, většinou předcházejí motivační úlohy, které osvětlují, jaké problémy se pomocí nich dají řešit. Jako příklad uvádím: „Nalezněte funkci, jejíž tečna má v každém bodě x_0 směrnici $2x_0$.“[8]

Definice 1.4 (Primitivní funkce)**.** Nechť f a F jsou funkce definované na otevřeném intervalu J. Nechť pro každé $x_0 \in J$ platí: $F'(x_0) = f(x_0)$, potom funkci F nazýváme *primitivní funkcí* k funkci f na intervalu J. (V krajních bodech uvažujeme příslušné jednostranné derivace). Primitivní funkci k funkci f označujeme $\int f(x)\, dx$ a čteme jako *neurčitý integrál* z funkce f.

Na základě faktu, že derivace primitivní funkce k funkci f je samotná funkce f, lze snadno odvodit tvar primitivních funkcí k následujícím funkcím:

- $\displaystyle\int c\, dx = cx + C$, kde $c \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$,

[6] Bod x_0 se nazývá stacionárním bodem funkce f, pokud je $f'(x_0) = 0$.
[7] [5], str. 306
[8] [14], str. 71

- $\displaystyle\int x^\alpha \; dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, kde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x \in \mathbb{R}$ a $C \in \mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \sin(x) \; dx = -\cos(x) + C$, kde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x \in \mathbb{R}$ a $C \in \mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \cos(x) \; dx = \sin(x) + C$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $C \in \mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int a^x \; dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$, kde $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ a $C \in \mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \; dx = \ln(|x|) + C$, kde $x \in (-\infty; 0)$ a $(0; +\infty)$ a $C \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Ve vysokoškolských učebnicích bývají uvedené vztahy rozšířeny o primitivní funkce k funkcím hyperbolickým a inverzní k funkcím cyklometrickým.[9]

Metody výpočtu primitivní funkce

Jelikož téměř „žádné“ funkce nejsou v uvedených tvarech, ale jsou kombinacemi elementárních funkcí pomocí operací ($+$; $-$; $\cdot$, $\div$ a $\circ$), je nutné umět vypočítat neurčitý integrál i k těmto funkcím.

Věta 1.7 (Linearita integrálu)**.** Nechť F a G jsoy primitivní funkce k funkcím f a g na intervalu J. Pak platí:

$$\int f(x) + g(x) \; dx = F(x) + G(x). \tag{1.4}$$

Je–li k číslo, pak funkce $k \cdot f$ má primitivní funkci $k \cdot F$, tj.

$$\int k \cdot f(x) \; dx = k \cdot \int f(x) \; dx. \tag{1.5}$$

Věta 1.8 (Integrace per partes)**.** Nechť funkce f a g mají vlastní derivace na intervalu J. Nechť F je primitivní funkce k funkcí $(f' \cdot g)$. Potom funkce $G = f \cdot g - F$ je primitivní funkce k funkci $(f \cdot g')$, tj.

$$\int f(x) \cdot g'(x) \; dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \; dx. \tag{1.6}$$

Pomocí uvedených vět lze tedy integrovat součet, resp. rozdíl a součin funkcí. Na rozdíl od derivací však neexistuje obecně platný vztah pro výpočet neurčitého integrálu z podílu funkcí.

V takových případech je nutné využít jinou metodu: buď zadanou funkci upravit na tvar, kdy lze integrovat podle jiné metody, nebo využít substituční metodu.

[9] např. [6], str. 137

Věta 1.9 (Integrace substitucí I). Nechť f má primitivní funkcí F na intervalu J. Nechť φ zobrazuje interval I do J a má na I vlastní derivaci. Potom $F \circ \varphi$ je primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na I, tj.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int f(x)\ dx_{|x=\varphi(t)} + C. \tag{1.7}$$

Věta 1.10 (Integrace substitucí II). Nechť φ zobrazuje interval I na interval J a má na I vlastní derivaci, která je buď všude kladná, nebo všude záporná, (tj. φ je na I prostá). Je–li $G(t)$ primitivní k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na J, je $G(\varphi^{-1}(x))$ primitivní k f na J.

Použitím uvedených vět a tabulky primitivních funkcí lze určit primitivní funkce k mnoha funkcím, nikoliv však ke všem.

> Označíme–li $\mathcal{F}$ množinu funkcí tvořenou funkcemi e^x, x^α, $\ln(x)$, trigonometrickými funkcemi, funkcemi k nim inverzními, a nakonec funkcemi, které ze všech těchto dostaneme sčítáním, násobením, dělením a tvořením složených funkcí, pak derivace každé funkce z $\mathcal{F}$ je opět z $\mathcal{F}$, ale existují $f \in \mathcal{F}$ takové, že k nim primitivní funkce do $\mathcal{F}$ nepatří. Takové jsou např. funkce $\frac{\mathrm{e}^x}{x}$, $\frac{1}{\ln(x)}$, $\sin(x^2)$, $\frac{\sin(x)}{x}$ aj. [10]

Další teorie týkající se metod výpočtu primitivních funkcí se většinou zabývá integrací racionálních funkcí, tj. integrály ve tvaru $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\ dx$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy, rozklad integrandu na parciální zlomky a speciálními druhy substitucí, jako Eulerovy substituce, goniometrické substituce a převod integrálu obsahující[11] $\sin$ a $\cos$ na integrály z racionálních funkcí pomocí substituce. Konkrétně se jedná o převod:

$$\int f(\sin(x), \cos(x))\ dx = \int \frac{P(y)}{Q(y)}\ dy,$$

kde je původní integrand pomocí vhodné goniometrické substituce převeden na racionální funkci v proměnné y.

1.1.4 Určitý integrál

Z historického hlediska vznikly určité integrály dříve, než celá teorie primitivních funkcí. Důvodem pro to bylo, že bylo nutné určovat objemy, délky a obsahy útvarů, které nebylo možné počítat pomocí klasických nástrojů známých z geometrie. Určitý integrál z funkce f se určuje pomocí *Reimannových součtů*.

[10] [6], str. 141

[11] např. $\int \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}\ dx$

Určitých integrálů existuje více typů: Newtonův, Riemannův, Lebesgueův, Perronův a další. V úvodních kurzech analýzy se však vyučují pouze dva z nich, Newtonův a Riemannův, resp. v aplikacích pouze Newtonův. Důvodem je obtížnost teorie Lebesgueova integrálu, která vyžaduje znalost základů teorie míry.

Definice 1.5. Nechť $\langle a;b\rangle$ je uzavřený interval. Nechť $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ je $n+1$ čísel. Řekneme, že tato čísla určují *dělení* D intervalu $\langle a;b\rangle$ a nazýváme je *dělícími body* tohoto dělení. Interval $\langle x_{i-1};x_i\rangle$ nazýváme i–tým dělícím intervalem dělení D a číslo $\nu(D) = \max\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots,\ x_n - x_{n-1}\}$ nazýváme *normou* tohoto dělení.

Definice 1.6. Dělení D' nazýváme *zjemněním* dělení D, je-li každý dělící bod dělení D také dělícím bodem dělení D'.

Definice 1.7. Nechť f je reálná funce, definovaná a omezená na intervalu $\langle a;b\rangle$. Je–li D dělení intervalu $\langle a;b\rangle$ s dělícími body $x_i,\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, n$, označme

$$m_i = \inf_{\langle x_{i-1};x_i\rangle} f, \qquad M_i = \sup_{\langle x_{i-1};x_i\rangle} f, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

potom číslo

$$s(f,D) \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

nazýváme *dolním Riemannovým součtem* funkce f odpovídajícímu dělení D a číslo

$$S(f,D) \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

nazýváme *horním Riemannovým součtem* funkce f odpovídajícímu dělení D.

Definice 1.8. Nechť f je reálná omezená funkce na $\langle a;b\rangle$. Číslo $\sup s(f,D)$, resp. $\inf S(f,D)$, kde supremum, resp. infimum se bere přes všechna dělení intervalu $\langle a;b\rangle$, se nazývá *dolním*, resp. *horním* Riemannovým integrálem funkce f přes interval $\langle a;b\rangle$ a označuje se následovně:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\ dx \qquad \text{,resp.} \qquad \left(\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\ dx\right).$$

Definice 1.9 (Rimannův integrál)**.** Nechť f je reálná funkce, omezená na $\langle a;b\rangle$. Jestliže je její dolní integrál roven hornímu, pak jejich společnou hodnotu nazveme *Riemannovým integrálem* funkce f přes interval $\langle a;b\rangle$ a značíme jej:

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx.$$

Definice 1.10 (Newtonův integrál). Nechť f je spojitá na $\langle a;b\rangle$, pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x), \tag{1.8}$$

kde F je primitivní funkce k funkci f.

Poznámka: Zápis $F(b) - F(a)$ se někdy označuje i způsobem $[F(x)]_a^b$.
Je–li nutné integrály rozlišit, pak pro Newtonův integrál se užívá značení $(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx$ a pro Riemannův integrál značení $(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx$.

Věta 1.11 (Postačující podmínka pro existenci integrálu). [12] Je–li f reálná funkce, která je spojitá na intervalu $\langle a;b\rangle$, pak má na $\langle a;b\rangle$ integrál.

Protože výpočet integrálu podle Riemanna je značně náročný (vyžaduje hledat limitu horních a dolních součtů funkce f přes všechna dělení intervalu $\langle a;b\rangle$), využívá se při praktických výpočtech následující věta:[13]

Věta 1.12. Je–li f spojitá na $\langle a;b\rangle$, pak platí:

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx.$$

1.1.5 Vlastnosti a metody výpočtu určitého integrálu

Věta 1.13 (Linearita určitého integrálu). Nechť f a g mají integrál na $\langle a;b\rangle$ a $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.
Potom platí:

$$\int_a^b \alpha\cdot f(x) \pm \beta\cdot g(x)\,dx = [\alpha\cdot F(x) \pm \beta\cdot G(x)]_a^b.$$

Poznámka: Tuto vlastnost lze zobecnit na libovolný konečný počet funkcí:
Jsou–li $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ a funkce $f_1, \ldots, f_n$, kde $n \in \mathbb{N}$ a funkce $f_1, \ldots, f_n$ mají na $\langle a;b\rangle$ integrál, pak platí:

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n \alpha_n\cdot f_n(x)\right)\,dx = \sum_{j=1}^n \left[\alpha_n\cdot F_n(x)\right]_a^b.$$

Věta 1.14 (Aditivita určitého integrálu). Nechť f má integrál na $\langle a;b\rangle$, $a < b$ a $c \in (a;b)$.
Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

[12] [6], str. 154 – 155

[13] Někdy se tato věta označuje jako *Newton–Leibnizova formule.*

Věta 1.15 (Metoda per partes pro určitý integrál)**.** Nechť f a g jsou spojité a mají spojité derivace na $\langle a;b\rangle$. Pak platí:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx.$$

Věta 1.16 (Substituční metoda pro určitý integrál)**.** Nechť φ má na $\langle\alpha;\beta\rangle$ spojitou derivaci a f je spojitá na $\varphi(\langle\alpha;\beta\rangle)$. Potom platí:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt.$$

KAPITOLA 2

Výuka základů matematické analýzy

Při zpracování této kapitoly vycházím z prací, studií a článků,[1] které se týkají vývoje výuky matematické analýzy v Českých zemích v historii a v současnosti a dále pak obdobným vývojem v zahraničí. Další oddíly jsou věnovány způsobům práce s pojmi matematické analýzy[2] a rozboru druhů chyb při řešení některých úloh.

2.1 Historický vývoj výuky analýzy

2.1.1 Vývoj výuky analýzy v Českých zemích

V prosinci 1901 se v Göttingenu uskutečnila porada, které se zúčastnilo několik univerzitních profesorů matematicko-přírodovědných předmětů (včetně Felixe Kleina)[3] a tři profesoři göttingenského gymnázia. Ve zprávě z tohoto shromáždění jsou již načrtnuty téměř všechny úkoly, které byly později řešeny v tzv. *Meranském programu.* Byly zde diskutovány otázky související s postavením matematiky a přírodních věd na středních školách, ústřední návrh – vyučovat na reálkách základy diferenciálního a integrálního počtu a jejich využití k popisu jednodušších přírodních procesů – byl odsouhlasen s tím, že se jedná o vlastní jádro celého matematicko-fyzikálního vzdělání.[4]

[1] viz např. [7], [16], [2], [19],[13].

[2] viz [17]

[3] Felix Christian Klein (25. dubna 1849–22. června 1925). Významný německý matematik, historik matematiky, reformátor matematicko-přírodovědného vzdělání.

[4] [16] str. 96

Meranský program

Meranským programem bývá označován návrh německé komise pro vyučování přírodovědným předmětům na reformu středoškolského vzdělávání v těchto předmětech. V jeho pozadí stály následující tři obecné cíle:[5]

1. střední školy by neměly poskytovat ani jednostranně jazykovědné a historické, ani jednostranně matematicko-přírodovědné vzdělávání,
2. matematika a přírodní vědy jsou rovnocenné jazykovému vzdělávání; střední školy by měly poskytovat specifické obecné vzdělávání,
3. všechny střední školy by měly poskytovat rovnocenné vzdělávání.

Meranský program připisoval metamatice klíčovou roli ve středoškolském vzdělání. Její hlavní úkoly viděl zejména v rozvíjení rozumových schopností a logického myšlení. Mezi obecnými požadavky na výuku matematiky na středních školách byly uvedeny následující záměry:[6]

- poskytnout vědecky podložený přehled matematického učiva,
- rozvíjet schopnost matematického myšlení a jeho využití při řešení praktických úloh,
- přiblížit význam matematiky pro exaktní poznání přírody a moderní kulturu vůbec.

Nově se mělo podle Meranského programu do výuky zařadit funkční myšlení, přičemž pojem funkce se měl stát ústředním pojmem výuky matematiky. Tento pojem měl být interpretován jak graficky, tak aritmeticky. Felix Klein také doporučoval zabývat se „růstem a klesáním“ funkce nebo výpočtem obsahu plochy pod základními křivkami (grafy elementárních funkcí), a tím žáky pomalu připravovat na zavedení pojmů derivace a integrál.

Základy infinitezimálního počtu měly být zařazeny do osnov vyšších tříd jako důležitý pomocný nástroj, např. při studiu průběhu funkcí.[7]

Marchetova reforma

V Rakousku-Uhersku reagoval na Meranský program tehdejší ministr kultu a vyučování Gustav Marchet, konkrétně vyhlášením *Marchetovy reformy učebních osnov*[8] ze dne 8. srpna 1908.

[5] [16], str. 97
[6] [16], str. 98
[7] [16], str. 98
[8] Jednalo se o poslední úpravu středního školství v Habsburské monarchii.

Cílem této reformy bylo vytvoření jednotného systému středoškolského vzdělání, poskytovaného různými ronvocennými typy středních škol.[9]

V rámci reformy byly vypracovány nové, moderní učební osnovy pro všechny typy středních škol, které byly do praxe zavedeny od školního roku 1909/1910, a to ve všech prvních pěti ročnících najednou. Z hlediska učebního obsahu bylo hlavním výsledkem Marchetovy reformy zařazení elementárních funkcí a některých prvků infinitezimálního počtu do výuky matematiky na reálkách a částečně i na gymnáziích. Mezi učebními metodami doporučenými ministerstvem pro výuku na střední škole byla zdůrazněna heuristická metoda, učitel měl při vyučování usilovat o spolupráci celé třídy.[10]

V návaznosti na Marchetovu reformu vešly v platnost od roku 1909 nové osnovy mamatiky a deskriptivní geometrie. Reflektovaly hlavní cíle Meranského programu – rozvoj prostorové představivosti, zavedení pojmu funkce a diferenciálního a integrálního počtu. Tyto osnovy setrvaly až do roku 1933.[11]

Některé další změny ve výuce infinitezimálního počtu

V roce 1933 byl hlavním úkolem střední školy stanoven důkladný výcvik v elementární matematice, čímž nezbýval dostatek času pro výuku diferenciálního a integrálního počtu, látky, která měla náležet škole vysoké. Výuka infinitezimálního počtu byla omezena na matematicky lépe vybavené typy středních škol – reformní reálná gymnázia a reálky.[12]

Roku 1953 se zrušily třináctileté střední školy a místo nich se zavedly pouze školy jedenáctileté, což vedlo v osnovách matematiky k vypuštění analytické geometrie, diferenciálního a integrálního počtu nebo pravděpodobnosti. Téměř vynechány byly také aplikace nebo časté opakování učiva. To mělo nepříznivý vliv na žáky, kteří se setkávali s nepřiměřeně náročným učivem už v nižších ročnících a neměli ani dostatek času k jeho osvojení.[13]

Další významnou změnou bylo vypuštění výuky infinitezimálního počtu (a pravděpodobnosti) na humanitních větvích středních všeobecně vzdělávacích školách v roce 1960. Na přírodovědných větvích zůstala výuka infinitezimálního počtu zachována.[14]

[9] [7], str. 4
[10] [16], str. 103
[11] [7], str. 5
[12] [7], str. 10, 11
[13] [13], str. 3
[14] [8], str. 264

Současná výuka analýzy u nás

V současné době jsou z látky matematické analýzy na středních školách běžně vyučovány pouze funkce a posloupnosti. Další látka jako spojitost, limita, derivace a integrál se většinou nezařazují do standardní výuky matematiky, protože nepatří do RVP (*Rámcový vzdělávací program*).[15] Výuka těchto „pokročilejších“ témat se, pokud se vyučuje, uskutečňuje buď v matematických seminářích nebo v jiných, pro žáky volitelných předmětech. V dalších pracích[16] lze najít podrobnější přehledy zařazení diferenciálního a integrálního počtu do výuky matematiky na gymnáziích a středních školách.

2.1.2 Vývoj výuky analýzy v dalších zemích

Postavení matematické analýzy ve středoškolské výuce se v průběhu let v různých zemích lišilo a liší dodnes. V této části uvádím stručný přehled některých z těchto zemí.[17]

Německo

Felix Klein prosadil, že se v Německu stala matematická analýza povinnou od roku 1927. Matematická analýza tvořila většinu obsahu matematiky vyšších ročníků gymnázií a přetrvala ve stejné podobě po mnoho dekád. V 70. letech se vlivem hnutí u nás známého jako modernizace matematiky a myšlenek Bourbakistů objevily pokusy vyučovat i na střední škole epsilon delta analýzu vysoké školy, které však nebyly úspěšné. Výuka analýzy pokračovala s redukovaným obsahem, ale i dnes stále převládá nad klasickou analytickou geometrií a stochastikou, která se také stala povinnou.[18]

Dánsko

Na dánských středních školách se výuka matematické analýzy zavedla již v roce 1906, konkrétně žáci měli pochopit, jak se zavádí nekonečně malá a nekonečně velká veličina. Širší spektrum analýzy nabízející derivace a integrály se začalo v dánských středních školách vyučovat od roku 1935.[19]

---

[15] viz [9]
[16] [7], str. 109–111 a [13], str. 5–9
[17] Další je možné nalézt např. v [2].
[18] [2], str. 16
[19] [17], str. 1

Způsob výuky prošel dvěma významnými změnami:

(1) Kolem roku 1960, kdy matematická teorie byla celkově rozšířena novými pojmy a upřesněními. Nejvíce byla takto formalizovaná algebra a teorie množin. V dalším období (deseti až dvaceti let) se naopak od této formalizace upustilo.

(2) Osmdesátá léta, během nichž díky zavádění informačních technologií na středních školách došlo i ke zkvalitnění výuky analýzy. Díky zobrazování grafů a rychlým výpočtům složitějších úloh se počítače významně podílely na zlepšování výuky v oblasti osvojení si některých typů technik výpočtů.[20]

Na dánských středních školách došlo roku 1961 k rozšíření výuky matematické analýzy o matematickou logiku, teorii množin a abstraktní algebru. Díky tomu žáci dostali větší nadhled nad vším, čím se v analýze zabývali a mohli jednotlivé matematické obory propojovat ve svém myšlení do širších rámců. Sloučení analýzy s dalšími obory však nepřineslo obtížnější úlohy. Složitost úloh analýzy zůstala na stejné úrovni (např. úlohy typu výpočtu limity, derivace, integrálu, vyšetřování průběhu funkce apod.).[21]

2.2 Současná výuka analýzy

Obecně lze říci, že matematická analýza se nejen u nás, ale i v zahraničí řadí více do vysokoškolské matematiky než do středoškolské, ale v určité míře se s její výukou mohou žáci setkat již během studia na střední škole. Minimálně s výukou funkcí, i když ne příliš rozsáhlou, se žáci setkávají během studia prakticky ve všech případech během 11.–13. ročníku.[22] V literatuře[23] lze najít, že některé střední školy svým žákům nabízejí intenzivní kurzy matematiky v závislosti na tom, jakou střední školu navštěvují a jaká je jejich současná, případně budoucí specializace. Jedná se o žáky, kteří mají specializaci technickou, přírodovědnou, matematickou nebo „inženýrskou“.

Žáci se na zmíněných rozšiřujících kurzech setkávají s novými pojmy, které rozvíjejí dosavadní znalosti funkcí. Kromě toho se zde zpravidla také probírá rozšiřující geometrie, pravděpodobnost a statistika,[24] avšak témata, která jsou součástí kurikula, se v jednotlivých zemích mohou lišit. Konkrétně ve výuce matematické analýzy se většinou objevují tato témata: *spojitost*

[20] [17], str. 1
[21] [17], str. 6
[22] Pro ČR se jedná o ekvivalent druhého až čtvrtého ročníku čtyřleté střední školy.
[23] např. [19]
[24] [19] str. 1

funkce (pojem funkce spojitá na intervalu, souvislost s grafem funkce), *limita funkce* (vlastní a nevlastní limity, způsob výpočtu limit funkce ve vlastním a nevlastním bodě, aritmetika limit), *diferenciální počet* (zavedení pojmu derivace funkce, výpočet derivace, aritmetika derivací, derivace složené funkce,[25] souvislost mezi znaménkem derivace a druhem její monotonie, užití derivace ke zjištění existence a typu extrému) a *integrální počet* (primitinví funkce a metody jejího výpočtu (metoda per partes, substituce), určitý integrál, souvislost mezi určitým integrálem a obsahem plochy pod grafem funkce na uzavřeném intervalu, metody výpočtu určitého integrálu).

Kromě uvedených témat se v jednotlivých zemích mohou studenti setkat i s další problematikou[26] uvedenou v tabulce 2.1.

Tabulka 2.1: Témata matematické analýzy vyučovaná v jiných zemích

FRANCIE:	(11. a 12. ročník) linearita a aditivita u určitého integrálu.
PORTUGALSKO:	zkoumání vlastností funkcí na základě vlastností jejich derivace, optimalizační problémy.
ITÁLIE:	(13. ročník) Aplikace určitého integrálu (jiné než určení obsahu plochy pod grafem funkce na intervalu).
RUSKO:	(10. a 11. ročník) Užití integrálu na výpočet objemů a délek ve fyzikálních problémech.
NORSKO:	(12. a 13. ročník) Aplikace určitého integrálu k výpočtu obsahů rovinných útvarů a objemů těles.

2.2.1 Způsoby práce s pojmy

> Základním poznatkem, kterým se ve výuce analýzy začíná, je *limita*. Žáci musejí pochopit, jakým způsobem definují nekonečně malou veličinu.[27]

Inspirativní mohou být dva přístupy k výuce základů matematické analýzy popsané v článku Carla Winsløwa.[28] Autor zde vystihuje dva navzájem odlišné přístupy k výuce zaměřené na základy matematické analýzy, tedy vysvětlení významu pojmu limita, derivace a integrál a příklady

[25] v některých případech derivace inverzní funkce

[26] viz [19]

[27] [17], str. 2

[28] viz [17]

jejich určení u jednoduchých funkcí. Autor vychází z referenční studie,[29] kde se tyto přístupy týkaly pouze limit funkcí, a ve své práci je rozšiřuje o diferenciaci a integraci. Přístupy jsou pojmenovány jako *algebraický* a *topologický*.

Algebraický přístup je zaměřen spíše na praktickou stránku, co se týče práce s uvedenými pojmy. Žáci se díky uvedenému přístupu naučí prakticky počítat s limitami, derivacemi a integrály a osvojí si některé zavedené techniky těchto výpočtů. Přístupy nejsou příliš orientované do teoretické oblasti, a tak žáci používají některá pravidla (např. větu o součtu limit apod.), aniž by si je předtím dokazovali. V teoretické části se zde nejde do hloubky, a proto jen na tomto přístupu zřejmě nelze matematickou analýzu prohlubovat. Věty, které umožňují určitý početní postup jsou zde brány jako axiomy. Žáci jsou tedy zřejmě schopni řešit různé úlohy z diferenciálního a integrálního počtu, avšak bez hlubšího porozumění okolnostem.

Topologický přístup je naopak zaměřen na teoretickou stránku věci. Postupuje se zde přísně matematicky. Úlohy, které jsou v odpovídajících tématech žákům předkládány, jsou obecnější. Žáci musejí přesně pochopit definici limity, aby se o ni dále mohli opřít při dokazování vět a v dalším prohlubování matematické teorie. Dále musejí umět určit, zda v daném bodě funkce existuje limita, zda je v daném bodě diferencovatelná apod. Věty sloužící pro aritmetické počítání s limitami, jenž se aritmetickém přístupu nedokazovaly, se zde dokázat již musí.

Hlavní rozdíl mezi jednotlivými přístupy spočívá v tom, že v topologickém jsou jednotlivé poznatky více vzájemně provázány, protože se postupně odvozují a navazují na sebe.

Původní verze průzkumu[30] pochází hlavně ze španělských škol. Autor práce[31] uvádí, že v dánských školách toto funguje obdobně.[32]

2.3 Chyby žáků při řešení úloh

Ve studii[33] je popsán experiment, provedený roku 1983 ve Velké Británii. Sto deseti žákům, resp. studentům[34] ve věku od 16 do 22 let bylo dáno za úkol vyřešit úlohy,[35] týkající se posloupností, limit posloupností a určitého integrálu, konkrétně určení obsahu plochy mezi grafem funkce a osami soustavy souřadnic Oxy a objemu rotačního tělesa.

[29] viz [1]
[30] viz [1]
[31] viz [17]
[32] [17], str. 3
[33] [12]
[34] Jednalo se o 60 žáků středních škol ve věku 16–18 let a o 50 studentů vysoké školy ve věku 18–22 let.
[35] Zadání úloh lze najít v [12], str. 12–18.

Autor studie uvádí, že pro obě skupiny byly nejobtížnější úlohy 12, 17 a 19, tj. vztah mezi limitou posloupnosti a obsahem pod grafem funkce, záměna pořadí integrálu a součtu dílčích funkcí a určení objemu rotačního tělesa[36] (viz obrázek 1).

TABLE I
Some integration items and mean scores

Item	Description	Related tasks	Mean scores	
			School	College
1	Limits of sequences of numbers	A1	3.28	3.06
2	Limits from general terms	A2	2.82	2.90
7	Heights of rectangles under graphs	B3(ii)	2.68	3.42
8	Use of previous heights in a new situation	B4(ii)	2.40	3.12
9	Calculation of areas of rectangles	B4(iii)	3.03	3.62
10	Simplification of sum of areas of rectangles	B4(iv)	2.43	3.52
11	Sequence of approximations to area under graph	B6(i)–(iv)	2.18	3.22
12	Limit of sequence equals area under graph	B6(vi)–(vii)	0.78	1.00
13	Limit from sequence of fractions and from general term	B6(viii)–(x)	1.67	2.48
15	Carrying out integration	B7(b)–(c)	2.98	3.40
17	Integral of sum equals sum of integrals	B9	1.10	0.60
18	Complications in area calculations	D4	2.55	2.78
19	Volume of revolution	D6	0.95	0.88

Obrázek 1: Tabulka úloh, jejich popis a průměrné bodové skóre jednotlivých skupin. (Zdroj [12], str. 3)

Dále zde identifikuje tři druhy chyb,[37] kterých se žáci při řešení dopouštěli:[38]

- arbitrární (*arbitrar*) chyby jsou takové, u nichž žák nevzal v úvahu podmínky úlohy a řešil úlohu „po svém“,
- strukturální (*structural*) chyby vznikají tak, že si žák neuvědomí nějaké vztahy uvedené v úloze nebo nepochopí princip, který je pro řešení zásadní,
- výkonové (*executive*) chyby spočívají v neschopnosti provést správně sestavený výpočet či řešit rovnici.

[36] [12], str. 3
[37] Původně popsány v [3], str. 183–185.
[38] [12], str. 4

TABLE II

Classification of errors

Item	Description	Errors		
		Structural	Executive	Arbitrary
1	Numerical sequences	√	√	
2	General terms	√	√	
7	Heights of rectangles under graphs	√	√	
10	Simplification of sum of areas of rectangles		√	
12	Limit of sequence equals area under graph	√		
13	Limit from sequence of fractions and from general term	√		
15	Carrying out integration	√	√	√
17	Integral of sum equals sum of integrals	√		
18	Complications in area calculations	√	√	√
19	Volume of revolution	√		

Obrázek 2: Tabulka klasifikace chyb a popis úloh, kde se vyskytly (Zdroj [12], str. 5.)

Přehled výskytu druhů chyb u jednotlivých úloh můžeme vidět v tabulce na obrázku 2.

Výsledky studie ukázaly, že žáci z obou testovaných skupin dosahují podobného průměrného bodového skóre (navzdory věkovému rozdílu skupin), nejčastěji se dopouští strukturálních chyb,[39] špatně chápou proces integrace jako limity součtu dílčích obsahů.

> Přestože se vyskytlo jen několik úloh, které nevyřešila jen malá část žáků/studentů, podstata řešení čtyř úloh byla považována za obtížnou, a to dokonce dobrými žáky. Tyto úlohy úlohy, které se týkaly porozumění integraci jakožto limitě součtu, představují skutečný kámen úrazu.[40]

Autor v závěru studie uvádí:

> Zdá se, že většina studentů tyto důležité kroky (limitní přechod) nechápe, rozhodně ne v testované věkové skupině. Zdá se velmi nepravděpodobné, že by zavedení integrace mohlo být provedeno snadno, především za předpokladu, že si přejeme, aby

[39] I když autor uvádí, že mnoho žáků se dopouštělo více druhů chyb, ne jen jednoho.

[40] [12], str. 9

> žáci pochopili více než jen to, jak integrovat a získat odpovědi při jednoduchých aplikacích.[41]

Je nutné dodat, že úlohy použité v této studii, byly zaměřeny na Riemannův integrál. Hlavním nedostatkem bylo, že žáci u některých úloh nedokázali stanovit předpis, a tedy ani limitu posloupnosti částečných součtů.

[41] [12], str. 9

Část II

Praktická část

KAPITOLA 3

Metodologie výzkumu

3.1 Cíl práce

Cílem práce je popsat způsob výuky základů matematické analýzy v konkrétním semináři,[1] kde se tato látka probírala, a následně ověřit schopnost žáků samostatně řešit úlohy z této oblasti matematiky formou souboru didaktických testů a jejich následného rozboru.[2]

Výzkumné otázky zaměřené na pozorování výuky a následné vypracování didaktických testů žáky mi pomohou zjistit, zda jsou žáci po absolvování semináře schopni úlohy na daná témata řešit, které úlohy jsou pro žáky více a které méně obtížné a jestli žáci své postupy dokáží zdůvodnit.

Pozorování výuky bylo prováděno od září 2018 do dubna 2019 na jednom konkrétním gymnáziu[3] v Praze, kde je žákům řadu let nabízen volitelný předmět *Algebra a matematická analýza*.[4] Jedná se o dvouletý seminář, ve kterém se žáci mají seznámit s pokročilejší matematikou, konkrétně s maticemi a jejich užitím (algebra) a se základy matematické analýzy. Cílem předmětu je rozšířit dosavadní žákovské znalosti z daných oblastí, což mohou následně využít při dalším studiu na vysokých školách přírodovědného, technického nebo matematického typu.

Na uvedeném gymnáziu, kde seminář probíhá, jsou žáci rozděleni podle zaměření na humanitní a přírodovědnou třídu (jedna přírodovědná a dvě, resp. tři humanitní), ale možnost si vybrat zmíněný seminář není nijak omezena zaměřením třídy.

