MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Filip Bočinec

Andersonova veta

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Stanislav Nagy, Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Predovšetkým chcem poďakovať vedúcemu mojej bakalárskej práce Mgr. Stanislavovi Nagyovi, Ph.D. za cenné pripomienky, výbornú komunikáciu a obrovskú ochotu spolupracovať. To všetko ma inšpirovalo a motivovalo zlepšovať moju prácu. Ďalej ďakujem svojim rodičom za dlhodobú podporu počas môjho vysokoškolského štúdia.

Název práce: Andersonova veta

Autor: Filip Bočinec

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Stanislav Nagy, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V tejto práci sa budeme zaoberať tvrdením z oblasti reálnej analýzy a geometrie s názvom Andersonova veta. Jedná sa o integrálnu nerovnosť pre symetrické kvázikonkávne funkcie, kde sa integruje cez symetrické konvexné množiny. Andersonovu vetu dôkladne dokážeme. Budeme skúmať, kedy v Andersonovej vete nastane rovnosť a kedy naopak ostrá nerovnosť. Pri štúdiu tejto otázky narazíme na isté problémy v publikovaných výsledkoch, ktoré sa pokúsime vyjasniť. V práci sa tiež budeme zaoberať možnými rozšíreniami Andersonovej vety. Konkrétne uvedieme výsledky využívajúce grupovú invarianciu a teóriu s-konkávnych funkcií. Ako naznačíme v závere práce, Andersonova veta je užitočný a často používaný nástroj v mnohorozmernej štatistike.

Klíčová slova: unimodalita, integrál, Brunn-Minkowského nerovnosť, konvexita, viacrozmerná miera

Title: Anderson's theorem

Author: Filip Bočinec

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Stanislav Nagy, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis we explore a theorem from real analysis and geometry called Anderson's theorem. It concerns an integral inequality for symmetric quasiconcave functions, where the integration is done over a symmetric convex set. A thorough proof of Anderson's theorem is given. In addition, we investigate cases in which equality or strict inequality occurs. While studying this topic, we come across some problems in published papers and we try to clarify them. Furthermore, we explore possible extensions of the theorem. In particular, results involving group invariance and theory of s-concave functions are mentioned. As outlined in the final part of the thesis, Anderson's theorem is a useful and widely used tool in multivariate statistics.

Keywords: unimodality, integral, Brunn-Minkowski inequality, convexity, multivariate measure

Obsah

Úvod

Témou tejto práce je Andersonova veta. Jedná sa o tvrdenie z reálnej analýzy a geometrie vo forme integrálnej nerovnosti. Konkrétne Andersonova veta hovorí, že integrál reálnej nezápornej funkcie definovanej na $\mathbb{R}^n$ splňujúcej isté predpoklady symetrie a kvázikonkávnosti cez symetrickú konvexnú množinu v $\mathbb{R}^n$ je maximálny, ak bude množina centrovaná v počiatku.

Cieľom práce je spracovať prehľadný dôkaz Andersonovej vety a diskutovať jej interpretácie, možné rozšírenia a aplikácie. Práca je na viacerých miestach doplnená vhodnými obrázkami a ilustračnými príkladmi, ktoré pomôžu ozrejmiť vykladanú teóriu. Text je rozdelený do štyroch kapitol.

V kapitole 1 najskôr v sekcii 1.1 zavádzame značenie a základné pojmy. Sekcia 1.2 obsahuje diskusiu k Brunn-Minkowského vete. Jedná sa o tvrdenie pojednávajúce o vlastnosti Lebesgueovej miery, ktorá je zásadná pre dôkaz Andersonovej vety. Ďalej v sekcii 1.3 formulujeme Andersonovu vetu a podrobne rozoberáme jej dôkaz. Čerpáme najmä z článku Anderson (1955), v ktorom autor prvýkrát uviedol toto tvrdenie.

Kapitola 2 je zameraná na štúdium prípadov, v ktorých nastane v Andersonovej vete rovnosť alebo ostrá nerovnosť. V pôvodnom článku Anderson (1955) uviedol podmienku pre rovnosť v jeho vete. Neskôr vo svojom článku Soms (1991) ukázal, že táto podmienka nie je korektná a opravil ju do inej podoby. To rozoberáme a dopĺňame v sekcii 2.1. Ďalej sa v sekcii 2.2 zameriavame na predpoklady, za ktorých nastane v Andersonovej vete ostrá nerovnosť. Ukazujeme, že článok Jogdeo (1970) obsahuje tvrdenie s chybným dôkazom. Toto tvrdenie v slabšej forme dokazujeme, čo je vlastným prínosom v práci.

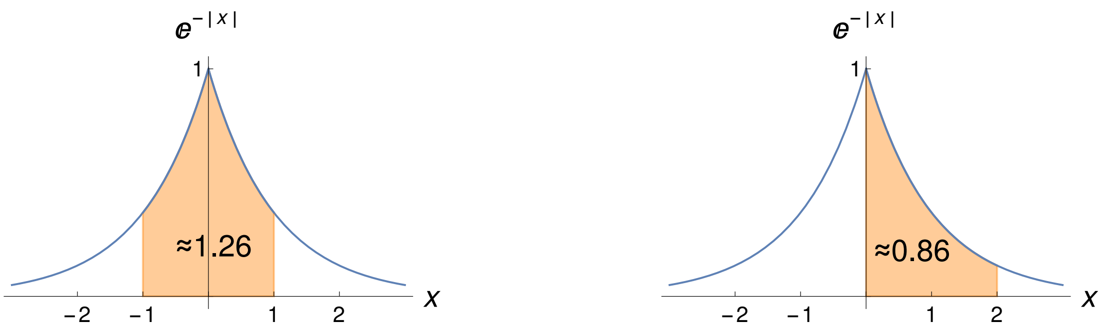
Kapitola 3 je rozdelená na tri sekcie. V sekcii 3.1 rozoberáme predpoklady Andersonovej vety a ich nevyhnutnosť. Ďalej v sekcii 3.2 študujeme rozšírenie Andersonovej vety pre G-invariantné funkcie a množiny podľa článku Mudholkar (1966). V sekcii 3.3 načrtávame teóriu s-konkávnych funkcií a uvádzame tvrdenie podobné Andersonovej vete, ktoré nepredpokladá žiadnu symetriu, no vyžaduje silnejší predpoklad s-konkávnosti funkcie, ktorú integrujeme.

Nakoniec, v kapitole 4 uvádzame niektoré aplikácie Andersonovej vety v teórii pravdepodobnosti a matematickej štatistike. Ukazujeme, že predpoklady Andersonovej vety sú splnené pre hustoty niektorých pravdepodobnostných rozdelení a pre tieto rozdelenia nám Andersonova veta poskytuje užitočné nerovnosti. K týmto rozdeleniam patria elipticky symetrické rozdelenia, ktoré možno chápať ako rozšírenie normálneho rozdelenia a rozoberáme ich v sekcii 4.1. V sekcii 4.2 ukazujeme využitie získaných poznatkov pre simultánne intervalové odhady.

1. Andersonova veta

Uvažujme nezápornú párnu funkciu $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$, ktorá je neklesajúca na $(-\infty, 0]$ a nerastúca na $[0,\infty)$. Je zrejmé, že integrál tejto funkcie cez interval konštantnej dĺžky bude maximálny, ak bude interval symetrický vzhľadom k počiatku. Príkladom je funkcia $e^{-|x|}$.

Príklad 1. *Nech* $f(x) = e^{-|x|}$. *Uvažujme interval* $(-1,1)$ *a jeho posunutie* $(0,2)$. *Potom platí* $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 2 - 2/e \approx 1{,}26$ *a* $\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 1 - e^{-2} \approx 0{,}86$.



(a) Symetrický interval.

(b) Posunutý interval.

Obr. 1.1: Integrál funkcie z príkladu 1 cez symetrický a posunutý interval.

V tejto kapitole uvedené pozorovanie rozšírime a dokážeme pre istú triedu nezáporných funkcií definovaných na $\mathbb{R}^n$. Výsledné tvrdenie sa nazýva Andersonova veta.

1.1 Značenie a základné pojmy

Na začiatok zavedieme značenie a niekoľko pojmov, ktoré budeme v práci používať.

Množinu reálnych čísel budeme označovať $\mathbb{R}$, množinu prirodzených čísel $\mathbb{N}$ a prázdnu množinu $\emptyset$. Množiny budeme značiť veľkými znakmi. Budeme rozlišovať ostrú inklúziu $\subset$ a neostrú inklúziu $\subseteq$. Vnútrajšok, uzáver a hranicu množiny $A \subseteq \mathbb{R}^n$ značíme postupne $\mathsf{Int}\,(A)$, $\overline{A}$ a ∂A. Indikátorovú funkciu množiny A budeme zapisovať ako $\mathbb{1}_A$.

Vektory a matice budeme značiť tučným písmom, napríklad $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\Sigma}$. Vektory budeme uvažovať vždy stĺpcové. Zložky vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ značíme $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$. Zápisom $\|\boldsymbol{x}\|$ rozumieme euklidovskú normu vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Fakt, že štvorcová matica $\boldsymbol{\Gamma}$ typu $n \times n$ má prvky γ_{ij} zapíšeme $\boldsymbol{\Gamma} = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Jednotkovú maticu typu $n \times n$ označíme $\boldsymbol{I}_n$.

Pre lebesgueovsky merateľnú množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ značíme $\lambda^n(A)$ jej n-rozmernú Lebesgueovu mieru. Symbolom $\mathcal{B}^n$ rozumieme borelovskú σ-algebru na $\mathbb{R}^n$. Pre dva priestory so σ-konečnými mierami $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{D}, \nu)$ značíme $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}$ súčinovú σ-algebru na $X \times Y$ a $\mu \otimes \nu$ súčinovú mieru na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{D})$. $\mathcal{L}_1(\mu)$ bude množina všetkých merateľných funkcií f na $(X, \mathcal{A})$ takých, že $\int_X |f|\,\mathrm{d}\,\mu < \infty$.

Pre $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$ označme $U(\boldsymbol{x}, r) \coloneqq \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < r\}$ a $B(\boldsymbol{x}, r) \coloneqq \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \le r\}$.

Množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazývame *konvexná*, ak s každými dvoma bodmi obsahuje aj všetky ich konvexné kombinácie, t.j. pre každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ a $\alpha \in [0,1]$ je $\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \in A$. Budeme používať fakt, že prienik dvoch konvexných množín je konvexná množina. *Konvexným telesom* budeme rozumieť konvexnú kompaktnú podmnožinu $\mathbb{R}^n$ s neprázdnym vnútrajškom.

Pre $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme $\alpha A \coloneqq \{\alpha\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in A\}$, kde pre $\alpha = -1$ píšeme len $-A$. Ďalej definujeme $A + \boldsymbol{a} \coloneqq \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{x} \in A\}$ a *Minkowského súčet* $A + B \coloneqq \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in A, \boldsymbol{y} \in B\}$. V práci budeme často používať jednoduché tvrdenie, že pre konvexnú množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in [0,1]$ platí $A = \alpha A + (1-\alpha)A$ (Schneider, 1993, Remark 1.1.1).

1.2 Brunn-Minkowského nerovnosť

Aby sme mohli dokázať Andersonovu vetu, budeme potrebovať Brunn-Minkowského nerovnosť. Táto nerovnosť hovorí o súvislosti Lebesgueovej miery a Minkowského súčtu množín.

Veta 1.1 (Brunn-Minkowského nerovnosť). *Nech $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ sú konvexné telesá a $\alpha \in [0,1]$, potom platí*

$$(\lambda^n((1-\alpha)A_1 + \alpha A_2))^{1/n} \geq (1-\alpha)(\lambda^n(A_1))^{1/n} + \alpha(\lambda^n(A_2))^{1/n},$$

pričom rovnosť pre $\alpha \in (0,1)$ nastáva práve vtedy, keď A_1 a A_2 sú podobné, teda $tA_1 = A_2 + \boldsymbol{u}$ alebo $tA_2 = A_1 + \boldsymbol{u}$ pre nejaké $t > 0$ a $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$.

Dôkaz. Dôkaz nájdeme napríklad v knihe Schneider (1993, Theorem 6.1.1). Tento dôkaz využíva pokročilú teóriu konvexných telies.

□

Vlastnosť Lebesgueovej miery z Brunn-Minkowského nerovnosti sa v niektorej literatúre nazýva $1/n$-konkávnosť, pretože môžeme zhruba povedať, že zobrazenie $A \mapsto (\lambda^n(A))^{1/n}$ je konkávne.

Poznámka. *Nerovnosť vo vete 1.1 pre $\alpha \in [0,1]$ platí aj za predpokladu, že A_1, A_2 sú neprázdne lebesgueovsky merateľné podmnožiny $\mathbb{R}^n$ také, že $(1-\alpha)A_1 + \alpha A_2$ je tiež lebesgueovsky merateľná. Podmienka merateľnosti množiny $(1-\alpha)A_1 + \alpha A_2$ je skutočne nutná, čo je diskutované v článku Ciesielski a kol. (2001/02).*

Teraz uvedieme príklad, v ktorom ukážeme použitie Brunn-Minkowského vety.

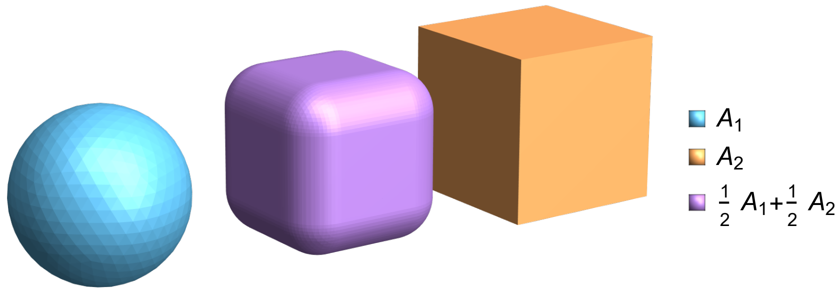
Príklad 2. *Nech $A_1 = B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^3$ je jednotková guľa v $\mathbb{R}^3$ a $A_2 \subset \mathbb{R}^3$ je kocka s dĺžkou hrany 2. Položme $\alpha = 1/2$. Potom platí*

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\lambda^3(A_1)} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\lambda^3(A_2)} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} + 1 \approx 1{,}81.$$

Výpočtom v programe Wolfram Mathematica dostaneme

$$\sqrt[3]{\lambda^3\left(\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2\right)} \approx 1{,}90.$$

Porovnaním týchto dvoch výsledkov vidíme, že Brunn-Minkowského nerovnosť je skutočne splnená. Graficky je daná situácia znázornená na obrázku 1.2.



Obr. 1.2: Situácia z Brunn-Minkowského nerovnosti pre $n = 3$ a $\alpha = 0{,}5$.

1.3 Andersonova veta a jej dôkaz

Teraz môžeme zovšeobecniť pozorovanie zo začiatku kapitoly pre nezáporné funkcie definované na $\mathbb{R}^n$. Zavedieme pojem *kvázikonkávnej* funkcie, *symetrickej* funkcie a *symetrickej* množiny.

Definícia 1.2. *Funkciu $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme* kvázikonkávna*, ak všetky horné úrovňové množiny $K_u := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \geq u\}, u \in \mathbb{R}$ sú konvexné. Funkciu f ďalej nazveme* symetrická*, ak $f(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$ pre každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme* symetrická*, ak $A = -A$.*

Kvázikonkávnu funkciu možno ekvivalentne definovať ako funkciu $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takú, že pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in [0, 1]$ je splnené

$$f((1-\alpha)\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}) \geq \min\{f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\}.$$

Každá konkávna funkcia na $\mathbb{R}^n$ je aj kvázikonkávna, čo plynie z jednoduchého výpočtu

$$f((1-\alpha)\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}) \geq (1-\alpha)f(\boldsymbol{x}) + \alpha f(\boldsymbol{y}) \geq \min\{f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\}.$$

Opačná implikácia neplatí ani v $\mathbb{R}^1$, príkladom je funkcia z príkladu 1. Kvázikonkávnosť je teda rozšírenie pojmu konkávnosti. V nasledujúcom texte budeme pracovať s nezápornými funkciami $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$. Pri nezáporných funkciách zrejme stačí pre overenie kvázikonkávnosti uvažovať K_u pre všetky $u > 0$.

Ďalej ukážeme, že konvexita množiny a kvázikonkávnosť funkcie nám zaručia ich merateľnosť.

Tvrdenie 1.3. *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexná množina, potom $\lambda^n(\partial A) = 0$.*

Dôkaz. Ak $\mathsf{Int}\,(A) = \emptyset$, potom množina A leží v nejakej nadrovine v $\mathbb{R}^n$ (inak by obsahovala n-simplex a teda aj nejaký vnútorný bod) a tvrdenie zrejme platí. Bez újmy na všeobecnosti nech A je obmedzená množina (inak uvažujme konvexné prieniky $A \cap U(\mathbf{0}, k)$ pre $k \in \mathbb{N}$, potom $\partial A \subseteq \cup_{k\in\mathbb{N}} \partial(A \cap U(\mathbf{0}, k))$, čo je množina s nulovou Lebesgueovou mierou ako spočetné zjednotenie množín s nulovou

Lebesgueovou mierou) a nech $\mathbf{0} \in \mathsf{Int}\,(A)$. Zvoľme $\varepsilon \in (0,1)$ a $\boldsymbol{x} \in \partial A$. Potom $\boldsymbol{y} \coloneqq (1-\varepsilon)\boldsymbol{x} \in \mathsf{Int}\,(A)$. Preto $\boldsymbol{x} = \frac{1}{1-\varepsilon}\boldsymbol{y} \in \frac{1}{1-\varepsilon}\mathsf{Int}\,(A)$. Platí teda

$$\partial A \subseteq \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\mathsf{Int}\,(A)\right) \setminus \mathsf{Int}\,(A)\,.$$

Pretože $\mathsf{Int}\,(A)$ je konvexná množina a obsahuje počiatok, platí $\mathsf{Int}\,(A) \subseteq \frac{1}{1-\varepsilon}\mathsf{Int}\,(A)$ a z toho plynie

$$\lambda^n(\partial A) \leq \lambda^n\left(\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\mathsf{Int}\,(A)\right) \setminus \mathsf{Int}\,(A)\right) = \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^n \lambda^n(\mathsf{Int}\,(A)) - \lambda^n(\mathsf{Int}\,(A)).$$

Limitným prechodom $\varepsilon \to 0^+$ dostávame $\lambda^n(\partial A) = 0$.

$\square$

Tvrdenie 1.4. *Každá konvexná množina je lebesgueovsky merateľná.*

Dôkaz. Platí $A = \mathsf{Int}\,(A) \cup (\partial A \cap A)$, kde $\mathsf{Int}\,(A)$ je otvorená a $(\partial A \cap A) \subseteq \partial A$ je množina nulovej Lebesgueovej miery. Preto sú obe tieto množiny lebesgueovsky merateľné a teda aj ich zjednotenie je lebesgueovsky merateľné.

$\square$

Tvrdenie 1.5. *Kvázikonkávna funkcia je lebesgueovsky merateľná.*

Dôkaz. Triviálne plynie z toho, že horné úrovňové množiny sú konvexné a teda lebesgueovsky merateľné.

$\square$

Teraz môžeme sformulovať a dokázať Andersonovu vetu.

Veta 1.6 (Andersonova veta)**.** *Nech*

- $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *je symetrická kvázikonkávna funkcia,*
- $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *je symetrická konvexná množina,*
- $\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} < \infty$.

Potom pre každé $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ *a* $k \in [0,1]$ *platí nerovnosť*

$$\int_E f(\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} \geq \int_E f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}. \tag{1.1}$$

Poznámka. *Nerovnosť* (1.1) *je ekvivalentná nerovnosti*

$$\int_{E+k\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} \geq \int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}.$$

Prvý krok nasledujúceho dôkazu bude sledovať postup naznačený v článku Anderson (1955), ktorý je založený na inklúzii (1.2) uvedenej nižšie a následnom využití Brunn-Minkowského nerovnosti. Do dôkazu sú oproti článku doplnené mnohé medzikroky a vysvetlenia, spolu s druhým krokom.

Dôkaz. Podľa tvrdenia 1.5 oba integrály v (1.1) existujú. Ďalej nech E je uzavretá množina (inak môžeme podľa tvrdenia 1.3 uvažovať $\overline{E}$). Ak $\mathsf{Int}\,(E) = \emptyset$, oba integrály sú nulové. Môžeme teda predpokladať, že E má neprázdny vnútrajšok. Dôkaz ďalej rozdelíme na dva kroky.

Prvý krok. Najskôr nech $f(\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}_C(\boldsymbol{x})$, kde $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je symetrická konvexná množina taká, že $(E+\boldsymbol{y}) \cap C$ je konvexné teleso. Položme $\alpha \coloneqq (1+k)/2$. Ukážeme, že platí inklúzia

$$(E+k\boldsymbol{y}) \cap C \supseteq \alpha\left((E+\boldsymbol{y}) \cap C\right) + (1-\alpha)\left((E-\boldsymbol{y}) \cap C\right). \tag{1.2}$$

Nech $\boldsymbol{x} \in \alpha\left((E+\boldsymbol{y}) \cap C\right) + (1-\alpha)\left((E-\boldsymbol{y}) \cap C\right)$, potom

$$\boldsymbol{x} = \alpha(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{y}) + (1-\alpha)(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}),$$

kde $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in E$ a zároveň $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}-\boldsymbol{y} \in C$. Z konvexity C platí $\boldsymbol{x} \in C$. Podobne z konvexity E plynie

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{v} + (1-\alpha)\boldsymbol{w} + 2\alpha\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{v} + (1-\alpha)\boldsymbol{w} + k\boldsymbol{y} \in E + k\boldsymbol{y},$$

z toho dostaneme $\boldsymbol{x} \in (E+k\boldsymbol{y}) \cap C$.

Z monotónie miery následne plynie

$$\lambda^n\left((E+k\boldsymbol{y}) \cap C\right) \geq \lambda^n\left(\alpha\left((E+\boldsymbol{y}) \cap C\right) + (1-\alpha)\left((E-\boldsymbol{y}) \cap C\right)\right). \tag{1.3}$$

Z predpokladu je $(E+\boldsymbol{y}) \cap C$ konvexné teleso a zo symetrie množín E a C je aj $-\left((E+\boldsymbol{y}) \cap C\right) = (E-\boldsymbol{y}) \cap C$ konvexné teleso. Preto na pravú stranu (1.3) môžeme použiť Brunn-Minkowského vetu 1.1 a dostávame

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda^n\left(\alpha\left((E+\boldsymbol{y}) \cap C\right) + (1-\alpha)\left((E-\boldsymbol{y}) \cap C\right)\right)\right)^{1/n} \\
&\geq \alpha\left(\lambda^n\left((E+\boldsymbol{y}) \cap C\right)\right)^{1/n} + (1-\alpha)\left(\lambda^n\left((E-\boldsymbol{y}) \cap C\right)\right)^{1/n} \\
&= \left(\lambda^n\left((E+\boldsymbol{y}) \cap C\right)\right)^{1/n},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

kde sme využili fakt, že množiny $(E+\boldsymbol{y}) \cap C$ a $(E-\boldsymbol{y}) \cap C$ majú rovnakú mieru, pretože $(E-\boldsymbol{y}) \cap C = -\left((E+\boldsymbol{y}) \cap C\right)$.