[1] podrobněji specifikován v 3.2

[2] podrobně v kapitole 5

[3] Dále jen gymnázium **A**

[4] Dále jen AaMa

3.2 Popis předmětu

Jedná se o dvouletý volitelný předmět s dvouhodinovou týdenní dotací, který je určen žákům třetího a čtvrtého ročníku. Probíraná látka je rozdělena tak, že během třetího ročníku (září – únor) je probírána algebra (maticový počet, determinanty, soustavy lineárních rovnic) a matematická analýza začíná poté (březen – červen, čtvrtý ročník). Vzhledem k rostoucímu zájmu o tento předmět byl v akademickém roce 2018/2019 vyučován ve dvou paralelních skupinách, z nichž v každé bylo cca 12–15 žáků. Celkově si tento předmět tedy zvolilo kolem třiceti žáků.[5] V posledních třech letech mají žáci gymnázia **A** možnost zvolit si AaMa jako předmět, ze kterého budou skládat maturitní zkoušku společně s ostatními předměty. Je možné maturovat jak z matematiky (ať státně nebo školně), tak z AaMa. Tato možnost společně s profilací žáků pro další vysokoškolské studium na vysokých školách technického a matematického zaměření tedy může vysvětlit onen velký zájem o předmět.

Látku, se kterou jsou žáci v semináři seznamováni, můžeme rozdělit následovně:

III. ročník

Algebra: soustavy lineárních rovnic, matice, operace s maticemi (sčítání, násobení, invertování), determinanty, užití maticového počtu pro řešení soustav rovnic a úloh z analytické geometrie.

Matematická analýza: rekapitulace látky z druhého ročníku[6] (funkce, graf funkce, goniometrické funkce, definiční obor, obor hodnot, parita, elementární funkce, omezenost funkce), spojitost funkce (zavedení pojmu a propojení s pojmem graf funkce), limita funkce (zavedení pojmu, příklady vlastní i nevlastní limity).

IV. ročník

Zopakování matematické analýzy ze 3. ročníku: zopakování spojitosti a limity, dokončení limity funkce.[7]

Diferenciální počet: zavedení pojmu *derivace funkce* (v bodě, na intervalu), geometrická interpretace, způsoby výpočtu derivace (podle definice, věty o aritmetice derivací

[5] Což je stejný počet jako v jedné třídě.

[6] K výuce se v tomto ročníku na gymnáziu **A** využívají učebnice [10] a [11].

[7] Pokud se tato látka nestihla probrat ve třetím ročníku.

a o derivaci složené funkce), aplikace derivací (tečna ke grafu funkce, L'Hospitalovo pravidlo, asymptoty grafu funkce,[8] úlohy na hledání extrémů funkce,[9] aplikace derivací ve fyzice).[10]

INTEGRÁLNÍ POČET: zavedení pojmu *primitivní funkce*, neurčitý integrál a jeho souvislost s primitivní funkcí, způsoby výpočtu primitivní funkce (věta o primitivní funkci ze součtu a rozdílu funkcí, metoda per partes, substituční metoda), určitý integrál – Newtonův vzorec, Newtonův vzorec pro metody per partes a substituci (včetně přepočtu integrálních mezí), aplikace určitého integrálu: výpočet obsahu plochy[11] pod grafem funkce f, výpočet objemu rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce kolem osy x.

Výuku v semináři vede vyučující,[12] která na gymnáziu **A** působí již mnoho let. Kromě AaMa vyučuje matematiku a fyziku.

3.3 Metodologie

Pozorování výuky se zaměřuje výhradně na druhou část probíhajícího semináře AaMa, ve které se žáci seznamují se základy diferenciálního a integrálního počtu, konkrétně teorií derivací a dále neurčitého a určitého integrálu.[13]

V této části se soustřeďuji na následující výzkumné otázky:[14]

(1) Jakým způsobem jsou zaváděny jednotlivé pojmy?

(2) Jaké úlohy a příklady jsou ve výuce používány?

(3) Do jaké míry je žákům dán prostor pro samostatnou činnost při řešení úloh?

(4) Dokazují se tvrzení (věty) a pokud ano, jakým způsobem?

(5) Jsou žákům zadávány úkoly i mimo výuku, které ověří porozumění dané látce?

[8] Asymptoty horizontální i vertikální.

[9] Úlohy s geometrickým tématem: maximální/ minimální objem, povrch, obsah, délka.

[10] Odvozování známých vzorců: dráha, rychlost, úhlové zrychlení.

[11] Včetně odvození (Riemannův přístup) dělení intervalů

[12] V dalším textu ozn. jako **U**, resp. U.

[13] První část semináře zaměřená na matematickou analýzu, ve které se žáci seznamovali s pojmy *spojitost* a *limita funkce*, jsou sice v testech prověřeny, ale samotná výuka pozorována nebyla (viz test II, úloha 5).

[14] Při formulaci těchto výzkumných otázek jsem vycházel z [15].

Dále jsem se soutředil na to, do jaké míry jsou žáci schopni řešit úlohy z diferenciálního a integrálního počtu, což jsem prověřil testem.[15] Test se skládá ze dvou částí, z nichž první je zaměřena pouze na početní dovednosti a druhá část je sestavena tak, aby prověřovala míru pochopení probrané látky a schopnost žáků získané poznatky aplikovat při řešení konkrétních úloh. Nejde o to, jak přesně a rychle jsou žáci schopni počítat, ale o to, jak si s úlohami poradí:

(1) sami,

(2) sami s využitím poznámek,

(3) s nápovědou a návodnými otázkami, které jsou cíleny na řešení konkrétní úlohy, ale nevedou žáka přímo k jejímu okamžitému vyřešení.

Úlohy v testu II jsou formulovány nestandardně, např. zadání nezní: „Vyšetřete průběh funkce f," ale třeba takto: „Určete všechna $k \in \mathbb{R}$, pro které má rovnice $f(x) = k$ více než jedno řešení." (viz Test II, úloha 8). Během řešení jsou žákům povoleny jejich sešity se zápisky z výuky, nikoliv však tištěné materiály (např. učebnice, poznámky z internetu apod.).

V tabulce 3.1 je uveden přehled jednotlivých témat, která se probírala v semináři a počet provedených pozorování během jednotlivých měsíců.

3.4 Získávání dat

3.4.1 Pozorování výuky

Pozorování výuky jsem prováděl osobně. Průběh hodin nebyl nahráván, ale pořizoval jsem z nich terénní poznámky. Jako počáteční data mi sloužil přehled témat uvedený na webových stránkách gymnázia **A**, úvodní a následné rozhovory s vyučující[16] a dále pak poznámky, které jsem získal během vlastního absolvování tohoto semináře.[17]

3.4.2 Testování žáků a zadávání testů

Na tomto místě je nutné uvést, že v průběhu výzkumu došlo k jedné podstatné změně. Ačkoli bylo původně domluveno, že většina žáků gymnázia navštěvujících seminář AaMa se zúčastní

[15] Test je blíže představen v kapitole 5, kde je také jeho vyhodnocení. Zadání testu lze nalézt v příloze, viz str. 115.

[16] Jednalo se o doplňující otázky v případě, kdy jsem neporozumněl něčemu, co se v hodině dělo.

[17] během let 2011–2013

Tabulka 3.1: Přehled probíraných témat a počtu pozorování během jednotlivých měsíců

ZÁŘÍ 2018:	zopakování učiva 3. ročníku (spojitost, limita), zavedení nového pojmu derivace funkce, definice derivace pomocí limity.	1 P
ŘÍJEN 2018:	aritmetické operace s derivacemi, derivace složené funkce, zavedení derivací vyšších řádů, první aplikace diferenciálního počtu: tečna ke grafu funkce, Rolleova a Lagrangeova věta, L'Hospitalovo pravidlo.	6 P
LISTOPAD 2018:	další aplikace: určování monotonie funkce, lokální a globální extrémy funkce, konvexnost a konkávnost grafu, asymptoty grafu funkce, úvod vyšetřování průběhu grafu funkce.	4 P
PROSINEC 2018:	vyšetřování průběhu funkce, úlohy s fyzikální a geometrickou tematikou.	2 P
LEDEN 2019:	dokončení diferenciálního počtu, tj. zopakování probrané látky, úvod do integrálního počtu, zavedení pojmů neurčitý integrál a primitivní funkce, základní metody výpočtu primitivní funkce (linearita a aditivita neurčitého integrálu).	3 P
ÚNOR 2019:	integrační metoda per partes, substituční metoda.	2 P
BŘEZEN 2019:	určitý integrál: Riemannův integrál - určení obsahu pod grafem funkce, metody výpočtu určitého integrálu, aplikace určitého integrálu: určení obsahu pod grafem funkce, objem rotačního tělesa.	3 P
DUBEN 2019:	opakování celého učiva AaMa, příprava k maturitní zkoušce.	1 P

testování, nakonec pouze čtyři z nich byli ochotni test vyplnit a následně o své práci mluvit. Z toho důvodu jsem další adepty na testování vybíral z jiných gymnázií a středních škol, na kterých je žákům nabízena výuka stejných, případně velmi podobných základů analýzy. Konkrétně se jednalo o tři pražská gymnázia a jedno gymnázium na Slovensku. V tabulce 3.2 je uvedena stručná charakteristika žáků, kteří neabsolvovali výuku na gymnáziu **A**.

Žáky z těchto škol jsem získal tak, že jsem oslovil studenty prvního ročníku Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy. Studentů jsem se zeptal, jestli se během studia na střední škole setkali s derivacemi a s integrály, a pokud ano, zda by byli ochotni se zúčastnit testování.

Pro účely výzkumu nebylo podstatné, zda žáci již mají složenou maturitní zkoušku, ale především to, aby testování proběhlo v době, kdy se nesetkali s výukou matematické analýzy na vysoké škole,[18] a jejich znalosti tedy zůstávají na úrovni předmětu dané střední školy. Před začátkem testování jsem se žáků, kteří navštěvovali jiné gymnázium, ptal, jestli dříve nestudovali nějakou vysokou školu, kde by se s výukou matematické analýzy setkali již na vysokoškolské úrovni.

Tabulka 3.2: Charakteristika žáků z jiných gymnázií

Žák	Pohlaví	Věk v době testování	Další studijní zaměření
SJ1	muž	19 let	matematika, AJ
SJ2	žena	19 let	matematika, IT
SJ3	muž	20 let	matematika, IT
SJ4	žena	19 let	matematika
SJ5	žena	20 let	matematika
SJ6	žena	19 let	matematika, AJ

Oba dva testy byly sestaveny až po skončení pozorování výuky. Důvodem pro to byla snaha nastavit obtížnost úloh tak, aby byly pokud možno stejně náročné jako úlohy, se kterými se žáci setkali během výuky, nebo jen „mírně“ náročnější. To se týká především prvního testu.

Testování probíhalo následujícím způsobem: Žákům jsem zadal test,[19] následně měli za úkol samostatně vypracovat jednotlivé úlohy. Během jejich řešení jsem byl přítomen. Čas na vypracování nebyl nijak omezen,[20] důležité bylo pouze vyřešení/nevyřešení úlohy a jakým způsobem k výsledku žák dospěl, případně kde se vyskytla chyba.

Žáci nebyli testováni současně, ale každý zvlášť.

V případě, že se žák při řešení dostal do potíží, byly mu položeny návodné otázky, které jej buď navedly na správný postup, nebo ne. Tyto otázky byly předem rozmyšleny jen rámcově a odvíjely se od toho, na čem se žák při řešení zadrhl. Během testování jsem si dělal opět terénní poznámky, aby bylo zpětně možné popsat žákův postup řešení.

Některé odpovědi žáků, zejména zdůvodňování postupů a argumentace, byly nahrávány na diktafon. Důvodem pořizování audiozáznamu byla snaha později co nejpřesněji formulovat argumentaci žáků.

[18] v krajních případech jen velmi krátce

[19] Měli možnost si vybrat jestli začnou testem I nebo testem II.

[20] Přibližná doba vypracování a následného rozebrání testu byla cca 5–6 hodin, ale někdy i více.

Analýza dat

Po vypracování didaktických testů jsem zvolil hodnotící kritéria založená na hodnotící škále od: vyřešil samostatně, vyřešil s využitím poznámek, vyřešil s nápovědou, nevyřešil. Jedná se o vlastní způsob hodnocení výsledků práce žáků tak, aby získaná data odpovídala na stanovené výzkumné otázky.

Výuka v semináři byla analyzována na základě provedeného pozorování s ohledem na stanovené výzkumné otázky.

KAPITOLA 4

Pozorování výuky

V této kapitole je popsán průběh výuky diferenciálního počtu. Jak bylo uvedeno výše, pozorování výuky se odehrávalo u žáků čtvrtého ročníku, kdy se žáci začali seznamovat s další látkou diferenciálního a integrálního počtu. Jednalo se o látku, která navazovala na znalosti získané během předchozího roku. Z hlediska probraných témat týkajících se matematické analýzy se žáci již setkali s pojmy *spojitost* funkce a *limita* funkce a umí řešit různé úlohy týkající se limit nebo vyžadující výpočet limity.

Nutno poznamenat, že se jedná o úlohy na výpočet limit daných funkcí ve vlastních i nevlastních bodech. Pouze u některých případů se jedná o výpočet limity funkce *pomocí definice*, u ostatních příkladů se jedná i o aplikací platných vět (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkce).

Než podrobněji představím výsledky svých pozorování výuky, stručně popíši způsob, jakým je výuka v semináři organizována. Se seminářem mám i vlastní zkušenost, neboť jsem ho v roce 2013 absolvoval jako žák gymnázia **A**.

Výuka předmětu probíhá následujícím způsobem: žákům jsou předloženy základní pojmy a definice, na jejichž základě se poté odvodí další platné poučky. Některé z nich se dokazují (např. derivace součinu, podílu, složené funkce), ale jiné (např. souvislost mezi derivací a monotonií) se buď nedokazují a žáci je chápou jako axiomy, nebo pro důkaz jejich platnosti postačuje geometrická interpretace pomocí nákresů. Vzhledem k objemu látky a časové dotaci předmětu není zřejmě možné věnovat dostatek času tomu, aby si žáci mohli platnost všech těchto vztahů odvodit sami. To je, vzhledem k náročnosti některých úvah a faktu, že pro většinu žáků jsou pojmy jako *okolí* a *spojitost* dosud nové, pochopitelné. Po zavedení pojmů a platných vztahů se věnuje značná část výuky procvičování na konkrétních případech, kdy žáci postupně řeší zadané úlohy u tabule. Díky nevelkému počtu žáků v jednotlivých skupinách a dvouhodinové časové dotaci se během jednoho semináře stihne procvičit dostatečný počet úloh. Tím si žáci mohou získané vědomosti upevnit. Při výpočtu na tabuli jsou vedeni k tomu, aby svůj postup komentovali a odůvodňovali jednotlivé kroky. V následujících oddílech popíšu podrobněji, jak výuka v rámci semináře probíhala.

Poznámka: Vzhledem k rozsahu práce je v hlavním textu popsána a rozebrána pouze výuka diferenciálního počtu. Výuka integrálního počtu je popsána v příloze, viz str. 96.

4.1 Diferenciální počet

Diferenciální počet tvoří náplň výuky v prvním pololetí čtvrtého ročníku. Žáci jsou během této doby seznámeni s pojmem *derivace*, který volně navazuje na dříve probíraná témata limita a spojitost funkce. Následně je žákům také uveden význam a využití tohoto pojmu v matematice, případně i v jiných oborech.

4.1.1 Zavedení pojmu derivace

Matematicky korektní definici předchází intuitivní představení derivace jakožto „změny", resp. „rychlosti změny" hodnot funkce. Tento klíčový pojem matematické analýzy byl během pozorované výuky definován klasicky pomocí definice (1.1) a vztahů (1.1) a (1.3).

Poznámka: Po dotazu na vyučující jsem zjistil, že důvodem uvedení obou způsobů výpočtu derivace je snaha **U** s žáky odvodit některé derivace elementárních funkcí, z nichž pro některé je výhodnější určovat derivaci pomocí prvního tvaru (např. derivace x^m) a pro jiné pomocí druhého (např. derivace $\sin(x)$, e^x). To bylo následně také provedeno.

Poznámka: Hodnoty limit $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$, které se při odvození použily, znali žáci podle slov **U** již z látky o limitách funkcí.

> U: „Fakt, že funkce f má v nějakém bodě x_0 derivaci rovnou A, zapisujeme symbolicky: $f'(x_0)=A$, ale můžete se setkat i s dalšími způsoby zápisu, např. $\dfrac{df}{dx}(x_0)=A$ nebo $y'(x_0)=A$. Všechny znamenají totéž."

Uvedené způsoby značení byly v hodině zapsány na tabuli.

Příklad (Z hodiny) Určete derivaci funkce $f: y=x^2$ v bodě $x_0=1$.

Řešení: (**U** pokládá žákům otázky, žáci formulují postup.)

Žáci ověřili, že zadaná funkce je v daném bodě definovaná (dosazením).

U: „Můžeme tedy určit derivaci v bodě?“

Ž: „Ano, zapíšeme to jako limitu a zjistíme, jestli to jde.“

Píše na tabuli: $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1^2}{x-1}$.

U: „Umíte takovou limitu vyřešit?“

Ž: „Čitatele rozepíšeme podle vzorce a zkrátíme se jmenovatelem.“

Píše na tabuli: $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = \underline{2}$

U: „Takže limita existuje, a proto můžeme napsat, že $\left(x^2\right)'(1) = 2$. Pokud za x_0 nedosazujete konkrétní hodnotu, získáte derivaci funkce f v bodě x_0 ve tvaru nové funkce proměnné x_0, takže derivaci funkce v obecném bodě chápeme jako novou funkci, kterou označujeme f'.“

Následně byly vyučující odvozeny vztahy pro derivace dalších funkcí včetně vysvětlení jednotlivých kroků odvození viz tabulka 4.1. Žáci si během této části odvození zapisovali. Přímo z definice byly odvozeny derivace funkcí $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$ a $y = e^x$. Zbylé vztahy byly žákům předloženy jako platné vzorce bez odvození. V tabulce (4.1) je uveden přehled základních derivací, se kterými byli žáci seznámeni.

Tabulka 4.1: Přehled základních derivací

$f(x)$	$f'(x)$	
c	0	pro $x \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	pro $x \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	pro $x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	pro $x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	pro $x \in \mathbb{R}$ a $a > 0$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$	pro $x > 0$ a $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

4.1.2 Aritmetika derivací

Po uvedení základních derivací **U** ve výkladu přešla k operacím s derivacemi. Jelikož většina funkcí, s nimiž se žáci setkávají, je ve tvaru součtu, rozdílu, součinu, podílu nebo složení funkcí, bylo nutné zavést aritmetické operace s derivacemi (zde se již pracovalo s derivaci ve smyslu funkce, nikoliv číselné hodnoty).

Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí f a g v bodě x_0 byly žákům formulovány jako samostatné věty[1] v souladu s větou (1.1, str. 13). Žáci pod vedením vyučující odvodili platnost tvrzení pro případ součtu a rozdílu funkcí z definice:

U: „Zapíšeme derivaci součtu funkcí podle definice: $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0}$. Je to rovno $f'(x_0)+g'(x_0)$?"

Ž: (zkouší sami do sešitu)

Ž: „Ano, je. Čitatel můžeme rozepsat na $(f(x)-f(x_0)+(g(x)-g(x_0)))$ a to potom rozdělit na součet dvou limit."

Píše na tabuli:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$

Poznámka: Derivace rozdílu funkcí byla provedena stejným způsobem. Žáci opět dostali prostor pro vlastní způsob řešení, **U** pouze uvedla rozpis původní limity na tabuli.

Derivace součinu a podílu byla provedena vyučující včetně odvození z definice, ale žáci v těchto případech neměli výslovně za úkol problém vyřešit samostatně.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0)\cdot(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} g(x_0)\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= g'(x_0)f(x)+f'(x_0)g(x_0)\end{aligned}$$

Poznámka: Platnost vzorce pro derivaci podílu byla dokázána podobným způsobem.

Někteří žáci projevili překvapení nad tvary vztahů pro derivaci součinu, resp. podílu funkcí, protože předpokládali, že se bude jednat o součin, resp. podíl derivací. Argumentovali tím, že limita součinu, resp. podílu je součinem, resp. podílem limit, takže by totéž mělo platit i pro derivaci. Po odvození **U** uvedla, že při dokazování platnosti tvrzení se někdy dané výrazy upravují pomocí „triku", kterým bývá např. přičtení a odečtení stejného výrazu, jako v tomto případě.

[1] Každá operace byla formulována jako samostatná věta.

Pomocí odvozených vztahů pro algebraické operace s derivacemi měli žáci za úkol odvodit derivaci funkce $\mathrm{tg}(x)$, $\mathrm{cotg}(x)$, což během procvičovací části hodiny s použitím vztahů bez obtíží zvládli všichni.

> Ž: „Funkci $\mathrm{tg}(x)$ můžeme zapsat jako podíl funkcí $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ a potom použít pravidlo pro derivaci podílu funkcí."

Žáci si nejprve rozdělili funkce na část f a g a určili jejich derivace. Ty následně dosadili do vzorce: $f(x) = \sin(x) \to f'(x_0) = \cos(x_0)$, $g(x) = \cos(x) \to g'(x_0) = -\sin(x_0)$,

$$\mathrm{tg}'(x_0) = \frac{\cos(x_0)\cdot\cos(x_0) - -\sin(x_0)\cdot\sin(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{\cos^2(x_0)+\sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{1}{\cos^2(x_0)}$$

Poznámka: Někteří žáci vyjádřili derivaci funkce tg jako $1 + \mathrm{tg}^2(x)$. Obdobným způsobem byla odvozena i derivace funkce *kotangens*: $[\mathrm{cotg}(x)]'(x_0) = -\dfrac{1}{\sin^2(x_0)}$.

V tuto chvíli měli žáci k dispozici základní nástroje pro výpočet derivací vyjma derivace složené funkce. To ale u některých případů nebylo nezbytně nutné. Konkrétně v procvičovací části hodiny měli žáci za úkol samostatně určit derivace následujících funkcí: $y = x\cdot\sin(x)$, $y = \dfrac{x}{\ln(x)}$, $y = \sin^2(x)$, $y = \mathrm{e}^{2x}$, $y = \sin(2x)$, $y = \cos(2x)$.

Poznámka: I když se mezi uvedenými funkcemi vyskytují funkce složené, pro jejichž řešení v danou chvíli neměli žáci potřebné nástroje, jedná se pouze o takové funkce, které je možné upravit na jiný tvar[2], a tento tvar pak derivovat známými metodami. V uvedených tvarech už lze pro výpočet derivace použít známé metody.[3]

Na konci hodiny žáci dostali za domácí úkol určit první derivaci funkce[4] $f : y = \dfrac{x\cdot(x-2)}{x-1}$, jehož řešení bylo předvedeno na začátku následující hodiny. Jako hlavní problém se ukázalo, že někteří žáci postupovali způsobem: $f(x) = \dfrac{g(x)\cdot h(x)}{k(x)}$; $g(x) = x$, $h(x) = x-2$ a $k(x) = x-1$, tedy si jednotlivé funkce nahradili jinými a následně užili pravidla pro derivaci součinu a podílu funkcí zároveň. Tento postup vedl ke značně obtížnému výpočtu, protože nejprve bylo potřeba vyřešit derivaci čitatele jako derivaci součinu dvou funkcí a následně kombinovat s pravidly pro derivaci podílu:

[2] $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^x$, $\sin(2x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot\sin(x)$

[3] Nutno poznamenat, že ve výuce se klade důraz na to, aby žáci znali rovnosti $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ a identitu $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

[4] Předpis funkce byl takový, jak je zde uveden, tj. čitatel nebyl roznásoben.

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{[g'(x)h(x)+g(x)h'(x)]k(x)-k'(x)g(x)h(x)}{k^2(x)} = \frac{[1\cdot(x-2)+x\cdot 1]\cdot(x-1)-1\cdot x\cdot(x-2)}{(x-1)^2} = \\
&= \frac{[1\cdot(x-2)+x\cdot 1]\cdot(x-1)-1\cdot x\cdot(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{(2x-2)\cdot(x-1)-x^2+2x}{(x-1)^2} = \\
&= \frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}
\end{aligned}
$$

Druhý postup, který zvolila menší část žáků (cca 4), byl takový, že danou funkci upravili na podíl dvou funkcí a následně užili pouze pravidlo pro derivování podílu funkcí:

$$
\begin{aligned}
f: y &= \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x\cdot(x-2)}{x-1} = \frac{x^2-2x}{x-1};\ g(x)=x^2-2x,\ h(x)=x-1 \\
y' &= \frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h^2(x)} = \frac{(2x-2)\cdot(x-1)-1\cdot(x^2-2x)}{(x-1)^2} \\
&= \frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}.
\end{aligned}
$$

Poslední postup použil jediný žák: úpravu zadané funkce vydělením mnohočlenů:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x\cdot(x-2)}{x-1} = \frac{x^2-2x}{x-1} = (x^2-2x):(x-1) = x-1-\frac{1}{x-1} \\
f(x) &= g(x)+h(x);\ g(x)=x-1,\ h(x)=\frac{1}{x-1}.
\end{aligned}
$$

Kombinací vztahů pro výpočet derivace součtu, rozdílu a podílu funkcí žák došel k výsledku:

$$
y' = 1+0-\frac{0\cdot(x-1)-1\cdot 1}{(x-1)^2} = 1+\frac{1}{(x-1)^2}
$$

Poznámka: I když všechny postupy byly zhruba stejně časově náročné a vedou ke správnému výsledku, u prvního bylo vyšší riziko chyby, protože žáci musí ohlídat více faktorů najednou, zatímco u druhého jde o dosazení správných vztahů do známého vzorce a u třetího nejprve o úpravu a teprve následné užití vztahů pro derivování. **U** žáky upozornila na to, že: „V obecném případě nelze říci, jestli je výhodnější výraz upravit a až poté derivovat, nebo derivovat přímo zadaný výraz. Obtížnost obou postupů se může lišit s ohledem na zadanou funkci.“

Derivace složené funkce byla odvozena vyučující, žáci opět neodvozovali samostatně.

Poznámka: V hodinách se pro skládání funkcí užívá identity $(f\circ g)(x) \equiv f(g(x))$. Odvození bylo v hodině provedeno pomocí substituce: $g(x)=y$ a $g(x_0)=y_0$:

$$
\begin{aligned}
[f(g(x_0))]' &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \\
&= \lim_{y\to y_0}\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(y_0)\cdot g(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).
\end{aligned}
$$

Od této chvíle žáci mohli určovat derivace libovolných funkcí. Následně se v hodinách procvičovalo na různých příkladech.

Derivace vyšších řádů

Obdobně jako derivace funkce byla zavedena i druhá derivace a derivace vyšších řádů. V této části byl žákům dán prostor na samostatné uvažování.

Poznámka: S derivací se opět pracovalo jako s funkcí, nikoliv konkrétní číselnou hodnotou.

U v tuto chvíli žáky upozornila, že:

> U: „To, co jsme doteď dělali, se nazývá první derivace funkce f. Jak byla zaváděna derivace?“
> Ž: „Jako limita $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.“
> U: „Jak tedy můžeme určit druhou derivaci?“
> Ž: (Po chvilkové úvaze) „Opět jako limitu, ale už z té nové funkce, takže místo $f(x)$ tam bude $f'(x)$.“
> U: „Jak byste to zapsala?“
> Ž: Píše na tabuli:[5] $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$. „Takže druhá derivace je vlastně derivace té první derivace.“

U s žáky souhlasila, že druhá derivace je skutečně (ve smyslu funkce) derivace první derivace, obecněji, že n-tá derivace je derivace $n-1$ derivace dané funkce, pokud existuje. U: „Derivace vyšších řádů označujeme čárkou až do řádu tři a od čtvrtého řádu dál označujeme pomocí číslic v závorce.“ Značení píše na tabuli: $f'(x_0),\ f''(x_0),\ f'''(x_0),\ f^{(4)}(x_0),\ \dots,\ f^{(n)}(x_0)$ i tvar $y'(x_0),\ y''(x_0),\ y'''(x_0),\ y^{(4)}(x_0),\ \dots,\ y^{(n)}(x_0)$.

Na tomto místě je vhodné upozornit, že funkce, které by v nějakém bodě svého D_f derivaci neměly, se v hodinách běžně nepoužívají a slouží čistě jako demonstrativní příklady.

Poznámka: I když se může zdát, že nebyl dán dostatečný prostor na procvičování samotných derivací, jejich aritmetických operací a derivací vyšších řádů, není tomu tak. Procvičování probíhalo tak, že byla zadána funkce $y = f(x)$ a žák/žákyně měl za úkol určit její derivaci $y' = f'(x)$ (případně vyšší derivaci, záleželo vždy na zvolené úloze). další žák/žákyně dostal další funkci a tak se pokračovalo dál, dokud každý z žáků nedostal možnost samostatně vyřešit úlohu na tabuli. Vždy jeden žák řešil vzorově na tabuli, ostatní samostatně do sešitu. Díky zavedení vyšších

[5] Zapsaný výraz bez = nedává smysl, žáci však v tuto chvíli nevěděli, jak se druhá a vyšší stupně derivace označují.

řádů derivací bylo možné zadat jednu funkci a žáci postupně určovali vyšší a vyšší řády derivace dané funkce. V hodině byl žákům předložen následující problém:

Úloha (Zadáno vyučující, žáci měli řešit samostatně.)

Určete předpis funkce $f^{(21)}(x)$, kde $f : y = \sin(x) - \cos(x)$.

Řešení: Žáci řešili samostatně do školního sešitu. Jelikož se jednalo o funkci ve tvaru rozdílu dvou funkcí, bylo možné použít větu o derivaci rozdílu. Žáci tak získali postupně: $y' = \cos(x) + \sin(x)$, $y'' = -\sin(x) + \cos(x)$, $y''' = -\cos(x) - \sin(x)$, $y^{(4)} = \sin(x) - \cos(x)$, $y^{(5)} = \cos(x) + \sin(x)$, $y^{(6)} = -\sin(x) + \cos(x)$. Někteří žáci pokračovali v derivování dále, jiní (cca 8) si všimli zákonitosti, která se v získaných předpisech vyskytuje. Ž: „Zderivovaná funkce se postupně opakuje. Po každém čtvrtém zderivování je stejná jako předtím.“ Díky tomuto poznatku žáci přišli na to, že pro danou funkci platí: $y' = y^{(5)} = y^{(9)} = ...$, $y'' = y^{(6)} = y^{(10)} = ...$ Ž: „Protože 21:4 dává zbytek jedna, je derivace stejná jako v případě $y^{(5)}$, $y^{(9)}$, takže $y^{(21)} = \cos(x) + \sin(x)$.“

4.1.3 Aplikace derivací

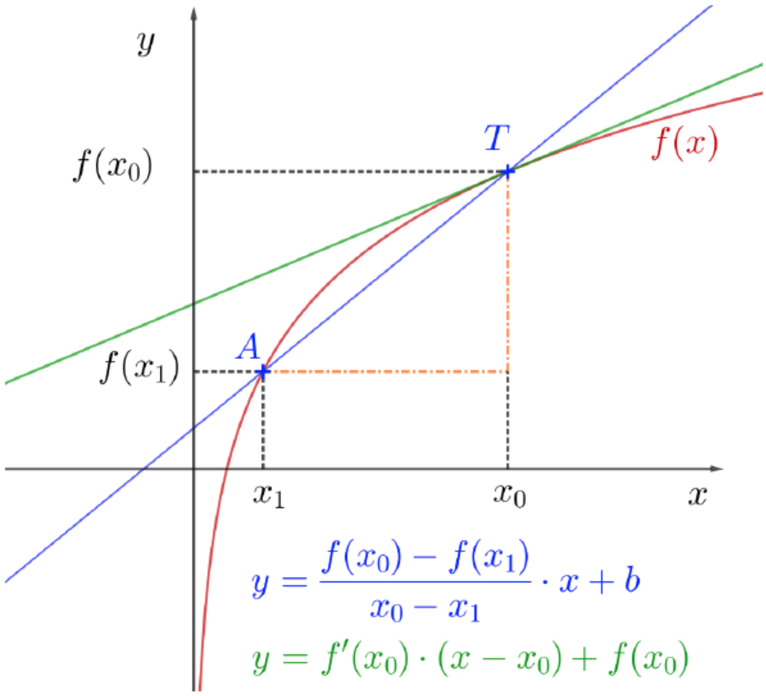
S aplikacemi derivací se ve výuce začalo bezprostředně po ukončení přehledu početních metod na výpočet samotných derivací.

Tečna ke grafu funkce

V dřívějších hodinách byli žáci seznámeni s geometrickým významem derivace, tedy s tím, že „derivace funkce f v bodě x_0 je směrnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě“. V této části se výuka zaměřila na odvození rovnice samotné tečny.[6] Odvození vztahu pro rovnici tečny ke grafu funkce f bylo opět z části přenecháno žákům.[7] Jako klíčové bylo použití poznatků o lineární funkci $y = ax + b;\ a; b \in \mathbb{R}$, konkrétně její směrnici a. Žáci věděli, že směrnici a lze určit jako podíl rozdílu funkčních hodnot a rozdílu argumentů: $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Dále pak to, že tečna je taková přímka, která se „dotýká“ grafu dané funkce f v nějakém jeho bodě $T[x_0; y_0] \in \Gamma(f)$. K odvození se užil nákres na tabuli podobný obrázku 1.

[6] V některých letech se tato látka v semináři rozvíjí až k pojmu *Taylorův polynom*, ale nebývá to z časových důvodů běžné.

[7] Tím se myslí, že žáci sdělovali své domněnky a **U** vedla diskusi.



Obrázek 1: Nákres k odvození tečny ke grafu funkce

Postup odvození

> U: „Libovolná přímka, která je grafem nějaké lineární funkce procházející body $A'[x_1; f(x_1)]$ a $T[x_0; f(x_0)]$, kde A i T leží na grafu funkce, je sečnou tohoto grafu. Zvolme $x_1 < x_0$. Pokud zvolíme hodnoty x_2, resp. x_3 tak, že $x_1 < x_2 < x_3 < x_0$, získáme vždy novou sečnu procházející body $A''[x_2; f(x_2)]$ a T, resp. $A'''[x_3; f(x_3)]$ a T, které se „více blíží" hledané tečně, přičemž sečna procházející body A''' a T je přesnější než sečna procházející A'' a T. Čím více se tedy blíží hodnota x_1 hodnotě x_0, tím více se sečna blíží tečně."

Žáci postupně odvodili, že každá taková sečna, která prochází body A a T, má směrnici:

$$a_1 = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \quad \text{pro } A' \text{ a } T,$$
$$a_2 = \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2} \quad \text{pro } A'' \text{ a } T,$$
$$\text{atd.}$$

U: „Budeme-li se stále více přibližovat hodnotou x_j hodnotě x_0, dostaneme limitní přechod:

$$a = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}, \text{ tedy } a = f'(x_0).$$

Z toho plyne, že směrnice tečny ke grafu funkce je skutečně rovna první derivaci této funkce v daném bodě x_0."

Tímto způsobem **U** ukázala, že směrnice tečny je skutečně rovna derivaci funkce v daném bodě. Zbývalo tedy určit hodnotu b tak, aby graf lineární funkce $y = f'(x_0)x + b$ byl skutečně tečnou ke grafu funkce. Zde dostali žáci prostor pro vlastní samostatné úvahy. Po určité době a s pomocí vyučující přišla jedna žákyně s nápadem:

Ž: „Protože jak graf funkce f tak i graf tečny prochází bodem $T[x_0; y_0]$, musí tento bod splňovat rovnici tečny, takže:"

$$\begin{aligned} y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + b &\Leftrightarrow y - b = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ y_0 - b = f'(x_0) \cdot (x_0 - x_0) &\Rightarrow y_0 - b = 0 \\ b &= y_0 \end{aligned}$$

Rovnice tečny ke grafu funkce v bodě $T[x_0; y_0]$ byla na tabuli zapsána ve tvaru:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0). \tag{4.1}$$

Po odvození rovnice tečny dostali žáci následující domácí úkol: Určete rovnici tečny t ke grafu funkce f v bodě T je–li dáno:

(1) $f(x) = x^2$, $T[1, ?]$ (2) $f(x) = \ln(x)$, $T[1, ?]$

V další hodině semináře měli žáci možnost ukázat své řešení a předvést jej na tabuli včetně komentování postupu. Postup byl u všech žáků, kteří řešení předváděli, stejný: 1) stanovili, jestli x-ová souřadnice bodu T (T_x) leží v D_f, 2) následně určili y-ovou hodnotu bodu T (T_y), 3) určili první derivaci funkce f jako funkci $f'(x)$. Poté určili hodnotu derivace funkce v daném bodě $f'(T_x)$ a dosadili do vztahu pro tečnu z předchozí hodiny.

(1) $T[1;1]$

$f'(x) = 2x$

$f'(T_x) = 2$

$t: y = 2 \cdot (x-1) + 1$

$t: y = 2x - 1$

(2) $T[1;0]$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'(T_x) = 1$

$t: y = 1 \cdot (x-1) + 0$

$t: y = x - 1$

Rolleova a Lagrangeova věta

Ve výuce zazněly i *Rolleova* a *Lagrangeova* věta. **U** je vyslovila a zapsala na tabuli. Úkolem žáků bylo věty interpretovat.

Žáci, kteří problém aktivně řešili, postupně přišli na to, že geometrická interpretace vět je následující:

Ž: „Rolleova věta, pokud tedy platí podmínky, říká, že mezi dvěma stejnými hodnotami funkce je vždycky nějaký bod x, ve kterém je derivace nulová.“

U: „Ano, a co nám udává derivace?“

Ž: „Směrnici tečny. Ta je tady nulová, takže Rolleova věta nám říká, že mezi dvěma stejnými hodnotami funkce je vždy nějaký bod, ve kterém je tečna rovnoběžná s osou x.“

U: „Jak by to bylo s extrémy, kdybyste uvažoval konstantní funkci? Tam jsou podmínky splněny, ale extrém tam je?“

Ž: „Je i není. Když to bude konstantní funkce, tak extrémní hodnoty buď nabývá všude, nebo nikde.“

Ž: „Lagrangeova věta nám tedy říká, že pokud jsou splněny její podmínky, tak na grafu funkce existují body, ve kterých je tečna rovnoběžná s přímkou, která prochází body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$?“

Na tabuli byly poté načrtnuty nákresy funkcí, které ilustrovaly platnost uvedených vět. Na jejich základě pak vyučující znovu vysvětlila, co věty říkají, a s žáky jejich platnost rozebrala. Někteří žáci však správně určili význam vět i bez použití nákresu.

L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo se v hodině nedokazovalo. Bylo představeno jako „užitečný nástroj" pro počítání limit typu „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{k}{\infty}$".

U zapsala na tabuli: „Jestliže (1) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ nebo (2) $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty$, pak pokud existuje $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak je rovna $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$."

Ihned po zavedení pravidla se přistoupilo k procvičení, přičemž **U** žáky upozornila na to, že „je nutné ověřit podmínky (1) a (2), než se toto pravidlo použije."

Příklad Určeme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$.

Řešení: **U** žáky nechala, aby si zkusili zadání vyřešit samostatně.

U: „Má někdo z vás výsledek?"

Ž: „Ano, je to $\frac{1}{2}$."

U: „Použili jste k výpočtu L'Hospitalovo pravidlo nebo jste na to šli jiným způsobem?"

Ž: „Tenhle typ limit jsme už řešili dříve rozšiřováním. Funkci jsme upravili na jiný tvar $\frac{\sin(2x)}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{2x}$ a potom jsme užili toho, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$."

U: „Ano, to je správný postup, ale kdybychom chtěli použít zmíněné pravidlo, můžeme?"

Ž: „Ano, u téhle funkce je splněna první podmínka."

Po tomto zdůvodnění žáci přistoupili k samotné úpravě:[8]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{[\sin(2x)]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{1} = \underline{2}$$

Pomocí L'Hospitalova pravidla měli žáci za domácí úkol odvodit platnost limit, které dříve používali jako platné vzorce:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Správnost řešení byla ověřena další hodinu. Všichni žáci, kteří se o řešení pokusili, měli úkol správně.

[8]V hodinách i v testech se užití L'Hospitalova pravidla označuje psaním $\overset{\text{L'H}}{=}$ mezi limitu z původní funkce a limitu z podílu jejich derivací.

Derivace a monotonie

Zde byli žáci seznámeni s platností věty (1.3), jejíž platnost se nedokazovala pomocí definic, ale měla sloužit pouze jako nástroj u pozdějšího vyšetřování průběhu funkcí.

Poznámka: Při dotazu na vyučující mi bylo řečeno, že dokázat tuto větu „standardně" by pro žáky bylo příliš náročné. Při výkladu byl ale udělán rozbor vlastností tečny: Z předchozích hodin žáci věděli, že rovnice tečny má tvar (4.1). **U** pak dokazovala, že pro $f'(x_0) > 0$ je tato funkce rostoucí přímo z definice rostoucí funkce:

> U: „Vezmeme nějaká dvě x_1 a x_2 tak, že $x_1 < x_2$ a ukážeme, že pro danou hodnotu derivace je tečna rostoucí funkce."
>
> Píše na tabuli:
>
> $$t(x_1) = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0) \text{ a } t(x_2) = f'(x_0) \cdot (x_2 - x_0) + f(x_0)$$
>
> U: „Uvedené vztahy rozepíšeme, porovnáme podle předpokladu $t(x_1) < t(x_2)$ a upravíme." Pokračuje v úpravách:
>
> $$\begin{aligned} t(x_1) < t(x_2) \Rightarrow f'(x_0) \cdot x_1 - f'(x_0) \cdot f(x_0) + f(x_0) &< f'(x_0) \cdot x_2 - f'(x_0) \cdot f(x_0) + f(x_0), \\ f'(x_0) \cdot x_1 &< f'(x_0) \cdot x_2 \ / : f'(x_0), \\ x_1 &< x_2 \end{aligned}$$
>
> U: „Tím máme tvrzení dokázáno. Mohli jsme v posledním kroku nerovnost vydělit $f'(x_0)$, aniž by to změnilo nerovnost?"
> Ž: (Chvíli se zamýšlí.) „Ano, protože jsme předpokládali, že derivace je kladná, takže dělíme nerovnost kladným číslem."
> U:„Výborně. Nejedná se sice o zcela korektní důkaz, ale pokud budete uvažovat tak, že tečna charakterizuje chování (monotonii) funkce v daném bodě, tak můžete znaménko derivace brát jako ukazatel toho, jestli funkce v daném bodě roste nebo klesá, protože tečna v tomto bodě je buď rostoucí, nebo klesající funkce."

Žáci po této hodině měli být schopni určit, zda je zadaná funkce rostoucí, resp. klesající pouze na základě derivace. To pro ně představovalo první krok k vyšetřování průběhu funkce.

Asymptoty grafu funkce

Pojem asymptota žáci znali již z hodin analytické geometrie, konkrétně hledání asymptot hyperboly a z látky o funkcích – asymptoty lineární lomenné funkce. Obecněji z hlediska reálných funkcí byla asymptota grafu zavedena jako: „lineární funkce φ, tedy $\varphi(x) = Ax + B$, kde $A; B \in \mathbb{R}$, ke které se hodnoty dané funkce f přibližují pro $x \to \pm\infty$ (pokud leží v D_f), ale graf samotné funkce neprotne. Asymptota může mít jiný tvar pro $+\infty$ a pro $-\infty$".

Během výuky byly jednotlivé kroky odvozeny vyučující následujícím způsobem:

> U: „ Předpokládejme, že taková funkce φ existuje např. pro $x \to +\infty$. Pokud se hodnoty funkce φ mají neomezeně blížit hodnotám f pro $x \to +\infty$, musí platit, že $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \varphi(x)] = 0$, tedy $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - Ax - B] = 0$."

Tuto část odvození zřejmě všichni přítomní žáci chápali (nebyly dotazy).

> U: „Protože předpokládáme existenci funkce φ, musejí existovat i konstanty A a B. Užitím věty o limitě rozdílu funkcí dostaneme první důležitý vztah:
>
> $$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - Ax - B] = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - Ax] - \lim_{x\to+\infty}[B],$$
>
> a tedy $B = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - Ax]$. Zbývá určit konstantu A. Obě strany rovnosti vydělíme x a opět užijeme větu o limitě rozdílu funkcí: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x}\right] \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - A = 0$, a tedy $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = A$."

Tím byly odvozeny potřebné vztahy pro vyjádření koeficientů asymptoty.

Někteří žáci se ptali, jestli bylo vydělení rovnosti proměnnou x „korektní" úpravou. **U** jim odpověděla, že v tomto případě rozhodně ano. Zdůvodnila to tím, že hodnoty x se neblíží nule, kde by to byl problém, ale $+\infty$.

U dále uvedla, že: „Pro asymptoty v $-\infty$ by byl postup stejný, pouze bychom vyměnili $+\infty$ za $-\infty$."

Pro určování asymtptot byly užívány odvozené vztahy:

$$A = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\text{ , resp. }\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \tag{4.2}$$

$$B = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - A\cdot x]\text{ , resp. }\lim_{x\to-\infty}[f(x) - A\cdot x]. \tag{4.3}$$

Žáci byli dále upozorněni na to, že pro existenci asymptoty je nutné, aby hledané limity byly vlastní, tedy že ne všechny funkce nutně musí mít asymptotu.

U: „Pokud jsou čísla A a B reálná, nazývá se příslušná funkce asymptotou se směrnicí. Směrnici určuje číslo A, číslo B určuje posunutí asymptoty.“

Žáci měli následně určit asymptoty funkcí $f_1(x) = x + \frac{1}{x}$ a $f_2(x) = x^2$. Pro první z uvedených funkcí stačilo, že žáci správně určili příslušné limity pomocí vztahů 4.2 a 4.3, což je přivedlo k výsledku $\varphi_1(x) = x$. Při stejném postupu u druhé funkce žáci zjistili, že limita označující směrnici asymptoty vychází $+\infty$. Ohledně asymptot grafu funkce měli žáci různé otázky:

Ž: „Když směrnice A vyjde nekonečná, znamená to, že funkce nemá asymptotu?“

U: „Přesně tak. Takový výsledek znamená, že funkce roste rychleji než každá lineární funkce, takže se žádné lineární funkci nemůže v nekonečnu blížit.“

Ž: „Pokud vyjde A vlastní, musí mít funkce asymptotu?“

U: „Ne zcela nutně. Můžete si zvolit takovou funkci, která má vlastní směrnici, ale asymptota i tak nebude existovat.“[9]

Ž: „Můžeme asymptotu chápat jako tečnu v nekonečnu ?“

U: „Svým způsobem ano. Ale nesmíme ji brát jako skutečnou tečnu, protože tečnou myslíme takovou přímku (graf lineární funce), která má v daném bodě stejnou hodnotu jako daná funkce a na nějakém okolí tohoto bodu je funkci velice blízká. To u nevlastních bodů jako je $\pm\infty$ nelze říci, protože tam neznáme ani funkční hodnotu. Známe pouze limitu v nevlastních bodech.“

Ve zbytku hodiny si žáci samostatně procvičovali určování asymptot různých funkcí, což se jim většinou dařilo.

Extrémy funkcí

Pojem extrém funkce žáci znali už ze druhého ročníku, např. z učiva o kvadratických funkcích, kde se hledal vrchol paraboly, která byla grafem zadané funkce.[10] Na základě této představy byl pak definován lokální a globální extrém funkce.

U zapsala na tabuli:

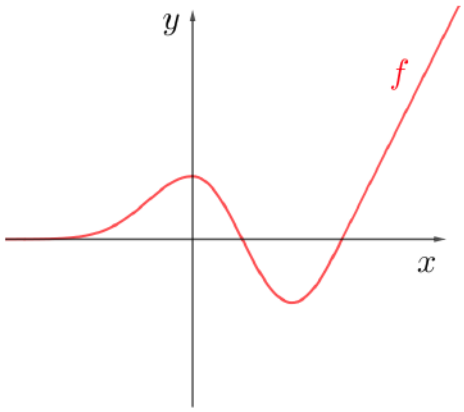
„**Lokální extrém:** Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$ **lokální** maximum, resp. minimum, jestliže existuje okolí $U(a)$ takové, že pro všechna $x \in U(a) : f(x) < f(a)$, resp. $f(x) > f(a)$.

[9] Toto bylo demonstrováno na funkci $y = x + \ln(x)$, kde žáci zjistili $A = 1$, ale $B = +\infty$.

[10] Žáci takové úlohy řešili metodou *doplnění na čtverec*.

Globální extrém: Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$ **globální** maximum, resp. minimum, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $f(x) \leq f(a)$, resp. $f(x) \geq f(a)$.“

Pro přiblížení rozdílu mezi lokálním a globálním extrémem funkce byl na tabuli načrtnut graf funkce podobný jako na obrázku 2, kde funkce má lokální (nikoliv globální) maximum, a naopak má globální minimum.



Obrázek 2: Náčrtek grafu k rozlišení typů extrémů

Díky grafické interpretaci toho, co znamená extrém funkce (ať už lokální nebo globální), žáci po chvilkové úvaze zodpověděli dotaz **U**: „Jaká bude derivace v bodě a, pokud je v něm extrém?“

Ž: „Derivace v bodě extrému bude rovna nule.“

U: „Proč si to myslíte?“

Ž: „Protože derivace je směrnice tečny ke grafu funkce, a pokud děláme tečnu v extrému, tak je rovnoběžná s osou x.“

U: „Ano, bude rovnoběžná s osou x, ale proč bude derivace nulová?“

Ž: „Protože tečna bude mít rovnici $y = k$, nevyskytuje se v ní x, a proto má směrnici nulovou.“

U: „Je toto tvrzení univerzální, tj. pokud je v nějakém bodě derivace nulová, je to vždy bod extrému?“

Ž: (Zamýšlí se nad otázkou.) „Pravděpodobně ne, třeba u konstantní funkce je první derivace nulová všude a nejde o extrém, protože je ta hodnota konstantní.“

U: „Pro konstantní funkci je zrovna každý bod bodem extrému, protože maximum a minimum je stejné, ale jinak máte pravdu. Nenapadá vás ještě jiná funkce?“

Ž: (Neví.)

U: „Vyzkoušejte funkce $y_1 = x^3$ a $y_2 = x^2$ a pokuste se přijít na to, v čem je rozdíl.“ Žáci určili první derivace $y_1' = 3x^2$ a $y_2' = 2x$ a určili, že jsou obě rovny nule pro $x = 0$. Na základě grafů funkcí ale zjistili, že se o bod extrému jedná jen v případě $y_2 = x^2$. Po chvíli přemýšlení jeden z žáků přišel s nápadem: „Rozdíl je v tom, že funkce y_2 se v nule mění z klesající na rostoucí, ale y_1 je pouze rostoucí. Takže aby byl bod prohlášen za bod extrému, musí v něm být derivace nulová a ještě k tomu se v něm musí měnit monotonie?“

U: „Přesně tak. To, že derivace je nulová v nějakém bodě, znamená, že tečna je rovnoběžná s osou x, ale to nestačí pro extrém. V bodě extrému se musí měnit monotonie funkce. Jak tedy podle první derivace rozhodnete, jestli jde o extrém?“

Ž: „První derivace musí být v tom bodě nulová, a když se i mění monotonie, tak v tomto bodě musí derivace měnit znaménko.“

Žákům tato úvaha zabrala určitý čas, nejednalo se o okamžitou odpověď. Uvedená debata o nulovosti první derivace v bodě lokálního extrému probíhala mezi **U** a třemi žáky (jedná se o parafrázi).

Souvislost mezi derivací funkce a konvexností a konkávností

U zavedla pojem konvexní a konkávní funkce následovně: „Funkce f je v bodě x_0 *konvexní*, resp. *konkávní*, jestliže graf funkce f leží nad, resp. pod tečnou sestrojenou v bodě x_0. Bod x_0 ve kterém se funkce mění z konvexní na konkávní, resp. opačně, se nazývá *inflexní bod*.“

Jako nápovědu pro grafické rozlišení obou případů **U** uvedla: „Pokud je funkce konvexní, její graf tvarem připomíná písmeno V, je-li konkávní, tvar grafu připomíná písmeno A.“ viz obrázek 3.

U: „Která funkce bude konvexní na celém svém D_f?“

Ž: „Třeba funkce $y = x^2$.“

U: „Jaká je druhá derivace této funkce? Jaké má znaménko?“

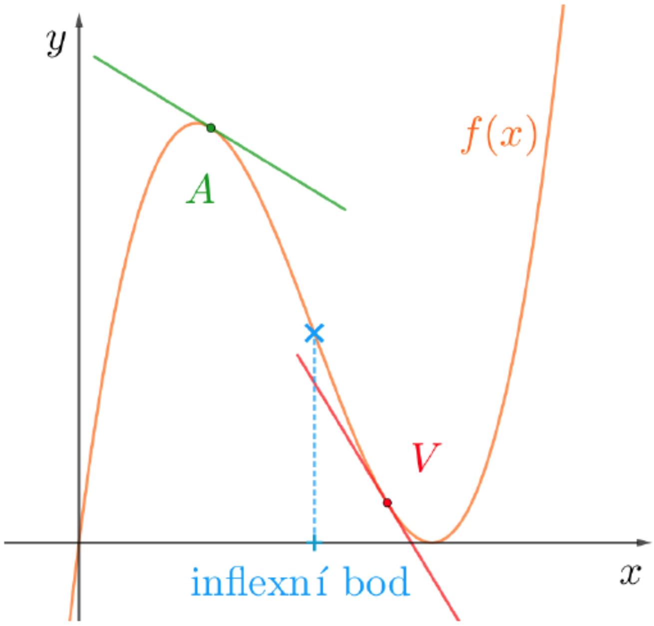
Ž: „ Druhá derivace je rovna 2. Je kladná.“

U: „Která funkce bude konkávní na celém D_f?“

Ž: „Stačí vynásobit mínus jedničkou tu, kterou máme, takže $y = -x^2$.“

U: „Jakou ta má druhou derivaci?“

Ž: „ Druhá derivace je rovna -2. Je záporná.“



Obrázek 3: Nákres k vysvětlení pojmů konvexnost a konkávnost funkce

Na základě těchto dvou příkladů byla žákům řečena následující tvrzení:[11]

Tvrzení 1: „Je–li funkce f v bodě a *konvexní*, pak $f''(a) > 0$, je–li v bodě a *konkávní*, potom $f''(a) < 0$.“

Tvrzení 2: „Je–li $f''(a) = 0$, pak a nazýváme bodem podezřelým z inflexe.“

Tvrzení 3: „Je–li funkce f konvexní, resp. konkávní v každém bodě a intervalu I, pak je funkce f konvexní, resp. konkávní na celém intervalu.“[12]

Jako alternativní rozdělení funkce na konvexní a konkávní byla **U** uvedena ještě jedna podmínka: „Funkce je konvexní, resp. konkávní, jestliže směrnice tečny ke grafu dané funkce klesá, resp. roste.“

Díky znalosti souvislosti monotonie funkce s její derivací pak žáci společně s **U** ověřili platnost této alternativy:

> U: „U konkávní funkce směrnice tečny ke grafu klesá. Co můžete říct o derivaci funkce f?“
>
> Ž: „Je to klesající funkce, protože derivace je směrnice tečny. No a jestli má být f' klesající, tak musí být její derivace f'' záporná. “

[11] Tvrzení byla zapsána na tabuli.

[12] Platnost těchto tvrzení se ověřovala na funkcích a jejich grafech: $y = \sin(x)$, $y = \frac{1}{x}$. Žáci měli zkusit řešit samostatně.

Stejné zdůvodnění provedli žáci také pro případ konvexní funkce, což bylo opět ověřeno na náčrtcích grafů funkcí $y = x^2$ a $y = \frac{1}{x}$.

U představila žákům inflexní bod tak, že se jedná o bod, ve kterém se funkce mění z konvexní na konkávní (nebo naopak). Následně je upozornila, že pro to, aby byl bod prohlášen za inflexní, nestačí pouze fakt, že je v něm druhá derivace nulová. Jako protipříklad byl uveden graf funkce $y = x^6$, na kterém žáci viděli, že druhá derivace $y'' = 30x^4$ je sice rovna nule pro $x = 0$, ale o inflexní bod se nejedná, protože zadaná funkce je na celém D_f konvexní. To žáky vedlo k dotazu:

Ž: „Jak tedy poznáme, že se jedná o inflexní bod?"

U: „Jak jste poznali u bodů podezřelých z extrému, jestli jsou skutečně body extrému?"

Ž: „Podle toho, jestli se v podezřelém bodě měnila funkce z rostoucí na klesající nebo z klesající na rostoucí."

U: „Stejným způsobem můžeme postupovat i v případech inflexe. Pokud se v bodě podezřelém z inflexe mění konvexnost na konkávnost, resp. obráceně, pak se jedná o inflexní bod. Jestliže se tato vlastnost nemění, pak o inflexní bod nejde."

Lineární a konstantní funkce byly označeny za „ani konvexní ani konkávní", protože grafy těchto funkcí v každém bodě splývají s tečnou, a tedy tečna neleží ani nad ani pod grafem této funkce.

Příklad (**U** zapisuje na tabuli, žáci sdělovali postup.)

Určete inflexní body funkce $f : y = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$.

Řešení: Žáci díky uvedeným tvrzením věděli, že pokud mají najít inflexní bod, tak musejí najít nulové body druhé derivace. Určili první derivaci $y' = 3x^2 - 12x + 12$ a následně druhou derivaci $y'' = 6x - 12$ a hledali kořeny rovnice $y''(x) = 0$, čímž získali kořen $x = 2$. Opět užitím spojitosti výsledné funkce určili, že $y''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty; 2)$ a funkce je zde konkávní a pro $x \in (2; +\infty)$ je $y''(x) > 0$ a funkce je zde konvexní. Ž: „Zadaná funkce má jeden bod podezřelý z inflexe, a protože se v něm mění konvexnost na konkávnost, jde skutečně o inflexní bod."

Díky zavedení konvexnosti a konkávnosti funkce **U** představila žákům druhý způsob jak ověřit existenci extrému (s grafickým důkazem).

U: „Pokud je v nějakém bodě první derivace nulová a druhá derivace je nenulová, pak se jedná o extrém. Pokud je funkce konvexní, tak se jedná o minimum, pokud je konkávní, jde o maximum."

Žáci ověřovali samostatně platnost tvrzení na funkci $y = \sin(x)$.

Úlohy na hledání extrémů

V těchto hodinách[13] měli žáci možnost řešit různé úlohy, většinou s geometrickou tematikou, na hledání extrému „složitějších“ funkcí.

Poznámka: Protože se v užitých vztazích vyskytovaly i jiné proměnné, resp. parametry než x a y, sloužily tyto úlohy i k upevnění schopnosti vyjadřování ze vzorce. Jedná se o ukázky zadání a následného řešení několika úloh.

Úloha (Žáci pracovali samostatně, **U** pouze kontrolovala činnost.) Je dána funkce $f : y = \dfrac{x}{1+x^2}$. Určete, jaké nejvyšší hodnoty nabývá.

Řešení: Zadaná funkce byl podíl dvou polynomů, z nichž polynom ve jmenovateli nemá žádný reálný kořen. Žáci tedy zjistili, že definičním oborem zadané funkce je $\mathbb{R}$. Dalším krokem bylo stanovení první derivace a jejích nulových bodů:

$$y' = \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$y' = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$y' = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Derivace měla dva nulové body: $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. (Při derivování se nevyskytly žádné případy chyb). Žáci se rozhodli použít „první“ pravidlo pro určování extrému, tedy znaménko v okolí -1 a 1. Dosadili hodnoty $x = -2$, $x = 0$ a $x = 2$, z čehož zjistili, že $f'(-2) < 0$, $f'(0) > 0$ a $f'(2) < 0$. Na základě nulových bodů první derivace a znaménku derivace v uvedených bodech žáci stanovili, že zadaná funkce je rostoucí pro $x \in (-\infty; -1)$ a pro $x \in (1; +\infty)$. Klesající je pro $x \in (-1; 1)$. Ž:„V minus jedničce a jedničce se mění znaménko derivace, takže jde o body extrému.“ **U** se ptala, jak poznají, ve kterém bodě je maximum. Ž: „Maximum bude pro $x = 1$, protože až do té hodnoty funkce roste a od 1 do nuly klesá.“

Stejným způsobem bylo pak zdůvodněno, že pro $x = -1$ funkce nabývá minima.

Úloha[14] Nalezněte rovnoběžník, který má při daném obsahu $S = 36$ cm^2 minimální obvod.

Řešení: (Žáci pracují samostatně.) **U** pouze doporučila, aby si žáci vyjádřili jednu proměnnou ze vzorce.

[13] Časový rozsah jsou dva semináře.

[14] Obdobné úlohy lze nalézt v [18], str. 132 nebo [4], str. 141–142.

Z informace, že se jedná o rovnoběžník, vyplynulo, že $S = a \cdot b$ a $O = 2 \cdot (a + b)$, kde $a; b$ jsou délky stran rovnoběžníku. Z těchto vztahů Ž vyjádřili $a = \frac{S}{b} = \frac{36}{b}$, které dosadili do vztahu pro obvod: $O = 2 \cdot \left(b + \frac{36}{b}\right)$, čímž získali předpis funkce proměnné $b \in \mathbb{R}$. Dalším krokem bylo určení první derivace a jejích nulových bodů:[15]

$$S'(b) = \frac{dS}{db} = 2 \cdot \left(b + \frac{36}{b}\right)' = 2 \cdot \left(1 - \frac{36}{b^2}\right)$$

$$S'(b) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{b^2 - 36}{b^2} = 0 \Rightarrow b = \pm 6$$

Vzhledem k tomu, že se jednalo o hledání extrému u geometrické úlohy, žáci zápornou hodnotu označující délku strany nebrali v potaz. Určením druhé derivace $S''(b) = 2 \cdot \frac{72}{b^3}$, která vyšla pro zjištěné $b = 6$ kladná, si ověřili, že zde funkce nabývá svého minima. Žáci tedy dosadili zpět do vztahu pro obsah, z čehož zjistili, že $a = 6$ cm. Tedy hledaný rovnoběžník je čtverec o straně šest centimetrů.

4.1.4 Průběh funkce

Poslední téma, které je podle vyučující jedním z nejčastějších využití diferenciálního počtu, je „možnost zjistit, jakým způsobem se zadaná funkce chová“. Z toho důvodu je vyšetření průběhu funkce věnováno více času než předchozím tématům (cca 3-4 vyučovací hodiny). Z hlediska časového plánu výuky se tato část obvykle ukončuje během prosince a žáci dostávají za úkol vyšetřit průběh nějaké funkce jako svou seminární práci.

Poznámka: Podle slov vyučující (i na základě vlastní zkušenosti) hodnocení této seminární práce tvoří cca 20 % celkové klasifikace v daném pololetí, a má tedy značnou váhu.

Při odvozování jednotlivých kroků postupu vyšetřování průběhu byla výuka vedena formou diskuse mezi vyučující a žáky, kdy vyučující kladla otázky (někdy návodné) a žáci se snažili najít odpovědi a formulovat, proč tomu tak je. K tomu žáci využívali poznatky o vztahu derivace a monotonie nebo o způsobech nacházení extrémů funkce.

Úloha U: „Funkce daná předpisem $f : y = A \cdot x$ je rostoucí pro $A \in \langle 0; +\infty)$. Ano, nebo ne?“

Řešení: Žáci stanovili první derivaci zadané funkce: $f' : y' = A$, kde $A \in \langle 0; +\infty)$, tedy derivace je nezáporná. Ž: „Tvrzení by platilo, kdybychom vynechali nulu. Pro $A = 0$ je funkce konstantní a ta není ani rostoucí ani klesající. Každá lineární funkce $y = A \cdot x$ je pro $A > 0$ rostoucí.[16] Takže takhle to neplatí.“

[15] Pro některé žáky byl zpočátku problém derivovat podle jiné proměnné než x.

[16] Tento poznatek žáci znají již ze studia funkcí ve druhém ročníku.

Samotný postup používaný ve výuce AaMa při vyšetřování průběhu funkce pak obvykle vypadal takto:[17]

1) Stanovení definičního oboru D_f dané funkce f.

2) Určení, zda je funkce sudá, lichá nebo nemá paritu.

3) Určení průsečíků grafu funkce f s osami souřadnic x a y.

4) Určení limit v krajních bodech definičního oboru.[18]

5) Určit první derivace $f'(x)$.

   5.1) Na základě předpisu $f'(x)$ stanovení nulových bodů první derivace (body podezřelé z extrému).

   5.2) Určení intervalů, pro které platí: $f'(x) < 0$, resp. $f'(x) > 0$ pro x z daného intervalu.

   5.3) Rozhodnutí o existenci extrémů, jejich typu a typu monotonie na uvedených intervalech pomocí znaménkových změn $f'(x)$: Pokud je $f'(c) = 0$ a $f'(x)$ má kladné, resp. záporné hodnoty na $U_\delta^-(c)$ a záporné, resp. kladné hodnoty na $U_\delta^+(c)$, pak je v bodě $x = c$ lokální minimum, resp. maximum.

6) Určení druhé derivace $f''(x)$.

   6.1) Určení nulových bodů druhé derivace (body podezřelé z inflexe).

   6.2) Určení intervalů, pro které platí: $f''(x) < 0$, resp. $f''(x) > 0$ pro x z daného intervalu, tedy určení maximálních intervalů, na kterých je funkce konkávní, resp. konvexní.

   Využití konvexnosti, resp. konkávnosti k rozhodnutí o typu extrému funkce: Je-li $f'(c) = 0$ a $f''(c) > 0$, jde o lokální minimum, v případě, že $f'(c) = 0$ a $f''(c) < 0$, jde o lokální maximum.