Kombináciou nerovností (1.3) a (1.4) dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_{E+k\boldsymbol{y}} \mathbb{1}_C(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} &= \lambda^n\left((E+k\boldsymbol{y}) \cap C\right) \\
&\geq \lambda^n\left((E+\boldsymbol{y}) \cap C\right) \\
&= \int_{E+\boldsymbol{y}} \mathbb{1}_C(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

čo bolo treba ukázať.

Druhý krok. Teraz dokážeme tvrdenie pre ľubovoľnú nezápornú symetrickú kvázikonkávnu funkciu f. S využitím Fubiniho vety A.1 uvedenej v prílohe práce môžeme písať

$$\begin{aligned}
\int_{E+k\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} &= \int_{E+k\boldsymbol{y}} \int_0^{f(\boldsymbol{x})} \mathrm{d}\,u \;\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} \\
&= \int_{E+k\boldsymbol{y}} \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{K_u}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,u \;\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} \\
&= \int_0^{\infty} \int_{E+k\boldsymbol{y}} \mathbb{1}_{K_u}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\,u \\
&= \int_0^{\infty} \lambda^n\left((E+k\boldsymbol{y}) \cap K_u\right)\mathrm{d}\,u,
\end{aligned}$$

rovnakým spôsobom dostaneme

$$\int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} = \int_0^\infty \lambda^n\left((E+\boldsymbol{y})\cap K_u\right)\,\mathrm{d}\,u.$$

Stačí teda ukázať, že $\forall u \in (0,\infty)$ platí

$$\lambda^n\left((E+k\boldsymbol{y})\cap K_u\right) \geq \lambda^n\left((E+\boldsymbol{y})\cap K_u\right). \tag{1.5}$$

Zo symetrie a kvázikonkávnosti funkcie f je K_u symetrická konvexná množina. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že K_u je uzavretá množina (používame tvrdenie 1.3), preto aj $(E+\boldsymbol{y})\cap K_u$ je uzavretá množina ako prienik dvoch uzavretých množín. Ďalej $(E+\boldsymbol{y})\cap K_u$ je konvexná množina ako prienik dvoch konvexných množín.

Ak je $\mathsf{Int}\left((E+\boldsymbol{y})\cap K_u\right)=\emptyset$, pravá strana rovnice (1.5) je nulová (opäť používame tvrdenie 1.3) a veta platí. Nech $\mathsf{Int}\left((E+\boldsymbol{y})\cap K_u\right)\neq\emptyset$. Potom aj $\mathsf{Int}\,(E)\neq\emptyset$ a $\mathsf{Int}\,(K_u)\neq\emptyset$. Zo symetrie a konvexity množiny E a K_u obsahujú počiatok ako vnútorný bod, preto $\mathsf{Int}\,(E\cap K_u)\neq\emptyset$ a teda konvexná množina $E\cap K_u$ musí byť obmedzená, inak by platilo $\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}=\infty$. Platí

$$E\cap K_u \supseteq \frac{1}{2}\left((E+\boldsymbol{y})\cap K_u\right) + \frac{1}{2}\left((E-\boldsymbol{y})\cap K_u\right), \tag{1.6}$$

čo sa ukáže podobne ako v prvom kroku dôkazu (položíme $k=0$, $C=K_u$). Pretože $E\cap K_u$ je obmedzená a $(E-\boldsymbol{y})\cap K_u = -(E+\boldsymbol{y})\cap K_u$ je neprázdna, musí byť aj $(E+\boldsymbol{y})\cap K_u$ obmedzená. Inak by sme sa dostali do sporu vo vzťahu (1.6), pretože Minkowského súčet neobmedzenej a neprázdnej množiny je neobmedzená množina. V tom prípade je ale $(E+\boldsymbol{y})\cap K_u$ konvexné teleso a tvrdenie plynie z prvej časti dôkazu pre $C=K_u$.

$\square$

Na záver tejto kapitoly uvedieme príklad použitia Andersonovej vety 1.6.

Príklad 3. *Nech* $f\colon \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$, $f(x,y)=e^{-|x|-|y|}$ *a* $E=B(\mathbf{0},1)\subset\mathbb{R}^2$ *je jednotková guľa v* $\mathbb{R}^2$. *Potom*

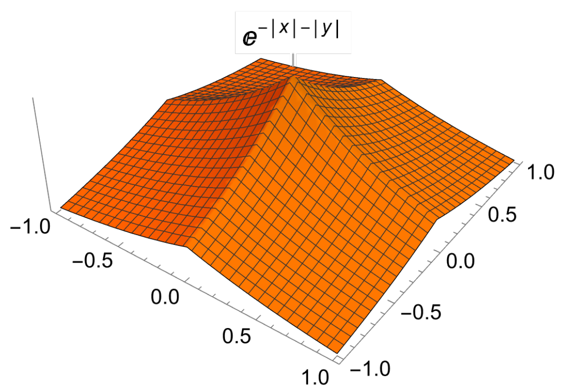
- E *je symetrická konvexná množina,*
- *funkcia* f *je*
  - *symetrická, pretože* $f(-x,-y)=f(x,y)$ *pre každé* $(x,y)^\top\in\mathbb{R}^2$,
  - *kvázikonkávna, pretože*
    - *pre* $u\in(0,1)$ *je* K_u l_1*-guľa v* $\mathbb{R}^2$,
    - *pre* $u=1$ *je* $K_1=\{\mathbf{0}\}$,
    - *pre* $u>1$ *je* $K_u=\emptyset$,

    čo sú konvexné množiny,
- $\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}<\infty$.

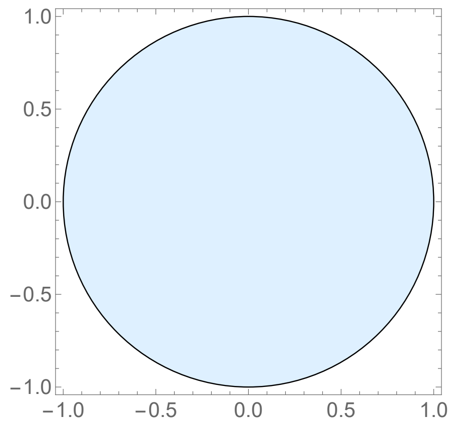
Predpoklady Andersonovej vety 1.6 sú splnené a pre všetky $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ a $k \in [0,1]$ platí

$$\int_{E+k\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} \geq \int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}.$$

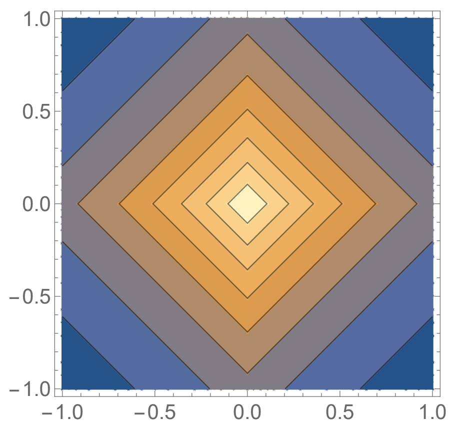
Položme $\boldsymbol{y} = (1,1)^\top$ a označme $g(k) = \int_{E+k\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}$, $k \in [0,1]$. Potom $g(k)$ je nerastúca. Na obrázku 1.3 je znázornený postupne graf funkcie f, množina E, kontúry funkcie f a graf funkcie g.



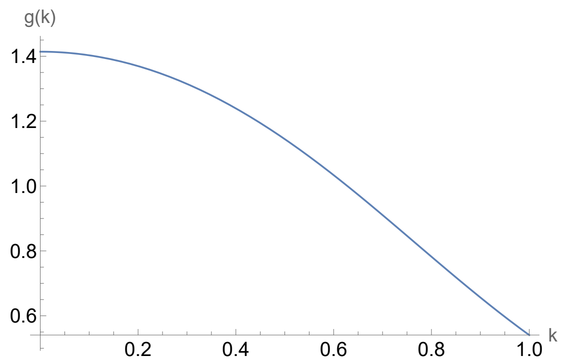
(a) Symetrická funkcia $f(x,y) = \exp(-|x|-|y|)$.



(b) Symetrická konvexná množina $E = B(\mathbf{0},1) \subset \mathbb{R}^2$.



(c) Kontúry funkcie f. Horné úrovňové množiny sú konvexné. Preto f je kvázikonkávna.



(d) Funkcia $g(k) = \int_{E+k\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}, 0 \leq k \leq 1$, kde $\boldsymbol{y} = (1,1)^\top$. Andersonova veta tvrdí, že g je nerastúca.

Obr. 1.3: Príklad použitia Andersonovej vety.

2. Rovnosť v Andersonovej vete

V tejto kapitole nás bude zaujímať, kedy v Andersonovej vete 1.6 nastane rovnosť, teda kedy platí

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} = \int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}$$

a kedy naopak platí

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} > \int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}.$$

Anderson (1955) vo svojom článku uvádza, že rovnosť vo vete 1.6 pre $k \in [0,1)$ nastane práve vtedy, keď

$$(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u = (E \cap K_u) + \boldsymbol{y}, \quad \forall u > 0. \tag{2.1}$$

Aby Anderson odvodil tento vzťah, v dôkaze urobil chybný záver. Predpokladal, že ak $(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u = (E-\boldsymbol{y}) \cap K_u + \boldsymbol{z}$ pre nejaké $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, potom $\boldsymbol{z} = 2\boldsymbol{y}$. Táto implikácia zlyháva napríklad pre $E = \mathbb{R}^n$. Chybu si všimol Soms (1991) a tvrdenie opravil do inej podoby.

2.1 Somsova podmienka pre rovnosť

Soms (1991) vo svojom článku Andersonovu podmienku rovnosti (2.1) vyvrátil protipríkladom s funkciou definovanou na $\mathbb{R}^2$. Protipríklad však možno nájsť už pre $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$.

Príklad 4. *Uvažujme opäť funkciu $f(x) = e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$ z príkladu 1. Ďalej položme $E = \mathbb{R}$. Potom E je symetrická konvexná množina, f je symetrická kvázikonkávna funkcia a $\int_E f(x)\,\mathrm{d}\,x = 2 < \infty$. Pre ľubovoľné $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ a $k \in [0,1]$ platí $E + ky = E = E + y$ a teda v Andersonovej vete 1.6 nastane zrejme rovnosť. Nie je však splnená podmienka* (2.1) *z Andersonovho pôvodného článku*

$$(E+y) \cap K_u = K_u \neq K_u + y = (E \cap K_u) + y$$

pre $u \in (0,1)$.

Ďalej uvedieme správnu podmienku pre rovnosť v Andersonovej vete 1.6. Časť myšlienky dôkazu je prebraná z článku Soms (1991, Theorem 2.1), no tvrdenie sme upravili do inej, silnejšej podoby.

Tvrdenie 2.1 (Rovnosť v Andersonovej vete)**.** *Nech*

- $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *je symetrická kvázikonkávna funkcia,*
- $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *je symetrická konvexná množina s neprázdnym vnútrajškom,*
- $\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} < \infty$,
- $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$,
- *existuje aspoň jedno $u \in (0,\infty)$ také, že $E \cap K_u$ má neprázdny vnútrajšok.*

Potom platí

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} = \int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}$$

práve vtedy, ak pre každé $u \in (0,\infty)$ také, že $E \cap K_u$ má neprázdny vnútrajšok, existuje vektor $\boldsymbol{z}_u \in \mathbb{R}^n$ splňujúci

$$\overline{(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u} = \overline{E \cap K_u} + \boldsymbol{z}_u. \tag{2.2}$$

Poznámka. *V reporte Soms (1984) je uvedené tvrdenie 2.1, no podmienka* (2.2) *je nahradená podmienkou*

$$(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u = (E \cap K_u) + \boldsymbol{z}_u, \tag{2.3}$$

teda neobsahuje uzávery. Autor tvrdí, že taká podmienka je nutná a postačujúca pre rovnosť v Andersonovej vete. V článku Soms (1991) je už podmienka (2.3) *uvedená len ako postačujúca pre rovnosť. Na konci článku je ale uvedené „T. W. Anderson (private communication) has asserted that* (2.3) *is also necessary“. My však ukážeme, že aby bola podmienka pre rovnosť aj nutná, musíme do nej pridať uzávery, tak ako v našom tvrdení 2.1. Mohlo by sa totiž stať, že nie je splnená podmienka* (2.3)*, no rovnosť nastane, pretože je splnená podmienka* (2.2)*. Taký prípad by mohol nastať napríklad, ak by bola množina $E \cap K_u$ uzavretá, no množina $(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u$ by nebola uzavretá, pretože pri posunutí sme stratili nejaký hraničný bod.*

Pre dôkaz budeme potrebovať niekoľko pomocných tvrdení.

Tvrdenie 2.2. *Nech $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$ je funkcia, ktorá je v každom bode zľava spojitá a platí $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$. Potom $f \equiv 0$.*

Dôkaz. Ak $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$ a f je nezáporná, potom podľa tvrdenia A.2 uvedeného v prílohe práce môžeme vzťah $f(x) = 0$ platí λ-skoro všade. Pre spor nech $x_0 \in \mathbb{R}$ je také, že $f(x_0) \neq 0$. Funkcia f je zľava spojitá, preto existuje $\delta > 0$ také, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0] : f(x) > 0$. No $\lambda((x_0 - \delta, x_0]) = \delta > 0$, čo je spor s tým, že $f(x) = 0$ platí λ-skoro všade.

□

Tvrdenie 2.3. *Nech $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sú konvexné telesá také, že $A \subseteq B$ a $\lambda^n(A) = \lambda^n(B)$. Potom $A = B$.*

Dôkaz. Zvoľme $\boldsymbol{x}_0 \in \mathsf{Int}\,(A)$ a nájdime $\varepsilon > 0$ také, že $U(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \subseteq A$. Pre spor nech $\exists\, \boldsymbol{y} \in B \setminus A$. Označme $K = \{t\boldsymbol{y} + (1-t)\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon), t \in [0,1)\}$. Potom K je otvorená množina v B. Ak $K \setminus A = \emptyset$, potom $\boldsymbol{y} \in A$, pretože A je uzavretá a $\boldsymbol{y}$ je limitou postupnosti $\left\{(1-\frac{1}{n})\boldsymbol{y} + \frac{1}{n}\boldsymbol{x}_0\right\}_{n=1}^{\infty}$ bodov množiny $K \subseteq A$, čo je spor. Nech $K \setminus A \neq \emptyset$, no $K \setminus A$ je otvorená neprázdna množina v B, preto $0 < \lambda^n(K \setminus A) \leq \lambda^n(B \setminus A)$, čo je spor s tým, že $\lambda^n(A) = \lambda^n(B)$.

□

Tvrdenie 2.4. *Nech $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, potom $\overline{A+B} \supseteq \overline{A} + \overline{B}$.*

Dôkaz. Bez újmy na všeobecnosti nech $\overline{A} + \overline{B} \neq \emptyset$. Zvoľme $\boldsymbol{z} \in \overline{A} + \overline{B}$. Potom $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ pre nejaké $\boldsymbol{a} \in \overline{A}$ a $\boldsymbol{b} \in \overline{B}$. Preto musí existovať postupnosť $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1}^{\infty}$ prvkov množiny A a postupnosť $\{\boldsymbol{b}_i\}_{i=1}^{\infty}$ prvkov množiny B také, že $\boldsymbol{a}_i \to \boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}_i \to \boldsymbol{b}$. Potom ale $\boldsymbol{z}_i \coloneqq \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i, i \in \mathbb{N}$ je postupnosť prvkov množiny $A + B$ taká, že $\boldsymbol{z}_i \to \boldsymbol{z}$, preto $\boldsymbol{z} \in \overline{A + B}$.

□

Teraz môžeme pristúpiť k dôkazu tvrdenia 2.1 o rovnosti v Andersonovej vete.

Dôkaz vety 2.1. Z dôkazu Andersonovej vety 1.6 vidíme, že v nej nastane rovnosť pre $k = 0$ práve vtedy, ak

$$\int_0^{\infty} (\lambda^n(E \cap K_u) - \lambda^n((E + \boldsymbol{y}) \cap K_u))\, \mathrm{d}\, u = 0. \tag{2.4}$$

Ďalej vieme, že zobrazenie $u \mapsto \lambda^n(E \cap K_u) - \lambda^n((E + \boldsymbol{y}) \cap K_u)$, $u \in (0, \infty)$ je nezáporné (to plynie z prvého kroku dôkazu Andersonovej vety 1.6) a zľava spojité zo spojitosti miery (tvrdenie A.3 v prílohe práce, využívame fakt, že $\int_E f(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\, \boldsymbol{x} < \infty$, teda $\lambda^n(E \cap K_u) < \infty$ pre každé $u > 0$).

Podľa tvrdenia 2.2 je teda rovnosť (2.4) ekvivalentná tomu, že pre každé $u > 0$ nastane rovnosť

$$\lambda^n(E \cap K_u) = \lambda^n((E + \boldsymbol{y}) \cap K_u),$$

pričom z Andersonovej vety 1.6 je nerovnosť

$$\lambda^n(E \cap K_u) \geq \lambda^n((E + \boldsymbol{y}) \cap K_u)$$

splnená. Z toho všetkého plynie, že rovnosť v Andersonovej vete 1.6 je ekvivalentná nerovnosti

$$\lambda^n(E \cap K_u) \leq \lambda^n((E + \boldsymbol{y}) \cap K_u) \text{ pre každé } u > 0.$$

Implikácia $\implies$ Nech $\int_E f(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\, \boldsymbol{x} = \int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\, \boldsymbol{x}$. Podľa vyššie uvedenej diskusie pre každé $u > 0$ platí $\lambda^n(E \cap K_u) = \lambda^n((E + \boldsymbol{y}) \cap K_u)$. Nech $u > 0$ je také, že $E \cap K_u$ má neprázdny vnútrajšok. Potom musí byť konvexná množina $E \cap K_u$ obmedzená, inak by platilo $\int_E f(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\, \boldsymbol{x} = \infty$. Potom aj konvexná množina $(E + \boldsymbol{y}) \cap K_u$ má neprázdny vnútrajšok a je obmezená, inak by neplatilo $\lambda^n(E \cap K_u) = \lambda^n((E + \boldsymbol{y}) \cap K_u)$. Podľa tvrdenia 1.3 platí

$$\lambda^n\left((E + \boldsymbol{y}) \cap K_u\right) = \lambda^n\left(\overline{(E + \boldsymbol{y}) \cap K_u}\right),$$
$$\lambda^n(E \cap K_u) = \lambda^n\left(\overline{E \cap K_u}\right).$$

Máme teda

$$\lambda^n\left(\overline{E \cap K_u}\right) = \lambda^n\left(\overline{(E + \boldsymbol{y}) \cap K_u}\right), \tag{2.5}$$

kde $\overline{E \cap K_u}$ a $\overline{(E + \boldsymbol{y}) \cap K_u}$ sú konvexné telesá ako uzávery konvexných obmezených množín s neprázdnym vnútrajškom. Množina $\overline{(E - \boldsymbol{y}) \cap K_u} = -\overline{(E + \boldsymbol{y}) \cap K_u}$ je teda tiež s použitím symetrie množín E a K_u konvexné teleso. Pretože podľa tvrdenia 2.4 pre $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ platí $\overline{A + B} \supseteq \overline{A} + \overline{B}$, z inklúzie (1.2) v Andersonovej vete pre $\alpha = 1/2$ plynie

$$\begin{aligned}\overline{E \cap K_u} &\supseteq \overline{\frac{1}{2}\left((E+\boldsymbol{y}) \cap K_u\right) + \frac{1}{2}\left((E-\boldsymbol{y}) \cap K_u\right)} \\ &\supseteq \frac{1}{2}\overline{(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u} + \frac{1}{2}\overline{(E-\boldsymbol{y}) \cap K_u}, \quad (2.6)\end{aligned}$$

pričom posledná množina je konvexné teleso ako Minkowského súčet konvexných telies. Rovnako ako v dôkaze Andersonovej vety, aj tu musí platiť

$$\lambda^n\left(\overline{E \cap K_u}\right) \geq \lambda^n\left(\frac{1}{2}\overline{(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u} + \frac{1}{2}\overline{(E-\boldsymbol{y}) \cap K_u}\right) \quad (2.7)$$
$$\geq \lambda^n\left(\overline{(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u}\right). \quad (2.8)$$

Aby nastala rovnosť v (2.7), z inklúzie (2.6) a tvrdenia 2.3 dostávame podmienku

$$\overline{E \cap K_u} = \frac{1}{2}\overline{(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u} + \frac{1}{2}\overline{(E-\boldsymbol{y}) \cap K_u}. \quad (2.9)$$

Aby ďalej nastala rovnosť v (2.8), z Brunn-Minkowského vety 1.1 dostávame podmienku

$$\overline{(E-\boldsymbol{y}) \cap K_u} = \overline{(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u} + \boldsymbol{z}_0, \quad (2.10)$$

pre nejaké $\boldsymbol{z}_0 \in \mathbb{R}^n$. Po dosadení (2.10) do (2.9) dostaneme

$$\begin{aligned}\overline{E \cap K_u} &= \frac{1}{2}\overline{(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u} + \frac{1}{2}\left(\overline{(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u} + \boldsymbol{z}_0\right) \\ &= \overline{(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u} + \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{0}}/2,\end{aligned}$$

kde sme využili konvexitu množiny $\overline{(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u}$. Môžeme položiť $\boldsymbol{z}_u = -\boldsymbol{z}_0/2$ a tým je dokázaná prvá implikácia. Teda za daných predpokladov je podmienka (2.2) nutná pre rovnosť v Andersonovej vete.

Implikácia $\Longleftarrow$ Nech pre každé $u > 0$ také, že $E \cap K_u$ má neprázdny vnútrajšok existuje $\boldsymbol{z}_u \in \mathbb{R}^n$ také, že $\overline{(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u} = \overline{E \cap K_u} + \boldsymbol{z}_u$. Podľa diskusie na začiatku dôkazu tohto tvrdenia stačí ukázať, že $\lambda^n(E \cap K_u) \leq \lambda^n((E+\boldsymbol{y}) \cap K_u)$ pre každé $u > 0$.

Nech $u > 0$ je také, že $E \cap K_u$ má prázdny vnútrajšok. Potom podľa tvrdenia 1.3 je $\lambda^n(E \cap K_u) = 0$ a tvrdenie triviálne platí.