   6.3) Sestavení tabulky obsahující údaje o monotonii, konvexnosti, konkávnosti na jednotlivých podintervalech D_f.

7) Určit asymptoty grafu funkce (pokud existují).

8) Sestrojení grafu funkce.

[17] Uvedený postup byl použit na každou funkci, jejíž průběh se během hodin vyšetřoval.

[18] Tedy limity v $\pm\infty$, pokud leží v D_f, a jednostranné limity v hromadných bodech D_f.

V těchto hodinách se postupovalo tak, že byla nejdříve zadána funkce, jejíž průběh se měl vyšetřit, a následně jednotliví žáci řešili jednotlivé kroky postupu na tabuli. Ostatní žáci během toho řešili úlohu samostatně.

Jak bylo uvedeno výše, součástí pololetní klasifikace byla i seminární práce, ve které měli žáci za úkol vyšetřit průběh zadané funkce. Každý žák dostal jednu funkci, jejíž průběh měl za úkol vyšetřit podle výše uvedeného postupu. Touto seminární prací žáci zakončují část kurzu, která se zabývá diferenicálním počtem.

Ukázky některých zadání seminárních prací na průběh funkce

$$f: y = \frac{2x}{x^2+1} \qquad f: y = x - \frac{1}{x^2} \qquad f: y = x \cdot \mathrm{e}^x$$

$$f: y = \mathrm{e}^{-x^2} \qquad f: y = 4^x - 4 \cdot 2^x \qquad f: y = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$$

4.2 Shrnutí pozorování

Pozorovaná výuka se uskutečňovala od září do dubna jednou týdně, což představuje cca 30 vyučovacích hodin, během nichž bylo nutné s žáky projít kompletně celou látku diferenciálního a integrálního počtu.

Dále uvádím rozbor a odpovědi na výzkumné otázky týkající se průběhu výuky.

Jednotlivá témata, která se v kurzu probírala, byla vždy rozdělena na *teoretickou* a *praktickou* část.[19]

Výuka během *teoretické* části většinou probíhala tak, že **U** vykládala látku (nové pojmy, věty), zapsala je na tabuli a snažila se vysvětlit okolnosti, resp. „co daná věta říká“. Během této části **U** často využívala nákresy na tabuli, které měly žákům usnadnit pochopení předložených informací. V některých případech se věty, resp. platnosti vzorců dokazovaly, ale ne ve všech případech. Úkolem žáků v těchto částech hodiny bylo si nové informace zapsat, v některých případech se pokusit samostatně o interpretaci a případně se doptávat, pokud něčemu nerozuměli. Poslední uvedené možnosti žáci využívali zřídka.

Pokud se tvrzení dokazovala, jednalo se buď o důkaz pomocí definice (odvození platnosti vzorců pro derivování),[20] o použití dřívějších znalostí v novém kontextu (např. pro metody výpočtu neurčitých integrálů),[21] nebo se k dokázání platnosti využívaly nákresy konkrétních

[19]Toto rozdělení hodin platilo jak pro výuku diferenciálního, tak i integrálního počtu.
[20]např. str. 42
[21]např. str. 99

příkladů na tabuli, které měly vystihnout podstatu tvrzení. Grafické interpretování pojmů se v hodinách využívalo často.

Poté, co byly nové pojmy a tvrzení zavedeny a byl vysvětlen jejich význam, se přešlo k části *praktické*.

Během této části byla hlavní činnost v hodinách na žácích. Jejich úkolem bylo si nově získané informace procvičit na nejrůznějších úlohách. Úlohy, které byly v průběhu výuky řešeny žáky, byly většinou elementární funkce, se kterými měli žáci provést určitý početní úkon, případně o těchto funkcích něco zjistit. Konkrétní úkon se vždy odvíjel od právě probírané látky. Postup byl během této části většinou stejný. **U** na tabuli zapsala zadání úlohy a žáci měli následně samostatně najít řešení. Během této doby **U** procházela mezi žáky a snažila se kontrolovat jejich činnost, případně žákům napovídala, když si nevěděli rady. Zvolený žák[22] poté předvedl postup svého řešení na tabuli, přičemž ostatní žáci sledovali jeho postup a v případě, kdy žák udělal chybu, jej měli opravit. Žáci, kteří řešili úlohu na tabuli, byli také dotazováni ze strany **U**, např. „Pomocí čeho byste určil derivaci v tomto konkrétním případě?“ Těmito dotazy a následnými odpověďmi žáků měla i **U** možnost sama si ověřit, že žák danému postupu rozumí.

Jako další forma procvičení jednotlivých početních postupů sloužily i domácí úkoly, které se vždy vztahovaly k látce probírané v dané hodině nebo k určitému tematickému celku. Domácí úkoly byly buď ve formě *rozmyšlení si* nebo *dokončení* řešení nějakých úloh z hodiny (pokud se nestihly), případně se jednalo o konkrétně zadané elementární funkce a v závislosti na probírané látce, s ní měli žáci udělat určitý početní úkon. Domácí úkoly sice nebyly zadávány každou hodinu, ale na každé probírané téma žáci nějaké dostali. Jejich řešení se někdy provádělo vzorově na tabuli, jindy byly pouze zkontrolovány správné výsledky.

Každý větší tematický celek (aritmetika derivací, aplikace derivací,[23] primitivní funkce, určitý integrál) byl vždy zakončen písemným testem, ve kterém se měla ověřit schopnost žáků vyřešit zadané úlohy, které byly jak ryze početního, tak také teoretického rázu. Objevovaly se i otázky z teorie. Typickým příkladem takové otázky je „Vyslovte Rolleovu větu.“ nebo „Pomocí definice derivace funkce určete $f'(5)$, je–li $f(x) = x^3$.“ apod.

Jelikož se ve výuce vyskytovaly i důkazy některých tvrzení (většinou platnosti určitého způsobu výpočtu) a žáci byli v průběhu výuky seznamováni i se zněním některých vět, je možné říci, že výuka, která byla pozorována, obsahuje „průřez“ algebraického a topologického přístupu.[24]

[22] Buď se přihlásil dobrovolně, nebo byl vybrán vyučující.

[23] Úlohy typu: najděte maximum, určete inflexní body, najděte rovnici tečny, apod.

[24] viz str. 27

Žáci měli získat dostatečné početní schopnosti k řešení různých úloh, ale zároveň po nich byly vyžadovány i určité znalosti teoretických základů. Přinejmenším měli žáci vědět, odkud se vzaly platné vztahy pro výpočty derivací a primitivních funkcí, resp. proč takové způsoby výpočtu smějí použít.

Celkově se vyučující podařilo žáky seznámit skutečně se všemi stanovenými tématy, která měl seminář nabízet, a to do té míry, že žáci byli schopni vyřešit úlohy z diferenciálního i integrálního počtu a v určitých případech je aplikovat na problémy z jiné oblasti (geometrie). Tento závěr je podložen průběžnými výsledky písemých prací, které žáci během semináře psali a které byly u většiny žáků dobré.[25]

[25] Tím se myslí, že jen výjimečně byla známka z testu 4 nebo 5. Pokud tomu tak bylo, žák měl možnost opravy.

KAPITOLA 5

Testování žáků

V této kapitole formuluji cíl testu a obtíže, které lze při řešení očekávat. Dále pak uvádím výsledky a celkové shrnutí testování.

5.1 Cíl testu

Jak bylo řečeno dříve, test se skládá ze dvou částí, z nichž každá je zaměřena na jiné dovednosti. Zadání obou testů lze nalézt v příloze viz str. 115.

Cílem prvního testu je prověření početních schopností žáků. Jsou jim předloženy různé úlohy na určení první a druhé derivace, určení primitivní funkce k dané funkci a spočtení určitého integrálu.

V tomto testu je hlavní otázkou, zda žák úlohy vyřeší. Není tolik důležité, jakým způsobem (metodou) tak učiní. Ověřuje se, jestli žák zná a je schopen použít:

(1) základní vztahy mezi funkcí f a její derivací f', resp. mezi funkcí f a její primitivní funkcí F,

(2) operace s derivacemi, tj. jak určit derivaci součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí a derivovat složenou funkci,

(3) tyto operace vhodně kombinovat podle požadavků dané úlohy,

(4) metody výpočtu primitivní funkce (tj. přímá, odvíjející se od derivace funkce a operací mezi derivacemi, metoda per partes, substituční metoda) pro určitý i neurčitý integrál.

Úlohy v tomto testu jsou zvoleny tak, aby při jejich řešení žáci mohli využít početní techniky, které si během semináře měli osvojit, ale zároveň tak, aby pro jejich zdárné vyřešení nebyly nutné žádné další informace, které by během výuky nezazněly. Úlohy jsou tedy stejně či podobně obtížné jako ty, se kterými se žáci setkávali během výuky v rámci procvičování nebo v testech z AaMa.

Cílem druhého testu je ověřit, zda jsou žáci schopni využít poznatky diferenciálního a integrálního počtu, získané během hodin AaMa k řešení složitějších matematických úloh, které nevyžadují přímé využití konkrétní metody, ale většinou jejich kombinaci.

Druhý test ověřuje následující:

(1) využití derivací pro určování extrémů a monotonie funkce (úlohy 3, 5, 8, 10),

(2) geometrický význam určitého integrálu funkce f na intervalu $\langle a; b\rangle$ jako obsahu plochy pod grafem funkce (úloha 2), případně užití určitého integrálu k určení objemu rotačního tělesa (úlohy 6 a 10) nebo délky grafu funkce (úloha 4). K aplikačním úlohám jsou připojeny i uvedené nápovědy, které by měly usnadnit žákům postup, ale také prověřit jejich schopnost orientovat se v zápise. Konkrétně: rozdíl mezi výrazy $[f'(x)]^2$ a $[f^2(x)]'$, případně $\left(\int f(x)\, dx\right)^2$ a $\int f^2(x)\, dx$. V průběhu řešení by se mělo projevit, zda jsou si žáci těchto rozdílů vědomi či nikoliv.

(3) na základě grafu funkce f určit vlastnosti funkce f' (úloha 7),

(4) využívání znalosti vlastností elementárních funkcí při řešení nerovnic (úlohy 3 a 9).

Úlohy jsou sestavené tak, aby nepřekračovaly objem látky probírané ve středoškolském kurzu analýzy. Pokud by taková možnost nastala, jsou k úlohám doplněny nápovědy ve formě vzorců, u kterých je možnost, že se ve výuce nestihly[1] probrat.

5.2 Předpokládané obtíže žáků

5.2.1 Test I

V prvním testu lze očekávat následující obtíže žáků:

- numerické chyby při úpravách výrazů (především úloha 3), vedoucí k nesprávnému výsledku,

[1] Na gymnáziu **A** se většinou stihne probrat objem rotačního tělesa.

- neznalost základních vztahů mezi funkcemi či metod výpočtu, neznalost potřebných vztahů,[2] (Tomu žáci mohou předejít užitím vlastních poznámek, které mají k dispozici.)
- zvolení nesprávného užití metody (např. při výpočtu per-partes), vedoucí k obtížnějším integrálům, než je původní,
- opomenutí změnit integrální meze při použití substituční metody,
- nahrazení výrazu dx pouze dy, případně jinou proměnnou, bez ohledu na to, jaká substituce byla provedena,
- rozpis goniometrických vztahů vedoucí ke složitějšímu předpisu funkce, který se bude hůře integrovat/derivovat.

5.2.2 Test II

K jednotlivým úlohám testu II uvedu možné obtíže a chyby žáků, které lze očekávat.

Úloha 1: Chybná interpretace sudosti, resp. lichosti funkce, konkrétně jejich záměna. Vyvození závěru z konkrétních příkladů funkcí, ale nikoliv z obecného tvaru funkce.

Úloha 2: Jelikož se hledá obsah obrazce, lze předpokládat, že žáci při řešení úlohy sestaví integrál přes daný interval $\langle 0; 2\pi \rangle$, bez ohledu na to, zda se na tomto intervalu někde funkce nerovnají, a tedy není nutné řešit obsah plochy přes celý interval jako součet dvou či více určitých integrálů přes menší intervaly.

Úloha 3: Jelikož v zadání je zmíněna rovnice, lze předpokládat, že žáci budou úlohu řešit převedením výrazu $\sin(x)$ na pravou stranu rovnosti a následně se pokusí postupovat početně, to však u takovéto rovnice není možné. Další možností je řešení graficky: rovnici si představí ve tvaru $f(x) = 0$ a pokusí se sestrojit graf funkce f. Touto cestou lze postupovat, ale je zapotřebí užití první derivace kvůli zjištění monotonie dané funkce. Rozhodně není možné přímo z předpisu stanovit, jak bude daná funkce vypadat.

Úloha 4: Zadaná funkce f je na daném intervalu spojitá a má zde spojitou první derivaci.[3] Vzhledem k tomu, že je u úlohy daná nápověda, resp. vzorec, do kterého je třeba dosadit, lze předpokládat dva problémy: 1) chybně určená první derivace, což bude mít za následek i nesprávně sestavený integrál, 2) špatné dosazení do vzorce, konkrétně záměnu výrazů $[f'(x)]^2$ a $[f^2(x)]'$.

[2] Myšleno goniometrické, logaritmické a exponencielní vzorce.

[3] Tento fakt se ověřuje během rozhovoru.

Úloha 5: Zde žáky pravděpodobně překvapí nezvyklý zápis funkce g, konkrétně funkce zadaná po částech. Pro případ, že nebudou s to si se zápisem poradit, je zde nápověda vyznačení jednotlivých částí grafu. V této úloze se mají ověřit žákovské znalosti pojmů jako definiční obor, obor hodnot, prostá funkce, spojitost funkce, existence limity a derivace v bodě v souvislosti s grafem funkce, předpisem funkce, práce s dalšími pojmy jako úplné a prstencové okolí při zdůvodňování odpovědí. U této úlohy budou v případech nejasnosti použity doplňující otázky: Co znamená, že funkce má v daném bodě limitu a co musí platit, abychom to mohli říci s jistotou? Co znamená, že funkce je v daném bodě spojitá? Jak tyto vlastnosti souvisí s jejím grafem? Nakreslete libovolný graf funkce, která: $(*)$ není spojitá v nějakém bodě, $(**)$ nemá v nějakém bodě limitu, $(***)$ má limitu v daném bodě, ale není v něm spojitá.

Poznámka: Otázky označené $(* - ***)$ byly pokládány pouze tehdy, když žák při odpovědi nebo argumentaci udělal chybu.

Úloha 6: Protože se jedná o určitý integrál z goniometrické funkce na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$ může se stát, že žáci na základě znalosti grafu funkce $y = \sin(2x)$ na daném intervalu usoudí, že daný integrál je roven nule, protože se odečtou kladná a záporná část obsahu plochy pod grafem dané funkce, jinými slovy, eliminují druhou mocninu ve vzorci a automaticky postaví hodnotu integrálu rovnou nule. Druhá možnost je chybné dosazení, resp. záměna vztahů $\left(\int f(x)\,dx\right)^2$ a $\int f^2(x)\,dx$, případně $\int f(x^2)\,dx$. Spočtení správně sestaveného integrálu je možno provést několika způsoby (per partes, substituce, kombinace obojího), takže žáci se mohou dostat do potíží díky chybně zvoleným f' a g pro per-partes, chybně zvolené substituci, opomenutí přepočítání mezí pro substituci.

Úloha 7: Žáci se běžně setkávají se situací, kdy mají z předpisu funkce určit její graf, zde je to jiné v tom, že máme dán graf a na jeho základě mají stanovit, jak se budou chovat funkce z ní získané pomocí derivování a integrování. Úloha tedy testuje znalosti geometrické interpretace první a druhé derivace v souvislosti s grafem funkce. Problém může nastat v tom, že žáci musejí hlídat více podmínek najednou, konkrétně: zda je funkce rostoucí nebo klesající a zároveň jestli je konvexní nebo konkávní (pro funkci f'), zda je funkce rostoucí nebo klesající a zároveň kladná či záporná (pro funkci F).

Úloha 8: U této úlohy lze předpokládat nesnáze u určování limit v krajních bodech D_f, existence a druh extrémů by neměl činit žádné zvláštní potíže. Vícenásobnost kořenů rovnice může znamenat určitý problém, pokud si žáci neudělají náčrtek grafu, protože jedna z hodnot, kterých funkce nabývá právě ve dvou bodech, je v jednom případě bodem lokálního extrému, ale ve druhém už nikoliv. Vyplývá to pouze z monotonie dané funkce.

Úloha 9: Opět se jedná o úlohu ověřující znalosti pojmů: parita, omezenost funkce a znalost grafů funkcí jejich kombinací k řešení nerovnic. Ověření sudosti/lichosti funkce závisí na znalostech žáků: jak je definovaná funkce sudá a jak funkce lichá, a správném dosazení do předpisu $f(-x)$. Nezápornost dané funkce by měla být snadno odvozena na základě znalosti grafů funkcí v čitateli a jmenovateli a vlastnostem podílu dvou čísel, případně jednoduchou úpravou na rovnici $\cos(x) \geq -2$, z čehož se může zdát, že platí vždy. Otázkou ale zůstává, jestli žáci budou vnímat rozdíl mezi typy nerovností $\geq$ a $>$ v souvislosti s danou funkcí.

Úloha 10: V této úloze může být pro žáky nezvyklé, že hledaná funkce je podle zadání proměnné h, nikoliv x, jak je běžné. Tento problém lze snadno odstranit změnou označení proměnných. Jako další problém může být tvrzení, že funkce bude mít stejný tvar bez ohledu na to, jak je kužel umístěn.[4] Způsob získání předpisu dané funkce může být různý: 1) užitím integrálního počtu jako v úloze 6, což vyžaduje zjištění předpisu lineární funkce pro oba případy umístění kužele, 2) určení funkce jako rozdílu objemů kužele o výšce $H - h$ a komolého kužele o výšce h (případně obráceně). U zjišťování chování přírůstku funkce může být pro žáky nezvyklé, že získaná funkce je v proměnné h, nikoliv x, a tedy se derivuje podle jiné[5] proměnné.

5.3 Vyhodnocování testů

Celkově se testování zúčastnilo deset žáků, z nichž čtyři se účastnili výuky na gymnáziu **A**, zbylých šest navštěvovalo jiná gymnázia. Žáci, kteří se účastnili pozorované výuky, jsou označeni jako **SA1** – **SA4**, ostatní žáci jako **SJ1** – **SJ6**.

Vzhledem k malému počtu testovaných žáků je vyhodnocování převážně kvalitativní, tedy zajímal mě způsob řešení. To se týká především druhého testu.[6] První test není rozebírán tak podrobně. Předmětem je zde zkoumání toho, jestli žák úlohu vyřešil. (Případně jestli potřeboval nějakou formu pomoci.) Kvantitativní vyhodnocení má pouze informativní charakter.

Způsoby vyřešení úloh z testu I jsou označeny: S – samostatně, P – s poznámkami, N – s nápovědou, X – nevyřešil, tj. žák v průběhu řešení úlohu vzdal nebo výsledek obsahoval chybu.

Přehled způsobů řešení jednotlivých úloh z diferenciálního počtu je uveden v tabulce 5.1,

[4] Myšleno tak, že žáci to budou tvrdit, aniž by se o tom přesvědčili.

[5] To ale záleží na volbě proměnné, kterou si zvolí.

[6] U řešení jednotlivých úloh jsou uvedeni žáci, kteří zvolili tento nebo podobný postup.

úloh z integrálního počtu pak v tabulce 5.3 a přehled způsobů řešení a vyřešených/nevyřešených úloh jednotlivými žáky v tabulce 5.2. V dalším textu jsou rozebrány ty úlohy testu I, u nichž se vyskytl větší počet nesprávných řešení.

Druhý test je analyzován po jednotlivých úlohách a jejich částech. Zde je zkoumání zaměřeno na popis toho, jak žák danou úlohu uchopil, jakým způsobem ji řešil a jestli dospěl ke správnému závěru/výsledku, a pokud ne, kde se v úvaze nebo výpočtu vyskytla chyba. S ohledem na rozsah práce jsou v hlavním textu rozebrány pouze některé úlohy, u kterých bylo nejvíce potřeba, aby žáci zdůvodnili své postupy a závěry. K celkovému vyhodnocení pak byly použity všechny. Rozbor řešení žáků zbylých úloh lze nalézt v příloze, viz str. 120.

5.3.1 Test I – úlohy z diferenciálního počtu

Výsledky prvního testu ukázaly, že žáci jsou schopni většinu úloh týkajících se diferenciálního počtu vyřešit samostatně, nebo v případě potřeby s využitím poznámek, tj. vzorců pro derivace a vztahů mezi funkcemi a jejich derivacemi, pokud si je nepamatují. Ačkoli úlohy nebyly seřazeny od nejsnažší po nejobtížnější, první úlohy[7] byly skutečně méně náročné než zbylé úlohy, protože ověřovaly schopnost žáků využít vztahů pro derivaci součtu, součinu, rozdílu, podílu a složené funkce. Tyto úvodní úlohy dopadly dle očekávání dobře, resp. jejich řešení vyžadovalo nanejvýš připomenutí vzorců z poznámek. Úlohy, které následovaly, měly prověřit schopnost žáků kombinovat různé postupy a zde začalo řešení dělat žákům větší problémy.

V první řadě bylo ale nutné zjistit, jestli žáci mají představu o pojmu derivace v souvislosti s matematicky korektní definicí, viz první úloha testu I. Pozitivní zjištění je, že všichni testovaní žáci si vybavili souvislost mezi derivací a limitou.[8] První případ, derivaci v konkrétním bodě, žáci vyřešili většinou samostatně pomocí dělení mnohočlenu mnohočlenem v souladu s platnými pravidly pro počítání limit. V případě obecného bodu x_0 se také podařilo úlohu vyřešit, ale žákům bylo nutné připomenout, že v tomto případě je x_0 dané číslo a limitu počítáme pro $x \to x_0$. Zápis, ve kterém se objevily „dvě různé proměnné“, působil na dva testované žáky jako matoucí.

Překvapivě velká část žáků (4 žáci) nevyřešila správně úlohu 2e, která vyžadovala jen kombinaci linearity derivace s pravidlem pro derivování součinu. Žáci, kteří při řešení této úlohy neuspěli, se dopouštěli především té chyby, že se snažili derivovat celou zadanou funkci, což

[7] úlohy 2a – 2d

[8] tzn. žáci zapsali derivaci zadané funkce pomocí limity.

vedlo k tomu, že se ve vzniklém výrazu ztratili a výsledná derivace obsahovala chybu ve znaménku:

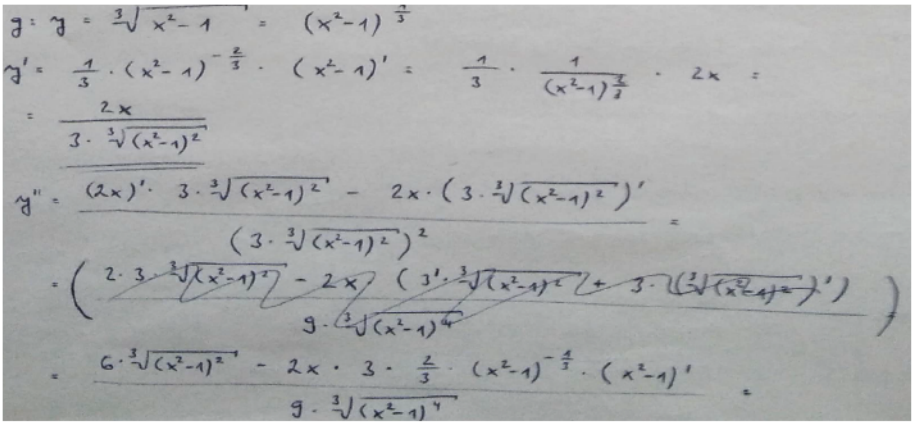
$$[x \cdot \sin(x) + \mathrm{e}^x \cdot \cos(x)]' = \sin(x) + x \cdot \cos(x) + \mathrm{e}^x \cdot (\cos(x) + \sin(x)).$$

Žáci, kteří si úlohu rozdělili na části, se chybám vyhnuli. Nejprve zvlášť derivovali součiny funkcí a teprve poté výsledky sečetli. V tomto případě bylo výhodnější využít strategii rozdělení úlohy na části, ty řešit samostatně a potom teprve formulovat výsledek. V případě, že žáci museli řešit více změn znamének a funkcí zároveň, se vyskytly chyby, kterým bylo rozdělením úlohy možné předejít. Obdobná chyba se vyskytla i u úlohy 2h), kde žáci pro změnu zapomínali, že při derivaci složené funkce je celá vnitřní funkce násobena derivací funkce vnější:

$$\text{Chybně: } \left[\ln\left(\sin(x) + \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^4}\right)\right]' = \frac{1}{\sin(x) + \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^4}} \cdot [\sin(x)]' + \left[\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^4}\right]' = \dots$$

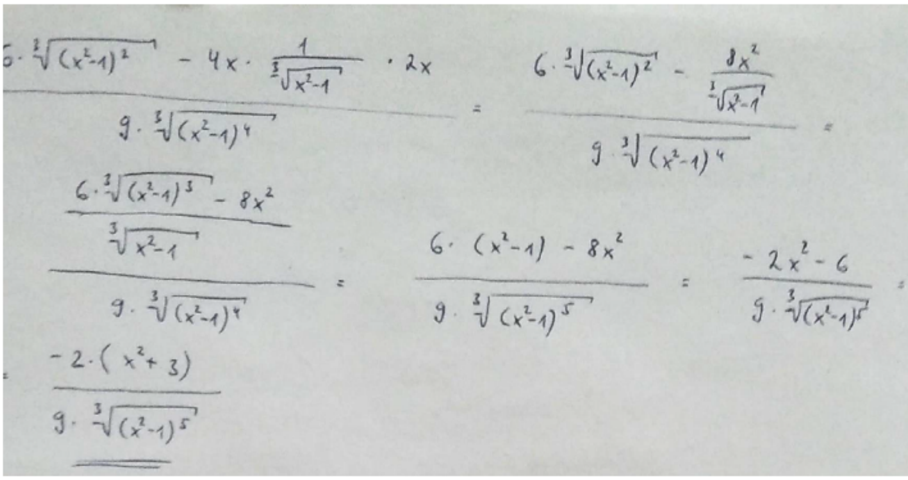
$$\text{Správně: } \left[\ln\left(\sin(x) + \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^4}\right)\right]' = \frac{1}{\sin(x) + \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^4}} \cdot \left([\sin(x)]' + \left[\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^4}\right]'\right) = \dots$$

Poslední výrazný výskyt chyb se objevil u úlohy 3b2, kde měli žáci za úkol určit druhou derivaci funkce $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$. Zatímco první derivaci všichni žáci vyřešili prakticky bez obtíží, u druhé derivace se potíže vyskytly. U této úlohy žáci volili strategii rozdělení úlohy na součin, resp.[9] podíl funkcí. Přes použití tohoto postupu se však druhou derivaci některým žákům nepodařilo určit správně. Konkrétním problémem byly chyby při úpravách výrazů, které následně vedly k nesprávnému výsledku (viz obrázky 1 a 2).



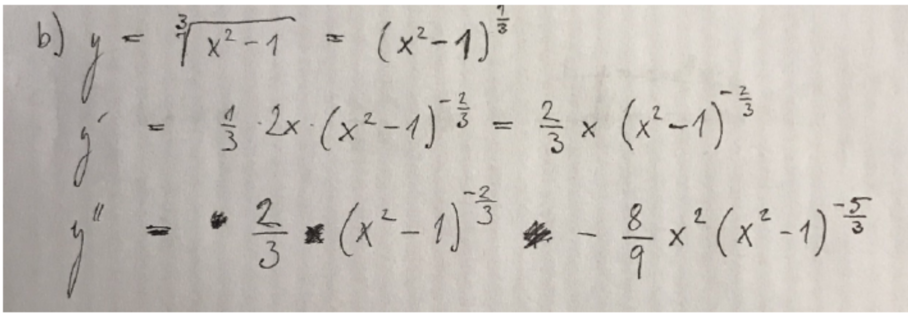
Obrázek 1: Řešení úlohy 3b1, 3b2 (SJ5)

[9] Podle toho, v jakém tvaru byla zapsána první derivace. Buď $f'(x) = -2x \cdot (1-x^2)^{-2/3}$ nebo $f'(x) = = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$.



Obrázek 2: Oprava řešení úlohy 3b2 (SJ5)

Poznámka: Další žáci sice určili druhou derivaci správně, ale výsledný výraz byl natolik nepřehledný, že by z výsledku nebylo možné určit např. body podezřelé z inflexe. V tomto případě se tedy nejedná o neznalost či neschopnost použít známé vztahy, ale spíš o nedostatek trpělivosti při upravování výsledků. Samotná druhá derivace sice spočtena byla, ale výsledek byl pro další postupy nepoužitelný. Nicméně pokud žáci úlohu vyřešili, ale neupravili, nebyla klasifikována jako nevyřešená.



Obrázek 3: Řešení úlohy 3b1, 3b2 (SA3)

Jako nejvýhodnější strategie řešení úloh na diferenciální počet se ukázal tento postup:

1) Určit, o jakou funkci se jedná, a na základě toho si rozmyslet, jakým způsobem bude nutné derivovat.

2) Zjistit, jestli není možné zadanou funkci upravit na jiný tvar,[10] který by se derivoval snadněji.

[10] Tento postup se ukázal jako velice užitečný v případě úloh 2c1 a 2c2, kde se zadaná funkce převedla na tvar: $f(x) = \mathrm{e}^{1-\cos^2(x)} = \mathrm{e}^{\sin^2(x)}$

3) Pokud je zadaná funkce kombinací skládání funkcí, určit, která funkce je vnitřní, která vnější a každou „podfunkci“ derivovat zvlášť.

4) Výslednou derivaci skládat z dílčích výsledků.

5) Získaný výsledek se pokusit upravit na tvar, ze kterého je možné určit nulové body $f'(x)$.

Pokud žáci neupravili získanou funkci, nebylo to klasifikováno jako chyba (viz obrázek 3).

Tabulka 5.1: Úlohy z diferenciálního počtu

Žák	1 a	1 b	2 a	2 b	2 c	2 d	2 e	2 f	2 g	2 h	2 i	2 j	3 a1	3 a2	3 b1	3 b2	3 c1	3 c2
SA 1	S	S	S	S	P	P	N	P	P	P	N	S	N	S	N	X	S	S
SA 2	S	S	S	S	S	S	X	P	P	X	P	X	S	X	S	X	S	N
SA 3	S	N	S	P	P	P	S	P	X	P	S	N	S	S	S	S	N	S
SA 4	S	S	S	S	P	P	S	S	S	N	S	S	S	S	N	X	P	X
SJ 1	S	P	S	P	S	S	X	S	P	X	P	S	S	N	S	N	N	S
SJ 2	S	S	S	S	P	P	S	P	P	X	S	P	S	P	S	S	P	S
SJ 3	P	P	S	P	S	P	X	S	S	P	P	S	P	S	S	P	P	X
SJ 4	S	P	S	P	P	S	S	S	S	N	P	S	P	S	S	N	S	P
SJ 5	S	S	S	S	S	S	X	P	N	X	S	S	S	N	P	X	P	S
SJ 6	S	P	S	P	P	S	S	X	S	P	P	S	P	P	P	N	P	P

Vyřešilo

S	9	5	10	5	4	5	4	4	4	0	4	7	6	5	6	2	3	5
N/ P	1	5	0	5	6	5	2	5	5	6	6	2	4	4	4	4	7	3
X	0	0	0	0	0	0	4	1	1	4	0	1	0	1	0	4	0	2

5.3.2 Test I – úlohy z integrálního počtu

Na rozdíl od úloh na výpočet derivace, kde je postup řešení do určité míry určen typem funkce, jsou úlohy na integrály více závislé na metodě, kterou si žák pro její řešení zvolí. Na správné volbě mnohdy závisí úspěšnost řešení. I když je v těchto úlohách někdy možné se více způsoby dostat ke správnému výsledku, u jiných volba nesprávné metody vede k neúspěšnému řešení. Některé úlohy vyžadují i určitý „trik“, bez jehož použití není možné úlohu vyřešit.