Naopak, uvažujme $u > 0$ také, že $E \cap K_u$ má neprázdny vnútrajšok. Potom $\overline{E \cap K_u}$ je konvexné teleso. Nech $\boldsymbol{z}_u \in \mathbb{R}^n$ je také, že

$$\overline{(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u} = \overline{E \cap K_u} + \boldsymbol{z}_u.$$

Zo symetrie množín E, K_u platí

$$(E-\boldsymbol{y}) \cap K_u = (-E-\boldsymbol{y}) \cap (-K_u) = -\left((E+\boldsymbol{y}) \cap K_u\right),$$

z toho plynie, že

$$\overline{(E-\boldsymbol{y}) \cap K_u} = -\overline{(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u} = -\overline{E \cap K_u} - \boldsymbol{z}_u = \overline{E \cap K_u} - \boldsymbol{z}_u.$$

Z uvedeného výpočtu dostaneme

$$\frac{1}{2}\overline{(E+\boldsymbol{y})\cap K_u}+\frac{1}{2}\overline{(E-\boldsymbol{y})\cap K_u}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overline{E\cap K_u}+\boldsymbol{z}_u\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{E\cap K_u}-\boldsymbol{z}_u\right)=\overline{E\cap K_u}, \quad (2.11)$$

kde sme využili konvexitu množiny $\overline{E\cap K_u}$. Tiež platí

$$\overline{(E+\boldsymbol{y})\cap K_u}=\overline{E\cap K_u}+\boldsymbol{z}_u=\overline{(E-\boldsymbol{y})\cap K_u}+2\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{u}}. \quad (2.12)$$

Nakoniec si stačí uvedomiť, že z rovnosti (2.11) plynie rovnosť v (2.7) a z rovnosti (2.12) plynie vďaka Brunn-Minkowského vete 1.1 rovnosť v (2.8). Teda platí $\lambda^n(\overline{E\cap K_u})=\lambda^n(\overline{(E+\boldsymbol{y})\cap K_u})$. Podľa tvrdenia 1.3 platí aj $\lambda^n(E\cap K_u)=\lambda^n((E+\boldsymbol{y})\cap K_u)$, čo dokončuje dôkaz.

□

Vektor $\boldsymbol{z}_u$ z tvrdenia 2.1 môže nadobúdať rôzne hodnoty. Význačné sú dva prípady

- $\overline{E\cap K_u}=\overline{E} \implies \boldsymbol{z}_u=\boldsymbol{y}$,
- $\overline{E\cap K_u}=\overline{K_u} \implies \boldsymbol{z}_u=\boldsymbol{0}$.

Ak $f\colon \mathbb{R}\to[0,\infty)$, potom E a K_u sú dva symetrické intervaly a preto nastane jedna z vyššie uvedených možností, teda z_u môže nadobúdať len hodnoty y a 0. Pre $f\colon \mathbb{R}^n\to[0,\infty)$, $n\geq 2$ môže vektor $\boldsymbol{z}_u$ nadobúdať aj iné hodnoty. To ukážeme v nasledujúcom príklade.

Príklad 5. *Uvažujme* $f\colon \mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ *danú predpisom*

$$f(x_1,x_2)=\exp(-|x_1|).$$

Ďalej položme $E=\left\{(x_1,x_2)^\top\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leq x_2\leq 1\right\}$ *a* $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^\top\in\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$. *Potom platí*

$$K_u=\left\{(x_1,x_2)^\top\in\mathbb{R}^2 \mid \exp(-|x_1|)\geq u\right\}$$
$$=\left\{(x_1,x_2)^\top\in\mathbb{R}^2 \mid \log(u)\leq x_1\leq -\log(u)\right\}$$

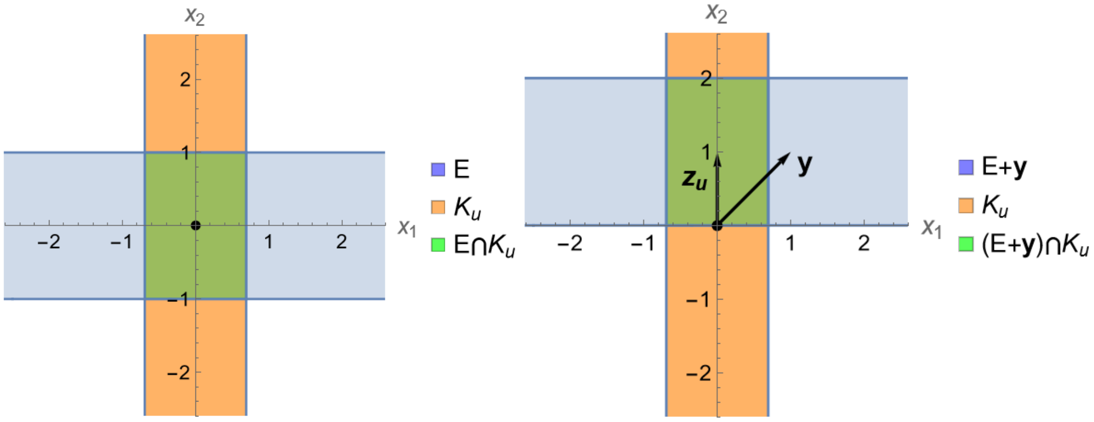
pre $u\in(0,1]$ *a* $K_u=\emptyset$ *pre* $u>1$. *Tiež zrejme platí* $\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}<\infty$. *Teda sú splnené predpoklady tvrdenia 2.1. Pre* $u\in(0,1)$ *má* $E\cap K_u$ *neprázdny vnútrajšok a platí*

$$(E+\boldsymbol{y})\cap K_u=E\cap K_u+(0,y_2)^\top,$$

čo je vidieť z obrázku 2.1, kde je situácia znázornená pre $u=1/2$. *Máme teda* $\boldsymbol{z}_u=(0,y_2)^\top$. *Podľa tvrdenia 2.1 teda platí rovnosť*

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}=\int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}.$$

Tento príklad možno považovať za ďalší protipríklad Andersonovej chybnej podmienky pre rovnosť (2.1).



Obr. 2.1: Príklad 5: Protipríklad Andersonovej podmienky pre rovnosť (2.1). Platí $(E + \boldsymbol{y}) \cap K_u = E \cap K_u + \boldsymbol{z}_u \neq E \cap K_u + \boldsymbol{y}$.

2.2 Podmienka pre ostrú nerovnosť

V tejto sekcii sa zameriame na otázku, kedy v Andersonovej vete nastane ostrá nerovnosť. Na začiatok definujeme niekoľko pojmov.

Definícia 2.5. *Pre funkciu $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ definujeme jej* nosič *ako množinu*

$$S_f \coloneqq \overline{\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) > 0\}}.$$

Definícia 2.6. *Množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme* striktne konvexná*, ak pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ a $\alpha \in (0,1)$ platí*

$$\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \in \mathsf{Int}\,(A)\,.$$

Nasledujúce tvrdenie pochádza z článku Jogdeo (1970). Ukážeme, že tvrdenie je formulované nesprávne a jeho dôkaz nie je korektný.

Tvrdenie (nesprávne) 2.7 (Jodgeo)**.** *Nech*

- *$f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ je symetrická kvázikonkávna funkcia,*
- *$\mathsf{Int}\,(S_f) \neq \emptyset$,*
- *$\forall \boldsymbol{x} \in S_f, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ a $\forall k \in [0,1)$ je $f(k\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x})$ (f je striktne unimodálna),*
- *$E \subseteq S_f$ je* obmedzená *symetrická konvexná množina taká, že $\mathsf{Int}\,(E) \neq \emptyset$.*

Potom pre ľubovoľný nenulový vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ a všetky $k \in [0,1)$ platí

$$\int_{E+k\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} > \int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}.$$

Prvý problém s uvedeným tvrdením je jeho záver. Ten nám v podstate hovorí, že zobrazenie $k \mapsto \int_{E+k\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}$ je striktne klesajúce na intervale $[0,1]$ pre ľubovoľný vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$. Za predpokladov však môže nastať prípad, že

S_f je obmedzená množina a pre dostatočne „veľký“ vektor $\boldsymbol{y}$ a $k \in (0,1)$ bude platiť $(E + k\boldsymbol{y}) \cap S_f = \emptyset$, potom aj $(E + \boldsymbol{y}) \cap S_f = \emptyset$ a teda

$$\int_{E+k\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} = \int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} = 0,$$

čo je v spore s tvrdením. Autor možno uvažoval len také $\boldsymbol{y}$, že $\int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} > 0$. Tento problém sa pokúsime opraviť v domnienke 2.8.

Ďalší problém s Jodgeovým tvrdením je jeho dôkaz, ktorý sa opiera o pôvodnú Andersonovu podmienku rovnosti, ktorá je chybná. Zaujímavá je chronológia udalostí. V roku 1955 Anderson napísal článok, v ktorom uvedie okrem svojej vety aj podmienku pre rovnosť (2.1). V roku 1970 Jodgeo napísal článok, kde uvádza predpoklady, za ktorých nastane ostrá nerovnosť. Neskôr Soms v roku 1984 píše report s opravenou podmienkou rovnosti, no jeho upravená verzia bez jednej implikácie sa dostane do vydania až v roku 1991.

V skratke, Jodgeo v dôkaze tvrdenia 2.7 nájde $u > 0$ také, že nemôže platiť $(E+\boldsymbol{y}) \cap K_u = E \cap K_u + \boldsymbol{y}$, teda nie je splnená Andersonova podmienka (2.1). To však nie je postačujúce pre ostrú nerovnosť, ako je vidieť napríklad v príklade 5.

Tvrdenie 2.7 by sme teda mohli upraviť nasledujúcim spôsobom na domnienku 2.8.

Domnienka 2.8. *Nech sú splnené predpoklady tvrdenia 2.7. Potom pre každý nenulový vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ taký, že $\int_{E+y} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} > 0$ platí*

$$\int_{E+k\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} > \int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} \text{ pre každé } k \in [0,1)\,.$$

Pretože je Jodgeov argument chybný, uvedená domnienka zostáva otvoreným problémom, ktorý sa nám do odovzdania práce nepodarilo vyriešiť. Ak však ešte pridáme ďalšie predpoklady, dostávame nasledujúce tvrdenie. Jeho dôkaz je vlastným prínosom v práci.

Tvrdenie 2.9. *Nech sú splnené predpoklady tvrdenia 2.7 a nech naviac platí*

- *f je spojitá funkcia,*
- *K_{u_0} je striktne konvexná, kde $u_0 = \min\left\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \overline{E}\right\} > 0$.*

Potom pre ľubovoľný nenulový vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} > \int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} \tag{2.13}$$

Dôkaz. Pretože f je spojitá, K_u je uzavretá množina pre všetky $u > 0$. Pretože E je podľa predpokladu obmedzená a f je obmedzená hodnotou $f(\mathbf{0})$, platí $\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} < \infty$.

Ďalej pretože f je spojitá a $\overline{E}$ je kompaktná množina, f nadobúda na $\overline{E}$ minimum. Označme $\boldsymbol{v}$ ľubovoľný bod, v ktorom sa nadobúda minimum. Potom $u_0 = f(\boldsymbol{v})$ a z podmienky striktnej unimodality plynie $\boldsymbol{v} \in \partial E$. Zrejme $E \subseteq K_{u_0}$ a zo striktnej unimodality $\boldsymbol{v} \in \partial K_{u_0}$. Vektor $\boldsymbol{v}$ teda náleží do prieniku $\partial E \cap \partial K_{u_0}$. Zo symetrie množín K_{u_0} a E platí aj $-\boldsymbol{v} \in \partial E \cap \partial K_{u_0}$.

Ďalej v bodoch $\pm\boldsymbol{v}$ zostrojíme oporné nadroviny k množine K_{u_0}. Tie možno zo symetrie voliť tak, aby boli rovnobežné. Použime teda tvrdenie A.5 z prílohy práce. Pretože $\boldsymbol{v} \in \partial K_{u_0}$, nájdeme nenulový vektor $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ taký, že

$$\boldsymbol{h}^\top(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in K_{u_0}. \tag{2.14}$$

Zo symetrie množiny K_{u_0} tiež platí

$$\boldsymbol{h}^\top(\boldsymbol{x} - (-\boldsymbol{v})) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in K_{u_0}. \tag{2.15}$$

Pretože K_{u_0} je podľa predpokladu striktne konvexná a je uzavretá kvôli spojitosti, rovnosť v (2.14) nastane len pre $\boldsymbol{v}$ a rovnosť v (2.15) nastane len pre $-\boldsymbol{v}$. V opačnom prípade by množina K_{u_0} obsahovala na svojej hranici priamku.

Pre spor nech nastane rovnosť v (2.13). Potom $E \cap K_{u_0} = E$ má neprázdny vnútrajšok podľa predpokladu. Predpoklady tvrdenia 2.1 sú splnené a preto musí existovať $\boldsymbol{z}_0 \in \mathbb{R}^n$ taký, že

$$\overline{(E + \boldsymbol{y}) \cap K_u} = \overline{E \cap K_u} + \boldsymbol{z}_0 = \overline{E} + \boldsymbol{z}_0.$$

Z toho ale plynie, že $\overline{E} + \boldsymbol{z}_0 \subseteq \overline{E + \boldsymbol{y}} = \overline{E} + \boldsymbol{y}$, teda $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{y}$, pretože E je obmedzená. Preto ale platí

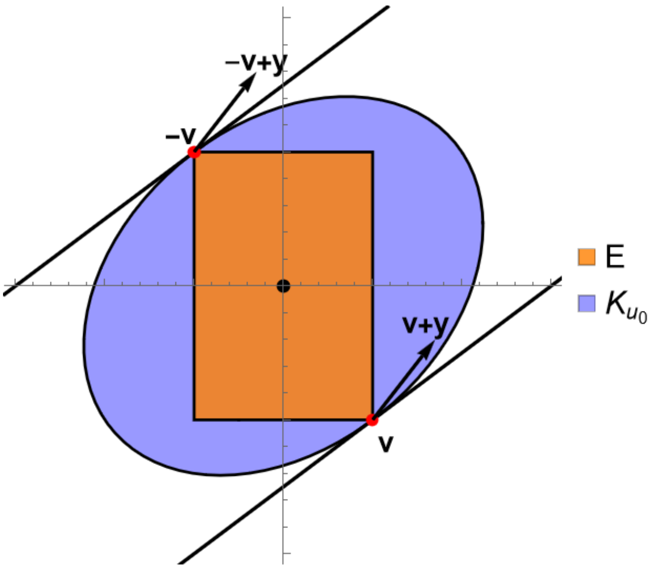
$$\overline{E} + \boldsymbol{y} \subseteq \overline{K_{u_0}} = K_{u_0},$$

teda pre všetky $\boldsymbol{x} \in \overline{E}$ platí $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in K_{u_0}$. Špeciálne je táto vlastnosť splnená pre $\pm\boldsymbol{v} \in \overline{E}$. Pretože $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, po dosadení $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{y}$ do (2.14) a $-\boldsymbol{v} + \boldsymbol{y}$ do (2.15) dostaneme

$$\boldsymbol{h}^\top(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{h}^\top\boldsymbol{y} < 0,$$
$$\boldsymbol{h}^\top(-\boldsymbol{v} + \boldsymbol{y} - (-\boldsymbol{v})) = \boldsymbol{h}^\top\boldsymbol{y} > 0,$$

čo je spor. Preto v (2.13) nastane ostrá nerovnosť. Graficky je myšlienka dôkazu znázornená na obrázku 2.2.

$\square$



Obr. 2.2: Tvrdenie 2.9. Striktná konvexita K_{u_0} nám zaručí ostrú nerovnosť v Andersonovej vete.

Poznámka. *Ak by sme v tvrdení 2.9 nepredpokladali striktnú konvexitu množiny* K_{u_0}*, získali by sme podmienku* $\boldsymbol{h}^\top \boldsymbol{y} = 0$*. To by mohlo byť užitočné v dôkaze domnienky 2.8.*

Príkladom funkcií, ktoré spĺňajú predpoklady tvrdenia 2.9 sú hustoty n-rozmerného normálneho rozdelenia s nulovou strednou hodnotou a pozitívne definitnou variančnou maticou. V takom prípade sú K_u symetrické (vzhľadom k počiatku) n-rozmerné elipsoidy, teda striktne konvexné množiny.

Poznámka. *V tvrdení 2.9 predpokladáme spojitosť funkcie* f*. To sme v dôkaze využili k tomu, aby sme ukázali, že* f *nadobúda na kompaktnej množine minimum. Túto vlastnosť však majú aj zdola polospojité funkcie. Funkciu* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *nazveme zdola polospojitá, ak sú množiny* $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \leq u\}$ *uzavreté pre všetky* $u \in \mathbb{R}$*. Každá spojitá funkcia je zrejme aj zdola polospojitá, opačná implikácia neplatí. Preto by v tvrdení 2.9 stačilo predpokladať zdola polospojitú funkciu a dôkaz by vyzeral analogicky.*

3. Predpoklady a rozšírenia Andersonovej vety

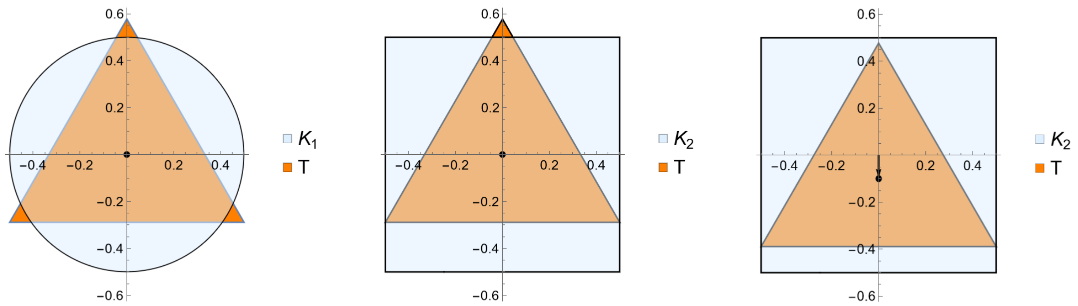
V tejto kapitole odpovieme na otázky, či sú predpoklady Andersonovej vety skutočne potrebné a ako prípadne môžeme Andersonovu vetu rozšíriť.

3.1 Nutnosť predpokladov

V Andersonovej vete 1.6 predpokladáme symetriu funkcie f a množiny E. To môže byť často obmedzujúce, napríklad ak by sme chceli integrovať cez taký jednoduchý útvar, ako je rovnostranný trojuholník, ktorý nie je symetrickou množinou v zmysle definície 1.2, ale disponuje tromi osovými symetriami.

Poznámka. *Ťažiskom konvexného telesa rozumieme strednú hodnotu rovnomerného rozdelenia na danom konvexnom telese.*

Intuitívne by nám mohlo napadnúť namiesto symetrie množiny E predpokladať, že E je konvexné teleso centrované jeho ťažiskom v počiatku. Ukazuje sa však, že predpoklady symetrie množiny E a funkcie f vystupujú v Andersonovej vete súmerne a preto by taká úprava predpokladov nebola korektná.



(a) Optimálna poloha množiny T.

(b) Neoptimálna poloha množiny T.

(c) Jedno z optimálnych posunutí množiny T.

Obr. 3.1: Príklad 6: Maximálny obsah prieniku dvojice konvexných telies v $\mathbb{R}^2$ pre dva príklady telies. Nie vždy je optimálne centrovať telesá ťažiskom do počiatku.

Príklad 6. *Uvažujme*

- $T \subset \mathbb{R}^2$ *rovnostranný trojuholník s dĺžkou hrany* 1,
- $K_1 \subset \mathbb{R}^2$ *kruh s polomerom* 0,5,
- $K_2 \subset \mathbb{R}^2$ *štvorec s dĺžkou strany* 1,

pričom poloha jednotlivých množín je znázornená na obrázku 3.1a a 3.1b. Položme $f_1(\boldsymbol{x}) := \mathbb{1}_{K_1}(\boldsymbol{x})$ *a* $f_2(\boldsymbol{x}) := \mathbb{1}_{K_2}(\boldsymbol{x})$. *Potom*

- $\int_{T+\boldsymbol{y}} f_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda^2\left((T+\boldsymbol{y}) \cap K_1\right)$ *bude maximálny pre* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. *To plynie z teórie v sekcii 3.2 a je to ukázané v príklade 8. Graficky je táto situácia znázornená na obrázku 3.1a.*

- *$\int_{T+\boldsymbol{y}} f_2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} = \lambda^2\left((T+\boldsymbol{y})\cap K_2\right)$ bude mať pre $\boldsymbol{y} = (0,-1/10)^\top$ zrejme väčšiu hodnotu, než pre $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. Táto situácia je znázornená na obrázkoch 3.1b a 3.1c.*

Je však možné rozšíriť tvrdenie Andersonovej vety tak, že nahradíme symetriu funkcie f a množiny E iným typom symetrie. Toto rozšírenie podrobne rozoberieme v sekcii 3.2. Neskôr v sekcii 3.3 ukážeme ako je možné nahradiť predpoklad kvázikonkávnosti funkcie f tak, aby sme nemuseli predpokladať žiadnu symetriu množiny E a funkcie f.

V Andersonovej vete tiež predpokladáme konvexitu množiny E. V nasledujúcom príklade ukážeme, že predpoklad konvexity množiny E je potrebný.

Príklad 7. *Uvažujme medzikružie $E = B(\boldsymbol{0},2)\setminus B(\boldsymbol{0},1)\subset\mathbb{R}^2$ a $K = B(\boldsymbol{0},1)$. Potom funkcia $f(\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}_K(\boldsymbol{x})$ je zrejme symetrická kvázikonkávna a E je symetrická množina, ktorá však nie je konvexná. Položme $\boldsymbol{y} = (1/2,0)^\top$. Potom platí*

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} = \lambda^2\left(E\cap K\right) = \lambda^2(\emptyset) = 0$$

a zároveň

$$\int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} = \lambda^2\left((E+\boldsymbol{y})\cap K\right) > 0,$$

pretože $\mathsf{Int}\left((E+\boldsymbol{y})\cap K\right)\neq\emptyset$, *ako je vidieť z obrázku 3.2b.*

(a) $\lambda^2(E\cap K) = 0$.

(b) $\lambda^2((E+\boldsymbol{y})\cap K) > 0$.

Obr. 3.2: Konvexita množiny E je v Andersonovej vete zásadná.

3.2 Rozšírenie predpokladov symetrie

Aby sme mohli rozšíriť predpoklady symetrie v Andersonovej vete, zavedieme nasledujúce pojmy.

Definícia 3.1. *Nech $g\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ je lineárny operátor. Hovoríme, že g* zachováva Lebesgueovu mieru*, ak pre každú merateľnú množinu $A\subseteq\mathbb{R}^n$ platí*

$$\lambda^n(g(A)) = \lambda^n(A).$$

Ďalej hovoríme, že grupa G lineárnych operátorov na $\mathbb{R}^n$ zachováva Lebesgueovu mieru*, ak každý prvok $g\in G$ zachováva Lebesgueovu mieru.*

Poznámka. *Lineárny operátor* $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *zachováva Lebesgueovu mieru práve vtedy, keď* $|\det \Lambda| = 1$, *kde* Λ *je matica lineárneho operátoru* g.