Úlohy opět nebyly seřazeny podle obtížnosti, ale úvodní úlohy měly prověřit schopnost žáků integrovat elementární funkce pomocí známých metod. Tato část nečinila žádné výrazné potíže, protože žáci měli možnost využít poznámky.[11] Největší potíže se objevily v případě, že bylo pro neurčitý integrál potřeba použít substituční metodu, konkrétně u úloh 4j a 4k. Tyto úlohy buď žáci nevyřešili vůbec, nebo se v průběhu řešení vyskytla chyba při použití substituce:

$$\textbf{SJ4}\ \text{Chybně}: \qquad \int x\cdot\sqrt{1+x}\;dx;\ \left|\begin{array}{ccc} x+1 & = & y \\ dx & = & dy \end{array}\right| \rightarrow \int x\cdot\sqrt{1+x}\;dx = \int \sqrt{y}\;dy$$

$$\textbf{SJ2}\ \text{Správně}: \qquad \int x\cdot\sqrt{1+x}\;dx;\ \left|\begin{array}{ccc} x+1 & = & y \\ dx & = & dy \\ x & = & y-1 \end{array}\right| \rightarrow \int x\cdot\sqrt{1+x}\;dx = \int (y-1)\sqrt{y}\;dy =$$

$$= \int y^{\frac{3}{2}}\;dy - \int \sqrt{y}\;dy$$

$$\textbf{SA2}\ \text{Správně}: \qquad \int x\cdot\sqrt{1+x}\;dx;\ \left|\begin{array}{ccc} \sqrt{x+1} & = & y \\ x+1 & = & y^2 \\ x & = & y^2-1 \\ dx & = & 2y\;dy \end{array}\right| \rightarrow \int x\cdot\sqrt{1+x}\;dx = \int (y^2-1)\cdot y\;dy =$$

$$= \int y^3\;dy - \int y\;dy$$

Poznámka: Postup, který zvolil žák (SA2), byl ojedinělý. Většina žáků využívala substituční metodu tím způsobem, že se nahradily lineární členy funkcí, čímž bylo možné úlohy vyřešit, pokud ji použili správně. Oproti tomu substituování „celé“ odmocniny a její použití jako nové integrační proměnné se vyskytlo pouze jednou.

Celkově žáci využívali substituční metodu buď tak, že nahradili lineární člen funkce, např. u úlohy 4g, a zadanou funkci upravili vynásobením vhodnou konstantou, nebo vybrali jen urči-

[11] Pokud by možnost poznámek nebyla, výsledky by byly pravděpodobně výrazně horší, především proto, že některé primitinví funkce si žáci museli vyhledat.

tou část zadané funkce a zbytek byl derivací výběru, např. 4b a 4d. Mezi užité metody úprav zadaných integrálů patří vynásobení zadané funkce „vhodnou jedničkou“ nebo vytknutí vhodné konstanty před integrál. Toho žáci při řešení úloh vedoucích k substituční metodě využívali. Jejich cílem bylo pomocí těchto úprav získat vztah $C \cdot \int g'(x) \cdot f(g(x))\ dx$ s odůvodněním, že: „V takovém tvaru je možné najít primitivní funkci snadno, protože se pouze dosadí do známých vztahů a pak stačí výsledek vynásobit tím, co jsme vytkli.“

Další úloha, kterou více žáků nevyřešilo, byla úloha 4h. Zde se jako problematická ukázala úprava integrandu. Žáci, kteří nejprve zkoušeli zadanou funkci upravit na tvar, který by se dal snadněji integrovat, skončili většinou ve chvíli, kdy pomocí vzorce $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ došli pomocí umocnění k rovnosti $\sin^4(x) = 1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)$, a tedy se nezbavili čtvrté mocniny goniometrické funkce. Zmínění žáci úlohu v tuto chvíli buď vzdali (SA1, SA2 a SJ1), nebo se pokusili o její vyřešení pomocí jiné metody, konkrétně per partes. Žáci, kteří úlohu vyřešili, použili metodu per partes rovnou, případně využili jiný substituční vztah,[12] který jim umožnil zbavit se čtvrté mocniny, a získanou funkci následně integrovali bez obtíží.

Poslední úlohou na hledání primitivní funkce, kterou více žáků nevyřešilo, byla úloha 4l. Zde se při řešení žáci rozdělili na dvě skupiny. (1) Zadanou funkci žáci upravili na tvar $e^{2x} \cdot \sin(2x)$ a následně použili substituci, resp. metodu per partes. Tato volba vedla ve všech případech ke správnému řešení. Skupina (2) se pokusila úlohu řešit metodou per partes avšak pro tři funkce. To vedlo k tomu, že v průběhu výpočtu získali stále méně přehledné funkce a nepodařilo se jim získat správný výsledek.

Poznámka: Nezvyklý postup byl použit žákem (SJ5) při řešení úlohy 4l. Po úpravě integrandu na tvar $e^{2x}\sin(x)\cos(x) = e^{2x} \cdot \sin(2x)$ a po substituci $\frac{1}{2} \cdot e^y \cdot \sin(y)$ žák výsledek „uhodl“, resp. hledal výsledek ve tvaru $F(y) = e^y \cdot (A \cdot \sin(y) + B \cdot \cos(y))$, kde A a B byla neznámá čísla.

Žák svůj postup zdůvodnil tak, že funkce e^x je při integrování i derivování stejná a funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ při integrování různě střídají znaménka, ale nikdy nejsou nic jiného. Z toho důvodu musí být v takovém tvaru také výsledek. Užitím derivace součinu funkcí převedl úlohu na rovnost dvou funkcí

$$e^y \cdot \sin(y) = e^y \cdot [A \cdot \sin(y) + B \cdot \cos(y) + A \cdot \cos(y) - B \cdot] \sin(y)],$$

což jej přivedlo k řešení soustavy rovnic $A - B = 0 \wedge A + B = 1$, jejíž řešení nedělalo žákovi žádné problémy. Tímto způsobem žák obešel opakované užití metody per partes a došel ke správnému

[12] $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

závěru, že hledaná primitivní funkce je ve tvaru:

$$\int e^{2x} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{x} \cdot [\sin(2x) - \cos(2x)] + C.$$

Obecně se žákům osvědčilo nejprve upravit integrand (pokud to bylo možné) a teprve následně se rozmýšlet nad vhodnou metodou integrování.

Tabulka 5.2: Přehled způsobů řešení jednotlivých žáků

	Dif. počet			**Int. počet**			$\sum$		
Žák	**S**	**N/ P**	**X**	**S**	**N/ P**	**X**	**S**	**N/ P**	**X**
SA1	8	9	1	6	8	4	14	17	5
SA2	9	4	5	8	6	4	17	10	9
SA3	9	8	1	10	8	0	19	16	1
SA4	11	5	2	10	5	3	21	10	5
SJ1	9	7	2	6	8	4	15	15	6
SJ2	10	7	1	11	5	2	21	12	3
SJ3	7	9	2	13	5	0	20	14	2
SJ4	10	8	0	6	8	4	16	16	4
SJ5	10	5	3	8	8	2	18	13	5
SJ6	6	11	1	10	4	4	16	15	5
$\sum$	89	73	18	88	65	27	177	138	45

Tabulka 5.3: Úlohy z integrálního počtu

Žák	4 a	4 b	4 c	4 d	4 e	4 f	4 g	4 h	4 i	4 j	4 k	4 l	5 a	5 b	5 c	5 d	5 e	5 f
SA 1	S	P	N	N	N	S	N	X	S	X	X	X	S	N	S	P	N	S
SA 2	S	P	N	S	P	X	P	X	S	S	P	X	S	P	S	S	X	S
SA 3	S	S	P	N	N	S	S	N	S	S	S	N	S	S	N	S	N	N
SA 4	S	S	P	S	P	S	S	X	S	X	X	N	S	S	S	P	P	S
SJ 1	S	P	N	S	N	P	P	X	P	S	X	X	S	P	S	P	X	S
SJ 2	S	S	N	S	N	X	S	N	S	N	S	N	S	S	S	X	S	S
SJ 3	S	S	S	S	P	S	P	S	S	N	S	S	S	S	S	N	N	S
SJ 4	S	S	P	S	S	P	P	P	N	X	N	X	S	P	S	P	X	X
SJ 5	S	P	S	P	P	S	P	X	N	X	S	S	S	S	S	N	N	P
SJ 6	S	S	N	S	N	S	X	P	S	X	X	N	S	S	S	S	X	S

Vyřešilo

S	10	6	2	7	1	6	3	1	7	3	4	2	10	6	9	3	1	7
N/ P	0	4	8	3	9	2	6	4	3	2	2	4	0	4	1	6	5	2
X	0	0	0	0	0	**2**	**1**	**5**	0	**5**	**4**	**4**	0	0	0	**1**	**4**	**1**

5.3.3 Test II – postupy žáků

Úloha 1. Je dána funkce f, pro kterou platí: 1) je spojitá na $\mathbb{R}$, 2) má na $\mathbb{R}$ spojitou první derivaci f', 3) k f existuje na $\mathbb{R}$ primitivní funkce F. Potvrďte, nebo vyvraťte platnost následujících tvrzení:

(1) Je–li f sudá, je f' vždy lichá.

(2) Je–li f sudá, je F vždy lichá.

(3) Je–li f lichá, je f' vždy sudá.

(4) Je–li f lichá, je F vždy sudá.

U této úlohy se žáci snažili odvodit závěry převážně na základě konkrétních příkladů. Předpisy funkcí, které se častěji vyskytovaly, byly následující: sudé funkce: $y = \text{konst.}$, $y = x^2$, $y = \cos(x)$, liché funkce: $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin(x)$, $y = \tan(x)$ a jejich kombinace pomocí operací $(+,\ -,\ \cdot,\ :)$. Na základě volby daných funkcí žáci zjistili, že derivace sudé funkce je skutečně funkce lichá a derivací funkce liché je funkce sudá, resp. nenašli konkrétní protipříklad.

Závěr byl takový, že tvrzení v konkrétních případech platí. Většina žáků nebyla schopna tvrzení dokázat pro obecný případ, ale pouze na základě ověření platnosti tvrzení u konkrétně zvolených funkcí. Pouze dva žáci (SJ2 a SJ3) se pokusili odvodit obecnou platnost na základě rovností derivací funkcí $f(x)$ a $f(-x)$ při použití derivace složené funkce nebo na základě toho, že derivace je směrnice tečny ke grafu funkce: „Pokud je f sudá a uděláme tečnu v bodě x_0, pak tečna v bodě $-x_0$ je osově souměrná podle osy y stejně jako celý graf funkce, a má tedy opačnou směrnici.“ (SJ3)

Na druhou stranu, volbou konkrétních případů funkcí žáci snadno vyvrátili tvrzení (b), např. volbou $f(x) = x^2$, jejíž primitivní funkcí je $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$, a ze znalosti grafu funkce $y = x^3$ odvodili, že k funkci $f(x) = x^2$, která je sudá, je její primitivní funkce lichá pouze tehdy, pokud je integrační konstanta C rovna nule.

Úloha 3. Je dána rovnice:

$$A \cdot x - \sin(x) = 0,$$

kde $x \in \mathbb{R}$ a $A \in \langle 0; +\infty)$ je reálný parametr.

Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí/neplatí následující tvrzení:

(a) Pro $A > 1$ má rovnice jediné řešení $x = 0$.

(b) Pro $A \in \langle 0; 1)$ má rovnice alespoň tři řešení.

Zadaná rovnice byla upravena na tvar $Ax = \sin(x)$ a žáci dosazením ověřili, že $x_0 = 0$ je vždy kořenem rovnice.

(a) Ukažte, že pro $A \geq 1$ má rovnice jediné řešení. (b) Ukažte, že pro $A \in \langle 0; 1)$ má rovnice alespoň tři řešení.

Žáci při řešení sestrojovali grafy[13] funkcí $f(x) = Ax$ a $g(x) = \sin(x)$ a hledali průsečíky obou grafů. Pomocí těchto náčrtků zjistili, že tvrzení (a) platí pro „dost velké“ hodnoty parametru A, protože přímka, která byla grafem funkce f, se protla s grafem funkce g skutečně pouze v počátku soustavy souřadnic. Jako problém se ukázalo rozhodnout a zdůvodnit, jestli tvrzení platí pro A „blízko jedné“ a jestli hodnota $A = 1$ je skutečně hraniční. Při zdůvodňování se užily tyto postupy:

- Pomocí tečny (SA1, SA4, SJ4, SJ5)

  (a) Protože grafy obou funkcí procházejí počátkem soustavy souřadnic a grafem funkce f je přímka se směrnicí A, rozhodli se žáci porovnávat směrnici této přímky se směrnicí tečny ke grafu funkce $y = \sin(x)$ v bodě 0. Směrnice tečny je hodnota první derivace funkce v daném bodě, tj. $\sin'(x_0)|_{x_0=0} = \cos(0) = 1$. Tím žáci došli k závěru, že pro $A = 1$ se jedná o tečnu ke grafu funkce a tečna má s grafem funkce jediný společný bod, a tedy má rovnice jediný kořen.
  Zároveň pro $A > 1$ je směrnice přímky větší než směrnice tečny a z grafu bylo patrné, že pokud je jediný kořen pro $A = 1$, pak se jejich počet nemění i pro $A > 1$.

  Poznámka: Zde byli žáci upozorněni na to, že v tomto konkrétním případě mají pravdu, ale pokud by sestrojili tečnu ke grafu funkce sinus v jiném bodě než pro $x \in \{k\pi\};\ k \in \mathbb{Z}$, měla by tečna s grafem funkce ještě další společný bod. Dále žáci vycházeli z toho, že mají pravdu, ale nepodařilo se jim vymyslet důvod, proč pro $A = 1$ má tečna právě jeden společný bod.

- Rozborem vlastností celé funkce.[14] (SA2, SA3, SJ2, SJ1, SJ3, SJ6)

  V tomto případě žáci řešili rovnici $h(x) = Ax - \sin(x) = 0$, přičemž věděli, že $h(0) = 0$. Snahou bylo sestrojit graf zadané funkce h. Postup byl stejný jako v případě vyšetřování průběhu funkce: žáci stanovili první derivaci funkce: $h'(x) = A - \cos(x)$ a řešili, kdy

[13] Některé grafy byly pouze načrtnuty, ale ve dvou případech (SJ1 a SJ3) byly sestrojovány „přesně“ pomocí pravítka a šablony na grafy funkcí.

[14] tj. funkce $h(x) = Ax - \sin(x)$.

je tato funkce rovna nule (řešilo se setrojením grafu funkce $y = -\cos(x)$ posunutým o konstantu A). To žáky přivedlo k poznatku, že pro $A \geq 1$ je graf derivace funkce celý nad osou x (nebo se osy pouze dotýká). To vedlo k závěru, že daná funkce je pro tyto hodnoty parametru A rostoucí (neklesající). Pro $A > 1$ je funkce rostoucí a zároveň je $h(0) = 0$, z toho žáci vyvodili, že pro tyto hodnoty parametru A nemá rovnice více než jedno řešení. V případě $A = 1$ bylo rozhodnuto zjištěním funkční hodnoty v bodech, kde funkce h může nabývat extrému, tj. $x \in \{2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Protože se graf derivace funkce pouze dotýkal osy x a pro každou hodnoty různé od $2k\pi$ byl nad osou x, žáci rozhodli, že se nejedná o bod extrému a funkce je rostoucí i pro hodnotu $A = 1$. Derivace sice nabývá hodnoty nula, ale pouze v jednotlivých bodech a všude mimo tyto body je kladná, a proto funkce musí nutně růst.

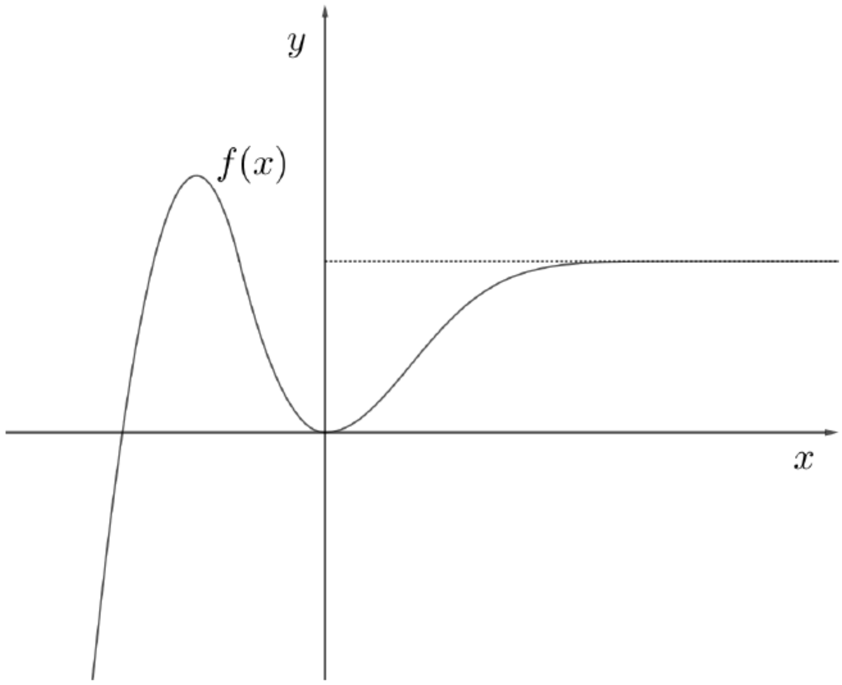
(b) Na základě předchozího případu žáci určili, že pro $0 \leq A < 1$ bude mít přímka $y = Ax$ s grafem funkce $\sin(x)$ společný alespoň jeden další bod. „Když je to tečna pro $A = 1$, tak pro $A < 1$, musíme získat sečnu grafu. Ta se s grafem sinu musí protnout alespoň v jednom dalším bodě.“ (SJ2)

Zdůvodnění, proč musejí existovat alespoň tři kořeny, bylo různé, ale se stejnou myšlenkou, opírající se o paritu dané funkce:

- „Funkce f i g jsou liché, takže mají grafy symetrické přes nulu, takže pokud se protínají i pro hodnotu $x_0 \neq 0$, musejí se protínat i pro hodnotu $-x_0$ a už jsme ověřovali, že nula je kořenem vždy. Pokud je tedy $A < 1$, dostaneme vždy kořen nula a $\pm x_0$, a pokud bude A hodně malé, bude těch kořenů ještě víc.“ (SJ1)
- „Funkce $y = \sin(x)$ je lichá, funkce $y = A \cdot x$ je pro dané hodnoty A vždy lichá, kromě $A = 0$, tam splývá s osou x. Rozdíl lichých funkcí je zase funkce lichá.“(SA2)

Úloha 7. Na obrázku je znázorněn graf reálné funkce f. Na základě grafu rozhodněte, *jak se budou chovat* grafy funkcí $y_1 = f'(x)$ a $y_2 = F(x) := \int f(x)\,dx$. (tj. určete, kde jsou tyto funkce rostoucí, resp. klesající, konvexní, resp. konkávní, zda mají maximum a minimum apod.).

Poznámka: Grafy funkcí f i F si zkuste načrtnout a u grafu F volte $F(0) = 0$.



U této úlohy bylo úkolem žáků určit vlastnosti a načrtnout grafy funkcí f' a F, pokud znali graf funkce f.

Poznámka: Byla připojena také informace, že f' je definovaná a spojitá pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Na základě uvedeného grafu žáci rozhodli, že rovnice $f'(x) = 0$ má dvě řešení, konkrétně $x_1 < 0$ a $x_2 = 0$. Konkrétní hodnota x_1 se u jednotlivých žáků lišila, protože zadaný graf neobsahoval číselné údaje.

Žáci tento fakt zdůvodnili tím, že graf funkce nabývá maxima pro $x = x_1$ a pro $x_2 = 0$ minima, a proto je v těchto bodech první derivace rovna nule. Tím žáci získali průsečíky grafu funkce f' s osou x, resp. osou y, protože $f'(0) = 0$. Nulové body funkce f' a jejich počet vyřešili správně všichni žáci.

Dalším krokem bylo rozhodnout, ve kterých intervalech bude graf funkce f' nad a ve kterých pod osou x, kdy žáci vycházeli z doplňující podmínky o spojitosti funkce f'. Ke správnému řešení žáci použili vztah mezi monotonií funkce a znaménkem derivace: „Pro záporné hodnoty až do x_1 a pak pro všechny kladné hodnoty funkce roste, takže derivace bude nad osou x. V intervalu od x_1 do $x_2 = 0$ bude graf f' pod osou x.“ (SA1) Tuto část vyřešili všichni žáci správně, vyjma (SA3), který tuto úlohu dále neřešil.[15]

Poznámka: Pokud žák nevěděl, jak úlohu řešit, byla položena jedna z návodých otázek: „Když určujete extrém funkce, jak k tomu používáte derivaci? Jak můžete využít derivaci, abyste

[15] Ani s návodnými otázkami nedokázal další části vyřešit.

zjistil/a, jestli je funkce rostoucí nebo klesající?“, což žáka přivedlo na správné řešení, případně: „Vezměte si nějakou funkci, která je rostoucí, resp. klesající, a určete, jaké vlastnosti bude mít její derivace?“ V těchto případech žáci nejčastěji užívali lineární funkce a funkci $y = x^2$.

Posledním úkolem bylo určit monotonii funkce f'. K tomu žáci využili konvexnost, resp. konkávnost grafu původní funkce následujícím způsobem: „Pokud je původní funkce na nějakém intervalu konvexní, tak její derivace musí na tomto intervalu růst, protože vlastně uvažujeme derivaci jako novou funkci a druhá derivace bude derivace té, kterou hledáme. Funkce je konvexní, pokud je její druhá derivace kladná, a protože je druhá derivace derivací té první, tak první derivace je rostoucí. Když bude konkávní, bude klesající.“ (SJ1)

Konvexnost a konkávnost původní funkce správně vyřešilo pět žáků.[16] Ostatní se dopustili chyb, konkrétně záměny znaménka druhé derivace při interpretaci konvexnosti/konkávnosti.

Pouze žáci (SJ1 a SJ6) správně určili, že $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Jejich zdůvodnění bylo opřeno o užití tečny ke grafu funkce: „Z původního grafu je vidět, že pro $x \to +\infty$ se funkční hodnota blíží nějakému kladnému číslu. Když budeme brát derivaci jako směrnici tečny, bude muset být rovnoběžná s osou x, a proto bude derivace v nekonečnu nulová. O limitě děrivace v minus nekonečnu nelze nic říct s určitostí.“ (SJ6). Zbylí žáci tento fakt nezohlednili.

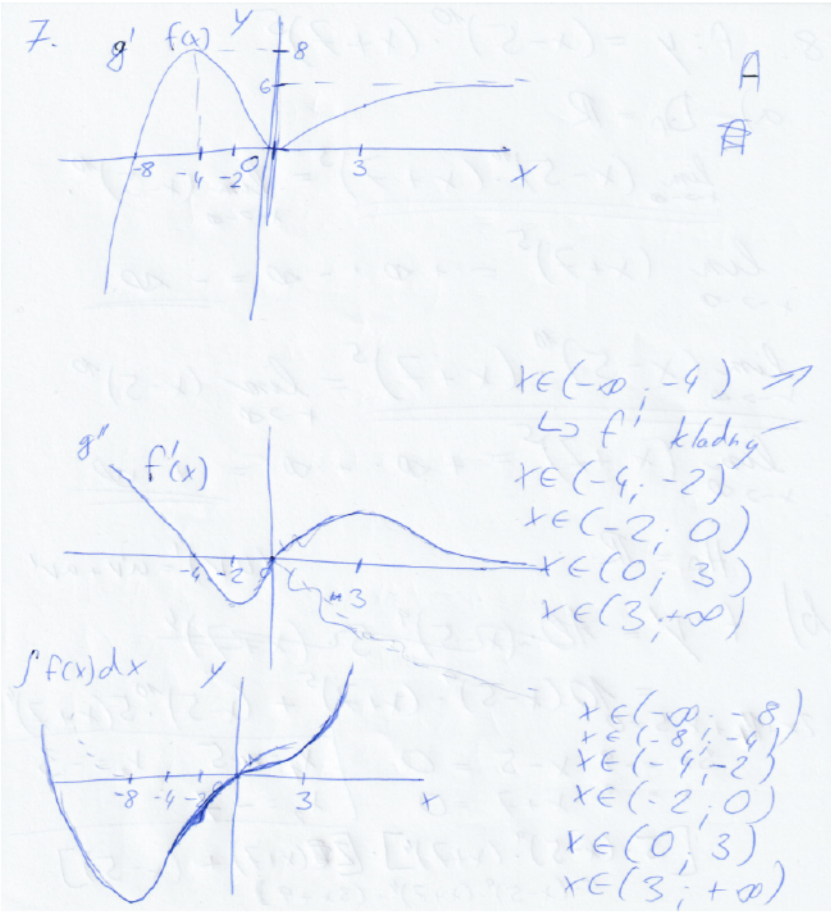
Vyšetření chování funkce f' bylo nezbytné pro správné vyřešení druhé části, vyšetřit chování funkce F. Kromě žáka (SA3) byl postup řešení takový, že žáci „spojili“ získané informace o funkci f a f' tak, že z vlastností funkce f určovali monotonii a extrémy a z funkce f' potom konvexnost, resp. konkávnost funkce F.

Poznámka: Někteří žáci[17] zvolili vlastní přeznačení funkcí, např. $g(x) = F(x)$, $g'(x) = f(x)$ a $g''(x) = f'(x)$. Jejich zdůvodnění bylo takové, že: „S novým označením je jasnější, jaké vlastnosti mají z grafů určovat.“ (SA1)

Následný postup vypadal tak, že si žáci rozdělili $\mathbb{R}$ na jednotlivé intervaly a spojením vlastností f a f' určovali vlastnosti funkce F, např. „Na intervalu $(-\infty; -8)$ je f záporná a f' kladná. Funkce F zde tedy bude klesající a konvexní…“ (SJ6). Celkově tuto úlohu zcela správně vyřešili čtyři žáci (SA1, SA3, SJ4 a SJ6). Ostatní žáci se dopustili určitých chyb v interpretaci první a druhé derivace a jejich významu pro vlastnosti grafu funkce F. Náčrtky grafů funkcí F a f' jsou na obrázcích 4 a 5.

[16] SA1, SA2, SJ1, SJ4 a SJ6

[17] SA1, SJ5 a SJ6



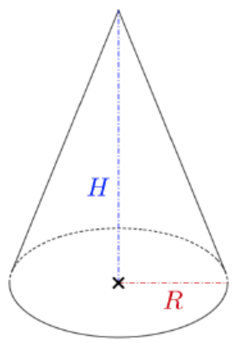
Obrázek 4: Nákresy grafů f' a F z testu II úloha 7 (SJ6)

Úloha 10. Máme kužel s daným poloměrem podstavy $R > 0$ a danou výškou $H > 0$. Tento kužel je napouštěn vodou. Určete předpis funkce udávající závislost objemu V napuštěné vody na výšce h „vodního sloupce“ v případě, že:

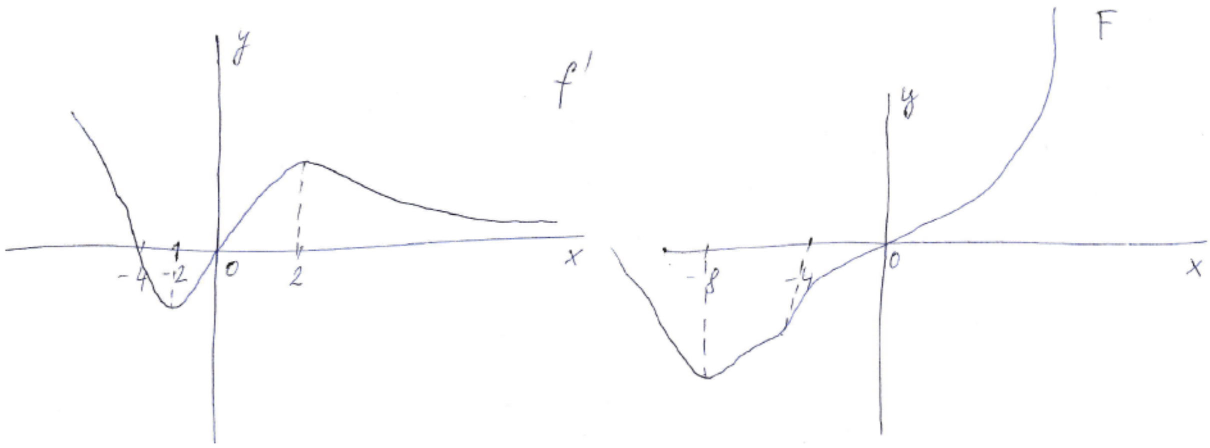
(1) Napouštěný kužel stojí na kruhové podstavě.

(2) Napouštěný kužel stojí „na špičce“.

(3) V případech (a) i (b) určete, *jak se bude chovat* první derivace, resp. přírůstek této funkce.



U této úlohy měli žáci možnost postupovat buď pomocí integrálního počtu (určit objem rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce f kolem osy x), nebo pomocí vztahů pro objem kužele



Obrázek 5: Nákresy grafů f' a F z testu II úloha 7 (SA1)

a kuželové úseče. Druhý způsob si vybralo 6 z 10 žáků a využili při něm (1) podobnost trojúhelníků, (2) vzorce známé ze stereometrie (viz obrázek 6 a 7). Při řešení prvním způsobem žáci využili uvedenou nápovědu (vzorec uvedený v zadání). Problém, se kterým se žáci u tohoto postupu potýkali, spočíval v sestavení předpisu lineární funkce tak, aby splňovala dané podmínky kužele v případě, že „stojí na podstavě“ a bylo nutné, aby graf lineární funkce procházel body $[0; R]$ a $[H; 0]$. V tomto případě postupovali tak, že určili rovnici přímky procházející danými body a následně z rovnice přímky vyjádřili proměnnou y pomocí x. Případ, kdy napuštěný kužel „stojí na špičce“, byl pro žáky jednodušší, protože graf funkce procházel počátkem, a stačilo tedy jen určit konstantu k tak, aby graf funkce $f : y = k \cdot x$ procházel požadovaným bodem $[H; R]$. Po sestavení správných předpisů funkcí (pro oba případy) se žáci pokusili sestavit integrál podle uvedeného vzorce: $V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{R}{H}x\right)^2 \, dx$ a $V = \pi \cdot \int_0^h \left(-\frac{R}{H}x + R\right)^2 \, dx$,kde $y \in (0; H)$.

První z uvedených integrálů žáci počítali „přímo“:

$$\pi \cdot \int_0^h \left(\frac{R}{H}x\right)^2 \, dx = \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot \int_0^h x^2 = \frac{\pi R^2 h^3}{3H^2}$$

Druhý z integrálů řešili dva žáci nejprve úpravou integrandu podle vzorce a následně rozdělením na součet tří integrálů:

$$\pi \cdot \int_0^h \left(-\frac{R}{H}x + R\right)^2 \, dx = \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot \int_0^h x^2 \, dx - 2 \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{H} \cdot \int_0^h x \, dx + \pi \cdot R^2 \cdot \int_0^h 1 \, dx,$$

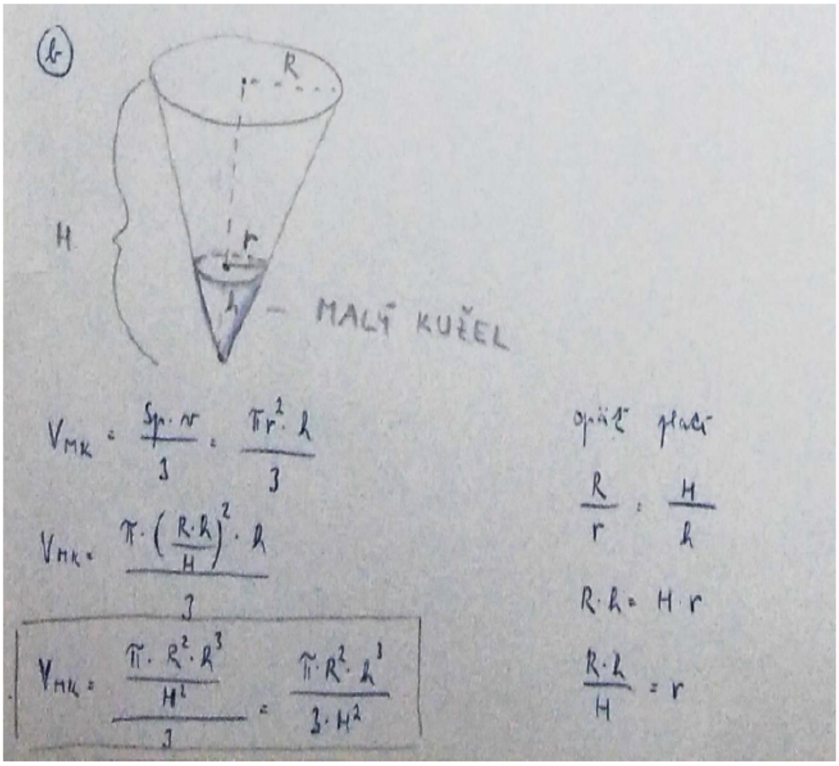
čímž po úpravě došli k výsledku $V = \pi \cdot R^2 \cdot \left(\frac{h^3}{3H^2}\right)$.