Medzi lineárne operátory zachovávajúce Lebesgueovu mieru patria napríklad rotácie okolo počiatku, osové symetrie, alebo permutácie zložiek vektoru.

Definícia 3.2. *Nech* G *je grupa lineárnych operátorov na* $\mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *a* $E \subseteq \mathbb{R}^n$. *Potom hovoríme, že*

- *množina* E *je* G-invariantná, *ak* $E = g(E)$ *pre každé* $g \in G$,
- *funkcia* f *je* G-invariantná, *ak* $f(g(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x})$ *pre každé* $g \in G$ *a pre každý vektor* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Z definície jednoducho plynie nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 3.3. *Ak je funkcia* f G*-invariantná, potom všetky horné úrovňové množiny* K_u, $u \in \mathbb{R}$ *funkcie* f *sú* G*-invariantné.*

Teraz uvedieme vetu inšpirovanú Andersonovou vetou, ktorá bude predpokladať G-invarianciu množiny E a funkcie f. Nižšie uvedený dôkaz sleduje postup z článku Mudholkar (1966, Theorem 2), je analogický dôkazu Andersonovej vety 1.6 a sú v ňom doplnené medzikroky a vysvetlenia.

Veta 3.4 (Mudholkar)**.** *Nech* $G = \{g_1, \dots, g_N\}$ *je konečná grupa lineárnych operátorov na* $\mathbb{R}^n$, *ktorá zachováva Lebesgueovu mieru. Ďalej predpokladáme, že*

- $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *je* G*-invariantná konvexná množina,*
- $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ *je* G*-invariantná kvázikonkávna funkcia,*
- $\int_E f(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} < \infty$,
- $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^N$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, \dots, N\}$.

Potom pre každý vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ *platí nerovnosť*

$$\int_E f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{y})) \,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} \geq \int_E f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}, \tag{3.1}$$

kde

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{y}) \coloneqq \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i(\boldsymbol{y}).$$

Poznámka. *Nerovnosť* (3.1) *je ekvivalentná nerovnosti*

$$\int_{E+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{y})} f(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} \geq \int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}.$$

Andersonova veta 1.6 je dôsledkom vety 3.4 pre grupu G *zloženú zo zobrazení definovaných maticami* $\pm \boldsymbol{I}_n$.

Dôkaz. Budeme postupovať podobne ako v dôkaze Andersonovej vety 1.6. Bez újmy na všeobecnosti môžeme vďaka tvrdeniu 1.3 predpokladať, že E je uzavretá. Ak $\mathsf{Int}\,(E) = \emptyset$, oba integrály sú nulové a tvrdenie platí. Nech teda E má neprázdny vnútrajšok. Ďalej dôkaz rozdelíme do dvoch krokov.

Prvý krok. Najskôr predpokladajme, že $f(\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}_C(\boldsymbol{x})$, kde $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je G-invariantná konvexná množina taká, že $(E + g_i(\boldsymbol{y})) \cap C$ sú konvexné telesá pre všetky $i = 1, \ldots, N$.

Ukážeme, že platí inklúzia

$$(E + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{y})) \cap C \supseteq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left((E + g_i(\boldsymbol{y})) \cap C \right),$$

kde symbolom $\sum$ rozumieme zovšeobecnenie Minkowského súčtu pre konečne mnoho množín. Z toho bude plynúť

$$\lambda^n \left((E + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{y})) \cap C \right) \geq \lambda^n \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left((E + g_i(\boldsymbol{y})) \cap C \right) \right). \tag{3.2}$$

Nech $\boldsymbol{x} \in \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left((E + g_i(\boldsymbol{y})) \cap C \right)$, potom $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\boldsymbol{x}_i + g_i(\boldsymbol{y}) \right)$, kde $\boldsymbol{x}_i \in E$ a $\boldsymbol{x}_i + g_i(\boldsymbol{y}) \in C$, $i = 1, \ldots, N$. Potom $\boldsymbol{x} \in C$, pretože C je konvexná. Môžeme písať $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{y})$ a pretože E je konvexná, musí tiež platiť $\boldsymbol{x} \in E + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{y})$.

Pretože predpokladáme, že $(E + g_i(\boldsymbol{y})) \cap C$ sú konvexné telesá, môžeme použiť zovšeobecnenú verziu Brunn-Minkowského nerovnosti pre Minkowského súčet N množín. Tým dostaneme

$$\left(\lambda^n \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left((E + g_i(\boldsymbol{y})) \cap C \right) \right) \right)^{\frac{1}{n}} \geq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\lambda^n \left((E + g_i(\boldsymbol{y})) \cap C \right) \right)^{\frac{1}{n}},$$

pričom pravú stranu môžeme sčítať podľa nasledujúceho

$$\begin{aligned} \lambda^n \left((E + g_i(\boldsymbol{y})) \cap C \right) &= \lambda^n \left((g(E) + g_i(\boldsymbol{y})) \cap g(C) \right) \\ &= \lambda^n \left(g \left((E + \boldsymbol{y}) \cap C \right) \right) \\ &= \lambda^n \left((E + \boldsymbol{y}) \cap C \right), \end{aligned}$$

kde v prvej rovnosti sme využili G-invarianciu množín E a C, v druhej rovnosti sme využili linearitu operátoru g a v poslednej rovnosti fakt, že g zachováva Lebesgueovu mieru. Pretože $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, spolu dostávame

$$\lambda^n \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left((E + g_i(\boldsymbol{y})) \cap C \right) \right) \geq \lambda^n \left((E + \boldsymbol{y}) \cap C \right). \tag{3.3}$$

Kombináciou vzťahov (3.2) a (3.3) dostávame

$$\lambda^n \left((E + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{y})) \cap C \right) \geq \lambda^n \left((E + \boldsymbol{y}) \cap C \right).$$

Druhý krok. Teraz dokážeme tvrdenie pre ľubovoľnú nezápornú G-invariantnú kvázikonkávnu funkciu f. Podobne ako v Andersonovej vete 1.6 stačí ukázať, že $\forall u \in (0, \infty)$ platí

$$\lambda^n \left((E + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{y})) \cap K_u \right) \geq \lambda^n \left((E + \boldsymbol{y}) \cap K_u \right). \tag{3.4}$$

Zo symetrie funkcie f je K_u konvexná G-invariantná množina a bez újmy na všeobecnosti môžeme tak ako v dôkaze Andersonovej vety 1.6 predpokladať, že $(E + g_i(\boldsymbol{y})) \cap K_u$ je uzavretá konvexná množina pre všetky $i = 1, ..., N$.

Ak je $\mathsf{Int}\,((E+\boldsymbol{y})\cap K_u)=\emptyset$, pravá strana rovnice (3.4) je nulová (používame tvrdenie 1.3) a tvrdenie triviálne platí. Nech $\mathsf{Int}\,((E+\boldsymbol{y})\cap K_u)\neq\emptyset$. Pretože g_i sú lineárne (špeciálne spojité) zobrazenia zachovávajúce Lebesgueovu mieru, tak aj $g_i((E+\boldsymbol{y})\cap K_u)=(E+g_i(\boldsymbol{y}))\cap K_u$ majú neprázdny vnútrajšok.

Podobne ako v prvej časti dôkazu sa dokáže nasledujúci vzťah.

$$(E+\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{y}))\cap K_u \supseteq \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left((E+g_i(\boldsymbol{y}))\cap K_u\right). \tag{3.5}$$

Pretože Minkowského súčet množín s neprázdnym vnútrajškom má neprázdny vnútrajšok, musí mať konvexná množina $(E+\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{y}))\cap K_u$ neprázdny vnútrajšok. Ak by bola neobmedzená, platilo by

$$\lambda^n\left((E+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{y}))\cap K_u\right)=\infty$$

a nerovnosť (3.4) by bola triviálne splnená. Ak je naopak $(E+\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{y}))\cap K_u$ obmedzená, potom sú obmedzené aj množiny $(E+g_i(\boldsymbol{y}))\cap K_u$, $i=1,...,N$, inak by sme sa dostali do sporu vo vzťahu (3.5).

To všetko ale znamená, že $(E+g_i(\boldsymbol{y}))\cap K_u$ sú konvexné telesá pre $i=1,...,N$ a tvrdenie plynie z prvej časti dôkazu pre $C=K_u$.

□

Príklad 8. *Majme*

- $G=\{g_1,g_2,g_3\}$, *kde* g_i *je rotácia v* $\mathbb{R}^2$ *okolo počiatku o* $2\pi(i-1)/3$ *radiánov,*
- E *je rovnostranný trojuholník centrovaný ťažiskom v počiatku,*
- $f(\boldsymbol{x})=\mathbb{1}_{B(\boldsymbol{0},1)}(\boldsymbol{x})$ *je jednotkový kruh v* $\mathbb{R}^2$*,*

potom sú množina E *a funkcia* f *zrejme* G*-symetrické. Tiež platí* $\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}<\infty$*. Položme* $\boldsymbol{\alpha}=(1/3,1/3,1/3)^\top$*. Predpoklady vety 3.4 sú splnené. Zvoľme ľubovoľný vektor* $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^\top\in\mathbb{R}^2$*. Platí* $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^3(g_i(\boldsymbol{y})/3)=\boldsymbol{0}$*. Dostávame teda*

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}\geq\int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}.$$

Poznámka. *Hovoríme, že reálny náhodný vektor s hodnotami v* $\mathbb{R}^n$ *má sféricky symetrické rozdelenie, ak majú vektory* $\boldsymbol{X}$ *a* $\boldsymbol{QX}$ *rovnaké rozdelenie pre každú ortogonálnu maticu* $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$*. K takým rozdeleniam patrí napríklad n-dimenzionálne štandardné normálne rozdelenie. V príklade 8 by sme preto mohli ako funkciu* f *voliť hustotu ľubovoľného sféricky symetrického rozdelenia v* $\mathbb{R}^2$*.*

Príklad 9. *Majme*

- $G=\{g_1,g_2\}$*, kde* g_1 *je identita na* $\mathbb{R}^2$ *a* g_2 *je symetria v* $\mathbb{R}^2$ *okolo osi* x*, teda* $g_2\colon(x_1,x_2)^\top\mapsto(x_1,-x_2)^\top$*,*
- E *je rovnoramenný trojuholník s vrcholmi* $(0,0)^\top,(1,-1)^\top,(1,1)^\top$*,*
- $f(\boldsymbol{x})=\exp(-|x_2|)$*,*

potom množina E *a funkcia* f *sú* G*-symetrické. Tiež platí* $\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}<\infty$*. Položme* $\boldsymbol{\alpha}=(1/2,1/2)^\top$*. Predpoklady vety 3.4 sú splnené. Zvoľme ľubovoľný vektor* $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^\top\in\mathbb{R}^2$*. Platí* $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{y})=1/2\,(y_1,y_2)^\top+1/2\,(y_1,-y_2)^\top=(y_1,0)^\top$*. Dostávame teda*

$$\int_{E+(y_1,0)^\top} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}\geq\int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}.$$

3.3 Rozšírenie predpokladu kvázikonkávnosti

V tejto kapitole rozšírime pojem kvázikonkávnosti funkcie, čo neskôr využijeme pre vetu, ktorá je inšpirovaná Andersonovou vetou. Na začiatok definujme s-tý zovšeobecnený priemer dvoch nezáporných čísel.