Druhý integrál žáci řešili substituční metodou, jejímž použitím se také dobrali správného výsledku. Pouze jim trvalo delší dobu, než výslednou funkci upravili:

$$\pi \cdot \int_0^h \left(-\frac{R}{H}x + R\right)^2 \, dx = -\pi \cdot \frac{H}{R} \cdot \int_R^{\frac{R}{H}(H-h)} y^2 \, dy = \ldots$$

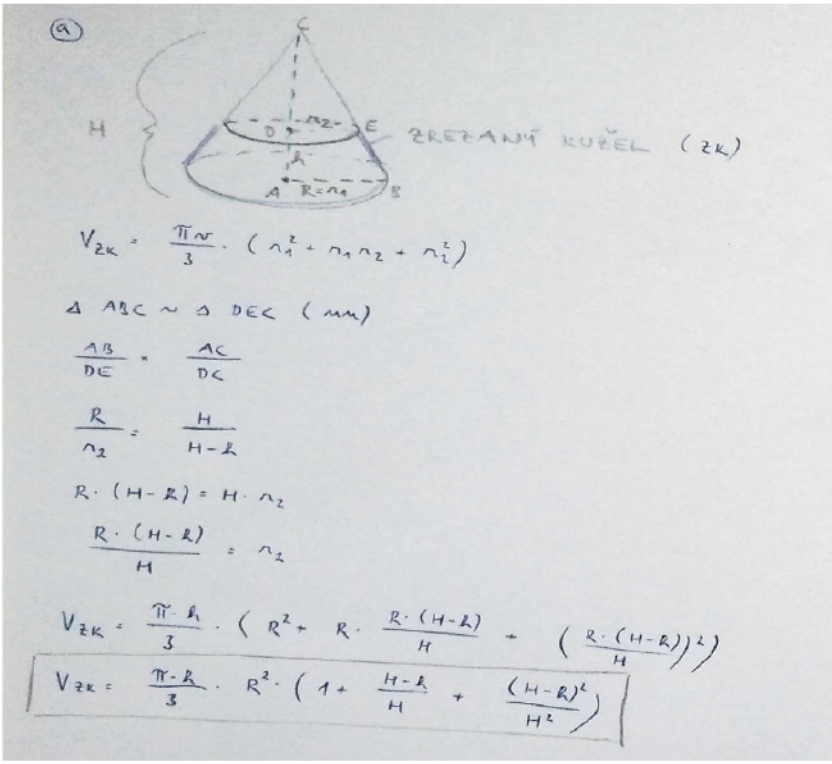
Podúlohu (c), zabývající se přírůstkem daných funkcí žáci řešili pomocí derivací získaných funkcí nebo odhadem. Všichni určili (někteří[18] nejprve i bez užití derivace), že funkce udávající objem v závislosti na výšce bude rostoucí. Argumentovali tím, že: „Se zvětšující se výškou není možné, aby objem kužele klesal, ať je postaven jakkoli.“(SJ5)

Dalším argumentem pro rozdílné případy chování přírůstku bylo, že „Když kužel stojí na špičce, přičítáme stále větší „pásy“, a tedy přírůstek roste.“(SJ2) Stejným způsobem žáci zdůvodnili i to, že při opačném umístění kužele přírůstek klesá. Když byli žáci dotázáni, jak by své tvrzení dokázali, odpověděli, že pomocí první derivace by ověřili, že funkce je rostoucí, a následně pomocí druhé derivace by určili, jestli první roste, nebo klesá. Takové ověření chování přírůstku funkce bylo provedeno žáky SA1, SA3, SJ3, SJ4 a SJ5.



Obrázek 6: Řešení úlohy 10b (SJ5)

[18] SA4 a SJ5



Obrázek 7: Řešení úlohy 10a (SJ5)

5.3.4 Shrnutí výsledků Testu II

V tomto testu bylo nutné, aby si žáci u některých úloh sami vhodně zvolili způsob řešení, tj. aby si zvolili metodu a správně ji použili. Je nutné zmínit, že téměř všichni testovaní žáci se pokusili vyřešit všechny zadané úlohy i příslušné podúlohy a ve většině případů se to nakonec podařilo. Rozdíl byl pouze v tom, že některé žáky bylo více třeba „navést“ na možnou cestu k řešení.

Test ukázal, že žákům dělají větší potíže úlohy, které vyžadují využití teorie (úlohy 1 a 3). Úlohu 1 žáci vyřešili, avšak jen málo z nich dokázalo odvodit obecný závěr. Většinou stanovili závěr na základě konkrétně zvolených případů a jen malá část žáků dokázala formulovat a zdůvodnit, proč tvrzení platí/neplatí pouze na základě vlastností dané funkce. Podobně i úloha 3a, kde žáci v některých případech vycházeli z mylné představy, že tečna má s grafem vždy pouze jeden společný bod. Když byli seznámeni s platností tvrzení v úloze 3a, podúlohu 3b) pak vyřešili i zdůvodnili bez obtíží. Pokud zvolili druhý způsob řešení (vyšetření průběhu), dobrali se řešení obou úloh bez obtíží.

Další rozdíl, který z testu vyplynul, byl rozdíl v uchopení a řešení „podobných“ úloh 1 a 9. Zatímco v úloze 9 byla funkce zadána konkrétním předpisem a s řešením si žáci ve větší míře poradili, u úlohy 1 byly uvedeny pouze vlastnosti funkce f a žáci se neměli o co opřít. Z toho důvodu vyvodili správné závěry volbou konkrétních funkcí, ale jen malá část žáků dokázala argumentovat pouze na základě vlastnosti dané funkce.

Úlohy 2, 4 a 6, které byly zaměřeny na aplikaci integrálního počtu, nečinily žádné problémy. Pouze u úlohy 2 se vyskytly případy chybné úvahy ohledně toho, že obsah plochy „mezi“ grafy funkcí je vždy určitý integrál z rozdílu. Zde žáci správně použili určitý integrál na výpočet obsahu plochy, ale jen někteří si ověřili, jestli se na uvedeném intervalu nemění to, která funkce nabývá větší hodnoty, a jestli tedy není nutné určitý integrál rozdělit na více částí.

Úlohy 5, 8a a 9, zaměřené na použití pojmů z teorie funkcí, spojitosti a limity, žáci vyřešili zdárně. K řešení žáci často využívali grafickou interpretaci pojmů, přičemž jim pomohly náčrtky grafů (převážně u úloh 5 a 8a).

Úlohy 7, 8b a 8c, které se týkaly průběhu funkce a jeho použití, ukázaly, že žákům se lépe řešily úlohy 8b a 8c než úloha 7. Důvodem může být opět to, že v úloze 8 byla funkce přesně zadána a příslušné podúlohy mohly žáky navést na použití průběhu funkce k jejich vyřešení. U úlohy 8 sice také zadání navádělo k vyšetření průběhu funkce, ale nebyl zde žádný předpis. Žáci sice i zde použili postup pro vyšetření průběhu funkce, ale ne ve všech případech se jim podařilo správně vyvodit všechny vlastnosti funkce f potažmo F.

Úlohu 10, která měla původně zasahovat jak do integrálního tak diferenciálního počtu, byla vyřešena všemi žáky úspěšně. Někteří žáci sice obešli využití integrálu a úlohu řešili pomocí vzorců na objem kužele a komolého kužele, ale hledanou funkci našli. Zde se nabízí otázka, jak by žáci úlohu řešili, kdyby těleso mělo jiný tvar než kužel a odpadla by možnost využít poznatky ze stereometrie. Ve výsledku se různými způsoby žákům podařilo stanovit předpisy funkcí v úlohách 10a i 10b. Podúloha 10c byla všemi žáky vysvětlena správně.

KAPITOLA 6

Diskuse a závěr

Cílem práce bylo popsat způsob výuky základů matematické analýzy v konkrétním semináři, kde se tato látka probírala, a následně ověřit schopnost žáků samostatně řešit úlohy z této oblasti matematiky formou souboru didaktických testů a jejich následného rozboru.

Pozorovaná výuka obsáhla všechna témata, která se v úvodních kurzech matematické analýzy běžně objevují. Žáci zde získali určité teoretické základy, které sice nebyly vždy „korektně“ dokázány, ale u nichž byla vždy vysvětlena podstata či možnost jejich využití při řešení úloh. Dále také měli možnost získat řadu praktických zkušeností s výpočty a řešením různých problémů během procvičovacích částí hodiny, kdy měli samostatně řešit různé úlohy. Během výuky měli žáci možnost doptávat se na doplňující otázky a aktivně se zapojit do diskuse či odvozování. Této možnosti využívali někteří žáci více, jiní méně. Převážně dobré výsledky průběžných testů, které žáci během průběhu semináře psali, ukazují na to, že žáci byli schopni znalosti skutečně použít při samostatném řešení problémů. Je tedy možné říci, že seminář splnil svůj účel.

Cílem obou testů bylo ověřit schopnosti žáků, kteří prošli výukou v semináři AaMa,[1] řešit konkrétní úlohy z diferenciálního a integrálního počtu. V kapitole 4 byly uvedeny některé příklady funkcí, s nimiž měli žáci udělat určitý početní úkon, který zavedla vyučující během výuky v pozorovaném semináři. Obdobné úlohy měli žáci řešit v prvním testu.

Výsledky prvního testu ukázaly, že úlohy, které jsou formulovány tak, že je žákům v zadání řečeno, jaký početní úkon mají se zadanou funkcí provést, jsou žáci skutečně schopni vyřešit. V některých případech sice s využitím poznámek či nápovědou, ale s těmito formami pomoci většinou úlohy zdárně vyřešili. Pokud se při řešení jednotlivých úloh vyskytly chyby, jednalo se téměř vždy o chyby numerické, tedy takové, kdy se žák během svého postupu dopustil nějaké

[1] Nebo absolvovali obdobnou výukou na jiném gymnáziu.

nepřesnosti (zapomněl zapsat závorku, nezměnil znaména z + na − apod.). Chyby toho druhu, že žák nevěděl, co má s danou úlohou dělat, se vyskytly pouze ojediněle, a to u úlohy 4h a 4j a 4l z integrálního počtu, u kterých se někteří žáci ani nepokusili o řešení, případně jej vzdali po prvních krocích.

V prvním testu dopadly lépe úlohy z diferenciálního než z integrálního počtu. Je to možné vysvětlit tím, že určení derivace kteréhokoliv stupně z jakékoliv elementární funkce, je procedurální úloha. Pokud k tomu připočteme ještě možnost využít poznámky, resp. nápovědu, pak by pro žáky nemělo být takřka žádné zadání neřešitelné. To platí za předpokladu, že si během výpočtu ohlídají správnost všech provedených kroků. Oproti tomu úlohy na výpočet integrálu, ať určitého nebo neurčitého, v některých případech vyžadují určitý „trik“ nebo vhodné upravení zadané funkce, bez čehož někdy není možné udělat ani první krok výpočtu. Rozdíl v počtu nevyřešených úloh v případě diferenciálního a integrálního počtu však vzhledem k celkovému počtu úloh není výrazný, jak je uvedeno v tabulce 5.2.

Druhý test ukázal, že žáci jsou schopni získané poznatky aplikovat i na úlohy, kde není přímo specifikováno, jakou metodu by měli použít. Dokáží si sestavit určitý integrál na základě toho, co je jejich úkolem zjistit, propojit vlastnosti funkce s její derivací a v některých případech korektně zdůvodnit své závěry. Jako nejvíce problematické se zde ukázaly úlohy 1 a 3. V těchto úlohách, které jsou buď „příliš obecné“ (úloha 1), nebo se jedná o zadání, které se ve výuce běžně nevyskytuje (úloha 3), měli žáci největší problém zdůvodnit, proč určité tvrzení platí/neplatí právě za daných podmínek. Úlohu 3 sice nakonec vyřešili všichni žáci, ale bylo třeba je hodně navést, jakým způsobem se k řešení mohou dostat. U úlohy 1 jen málo žáků dokázalo zdůvodnit svůj závěr pro obecný tvar funkce a nikoliv volbou konkrétních funkcí. Zbylé úlohy pak žáci vyřešili většinou zdárně včetně argumentace, i když s využitím poznámek.

Otázky, které se dále nabízejí, jsou: (1) Jaké by byly výsledky v případě, že by se o řešení testů pokusila jiná skupina žáků než ta, která se zúčastnila testování? (2) Jak velký rozdíl by byl v případě, že by žáci měli úlohy řešit skutečně pouze svépomocí, tj. bez poznámek a možnosti nápovědy? (3) Jaké by byly výsledky v případě, že by se testování zúčastnila výrazně větší skupina žáků? (4) Jaké by byly výsledky druhého testu, pokud by v něm byly použité jiné úlohy? Všechny tyto faktory totiž jistě měly vliv na výsledky testování.

Na základě uvedených zjištění a za daných okolností lze říci, že testovaná skupina může představovat příklad toho, že žáci jsou nejen schopni řešit úlohy z diferenciálního a integrálního počtu, přičemž praktické úlohy mají lepší výsledky než úlohy teoretické, ale v některých případech

dech také správně zdůvodnit své závěry. Středoškolská výuka matematické analýzy tedy přináší žákům řadu nových vědomostí a dovedností, z nichž mnohé jsou žáci dále schopni samostatně používat. Tyto znalosti jim zřejmě dobře poslouží při jejich dalším případném studiu.

Literatura

[1] Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on teachers' practice – the case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics 59*, 235–268.

[2] Bressoud D., Ghedamsi I., Martinez-Luaces V., & Törner G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus.* Springer. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-32975-8.pdf

[3] Donaldson, M. (Ed.). (1963). *A Study of Children's Thinking* (1st ed.) Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315013336

[4] Hrubý, D., & Kubát, J. (2008). *Diferenciální a integrální počet.* Prometheus.

[5] Jarník, V. (1953). *Diferenciální počet I: Úvod do počtu diferenciálního.* Vydavatelství Československé akademie věd v Praze.

[6] Kopáček, J. (2004). *Matematická analýza nejen pro fyziky I* (4. vydání). MATFYZPRESS.

[7] Lerchová, T. (2018). *Diferenciální a integrální počet v českých učebnicích matematiky* [Diplomová práce, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta]. https://is.muni.cz/th/ngt77/.

[8] Mikulčák, J. (2007). Jak se vyvíjela pedagogika matematiky ve druhé polovině 20. století. In: Bečvářová, M., & Bečvář, J. *Matematika v proměnách věků V* (s. 249-315). MATFYZPRESS https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400882

[9] MŠMT, (2021). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia.* https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy

[10] Odvárko, O. (2008). *Funkce.* Prometheus.

[11] Odvárko, O. (2008). *Goniometrie*. Prometheus.

[12] Orton, A. (1983). Students' Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics, 14* (1), (pp 1–18). http://www.jstor.org/stable/3482303

[13] Pelajová, V. (2017). *Výuka integrálního počtu na středních školách* [Bakalářská práce, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta]. https://is.muni.cz/th/c94ta/Vyuka_integralniho_poctu_na_strednich_skolach.pdf.

[14] Riečan, B., & Vaňatová, L. (1980). *Matematika pro gymnázia, sešit 7.* Státní pedagogické nakladatelství.

[15] Švaříček, R., & Šeďová, K. (2007). *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách.* Portál.

[16] Trkovská, D. (2015). *Historický vývoj geometrických transformací.* Katedra didaktiky matematiky MFF UK. http://eudml.org/doc/271665

[17] Winsløw, C. (2013). *Mathematical analysis in high school : a fundamental dilemma.* https://www.researchgate.net/publication/237092247_Mathematical_analysis_in_high_school_a_fundamental_dilemma

[18] Zemek, V., Zemková, K., Králová, M., Navrátil, M., & Kozák, P. (2019). *Matematika pro střední školy – 10. díl.* Didaktis.

[19] Description of the Advanced Mathematics Programs and Curriculum. (2015). *TIMSS Advanced.* http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/wp-content/uploads/filebase/advanced/advanced-mathematics/M11.-programs-and-curriculum/M11_1_adv-math-description-of-advanced-math-programs-and-curriculum.pdf

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Přílohy

PŘÍLOHA A

Pozorování výuky integrálního počtu

Po ukončení diferenciálního počtu i s jeho využitím na hledání extrémů a vyšetřování průběhu funkce **U** ve výkladu přešla na další téma, *integrální počet*.

A.1 Zavedení pojmu primitivní funkce

Integrování funkce bylo žákům přestaveno, jako „opačná operace k derivování".

> U: „Pokud máte dánu funkci f a známe její derivaci f', pak integrací funkce f' získáme opět funkci f. Výsledkem integrace nějaké funkce f je funkce F, pro kterou platí $F' = f$. Pro integrování se užívá zápis $\int f(x)\, dx = F(x)$, které čteme jako: neurčitý integrál z funkce f je funkce F. Funkce F se nazývá *primitivní funkce* k funkci f."

Na základě tohoto zavedení měli žáci za úkol stanovit primitivní funkci k funkci $f : y = x^2$. Postup řešení žáků vypadal následovně: 1) Žáci se snažili najít funkci, jejíž derivace obsahuje x^2. Brzy přišli na to, že takovou funkcí je $y = x^3$. 2) Derivovali tuto funkci a určili $y' = 3x^2$, což nebyla hledaná funkce. 3) Protože se ale jednalo „skoro" o hledanou funkci (byla pouze vynásobená číselnou konstantou), využili žáci tvrzení o derivaci násobku funkce. 4) Neznámou funkci tedy hledali ve tvaru $y = A \cdot x^2$, kde A je neznámý parametr. 5) Zderivováním této funkce s parametrem žáci získali tvar $y' = 3Ax^2$. 6) Porovnáním $y' = x^2$ a $y' = 3A \cdot x^2$ zjistili, že hledaná hodnota parametru je $A = \dfrac{1}{3}$.

Poznámka: **U** nechávala žákům čas, aby mohli problém vyřešit a nezasahovala do jejich úvah.

Žáci tedy tímto postupem určili, že $\int x^2\ dx = \dfrac{x^3}{3}$. **U** se jich následně zeptala, jestli by dokázali určit primitivní funkci i k $y = x^3$. Stejným způsobem žáci vyřešili i tento úkol. Z uvedených dvou úloh vyplynulo tvrzení žáků, že $\int x^m\ dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ pro $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Platnost tohoto tvrzení si žáci sami dokázali zderivováním výsledné funkce.

Fakt, že z množiny všech reálných čísel byla vyňata -1, byl pro žáky zpočátku překvapivý, ale vzhledem ke znalosti vztahů pro základní derivace si žáci brzy vzpomněli, že $[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, takže $\int \dfrac{1}{x}\ dx = \int x^{-1}\ dx = \ln|x|$.[1] Pomocí známých vztahů pro derivace funkcí poté snadno odvodili základní primitivní funkce (viz tabulka A.1).[2]

Tabulka A.1: Přehled základních primitivních funkcí

$f(x)$	$\int f(x)\ dx$	
c	$c \cdot x$	pro $x \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$
x^m	$\frac{x^{m+1}}{m+1}$	pro $x \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln|x|$	pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (0; +\infty)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	pro $x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	pro $x \in \mathbb{R}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	pro $x \in \mathbb{R}$ a $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$

Na rozdíl od diferenciálního počtu má integrální počet omezený způsob výpočtů, které lze provést pomocí vzorců. První důležitou skutečností týkající se primitivní funkce, se kterou byli žáci seznámeni, byla existence nekonečně mnoha primitivních funkcí F k dané funkci f, které se všechny liší nejvýše o konstantní funkci.

U zapsala na tabuli: „Je-li F primitivní funkce k funkci f, pak funkce $G(x) = F(x) + C$ je také primitivní funkcí k funkci f pro $C \in \mathbb{R}$.“

Dokázat toto tvrzení nebylo během výuky nijak obtížné, protože se opírá o derivaci rozdílu funkcí, což žáci znali z předchozích hodin. Tímto tvrzením žáci získali důležitou informaci i pro správný zápis primitivní funkce:

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C.$$

[1] Skutečnost, že primitivní funkcí k $\frac{1}{x}$ je $\ln|x|$ a nikoliv pouze $\ln(x)$, byla v hodině **U** odůvodněna tím, že D_f původní funkce je celé $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, takže i primitivní funkci musíme hledat na této množině.

[2] Hlavní bylo určení správné primitivní funkce. Na určení maximálních intervalů, na kterých platí $F'(x) = f(x)$, se nekladl příliš důraz.

A.2 Metody výpočtu primitivní funkce

Při zavádění metod integrace se **U** opírala o již známá tvrzení o derivacích. **U**: „Pokud si u integrace chcete udělat „zkoušku“, stačí, když výslednou funkci zderivujete.“

Neurčitý integrál z násobku, součtu a rozdílu funkcí

U v hodině vyslovila větu[3] (1.7) o linearitě neurčitého integrálu a nechala na žácích, aby zkusili dokázat její platnost. Uvedená věta byla formulována přímo pro lineární kombinaci funkcí f a g, takže žáci měli ověřit platnost vztahu $\int f(x) + k \cdot g(x) = F(x) + G(x) + C$.

Postup byl takový, že výslednou funkci $F(x) + k \cdot G(x) + C$ žáci zderivovali. Protože znali pravidla pro aritmetické operace s derivacemi, všichni, kteří se o řešení pokusili, dospěli ke správnému závěru, že tvrzení platí.

Příklad (Zadáno vyučující, žáci řešili samostatně.) Spočtěte následující neurčitý integrál:

$$\int 2x - 3\sin(x) - 4^x \; dx.$$

Řešení: Žáci si ověřili, že zadaná funkce je spojitá na $\mathbb{R}$ a skládá se z elementárních funkcí pomocí operací $+$ a $-$. (Ověření bylo spíše formální: „Všechny uvedené funkce jsou známé a spojité na $\mathbb{R}$, takže i uvedená funkce je spojitá.“) Za pomoci tabulky primitivních funkcí a uvedené věty postupovali následovně:

$$\begin{aligned}
\int 2x - 3\sin(x) - 4^x \; dx &= \int 2x \; dx - \int 3\sin(x) \; dx - \int 4^x \; dx = \\
&= 2 \cdot \int x \; dx - 3 \cdot \int \sin(x) \; dx - \int 4^x \; dx = \\
&= 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot \cos(x) - \frac{4^x}{\ln(4)} + C, \text{ takže} \\
\int 2x - 3\sin(x) - 4^x \; dx &= x^2 + 3 \cdot \cos(x) - \frac{4^x}{\ln(4)} + C.
\end{aligned}$$

[3] str. 16

V obou skupinách semináře se vyskytl způsob řešení, kdy po rozdělení daného integrálu na tři různé neurčité integrály byla ke každému dílčímu výsledku připsána jiná integrační konstanta:

$$\begin{aligned}\int 2x - 3\sin(x) - 4^x \; dx &= \int 2x \; dx - \int 3\sin(x) \; dx - \int 4^x \; dx = \\ &= 2 \cdot \int x \; dx - 3 \cdot \int \sin(x) \; dx - \int 4^x \; dx = \\ &= 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 + 3 \cdot \cos(x) + C_2 - \frac{4^x}{\ln(4)} + C_3.\end{aligned}$$

U: „Ano, i tímto způsobem můžete postupovat. Jen bývá zvykem u výsledku uvádět pouze jednu integrační konstantu. Ve vašem případě stačí vzít $C = C_1 + C_2 + C_3$."

A.2.1 Metoda per partes

Tato metoda byla v hodině odvozena ze vztahu pro derivaci součinu funkcí tak, že **U** zapsala na tabuli vztah pro derivaci součinu a následně umístila na obě strany rovnosti symbol integrálu:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
$$\int [f(x) \cdot g(x)]' \; dx = \int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] \; dx$$

U: „Jak můžete tuto rovnost upravit?"

Ž: „Na levé straně se integrál vyruší s derivací. Jde o opačné operace."

U: (Upravuje na tabuli na tvar:)

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) \; dx + \int f(x) \cdot g'(x) \; dx.$$

U: „Ostatní souhlasí?" (Nikdo z žáků nic nenamítal.)

U: „Dobře, převedením jednoho integrálu na levou stranu rovnice získáme tvar:" (Zapisuje na tabuli.)

$$\int f'(x) \cdot g(x) \; dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \; dx$$

U k metodě uvedla: „Je nutné vhodně zvolit $f'(x)$ a $g(x)$. Jinak se může řešení úlohy naopak výrazně ztížit. Tato metoda vyžaduje cvik a bývá zvykem vypisovat postup."[4] – viz následující příklad, který byl použit na demonstraci využití metody per partes i jako ukázka správné a chybné volby funkcí.

[4] To znamená během řešení vypsat, která funkce je volena jako f' a která jako g.

Příklad (Zadáno i řešeno vyučující. Žáci navrhovali postup a zkoušeli samostatně hledat řešení.) Spočtěte uvedený neurčitý integrál metodou per partes:

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \, dx$$

Řešení: Při ukázkovém řešení byly použity obě volby funkcí f' a g. **U** se ptala žáků, kterou funkci má zvolit jako derivaci a kterou jako nezderivovanou, což vedlo k těmto výsledkům:

(1)

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \, dx; \left| \begin{matrix} f' = \mathrm{e}^x & \to & f = \mathrm{e}^x \\ g = x & \to & g' = 1 \end{matrix} \right|$$

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \, dx = x \cdot \mathrm{e}^x - \int 1 \cdot \mathrm{e}^x \, dx = x \cdot \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \, dx$$

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \, dx = x \cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$$

(2) **U:** „Jak by se situace změnila, kdybychom zvolili funkce f' a g obráceně?“

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \, dx; \left| \begin{matrix} f' = x & \to & f = \frac{x^2}{2} \\ g = \mathrm{e}^x & \to & g' = \mathrm{e}^x \end{matrix} \right| \to \int x \cdot \mathrm{e}^x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{e}^x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{e}^x \, dx$$

V tuto chvíli některé žáky překvapilo, že bude nutné metodu použít znovu. Řešení se rozdělilo na dvě možnosti (podle volby f' a g, přičemž jedna vedla k rovnosti $0 = 0$.) Druhá potom na tvar:

$$\int \frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{e}^x \, dx; \left| \begin{matrix} f' = \frac{x^2}{2} & \to & f = \frac{x^3}{6} \\ g = \mathrm{e}^x & \to & g' = \mathrm{e}^x \end{matrix} \right|$$

takže:

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \, dx = x \cdot \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{e}^x + \int \frac{x^3}{6} \cdot \mathrm{e}^x \, dx$$

V tuto chvíli **U** upozornila žáky: „Všimněte si, že touto volbou funkcí bychom získávali stále vyšší mocniny x, a k hledané primitivní funkci bychom se nedostali.“ Žáci metodu ještě několikrát aplikovali, což vedlo k výsledku:

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e}^x \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + \ldots \right)$$

Ž: „I když použijeme per partes správně, může to vést k „horšímu“ integrálu nebo to k výsledku nemusí vést vůbec?“

U: „Ano, tato metoda rozhodně není univerzální a při nesprávné volbě funkcí, jako právě zde, k výsledku nevede. Obecně platí, že žádná metoda integrace není univerzální, a často je třeba je různě kombinovat.“

Další příklad, který byl z pohledu početních technik při určování primitivních funkcí důležitý, protože obsahuje šikovný trik, byl následující:

Úloha (Zadáno vyučující, žáci se měli o řešení pokusit samostatně.)

Spočtěte následující neurčité integrály metodou per partes:

$$\int \ln(x)\, dx \qquad \text{a} \qquad \int \frac{\ln(x)}{x}\, dx$$

Řešení:: Při řešení prvního neurčitého integrálu žáci namítali, že se nejedná o žádný součin. **U** žáky nechala chvíli přemýšlet a po chvíli jedna z žákyň přišla s nápadem:

Ž: „Můžeme tu funkci zapsat jako $1 \cdot \ln(x)$ a pak použít metodu?“

U: „Tím se funkce nijak nezmění a je ve tvaru součinu, zkuste to.“

Ž: (po chvíli uvažování jak zvolit funkce) zapisuje na tabuli:

$$\int \ln(x)\, dx; \left| \begin{array}{ccc} f = \ln(x) & \to & f' = \frac{1}{x} \\ g' = 1 & \to & g = x \end{array} \right|$$

$$\int \ln(x)\, dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \cdot \ln(x) - x + C.$$

První reakcí žáků na zadání druhého integrálu bylo, že umějí integrovat součet, rozdíl a součin, nikoliv však podíl funkcí. **U** poznámku komentovala tak, že:

U: „Vztahy pro primitivní funkce jsme odvozovali ze vztahů pro derivace. Určitě by tedy platilo, že $\int \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}\, dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C$. Hledat funkce f a g tak, aby odpovídaly uvedenému vztahu, je však příliš náročné a mnohdy nemožné.“

Vzhledem k tomu, že tématem hodiny byla metoda per partes, která souvisí s hledáním primitivní funkce ze součinu funkcí, žáci brzy dostali nápad. Přepsali funkci $\frac{\ln(x)}{x}$ do tvaru $\ln(x) \cdot \frac{1}{x}$, čímž se problém integrálu z podílu funkcí změnil na úlohu, u které bylo možné využít danou metodu.

Po prvním kroku však nastal pro žáky problém:

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\ dx; \left| \begin{array}{lcr} f = \ln(x) & \rightarrow & f' = \frac{1}{x} \\ g'(x) = \frac{1}{x} & \rightarrow & g = \ln(x) \end{array} \right|$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\ dx = \ln^2(x) - \int \frac{\ln(x)}{x}\ dx$$

Užitím metody dospěli k opětovnému užití per partes. Tento fakt by nebyl sám o sobě překvapivý,[5] ale problém byl v tom, že funkce, která se měla integrovat ve druhém kroku, byla identická s původní. V tomto okamžiku byli žáci překvapeni. Z jejich reakcí a komentářů vyplynulo, že někteří si mysleli, že touto metodou daný integrál spočítat nelze. V tuto chvíli přišla **U** s řešením pomocí triku:[6]

> U:„Pokud si hledaný integrál označíte jako neznámou I, dostane $I = \ln^2(x) - I$, což jednoduchou úpravou vede na $2I = \ln^2(x)$, a proto je $\int \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln^2(x)}{2} + C$.“

Stejný postup byl použit i při určování $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\ dx$.

Po této hodině žáci mohli určovat primitivní funkce ze součtu, rozdílu a součinu funkcí.

Substituční metoda

I v tomto případě, stejně jako v případě per partes, se primitivní funkce odvozovala ze známého vztahu pro derivace složené funkce. Odvození samotného výpočtu vyučující pak probíhalo následovně a bylo zapsáno na tabuli:

$$\begin{aligned} [f(g(x))]' &= f'(g(x)) \cdot g'(x), \\ \int [f(g(x))]'\ dx &= \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\ dx, \\ f(g(x)) + C &= \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\ dx. \end{aligned}$$

> U: „Tuto rovnost můžete v literatuře najít s označením: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx =$
> $= F(g(x)) + C$.“

Postup pro integraci pomocí substituce byl ve výuce prováděn v několika krocích:

1) stanovení vnitřní a vnější funkce,

[5] Během hodiny se řešily i úlohy, kde f byla ve tvaru součinu polynomu a goniometrických funkcí, kde se metoda využívá opakovaně.

[6] Žáci znali elementární úpravy rovnic, čehož se zde využilo.

2) vnitřní funkci označit jako novou proměnnou $y,\ z,\ t$ apod. $(g(x) = t)$,

3) určení derivace vnitřní funkce včetně výrazu dx a substituovanou funkci derivovat podle nové proměnné: $(g'(x) = \dfrac{dt}{dx} \Leftrightarrow g'(x) \cdot dx = dt)$,[7]

4) dosazení substituovaných vztahů (t a dt) do předpisu funkce,

5) určení primitivní funkce v nové proměnné,

6) zpětná substituce (vyjádření výsledné funkce pomocí proměnné. x).

Žáci se ptali, proč je nutné vypisovat v rovnosti i výrazy dx a dt. **U** odpověděla: „V původním případě dx znamená, že integrujeme podle proměnné x, tu ale měníme na novou proměnnou t. Pokud chceme integrovat podle nové proměnné, musíme výraz dt nahradit příslušným $g'(x) \cdot dx$. Podstata vyplyne u určitých integrálů."

Úloha (Zadáno vyučující, žáci řešili samostatně podle doporučeného postupu.) Spočtěte neurčitý integrál:

$$\int 2x \cdot \sin(x^2)\ dx.$$

Řešení: Žáci postupovali podle jednotlivých kroků:

Vnitřní a vnější funkce: $f(x) = \sin(x),\ g(x) = x^2 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \sin(x^2)$,

Provedení substituce: $x^2 = t \quad \rightarrow \quad 2x = \frac{dt}{dx} \quad \rightarrow \quad 2x \cdot dx = dt$

Dosazení a určení primitivní funkce v nové proměnné:

$$\int 2x \cdot \sin(x^2)\ dx = \int \underbrace{\sin(x^2)}_{f(t)} \cdot \underbrace{2x\ dx}_{dt} = \int \sin(t)\ dt = -\cos(t) + C.$$

Zpětná substituce: $\displaystyle\int 2x \cdot \sin(x^2)\ dx = -\cos(x^2) + C.$

U: „Substituční metoda někdy vyžaduje úpravu zadané funkce, protože ze zadání nemusí být hned zřejmé, jakou substituci volit. Tím se myslí, že při samotné substituci za vnitřní funkci $g(x) = t$ nemusí být zadaná funkce přímo ve tvaru $f(g(x)) \cdot g'(x)$, ale je např. vynásobena konstantnou." Žáci tedy měli více možností, jak substituci provést a danou funkci upravit: (1) určit vnitřní funkci a její derivaci a „vhodnou jedničkou" podle potřeby vynásobit původní funkci, (2) zvolit vnitřní a vnější funkci obráceně.

[7] Znak ekvivalence v tomto případě není zcela korektní, protože s výrazem $\frac{dt}{dx}$ se zachází jako se zlomkem při úpravě rovnice. **U** to bylo zdůvodněno tím, že tato metoda se odvíjí od určitých integrálů, které byly z historického hlediska dříve než integrály neurčité a v prvních intuitivních představách se s výrazem $\frac{dt}{dx}$ skutečně zacházelo jako se zlomkem díky jeho geometrické interpretaci.

Úloha (Žáci měli postupovat zcela samostatně.) Spočtěte neurčitý integrál:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$$

Řešení: Jelikož žáci pracovali samostatně bez zasahování vyučující a používali uvedený doporučený postup, vyskytly se u této úlohy dva způsoby řešení:

(1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ g(x) = 1 + x^2 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$g(x) = t,\ g'(x) = 2x \Rightarrow 2x \cdot dx = dt$
V zadání však bylo $x\ dx$ nikoliv $2x \cdot dx$. Zadanou funkci tedy bylo nutné upravit. Žáci použili vynásobení „vhodnou jedničkou“ tak, aby získali hledaný tvar a zároveň nezměnili zadanou funkci: $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \dfrac{1}{2} \cdot \int \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \dfrac{1}{2} \cdot \int \dfrac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \dfrac{1}{2} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{t} + C \Rightarrow$
$\Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \sqrt{1+x^2} + C.$

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}},\ g(x) = x^2 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$g(x) = t,\ g'(x) = 2x \Rightarrow 2x \cdot dx = dt$
V zadání bylo opět $x\ dx$ a ne $2x \cdot dx$, a tedy bylo nutné funkci upravit: $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx =$
$= \dfrac{1}{2} \cdot \int \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \dfrac{1}{2} \cdot \int \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\, dt.$
Tento tvar vyžadoval další substituci, protože se opět jednalo o složenou funkci. Žáci mohli určit $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$, ale nikoliv $\int \frac{1}{\sqrt{1+t}}\, dt$.
Druhá substituce byla zvolena takto: $g(t) = 1 + t = y \Rightarrow dt = dy$, takže: $\dfrac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1+t}} =$
$= \dfrac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt{y} + C = \sqrt{1+t} + C = \sqrt{1+x^2} + C \Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \sqrt{1+x^2} + C$

Díky tomuto příkladu žáci poznali, že substituční metodu lze používat vícekrát a že při jiné volbě vnitřní funkce se mohou lišit dílčí výsledky, ale výsledná primitivní funkce je vždy stejná.

Některé příklady neurčitých integrálů, které se během výuky použily k procvičení.

Jedná se o ukázku některých zadání na užití per partes a substituční metody, které žáci samostatně řešili v rámci procvičovací části výuky.

- $\int (2x-5)^7\, dx$
- $\int 8x^2 \cdot (x^3+2)^5\, dx$
- $\int \dfrac{3x}{(x^2+4)^6}\, dx$
- $\int 7x^2 \cdot e^{x^3+1}\, dx$
- $\int \sin^3(x)\, dx$
- $\int \cos(7x)\, dx$
- $\int \ln(x)\, dx$
- $\int x^2 \cdot \sin(x)\, dx$
- $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$
- $\int e^x \cdot \sin(x)\, dx$
- $\int \dfrac{4^x}{1+2^{2x}}\, dx$
- $\int \sin^2(x) \cdot \cos^2(x)\, dx$

A.3 Určitý integrál

Po tématu neurčitý integrál výuka pokračovala integrálem určitým, který byl nejprve zaveden pomocí geometrického významu. Na tabuli byl nákres grafu určité funkce f, která nebyla blíže specifikována předpisem.

U: „Pokud chceme určit obsah plochy pod grafem funkce f na intervalu $\langle a; b\rangle$, můžeme postupovat tak, že tento interval rozdělíme na úseky a sestrojíme obdélníky tak, aby všechny ležely pod grafem funkce f. Sečtením obsahů těchto obdélníků, jejichž výška je rovna funkční hodnotě v krajním bodě daného intervalu ($f(x_0)$) a šířka je rovna délce dílčího intervalu (ozn. dx), získáme přibližný obsah plochy pod grafem funkce.[8] Při zmenšení délek jednotlivých intervalů získáme přesnější obsah. Pokud budeme délky dělících intervalů stále zmenšovat, bude se součet obsahů blížit skutečnému obsahu plochy pod grafem funkce f.[9] Přesnou hodnotu obsahu plochy nám dá určitý integrál z funkce f na daném intervalu. Jedná se o limitní přechod, kdy počet obdélníků jde k ∞ a zároveň šířka obdélníků jde k nule.“[10]

U zavedla určitý integrál následovně: „Nechť f je reálná funkce definovaná a spojitá na $\langle a; b\rangle$ a F je primitivní funkce k funkci f na tomto intervalu. Určitý integrál z funkce f od a do b označujeme $\int_a^b f(x)\,dx$ a jeho hodnota je:

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a).$$

Někdy se pro výraz $F(b) - F(a)$ užívá i označení $[F(x)]_a^b$. “

Zde přišlo pro žáky vysvětlení zápisu určitého a neurčitého integrálu:

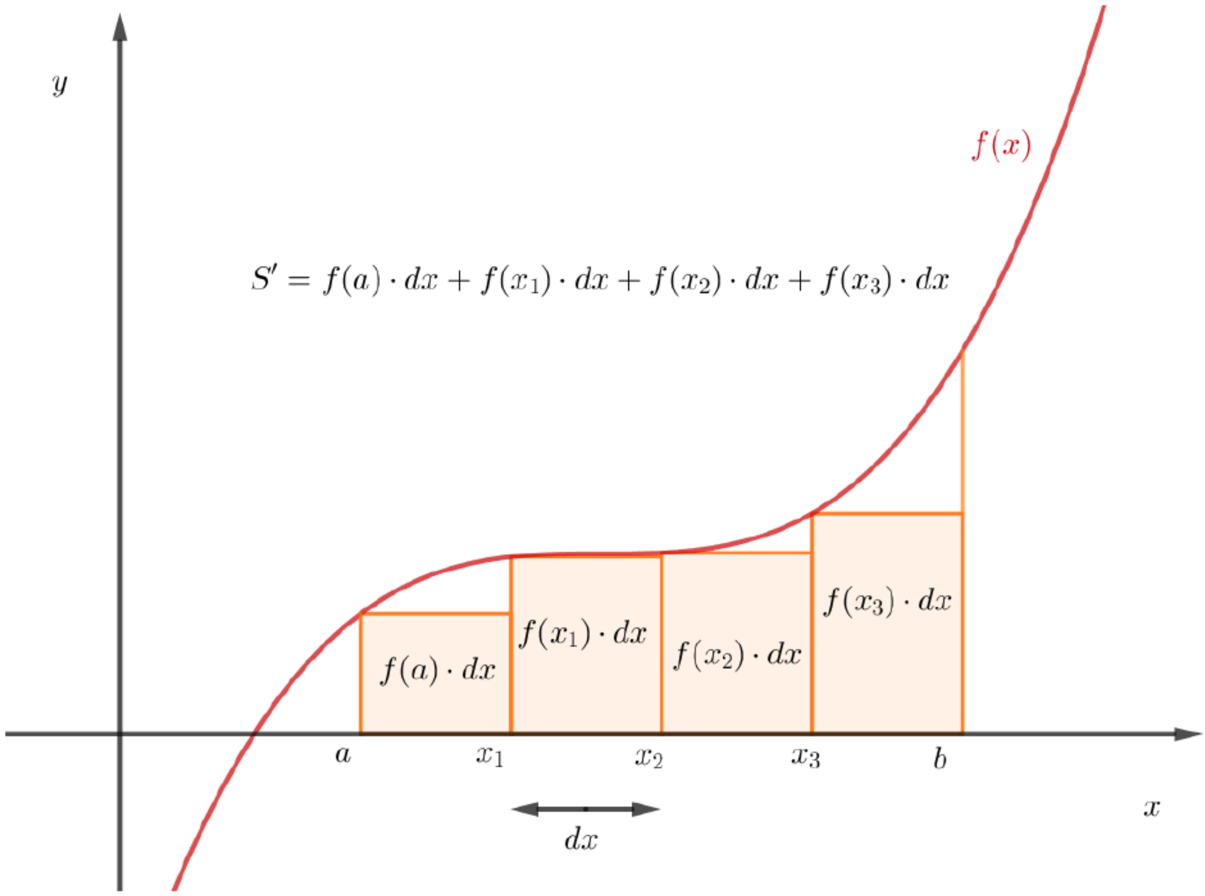
> U: „Důvodem, proč se u integrálů vyskytuje znak dx, je to, že z hlediska historie se dříve řešily integrály určité než neurčité. Určitý integrál byl chápán jako součet nekonečně malých veličin, v tomto případě obdélníků o výšce $f(x)$ a šířce dx. Toto označení se později přeneslo i do neurčitých integrálů. Ze stejného důvodu se pro integrál používá znak $\int$, protože připomíná písmeno S označující obsah.“

Určitý integrál z funkce f na intervalu $\langle a; b\rangle$ byl tedy zaveden jako číslo, jehož hodnota udává obsah plochy pod grafem funkce, resp. mezi grafem funkce f a osou x na daném intervalu, a lze

[8] viz obrázek 1

[9] viz obrázek 2

[10] Nejedná se o doslovný přepis výkladu, ale o popis toho, jak vyučující vysvětlila způsob určení obsahu pod grafem funkce.



Obrázek 1: Obsah S' při dělení intervalu $\langle a; b\rangle$ na čtyři dílčí intervaly.

jej určit jako rozdíl funkčních hodnot primitivní funkce F v krajních bodech $\langle a; b\rangle$. Nedokonalost tohoto zavedení však byla žákům přímo ukázána na následujícím úloze:

Úloha Spočtěte následující určité integrály:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\ dx \text{ a } \int_0^{2\pi} \sin(x)\ dx$$

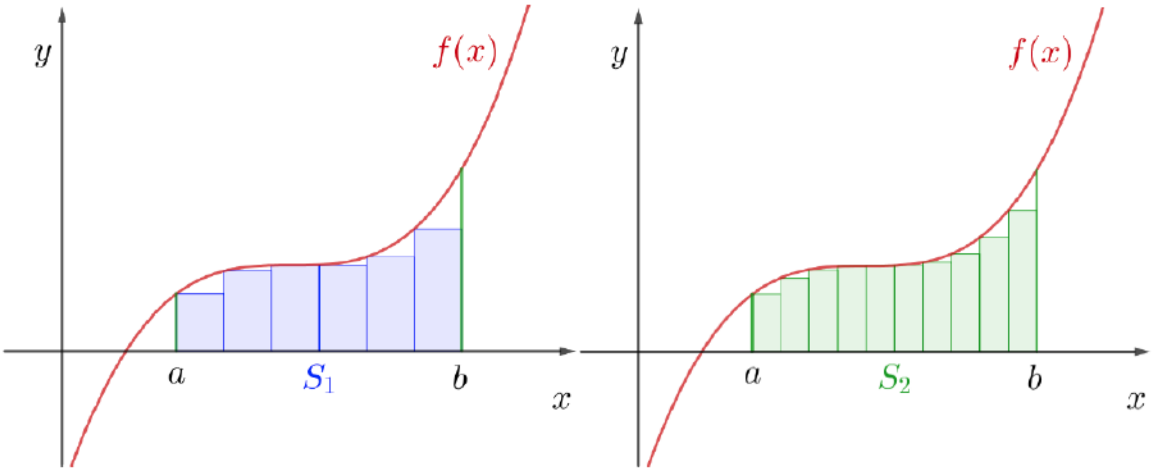
Řešení: (Ž postupovali samostatně.)

Žáci určili primitivní funkci $F(x) = -\cos(x)$.

Hodnota prvního integrálu byla tedy spočítána jako $F(\pi) - F(0) = -\cos(\pi) + \cos(0)) = 1$.

Hodnota druhého integrálu byla tedy spočítána jako $F(2\pi) - F(0) = -\cos(2\pi) + \cos(0)) =$ $= -1 + 1 = 0$. Vzhledem ke znalosti grafu funkce $y = \sin(x)$ na intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$ bylo žákům zřejmé, že obsah pod grafem funkce není nulový.

Situace byla vyučující vysvětlena tak, že pokud je funkce f na daném intervalu kladná, je kladný i obsah ohraničený jejím grafem a osou x, pokud je ale funkce na daném inter-



Obrázek 2: Obsah S_1 při dělení intervalu $\langle a; b\rangle$ a obsah S_2 při volbě kratších dílčích intervalů.

valu záporná, je číselná hodnota obsahu také záporná. To bylo demonstrováno na příkladech $\int_{-2}^{-1} x\ dx = -\frac{3}{2}$, $\int_{-1}^{1} x\ dx = 0$ a $\int_{1}^{2} x\ dx = \frac{3}{2}$. Žáci na těchto příkladech viděli, že v některých případech se obsahy pod grafem, resp. mezi grafem funkce a osou x odečtou, protože funkce na zvoleném intervalu mění znaménko. Bylo tedy nutné rozlišovat dva případy při výpočtu učitého integrálu. **U** rozdělila případy následovně:

(1) Spočtení určitého integrálu bez geometrické interpretace.

V tomto případě plně stačilo určení hodnoty integrálu jakožto rozdílu hodnot primitivní funkce v krajních bodech intervalu $\langle a; b\rangle$.

(2) Spočtení určitého integrálu coby obsah plochy mezi grafem funkce f a osou x.

V takovém případě bylo nutné určit, pro jaká $x \in \langle a; b\rangle$ je $f(x) > 0$ a pro jaká je

$f(x) < 0$. Pokud je funkce f na daném intervalu pouze kladná, resp. pouze záporná, je obsah plochy pod grafem $S(f)_{\langle a;b\rangle} = |\int_a^b f(x)\ dx|$. Pokud funkce f nabývá na $\langle a; b\rangle$ kladných i záporných hodnot, je třeba postupovat jinak.

K vysvětlení druhého případu se použila věta (1.14) a nákres situace na tabuli.

Metoda per partes pro určitý integrál

Jelikož žáci znali z předchozích hodin metodu per partes pro určování primitivní funkce, propojení této metody s určitým integrálem spočívalo ve vyslovení příslušné věty (1.15) a následném procvičení. **U**: „Při výpočtu určitého integrálu ze součinu funkcí f' a g není nutné nejprve stanovit samotnou primitivní funkci $\int f'(x) \cdot g(x)\ dx$ a poté určovat rozdíl hodnot této funkce v integrálních mezích, ale lze sčítat hodnoty jednotlivých částí.“

Ukázka některých úloh k procvičení

- $\int_0^1 x^4 \cdot \mathrm{e}^{-x}\ dx$,
- $\int_1^{\mathrm{e}} \ln^3(x)\ dx$,
- $\int_1^{\mathrm{e}^4} \frac{\ln(x)}{x}\ dx$,
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cdot \cos(x)\ dx$,
- $\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\ dx$,
- $\int_0^1 x^2 \cdot \mathrm{e}^x + x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}\ dx$.

U uvedených úloh se jednalo pouze o výpočet zadaného integrálu bez ohledu na geometrickou interpretaci. Žáci v některých případech nejprve stanovili „celou“ primitivní funkci a následně určovali rozdíl v krajních bodech intervalu, jindy určovali rozdíl funkčních hodnot už u „dílčích“ funkcí (převážně u úloh, kde se vyskytovaly goniometrické funkce).

Substituční metoda pro určitý integrál

Jelikož se stále jednalo o metody výpočtu určitého integrálu, bylo důležité žákům představit i možnost užití substituční metody. V tomto případě se byl postup následující:

- Žáci věděli, že neurčitý integrál $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx$ je roven $F(g(x)) + C$, kde F je primitivní funkce k funkci f.
- Na základě toho vyslovili tvrzení, že: $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = F(g(b)) - F(g(a))$.

U: „Čemu se rovná výraz na pravé straně rovnosti?“

Ž: (po chvíli přemýšlení) „Výraz vpravo můžeme zapsat jako $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx$.“

U: „Přesně tak. Substituční metodu počítáme známým způsobem, zavedeme novou proměnnou t. Zapisuje na tabuli: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx; \left| \begin{array}{rcl} g(x) & = & t \\ g'(x)dx & = & dt \end{array} \right|$.

Takže $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int f(t)\ dt$. Co se u určitého integrálu změnilo?“

Ž: „Museli jsme změnit horní a dolní mez integrálu. V prvním případě jsme integrovali přes interval $\langle a; b\rangle$, po substituci už přes interval $\langle g(a); g(b)\rangle$.“

U: „Ano, pokud tedy měníte integrační proměnnou, musíte přepočítat integrační meze. Důvodem je, že původní funkci jsme integrovali podle x, proto se v zápise vyskytoval i výraz dx, který zastupuje délku nekonečně malého intervalu. Když jsme ale proměnnou změnili na t, změnil se i výraz dt, konkrétně $dt = g'(x) \cdot dx$. Element

dt je tedy roven součinu dx a $g'(x)$, a není obecně stejný jako dx. Proto je nutné při substituci přepočítat meze integrálu."

Tímto způsobem si žáci „sami" odvodili nutnost změny integračních mezí při užití substituční metody, ačkoli se nejedná o matematicky zcela korektní postup. Došli tedy k platnosti věty (1.16), kterou **U** zapsala na tabuli: „Je–li f integrovatelná na $\langle g(a); g(b)\rangle$ a g je spojitá a má spojitou derivaci na intervalu $\langle a; b\rangle$, pak platí:"

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt.$$

Postup pro řešení konkrétních příkladů byl rozdělen do těchto kroků: (1) Stanovit vnitřní a vnější funkci, (2) provést substituci, nahradit proměnnou x za novou proměnnou (většinou t nebo y) a výraz dx příslušným výrazem dt, resp. dy, (3) stanovit nové integrační meze, (4) spočíst nově vzniklý určitý integrál známými metodami.

Příklad (**U** demonstrovala žákům řešení, někteří žáci pracovali samostatně.)
Spočtěte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\cos(x)\ dx$ pomocí substituční metody.
Řešení: U: „I když by bylo možné daný integrál řešit dříve zmíněnou metodou per partes, ukážeme si na něm užitečnost substituční metody, protože náročnost výpočtu se jejím užitím zmenší."

1) Nejprve bylo nutné stanovit vnitřní a vnější funkci, což bylo zvoleno takto:

$$f(x) = x^4, g(x) = \sin(x) \to g'(x) = \cos(x), f(g(x)) = \sin^4(x),$$

takže: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int \sin^4(x) \cdot \cos(x)\ dx.$
Poznámka: Rozdělení integrálu na vnitřní a vnější funkci měli za úkol samotní žáci.

2) Užitím substituce $\sin(x) = y$ žáci získali $\cos(x)\ dx = dy$, a nový integrál měl tedy tvar:

$$\int \underbrace{\sin^4(x)}_{y^4} \cdot \underbrace{\cos(x)\ dx}_{dy}.$$

3) Protože se změnila integrační proměnná, bylo třeba přepočítat intagrační meze:

   Ž: „ Jelikož jsme volili substituci $y = \sin(x)$, dolní mez byla $x_1 = 0$, bude nová dolní mez $y_1 = \sin(x_1) = 0$. Původní horní mez byla $x_2 = \frac{\pi}{2}$, a tedy nová horní mez je $y_2 = \sin(x_2) = 1$."

4) Zadaný integrál byl následně přepsán a vypočítán:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\cos(x)\, dx = \int_0^1 y^4\, dy = \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{5}}\,.$$

A.3.1 Aplikace integrálního počtu

Po probrání všech výše uvedených metod na výpočet určitého integrálu se výuka přesunula na aplikace.

V rámci výuky byli žáci seznámeni s těmito aplikacemi určitého integrálu: (1) určením obsahu plochy, ohraničené grafem funkce f a osou x, resp. plochy mezi grafy dvou funkcí na intervalu $\langle a; b\rangle$, (2) určením objemu rotačního tělesa, vzniklého rotací grafu funkce f kolem osy x na intervalu $\langle a; b\rangle$.

Obsah plochy pod grafem funkce byl rozebrán v úvodních hodinách, v nichž se žáci seznamovali s definicí určitého integrálu a jeho geometrickým významem. V této části výuky se tedy spíše opakovalo a žáci si upevňovali znalosti toho, na co je třeba si při výpočtu dávat pozor. Konkrétně se jednalo o již dříve zmíněný rozdíl mezi určitým integrálem, jakožto číselnou hodnotou, a jeho geometrickou interpretací, coby obsahem plochy pod grafem funkce.

Žáci dostali následující úkol: Funkce f je definovaná vztahem $f : y = x^2 - 1$.
1) Určete $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2 - 1)\, dx$, 2) Určete obsah plochy pod grafem funkce na intervalu $\langle -2; 2\rangle$.
První část úkolu vyřešili všichni žáci bez obtíží:
Na základě definice určitého integrálu určili primitivní funkci k zadané funkci f: $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$ a po dosazení integračních mezí získali: $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{2} = \frac{4}{3}$.[11]
Výsledky žáků u úlohy 2) se již lišily, protože ne všichni ověřili, kde na uvedeném intervalu je je funkce kladná a kde záporná. Čtyři žáci úlohu řešili stejně jako v případě 1), zatímco ostatní postupovali takto:

- $f(x) = x^2 - 1;\ I = \langle -2; 2\rangle$.
  $f(x) \leq 0$ pro $x \in \langle -1; 1\rangle$ a $f(x) > 0$ pro $x \in \langle -2; -1) \cup (1; +2\rangle$ (byl použit i nákres grafu zadané funkce).

[11] Někteří žáci zadání 1) počítali pomocí parity: daná funkce je sudá a interval přes který integrujeme, je symetrický, proto platí: $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2 - 1)\, dx = 2 \cdot \int_{0}^{2} (x^2 - 1)\, dx = \frac{4}{3}$.

- Obsah plochy pod grafem funkce na daném intervalu je tedy roven:

$$S(f)_I = \int_{-2}^{-1} (x^2-1)\ dx - \int_{-1}^{1} (x^2-1)\ dx + \int_{1}^{2} (x^2-1)\ dx,$$
$$S(f)_I = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2} = 4.$$

Dalším úkolem pro žáky bylo určení obsahu plochy, ohraničeného grafy funkcí $f : y_1 = \sin(x)$ a $g : y_2 = \cos(x)$ na intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$.

Žáci opět využili nákresy grafů známých funkcí a na základě znalosti chyby v předchozím případě stanovili, že hledaný obsah bude opět nutné rozdělit na dva integrály, konkrétně:

$$S = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} [\cos(x) - \sin(x)]\ dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x) - \cos(x)]\ dx = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

Toto rozdělení bylo Ž zdůvodněno tak, že: „Pro $x \in (0; \frac{\pi}{4})$ je $\sin(x) < \cos(x)$, a proto musíme od obsahu pod grafem $\cos(x)$ odečíst obsah pod grafem $\sin(x)$, na intervalu $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$ je situace opačná, proto se obrací i pořadí odčítání.“

A.3.2 Objem rotačního tělesa

I tato aplikace určitého integrálu byla odvozena vyučující pomocí nákresu a vztahů známých z dřívějška, konkrétně ze znalosti vztahu pro objem válce.

Poznámka: Jedná se o rotační tělesa vzniklá rotací grafu funkce f kolem osy x.

> U: „Objem válce je dán vztahem $V = \pi r^2 h$, kde $r > 0$ je poloměr a h je výška. Chceme–li válec chápat jako rotační těleso vzniklé otáčením grafu kolem osy x, jedná se o konstantní funkcí $f : y = r$. Rotací grafu této funkce kolem osy x vznikne válcová plocha. Pokud chceme určit objem tělesa, které je touto plochou ohraničeno, musíme určit výšku tohoto válce. V našem případě se jedná o délku intervalu $\langle a; b \rangle$, protože funkční hodnota je ve všech bodech tohoto intervalu stejná. Dostáváme tedy:
>
> $$V = \pi \cdot \int_a^b r^2\ dx = \pi \cdot r^2 \cdot \int_a^b 1\ dx = \pi \cdot r^2 \cdot \underbrace{(b-a)}_{h} = \pi r^2 h,$$
>
> což je známý vztah pro objem válce.“

Toto odvození známého vztahu pro žáky zřejmě nebylo nijak překvapivé. **U** pokračovala v odvozování:

U:„ Pokud chceme určit objem tělesa vzniklého rotací jiné než konstantní funkce, můžeme postupovat tak, že daný interval $\langle a;b\rangle$ opět rozdělíme na nekonečně malé intervaly. Těleso, které vznikne rotací na těchto malých intervalech, můžeme považovat za nekonečně malé válce s poloměrem $f(x)$ a výškou dx. Sečtením těchto válců, získáme celkový objem tělesa.“

U zapsala na tabuli odvozený vzorec:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Zbylá část hodiny se věnovala procvičování.

Úloha Určete objem tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $y = \sin(x)$ na intervalu $\langle 0;\pi\rangle$.

Řešení: Ž: „Funkce $y = \sin(x)$ je na daném intervalu definovaná a spojitá. Podle odvozeného vztahu je naším úkolem vyřešit určitý integrál $\int_0^\pi \sin^2(x)\, dx$, který můžeme řešit buď opakovaným užitím metody per partes, případně užitím goniometrických vztahů: $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ a následným užitím substituční metody.“

Poznámka: V hodině si většina žáků vybrala metodu substituce.

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\, dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^\pi 1\, dx - \frac{1}{2}\cdot\int_0^\pi \cos(2x)\, dx,$$

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\int_0^\pi \cos(2x)\, dx, \left|\begin{array}{rcl} 2x & = & y \\ 2\, dx & = & dy \\ dx & = & \frac{dy}{2} \end{array}\right| \left|\begin{array}{lcr} 0 & \to & 0 \\ \pi & \to & 2\pi \end{array}\right|$$

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cdot\cos(y)\, dy = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(y)\, dy}_{0} = \frac{\pi}{2}.$$

Objem V vzniklého tělesa byl tedy určen jako: $\pi\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\frac{\pi^2}{2}}$ $[j^3]$.

Úloha Odvoďte vztah pro objem koule o poloměru r. Využijte toho, že vrchní polokružnici lze jako funkci vyjádřit vztahem $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Řešení: S pomocí nákresu[12] žáci brzy určili, že musí spočíst integrál pro $x \in \langle -r; r\rangle$ z funkce $(\sqrt{r^2-x^2})^2$, tedy:

$$V = \pi\cdot\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\, dx = \pi\cdot r^2\cdot\int_{-r}^{r} 1\, dx - \pi\cdot\int_{-r}^{r} x^2\, dx$$

$$V = 2\pi r^3 - \pi\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \underline{\frac{4}{3}\pi r^3}\ [j^3]$$

[12] Jednalo se o nákres kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměru r.

Aplikací určitého integrálu byla výuka završena. Žáci se tedy během cca osmi měsíců seznamovali se základy diferenciálního a integrálního počtu, přičemž hlavní důraz byl kladen na to, aby si žáci dostatečně procvičili metody výpočtů.

A.4 Aplikace infinitezimálního počtu ve fyzice

V poslední části se žáci seznámili se základními aplikacemi derivací a integrálů ve fyzice. Konkrétně se jednalo o odvození známých vztahů pro výpočet dráhy hmotného bodu, rychlosti, zrychlení a dalších. Jednalo se jak o určité rozšíření aplikací infinitezimálního počtu mimo matematiku, tak o procvičení počítání derivací a integrálů v jiných proměnných, než je proměnná x, na kterou byli žáci doposud zvyklí. Toto téma bylo probíráno pouze jednu vyučovací hodinu na konci semináře a sloužilo hlavně k procvičování.

> U: „Ve fyzice jste se setkali s různými vzorci na výpočet dráhy hmotného bodu pro rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený pohyb. Teď se podíváme, jak se dají tyto vzorce odvodit pomocí derivací a integrálů.“

Poznámka: Pro žáky bylo nutné přijmout za platné následující vztahy: $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = s'(t)$ a $a(t) = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt} = s''(t) = v'(t)$, tedy že rychlost v je první derivací dráhy podle času a zrychlení je buď první derivace rychlosti podle času nebo druhá derivace dráhy podle času. Na všechny uvedené veličiny se tedy pohlíželo jako na funkce proměnné t, která označuje čas.

Příklad (**U** řešila společně s žáky) Ukažte, že při rovnoměrném pohybu (tj. rychlost je konstantní) je skutečně zrychlení nulové.

Řešení: Z hodin fyziky si žáci vybavovali, že pro rovnoměrný pohyb platí vztah $s = v \cdot t$, kde v je konstantní funkce. Následně použili uvedené vztahy: $s'(t) = (v \cdot t)' = v$ a $s''(t) = (v)' = 0$. Díky tomuto zjištění došli k závěru, že pokud je $s''(t) = 0$ pro libovolnou hodnotu proměnné t, pak je zrychlení opravdu nulové.

Jako další byly odvozeny vztahy pro rychlost a zrychlení hmotného bodu při volném pádu. Žáci během tohoto odvození měli určit derivaci funkce $h(t) = \dfrac{1}{2}gt^2$, což znali z hodin fyziky jako vzorec. Správným zderivováním podle proměnné t dospěli k požadovaným vztahům: $v(t) = gt$ m/s a $a(t) = g$ m/s^2.

Další úloha se týkala výpočtu průměrné rychlosti:

Úloha (Žáci řeší samostatně, **U** pouze uvedla nápovědu, jak určit průměrnou rychlost.) Určete průměrnou rychlost hmotného bodu mezi druhou a šestou vteřinou pohybu, jestliže se pohybuje rychlostí v, která je dána vztahem $v(t) = t^2 - 6t + 9$. Průměrnou rychlost můžete určit jako podíl celkové dráhy a celkového času.

Řešení: Pro vyřešení úlohy bylo nutné, aby si žáci uvědomili dva fakty: 1) průměrná rychlost je definovaná jako podíl celkové dráhy a celkového času, 2) pokud je $v(t) = s'(t)$, pak dráha je $s(t) = \int v(t)\, dt$. K oběma těmto údajům po konzultaci s vyučující dospěli.

Pro určení průměrné rychlosti tedy určili celkovou dráhu pohybu:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt = \int_2^6 t^2 - 6t + 9\ dt = \int_2^6 (t-3)^2\ dt = \int_{-1}^3 y^2\ dy = \frac{28}{3}$$

Ž: „Celkový čas t je roven rozdílu $t_2 - t_1 = 4$. Průměrnou rychlost v_p tedy dostaneme podílem:“

$$v_p = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{28}{3}}{6-2} = \frac{7}{3}\ [\mathrm{m/s}]$$

Poznámka: Ne všichni žáci využili přepis $t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$ a substituční metodu, ale integrovali přímo zadanou funkci. Dospěli však ke stejnému výsledku.

PŘÍLOHA B

Zadání testu I a II

Matematická analýza – Test I

Úloha 1. Pomocí definice derivace funkce v bodě určete derivaci funkce $f: y = x^3$

(a) pro $x = 4$,

(b) pro libovolné $x_0 \in D_f$,

Úloha 2. Určete první derivace následujících funkcí:

(a) $f: y = x^{12} + 2^x + \sin(x) - 3 \cdot \tan(x)$

(b) $f: y = \sin(x) \cdot \cos(x)$

(c) $f: y = \dfrac{x^3 - 5}{1 + x^2}$

(d) $f: y = \ln(x^2 + 4x + 3)$

(e) $f: y = x \cdot \sin(x) + \mathrm{e}^x \cdot \cos(x)$

(f) $f: y = \sin(4x) \cdot \cos(3x)$

(g) $f: y = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x + 4}}$

(h) $f: y = \ln\left(\sin(x) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + x^4}\right)$

(i) $f: y = \dfrac{x^4}{\mathrm{e}^{2x} - 1}$

(j) $f: y = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}}$

Úloha 3. Určete první a druhou derivaci následujících funkcí:

(a) $f: y = \dfrac{x}{(1 + x^2)^2}$

(b) $g: y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

(c) $h: y = \mathrm{e}^{1 - \cos^2(x)}$

Úloha 4. Pomocí vhodné metody spočtěte následující neurčité integrály:

(a) $\int x^{12} - 4^x + \sin(x) - 3e^x \, dx$

(b) $\int \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx$

(c) $\int \tan^2(x) \, dx$

(d) $\int \frac{4x}{1+x^2} \, dx$

(e) $\int e^x \cdot (x^2 + x + 2) \, dx$

(f) $\int x \cdot \ln(x^2) \, dx$

(g) $\int \cos^3(2x) \, dx$

(h) $\int \sin^4(x) \, dx$

(i) $\int \ln^2(x) \, dx$

(j) $\int x \cdot \sqrt{1+x} \, dx$

(k) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} \, dx$

(l) $\int e^{2x} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx$

Úloha 5. Pomocí vhodné metody spočtěte následující určité integrály:

(a) $\int_2^5 x^3 - 3 \cdot 2^x \, dx$

(b) $\int_0^{\pi/4} \tan^2(x) \, dx$

(c) $\int_0^4 \frac{4x}{1+x^2} \, dx$

(d) $\int_0^{\ln(2)} e^x \cdot x^3 \, dx$

(e) $\int_1^e \frac{\ln(x^2)}{x^2} \, dx$

(f) $\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \sin^2(x) \cdot \cos(x) \, dx$

Matematická analýza - Test II

Úloha 1. Je dána funkce f, pro kterou platí: 1) je spojitá na $\mathbb{R}$, 2) má na $\mathbb{R}$ spojitou první derivaci f', 3) k f existuje na $\mathbb{R}$ primitivní funkce F. Potvrďte, nebo vyvraťte platnost následujících tvrzení:

(a) Je–li f sudá, je f' vždy lichá.

(b) Je–li f sudá, je F vždy lichá.

(c) Je–li f lichá, je f' vždy sudá.

(d) Je–li f lichá, je F vždy sudá.

Úloha 2. Určete obsah obrazce, který je ohraničen grafy funkcí $f : y = \sin(x) + \pi \cdot x$ a $g : y = x^2 + \sin(x)$ na intervalu $I = \langle 0; 2\pi \rangle$.

Úloha 3. Je dána rovnice:

$$A \cdot x - \sin(x) = 0,$$

kde $x \in \mathbb{R}$ a $A \in \langle 0; +\infty)$ je reálný parametr. Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí/neplatí následující tvrzení:

(a) Pro $A > 1$ má rovnice jediné řešení $x = 0$.

(b) Pro $A \in \langle 0; 1)$ má rovnice alespoň tři řešení.

Úloha 4. Určete délku grafu funkce $f : y = 4x\sqrt{x}$ na intervalu $\langle 1;\ 2\rangle$

Nápověda: Je-li f spojitá a má spojitou první derivaci na intervalu $\langle a; b\rangle$, pak délku (l) grafu funkce na tomto intervalu můžeme určit pomocí vzorce: $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx$

Úloha 5. Mějme funkce f a g dané následovně:

$$f : y = |x| \cdot x \qquad g : y = \begin{cases} x + 1;\ \text{pro } x \in (-\infty; 0\rangle, \\ x^2;\ \text{pro } x \in (0; +\infty). \end{cases}$$

Potvrďte či vyvraťte následující tvrzení:

Poznámka: Grafy obou funkcí si načrtněte.

(a) $D_f = D_g$

(b) $H_f = H_g$

(c) Funkce f je prostá.

(d) Funkce g je prostá.

(e) Funkce $h := g - f$ je pro nezáporná x konstantní.

(f) Funkce f má v bodě $x = 0$ derivaci.

(g) Funkce g je v bodě $x = 0$ spojitá.

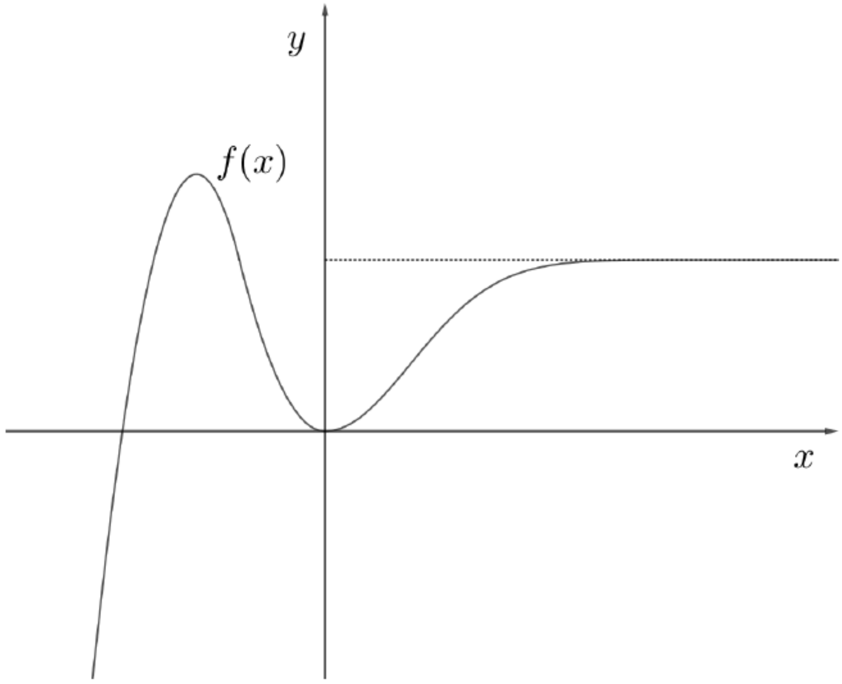
(h) Funkce f má limitu v každém bodě svého definičního oboru.

(i) Funkce g má limitu v každém bodě svého definičního oboru.

Úloha 6. Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $f : y = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$ kolem osy x na intervalu $\langle 0; \pi\rangle$.

Nápověda: Pro objem V rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce f kolem osy x na $\langle a; b\rangle$ můžeme užít vztahu: $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\ dx$

Úloha 7. Na obrázku je znázorněn graf reálné funkce f.



Na základě grafu rozhodněte, *jak se budou chovat* grafy funkcí $y_1 = f'(x)$ a $y_2 = F(x) := \int f(x)\, dx$. (tj. určete, kde jsou tyto funkce rostoucí, resp. klesající, konvexní, resp. konkávní, zda mají maximum a minimum apod.).

Poznámka: Grafy funkcí f i F si zkuste načrtnout a u grafu F volte $F(0) = 0$.

Úloha 8. Je dána funkce $f : y = (x-5)^{10} \cdot (x+7)^5$.

(a) Určete D_f a spočtěte limity v krajních bodech D_f.

(b) Určete a zdůvodněte počet a typ lokálních extrémů funkce f (pokud existují).

(c) Určete všechny hodnoty parametru $k \in \mathbb{R}$, pro které má rovnice $f(x) = k$ více než jedno řešení.

Úloha 9. Je dána funkce $f : y = \dfrac{2+\cos(x)}{x^2+1}$.

Rozhodněte a zdůvodně, zda platí následující tvrzení:

(a) Funkce f je lichá.

(b) Pro každé reálné x_0 platí: $f(x_0) \geq 0$.

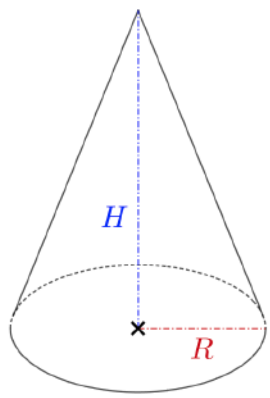
(c) Funkce f je omezená zdola i shora.

Úloha 10. Máme kužel s daným poloměrem podstavy $R > 0$ a danou výškou $H > 0$. Tento kužel je napouštěn vodou. Určete předpis funkce udávající závislost objemu V napuštěné vody na výšce h „vodního sloupce“ v případě, že

(a) Napouštěný kužel stojí na kruhové podstavě.

(b) Napouštěný kužel stojí „na špičce“.

(c) V případech (a) i (b) určete, *jak se bude chovat* první derivace, resp. přírůstek této funkce.



PŘÍLOHA C

Test II – postupy žáků u úloh nevyhodnocených v textu

Úloha 2

Zde žáci předvedli tři způsoby řešení a příslušné argumenty pro jejich použití:

1) Obsah plochy mezi grafy funkcí se určil jako určitý integrál v daných mezích z rozdílu funkcí.

Úvaha žáků: Porovnáním funkčních hodnot zadaných funkcí v krajních bodech intervalu I získali $f(0) = g(0) = 0$ a $f(2\pi) = 2\pi^2 < 4\pi^2 = g(2\pi)$. Rozhodli se tedy počítat integrál z rozdílu $g(x) - f(x)$, protože na I je $g(x) > f(x)$.[1] „Když funkce odečteme obráceně, dostaneme stejnou hodnotu, jen bude záporná.“(SA2)

$$S = \int_0^{2\pi} g(x) - f(x)\ dx = \int_0^{2\pi} x^2 - \pi \cdot x\ dx = \frac{8\pi^3}{3} - \pi \cdot \frac{4\pi^2}{2} = \underline{\frac{2\pi^3}{3}}$$

2) Obsah plochy mezi grafy funkcí se určil jako určitý integrál v daných mezích z rozdílu funkcí na celém I.

Úvaha žáků: „Když počítáme obsah mezi grafy funkcí f a g, postupujeme tak, že od obsahu pod jedním grafem odečteme obsah pod druhým, tedy určitý integrál od 0 do 2π z $f(x) - g(x)$ nebo $g(x) - f(x)$.“ (SJ6) „Pokud výsledek bude záporný, musíme odečítat v opačném pořadí, protože obsah plochy nemůže vycházet záporně.“ (SJ1)

$$S = \int_0^{2\pi} g(x) - f(x)\ dx = \int_0^{2\pi} x^2 - \pi \cdot x\ dx = \frac{8\pi^3}{3} - \pi \cdot \frac{4\pi^2}{2} = \underline{\frac{2\pi^3}{3}}$$

3) Žáci začali porovnáním funkčních hodnot obou funkcí na intervalu I s odůvodněním, že pokud se funkce f a g někde na daném inervalu rovnají, budou úlohu řešit jako součet obsahů na těchto intervalech:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin(x) + \pi \cdot x = x^2 + \sin(x) \qquad \text{platí pro } x \in \{0; \pi\}.$$

[1] Platnost nerovnosti pro všechny hodnoty $x \in I$ nebyla prověřena.

Protože se funkce v jiných bodech nerovnají, musí platit nerovnosti $f(x) > g(x)$ nebo $g(x) > f(x)$ pro $x \in (0;\pi)$ a $x \in (\pi;2\pi)$. Při řešení těchto nerovností byly nejčastěji použity hodnoty $f(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi^2}{2} + 1 > \dfrac{\pi^2}{4} + 1 = g(\frac{\pi}{2})$ a $f(2\pi) = 2\pi^2 < 4\pi^2 = g(2\pi)$.

Úvaha žáků: Protože se funkce protínají jen pro $x = 0$ a $x = \pi$ a $\dfrac{\pi}{2} \in (0;\pi)$ a $2\pi \in (\pi; 2\pi\rangle$, musí platit, že $f(x) > g(x)$ pro $x \in (0;\pi)$ a $g(x) > f(x)$ pro $x \in (\pi;2\pi)$. Obsah mezi grafy určíme jako součet obsahů na jednotlivých intervalech tak, že budeme od větší funkce odečítat menší, tím dostaneme kladný výsledek.

$$S = \int_0^{\pi} f(x) - g(x)\; dx + \int_{\pi}^{2\pi} g(x) - f(x)\; dx = \int_0^{\pi} \pi \cdot x - x^2\; dx + \int_{\pi}^{2\pi} x^2 - \pi \cdot x\; dx$$

$$S = \pi \cdot \frac{\pi^2}{2} - 0 - \left(\frac{\pi^3}{3} - 0\right) + \frac{8\pi^3}{3} - \frac{\pi^3}{3} - \left(\pi \cdot \frac{4\pi^2}{2} - \pi \cdot \frac{\pi^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3} + \frac{8\pi^3}{3} - \frac{\pi^3}{3} - 2\pi^3 + \frac{\pi^3}{2} = \pi^3$$

Úloha 4

U úlohy na délku grafu funkce všichni žáci využili zadanou nápovědu. Když byli dotázáni, jestli daný vzorec znají z výuky ve škole, pouze tři[2] z nich odpověděli, že se s ním setkali, ale už by si nevzpomněli na přesný tvar. S pomocí uvedeného vzorce pak neměli žádný problém úlohu vyřešit. Určili první derivaci zadané funkce a dosadli do vzorce: $f(x) = 4x\sqrt{x} = 4x^{3/2}$, $f'(x) = 4 \cdot \dfrac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x}$. Poté sestavili integrál:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + [6\sqrt{x}]^2}\; dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 36x}\; dx,$$

který následně řešili substituční metodou.

Užitá substituce byla dvojího druhu: (1) $1 + 36x = y \to dx = \dfrac{dy}{36}, 0 \to 1,\; 1 \to 7$, tedy

$$\int_0^1 \sqrt{1+36x}\; dx = \frac{1}{36} \cdot \int_1^{37} \sqrt{y}\; dy = \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{3} \cdot [y\sqrt{y}]_1^{37}.$$

V případě (2) se jednalo o užití substituční metody nadvakrát:

$$\int_0^1 \sqrt{1+36x}\; dx = \frac{1}{36} \int_0^{36} \sqrt{1+y}\; dy = \frac{1}{36} \cdot \int_1^{37} \sqrt{t}\; dt = \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{3} \cdot [t\sqrt{t}]_1^{37}.$$

Úlohu zdárně vyřešili všichni žáci.

[2] SJ1, SJ2 a SJ4

Úloha 5

U této úlohy bylo cílem ověřit znalosti žáků ze základních pojmů z oblasti funkcí a pokročilejších pojmů (spojitost a limita v bodě). Kromě uvedených úloh byli žáci dotazováni také na samotné pojmy (Co je to definiční obor, obor hodnot funkce? Podle čeho rozhodnete, jestli je funkce v bodě spojitá? Jak určíte, jestli má funkce v daném bodě limitu? apod.)

(a) $D_f = D_g$ (Ano)

Tuto úlohu vyřešili všichni testovaní žáci správně. Zdůvodnění bylo takové, že D_g je celá množina reálných čísel, přestože je funkce zadaná po částech, a D_f je také celá množina reálných čísel, protože za x lze dosadit libovolnou hodnotu.

Odpovědi žáků na doplňující otázku „Co je definiční obor funkce?“ byly např. tyto:

- „Definičním oborem funkce jsou všechny možné hodnoty, které můžeme dosadit za x, abychom dostali nějakou funkční hodnotu.“ (SA2)
- „Je to množina všech čísel, která když dosadíme za x, tak získáme funkční hodnotu a ta má smysl.“ (SJ3)
- „Definiční obor je množina čísel, která můžeme dosadit za x a při tom předpis (funkce) neztrácí smysl.“ (SJ6)
- „Jsou to všechna čísla, která si můžeme dovolit do předpisu funkce dosadit, aniž by nastaly problémy jako dělení nulou nebo odmocňování nebo logaritmus záporných čísel.“ (SA4)

Poznámka: 9 z 10 žáků tuto otázku zodpovídalo také pomocí grafů daných funkcí a pouze jediný žák (SJ5) stanovil D_f porovnáváním definičních oborů daných funkcí bez jakéhokoliv nákresu.

(b) $H_f = H_g$ (Ano)

U této úlohy se již všichni žáci rozhodli pro načrtnutí grafů daných funkcí. Na základě grafů potom porovnávali dané množiny H_f a H_g.

Při konstrukci samotných grafů nečinilo žádné problémy sestrojit graf funkce f, nýbrž graf funkce g. Konkrétně ve dvou případech byl chybně pochopen podinterval definičního oboru a pro $x = 0$ byla funkční hodnota určena pro funkci $y = x^2$, která měla svůj definiční podinterval bez nuly. (SA2 a SJ5)

Poté, co si žáci načrtli grafy daných funkcí, neměli už problém s rozhodnutím, že obory hodnot obou funkcí se skutečně rovnají a že se jedná o celou množinu $\mathbb{R}$. Odpovědi žáků na doplňující otázku „Co je obor hodnot funkce?“ byly např. tyto:

- „Je to množina všech hodnot (čísel), kterých daná funkce nabývá.“ (SA3)
- „Oborem hodnot je množina všech obrazů definičního oboru.“ (SJ5)
- „Obor hodnot jsou všechna čísla, kterých funkce nabývá pro nějakou hodnotu x z definičního oboru.“ (SA2)
- „Obor hodnot funkce je množina všech čísel, pro které existuje nějaká hodnota proměnné x, ve které funkce této hodnoty nabývá.“ (SJ4)

(c) Funkce f je prostá. (Ano)

viz bod (d)

(d) Funkce g je prostá. (Ne)

Při řešení úloh (c) a (d) se žáci opět opírali o náčrtky grafů daných funkcí. V tomto případě závisela správnost řešení na chápání termínu *prostá funkce* a na podmínkách, za nichž je možné funkci prohlásit za prostou. Žáci definovali prostou funkci např. takto:

- „Funkce je prostá, pokud pro každou funkční hodnotu existuje pouze jedna odpovídající hodnota z definičního oboru.“ (SA3)
- „Funkce je prostá, pokud je rostoucí nebo klesající.“ (Chybně, resp. nepřesně) (SJ1)

  Daný žák vyhodnotil jako prosté obě funkce, tedy i g, která prostá není, přestože na daných podintervalech D_g je skutečně rostoucí, ale není rostoucí na celém D_g.
- „O funkci řekneme, že je prostá, pokud pro každé x z definičního oboru existuje pouze jedna hodnota y z oboru hodnot“ (SJ6) (Chybně)

  Poznámka: Zde se žák následně opravil s tím, že zaměnil dané množiny.

  Opravená verze zněla tak, že pro každé y z H_f existuje pouze jedno x z D_f.
- „O funkci můžeme říci, že je prostá, pokud se se zvětšující hodnotou x hodnota $f(x)$ buď zvětšuje, nebo zmenšuje.“ (SA1)

(e) Funkce $h : g - f$ je pro nezáporná x konstantní. (Ne)

U této úlohy se žáci opírali více o předpisy funkcí než o načrtnuté grafy (graf – 3 žáci (SJ2, SA2 a SJ5), předpis – ostatní).

Funkci f bylo pro $x \in (0; +\infty)$ možné zapsat ve tvaru $f(x) = x^2$, funkci g ve tvaru $g(x) = x^2$, a tedy rozdíl těchto funkcí byl roven konstantní nulové funkci. Tuto část vyřešili všichni testovaní žáci. Pouze dva žáci neurčili správně rozdíl mezi „nezáporné“ a „kladné“ hodnoty x a tvrzení označili za pravdivé. Zbytek žáků prohlásil tvrzení za neplatné, protože pro $x = 0$ je funkční hodnota rozdílu funkcí rovna jedné a ne nule. Z toho důvodu není funkce h pro nezáporné hodnoty proměnné x konstantní.

Poznámka: Žák (SJ2), který úlohu řešil pomocí náčrtku grafů, k řešení připojil, že funkce by nebyla konstantní, protože pro $x = 0$ by nebyla ani spojitá.

(f) Funkce f má v bodě $x = 0$ derivaci. (Ano)

Zde žáci využívali jak načrtnutý graf funkce, tak samotný předpis, resp. jeho rozpis pro jednotlivé intervaly:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{pro } x < 0, \\ x^2 & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Při určování derivace se žáci, kteří se rozhodli úlohu vyřešit pomocí předpisu funkce, rozhodli určit derivaci pro každý podinterval zvlášť:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{pro } x < 0, \\ 2x & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Z tohoto rozpisu derivace pro jednotlivé intervaly pak žáci určili, že derivace funkce f v bodě $x = 0$ existuje a je rovna nule. Zdůvodnění bylo takové, že do obou předpisů derivace lze nulu dosadit a dostaneme stejnou hodnotu nula. Derivace funkce f v bodě $x = 0$ tedy existuje a je rovna nule.

Žáci, kteří zvolili řešení pomocí náčrtku grafu, argumentovali tak, že samotná funkce $y = x^2$ má v nule derivaci $y' = 2x$ (zprava i zleva), která je pro $x = 0$ rovna nule. Funkce ze zadání se liší pouze tím, že pro záporné hodnoty x je její graf souměrný přes osu x, což ale nemění hodnotu derivace.

Poznámka: Určení derivace pomocí její definice (tj. limitou) nezkoušel žádný z žáků.

(g) Funkce g je v bodě $x = 0$ spojitá. (Ne)

Zde žáci při řešení opět využili jak předpis funkce g, tak její graf (předpis – 6 žáků, graf – 4 žáci).

Předpokladem pro správné řešení bylo správné pochopení spojitosti funkce v daném bodě. Na otázku „Jak poznáte / podle čeho rozhodnete, jestli je funkce v nějakém bodě spojitá?“ žáci odpovídali:

- „Funkce je v bodě spojitá, pokud se v tomto bodě její graf nepřerušuje.“ (SA2)
- „Pokud je limita v daném bodě stejná, jako je funkční hodnota, tak je funkce v tom bodě spojitá.“ (SJ4)
- „Pokud je limita zprava i zleva v daném bodě stejná.“ (SA3)
- „Když sestrojíme graf funkce, tak ve zkoumaném bodě nenastává žádný skok nebo přerušení.“ (SJ5)

(h) Funkce f má limitu v každém bodě svého definičního oboru. (Ano) Tuto úlohu vyřešili všichni žáci.

Nejčastějším argumentem bylo, že „Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy má v každém bodě limitu“. Druhou možností bylo odvození z grafu: „Graf funkce f se nikde netrhá, takže v každém bodě existuje limita a je stejná jako funkční hodnota $f(x)$.“

(i) Funkce g má limitu v každém bodě svého definičního oboru. (Ne)

Úlohu opět vyřešili všichni žáci, tentokrát s výrazně větším využitím grafu a z části pomocí odpovědi na otázku (g).

- „Funkce g nemůže mít limitu v každém bodě svého D_f, protože v nule není spojitá.“ (SJ1)
- „Funkce g má limitu všude, kromě případu, kdy $x = 0$. Pro nulu limita neexistuje, protože se tam graf přerušuje a zprava a zleva je jiná funkční hodnota.“ (SJ3)
- „V nule se graf trhá, takže v nule neexistuje limita.“ (SA4)

Úloha 6

Zde se jednalo o určení objemu rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce $f : y = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$ na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$.

Žáci, kteří neznali vztah pro objem rotačního tělesa z výkladu, využili nápovědy.[3] S využitím vztahu pro objem rotačního tělesa zkonstruovali hledaný integrál:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx = \pi \cdot \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^\pi \frac{1}{4} \cdot \sin^2(2x)\, dx.$$

[3] Z výkladu – 6 žáků, nápověda – 4 žáci.

Následně zbývalo daný integrál vypočítat, k tomu žáci použili různé metody:

- Metoda per partes: (7 žáků)

$$\pi \cdot \int_0^\pi \frac{1}{4} \cdot \sin^2(2x)\ dx; \left| \begin{array}{lll} f' = \sin(2x) & \rightarrow & f = -\dfrac{\cos(2x)}{2} \\ g = \sin(2x) & \rightarrow & g' = 2\cos(2x) \end{array} \right|$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi \sin^2(2x)\ dx = \frac{\pi}{4} \cdot \underbrace{\left[-\frac{\cos(2x)\cdot\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi}_{0} + \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi \cos^2(2x)$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi \sin^2(2x)\ dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi \cos^2(2x)\ dx$$

  Zde se strategie žáků ubírala dvěma směry:

  (1) opět užití metody per partes, což je přivedlo k výsledku $0 = 0$, resp.

$$\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi \sin^2(2x)\ dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi \sin^2(2x)\ dx.$$

  Žáci tedy zvolili jiný způsob:

  (2) užití goniometrických vztahů: $\cos^2(2x) = 1 - \sin^2(2x)$, což vedlo k rovnosti

$$\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi \sin^2(2x)\ dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi 1 - \sin^2(2x)\ dx,$$

  kterou následně upravili:

$$2 \cdot \left(\underbrace{\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi \sin^2(2x)\ dx}_{V} \right) = \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi 1\ dx = \frac{\pi^2}{4}, \text{ a tedy } V = \frac{\pi^2}{8}$$

- Užitím goniometrického vztahu $\sin^2(u) = \dfrac{1-\cos(2u)}{2}$: (3 žáci)

$$\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi \sin^2(2x)\ dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi \frac{1-\cos(4x)}{2}\ dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi \frac{1}{2}\ dx - \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^\pi \cos(4x)\ dx =$$
$$= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} \cdot \underbrace{\int_0^\pi \cos(4x)\ dx}_{0} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Poznámka: Nahrazení integrálu $\int_0^\pi \cos(4x)\ dx$ hodnotou nula bylo zdůvodněno buď přímým výpočtem (určení primitivní funkce a následného dosazení mezí), nebo užitím argumentu, že: „integrál goniometrické funkce přes její periodu je vždy roven nule.“ (SJ3) Žák tím myslel, že se kladná a záporná část plochy pod grafem funkce $y = \cos(4x)$ na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$ vzájemně odečtou.

Úloha 8

Žáci určili, že definičním oborem dané funkce je $\mathbb{R}$, protože se jedná o součin polynomů a „neexistují hodnoty, které by nebylo možné do předpisu dosadit," navíc se jedná o funkci, která je na svém D_f spojitá.

Určení limit v krajních bodech D_f tedy znamenalo určit hodnoty funkce pro $x \to \pm\infty$, což bylo provedeno:

- „dosazením"

  $$\lim_{x\to+\infty}(x-5)^{10}\cdot(x+7)^5 = (+\infty-5)\cdot(+\infty+7) = (+\infty)^5\cdot(+\infty)^7 = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty$$
  $$\lim_{x\to-\infty}(x-5)^{10}\cdot(x+7)^5 = (-\infty-5)^{10}\cdot(-\infty+7)^5 = (-\infty)^{10}\cdot(-\infty)^5 = +\infty\cdot(-\infty) = -\infty$$

- úpravou zadané funkce na tvar:

  $$(x-5)^{10}\cdot(x+7)^5 = x^{10}\cdot\left(1-\frac{5}{x}\right)^{10}\cdot x^5\cdot\left(1+\frac{7}{x}\right)^5 = x^{15}\cdot\left(1-\frac{5}{x}\right)^{10}\left(1+\frac{7}{x}\right)^5$$

  a následným dosazením:
  $$\lim_{x\to+\infty} x^{15}\cdot\left(1-\frac{5}{x}\right)^{10}\left(1+\frac{7}{x}\right)^5 = (+\infty)^{15}\cdot\left(1-\frac{5}{+\infty}\right)^{10}\left(1+\frac{7}{+\infty}\right)^5 =$$
  $$(+\infty)^{15}\cdot 1\cdot 1 = \ +\infty$$
  $$\lim_{x\to-\infty} x^{15}\cdot\left(1-\frac{5}{x}\right)^{10}\left(1+\frac{7}{x}\right)^5 = (-\infty)^{15}\cdot\left(1-\frac{5}{-\infty}\right)^{10}\left(1+\frac{7}{-\infty}\right)^5 =$$
  $$(-\infty)^{15}\cdot 1\cdot 1 = -\infty$$

Zjištění limit v krajních bodech D_f společně s faktem, že je funkce f spojitá a nabývá hodnoty nula pro $x=-7$ a $x=5$, vedly žáky k tvrzení, že lokální extrémy budou nejméně dva, protože graf funkce se pro $x\in(-7;5)$ musí pohybovat v kladných nebo záporných hodnotách, a tedy musí nabývat maximální/minimální hodnoty (na daném intervalu).

Pro rozhodnutí o existenci extrému žáci postupovali běžným způsobem: určením první derivace (pomocí pravidel pro derivaci součinu funkcí), určením jejích nulových bodů a následně zkoumáním změn znaménka první derivace na dílčích intervalech:

Poznámka: Užití druhé derivace, resp. konvexnosti/konkávnosti na rozhodnutí o existenci a typu extrému ve výsledku nepoužil žádný z žáků, přestože se o to tři pokusili. Během svého řešení se však dopustili chyby při určení druhé derivace. Důvodem byla „nepřehlednost" druhé derivace, protože vyžadovala derivaci součinu tří funkcí a žáci většinou řešili pouze součin dvou funkcí.

$$f'(x) = 10 \cdot (x-5)^9 \cdot (x+7)^5 + 5 \cdot (x-5)^{10} \cdot (x+7)^4$$
$$f'(x) = (x-5)^9 \cdot (x+7)^4 \cdot [10 \cdot (x+7) + 5(x-5)]$$
$$f'(x) = (x-5)^9 \cdot (x+7)^4 \cdot (15x+45)$$
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -7 \quad \vee \quad x = -3 \quad \vee \quad x = 5,$$

a tedy

$$f'(x) > 0 \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty; -7) \cup (-7; -3) \cup (5; +\infty),$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{pro} \quad x \in (-3; 5).$$

Protože první derivace nemění znaménko na okolí bodu $x = -7$, nenabývá v tomto bodě funkce extremální hodnoty. Lokální extrémy jsou tedy jen v bodech $x = -3$ (lokální maximum $f(-3) = = (-3-5)^{10} \cdot (-3+7)^5 = 2^{40}$) a $x = 5$ (lokální minimum $f(5) = 0$). Zadaná funkce má tedy dva lokální extrémy, globální extrémy nemá.

Při řešení podúlohy (c) si šest žáků zkoušelo načrtnout graf zadané funkce. Pomocí tohoto grafu snadno zjistili, že více než jedno řešení rovnice $f(x) = k$ existuje pro všechny hodnoty $k \in \langle 0;\ 2^{40} \rangle$. Žáci, kteří se nezabývali grafickou interpretací, se rozhodli stejně. Jejich zdůvodnění se opíralo o limity v krajních bodech a monotonii zadané funkce: „Funkce je záporná pouze pro $x < -7$, pro zbylé hodnoty je kladná, nebo rovna nule. Dále je funkce rostoucí na $(-7; -3)$ a klesající na $(-3; 5)$ a v krajních bodech těchto intervalů je rovna nule, tedy na tomto intervalu nabývá všech svých hodnot kromě maxima 2×. Protože je funkce na $(5; +\infty)$ rostoucí, musí ještě pro nějakou hodnotu x nabývat funkce hodnoty $f(x) = 2^{40}$." (SA1)

Úloha 9

U této úlohy žákům nedělalo žádné potíže určit, že zadaná funkce není lichá, nýbrž sudá. Zdůvodnění bylo různé:

SJ1:„$x^2 + 1$ je sudá funkce, $2 + \cos(x)$, protože je to jen posunutý kosinus a ten je sudý. Podíl dvou sudých funkcí je sudá funkce".

SA3: „Dosadíme si za x hodnotu $-x$.

$$f(-x) = \frac{2 + \cos(-x)}{1 + (-x)^2} = \frac{2 + \cos(x)}{1 + x^2} = f(x),$$

takže platí $f(-x) = f(x)$, to je podmínka pro sudou funkci, ne pro lichou."

Poznámka: Zde se vyskytla chyba pouze v jednom případě (SJ2) chybným dosazením: $f(-x) = \dfrac{2 + \cos(-x)}{1 - x^2}$, což vedlo k závěru, že daná funkce není ani sudá ani lichá.

Při rozhodování o tom, zda je pro všechny hodnoty proměnné x funkční hodnota nezáporná, žáci postupovali tak, že funkční hodnoty určovali jako podíl dvou funkcí, tj. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, kde $g(x) = 2 + \cos(x)$ a $h(x) = 1 + x^2$. Na základě znalosti grafů funkcí g a h rozhodli, že zadaná funkce je dokonce pro všechny hodnoty proměnné x kladná, protože $g(x) > 0$ a $h(x) > 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, a protože podíl dvou kladných čísel je vždy číslo kladné, došla většina žáků (8 z 10) k závěru, že tvrzení neplatí (protože v tvrzení je neostrá nerovnost). Zbylí dva žáci (SA1 a SJ3) si tohoto detailu nevšimli, a proto označili tvrzení za pravdivé. Jejich argumentace však byla až do poslední chvíle stejná jako u ostatních žáků.