Definícia 3.5. *Pre $a, b \geq 0$, $\alpha \in (0,1)$ a $s \in [-\infty, \infty]$ definujeme* s-tý zovšeobecnený priemer $M_s^\alpha(a,b)$ *ako*

$$M_s^\alpha(a,b) := \begin{cases} \min\{a,b\} & \text{ak } s = -\infty, \\ \max\{a,b\} & \text{ak } s = \infty, \\ a^{(1-\alpha)}b^\alpha & \text{ak } s = 0, \\ ((1-\alpha)a^s + \alpha b^s)^{1/s} & \text{ak } s \in (0,\infty) \text{ a } ab \geq 0 \text{ alebo ak} \\ & \quad s \in (-\infty, 0) \text{ a } ab > 0, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Poznámka. *Pre $\alpha = 1/2$ dostávame*

- $M_1^{1/2}(a,b) = \frac{1}{2}(a+b)$ *aritmetický priemer,*
- $M_0^{1/2}(a,b) = \sqrt{ab}$ *geometrický priemer,*
- $M_{-1}^{1/2}(a,b) = 2/\left(a^{-1} + b^{-1}\right)$ *harmonický priemer, ak $ab > 0$.*

Ukazuje sa, že ak budeme brať s-tý zovšeobecnený priemer ako funkciu argumentu s, dostaneme neklesajúce spojité zobrazenie.

Tvrdenie 3.6. *Pre $a, b \geq 0$ a $\alpha \in (0,1)$ je*

$$s \mapsto M_s^\alpha(a,b), \qquad s \in [-\infty, \infty]$$

neklesajúce spojité zobrazenie.

Dôkaz. Najskôr si všimneme, že ak $a = b$, potom $M_s^\alpha(a,b) = a$ je konštanta.

Nech $a \neq b$, $ab = 0$ a bez újmy na všeobecnosti $b = 0$, potom pre $s \in [-\infty, 0]$ je $M_s^\alpha(a,b) = 0$ a pre $s \in (0,\infty)$ je $M_s^\alpha(a,b) = ((1-\alpha)a^s)^{1/s} = a(1-\alpha)^{1/s}$ zrejme neklesajúce a zhora obmedzené hodnotou $M_\infty^\alpha(a,b) = \max\{a,b\} = a$. Tiež platí $\lim_{s\to 0^+} M_s^\alpha(a,b) = 0 = M_0^\alpha(a,b)$ a $\lim_{s\to\infty} M_s^\alpha(a,b) = a = M_\infty^\alpha(a,b)$. Tvrdenie teda platí.

Nech $a \neq b$, $ab > 0$ a bez újmy na všeobecnosti nech $a < b$, potom platí

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} M_s^\alpha(a,b) &= \lim_{s\to 0} \exp\left(\frac{\log((1-\alpha)a^s + \alpha b^s)}{s}\right) \\ &= \exp((1-\alpha)\log(a) + \alpha\log(b)) = M_0^\alpha(a,b), \end{aligned}$$

kde sme použili L'Hospitalovo pravidlo a vetu o limite zloženej funkcie. Tiež platí

$$\begin{aligned} \lim_{s\to-\infty} M_s^\alpha(a,b) &= \lim_{s\to\infty} \left((1-\alpha)a^{-s} + \alpha b^{-s}\right)^{-1/s} = a \lim_{s\to\infty} \left((1-\alpha) + \alpha\left(\frac{a}{b}\right)^s\right)^{-1/s} \\ &= a = \min\{a,b\} = M_{-\infty}^\alpha(a,b), \end{aligned}$$

$$\lim_{s\to\infty} M_s^\alpha(a,b) = \lim_{s\to\infty} \left((1-\alpha)a^s + \alpha b^s\right)^{1/s} = b \lim_{s\to\infty} \left((1-\alpha)\left(\frac{a}{b}\right)^s + \alpha\right)^{1/s}$$
$$= b = \max\{a,b\} = M_\infty^\alpha(a,b).$$

Tým je dokázaná spojitosť. Ukážeme monotóniu na intervale $(0,\infty)$, nech teda $0 < s < t$. Potom funkcia $\varphi(x) = x^{t/s}$ je konvexná na $[0,\infty)$ a pre $x = a^s$, $y = b^s$ platí

$$\left((1-\alpha)a^s + \alpha b^s\right)^{t/s} = \varphi((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)\varphi(x) + \alpha\varphi(y) = (1-\alpha)a^t + \alpha b^t,$$

teda

$$M_s^\alpha(a,b) \leq M_t^\alpha(a,b).$$

Monotónia na intervale $(-\infty, 0)$ sa ukáže obdobne.

□

Teraz môžeme uviesť pojem s-konkávnych funkcií.

Definícia 3.7. *Nech $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ je nezáporná reálna funkcia. Potom hovoríme, že f je* s-konkávna*, ak*

$$f\left((1-\alpha)\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}\right) \geq M_s^\alpha(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$$

pre každé $\alpha \in (0,1)$ a každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. *Pre $s = -\infty$ je definícia ekvivalentná kvázikonkávnosti funkcie f. Pre $s = 0$ tiež hovoríme, že funkcia f je* log*-konkávna, pretože ju možno napísať v tvare $f(x) = \exp(g(x))$, kde g je konkávna funkcia. Pre $s = 1$ dostávame klasickú definíciu konkávnej funkcie.*

Jednoduchým dôsledkom tvrdenia 3.6 je nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 3.8. *Nech funkcia $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ je s-konkávna a $t < s$, potom je funkcia f aj t-konkávna. Špeciálne, funkcia f je $-\infty$-konkávna, teda kvázikonkávna.*

Podrobný rozbor s-konkávnych funkcií môžeme nájsť v knihe Dharmadhikari a Joag-Dev (1988, sekcia 3.3). V tejto knihe je tiež uvedený pojem t-konkávnych Borelovských mier na $\mathbb{R}^n$ a ukazuje sa, že tieto miery navzájom korešpondujú s s-konkávnymi hustotami vzťahom $t = s/(1+ns)$. Výsledkom tejto teórie je nasledujúca veta, ktorá je inšpirovaná Andersonovou vetou 1.6.

Veta 3.9. *Nech $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ je funkcia splňujúca*

- *f je s-konkávna, kde $s \geq -1/n$,*
- *$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} < \infty$.*

Nech $E \subseteq \mathbb{R}^n$ je ľubovoľná konvexná množina. Položme $t = s/(1+ns)$. Potom funkcia $g\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ definovaná predpisom

$$g\colon \boldsymbol{y} \mapsto \int_{E+\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} \tag{3.6}$$

je t-konkávna. Špeciálne, funkcia g je $-\infty$-konkávna, teda kvázikonkávna.

Dôkaz. Dharmadhikari a Joag-Dev (1988, Theorem 3.24). $\square$

V uvedenej vete teda nepredpokladáme symetriu množiny E ani funkcie f. Naopak, pokladáme silnejšie predpoklady na s-konkávnosť funkcie. Na záver tejto kapitoly ukážeme príklad aplikácie vety 3.9.

Príklad 10. *Nech $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ je definovaná predpisom $f(x) = 1/(1+x^2)$. Potom $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \pi < \infty$. Ukážeme, že f je $-1/2$-konkávna. Nech $x, y \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné čísla a $\alpha \in (0,1)$. Potom*

$$\begin{aligned} f((1-\alpha)x+\alpha y) &= \Big(1 + ((1-\alpha)x+\alpha y)^2\Big)^{-1} \\ &= \Big(1 + x^2 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + 2\alpha(1-\alpha)xy\Big)^{-1}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} &M_{-1/2}^{\alpha}(f(x), f(y)) = \Big((1-\alpha)\,(f(x))^{-1/2} + \alpha\,(f(y))^{-1/2}\Big)^{-2} \\ &= \left(1 + x^2 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + 2\alpha(1-\alpha)\left(\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} - 1\right)\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Stačí teda ukázať, že výraz (3.7) je väčší alebo rovný výrazu (3.8), to je ekvivalentné nerovnostiam

$$\begin{aligned} 2\alpha(1-\alpha)xy &\le 2\alpha(1-\alpha)\left(\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} - 1\right) \\ xy &\le \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} - 1 \\ xy + 1 &\le \sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2} = \sqrt{(xy+1)^2 + (x-y)^2}. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je splnená, pretože

$$xy + 1 \le |xy+1| = \sqrt{(xy+1)^2} \le \sqrt{(xy+1)^2 + (x-y)^2}.$$

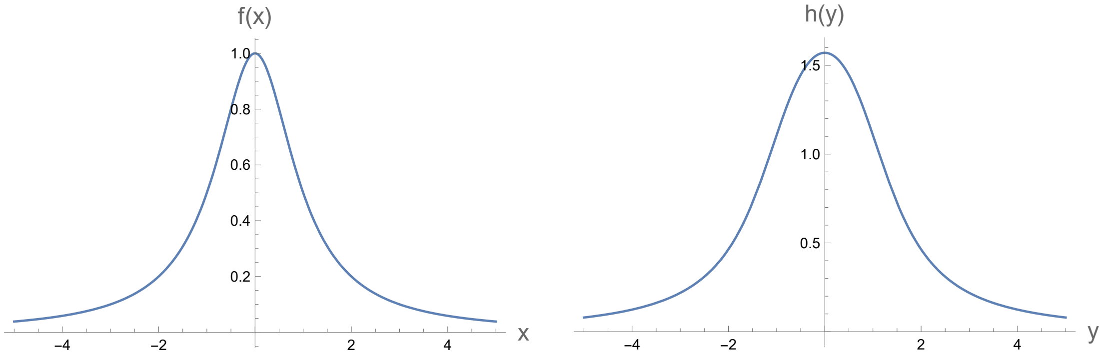
Predpoklady vety 3.9 sú teda splnené. Preto pre každý interval $E \subseteq \mathbb{R}$ platí, že funkcia

$$g(y) := \int_{E+y} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

je -1-konkávna, špeciálne kvázikonkávna. Zvoľme napríklad $E = (-1,1)$ a označme

$$h(y) := \int_{-1+y}^{1+y} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \arctan(1+y) - \arctan(-1+y).$$

Funkcia $h(y)$ je podľa predchádzajúceho výpočtu -1-konkávna, teda aj kvázikonkávna. Funkcie $f(x)$ a $h(y)$ sú znázornené na obrázku 3.3.

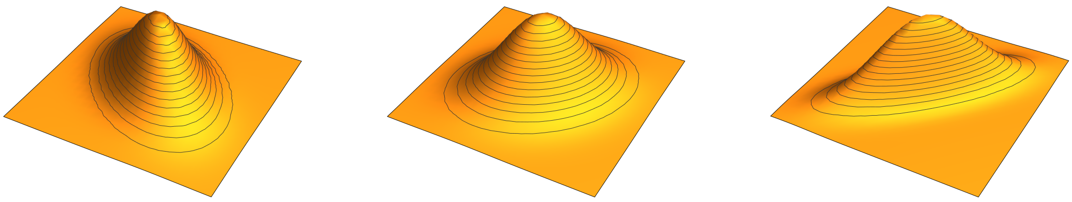


(a) $-1/2$-konkávna funkcia. (b) -1-konkávna funkcia.

Obr. 3.3: Príklady s-konkávnych funkcií pre $s = -1/2$, $s = -1$ z príkladu 10.

4. Aplikácie v teórii pravdepodobnosti a matematickej štatistike

Ukazuje sa, že Andersonova veta má množstvo využití v teórii pravdepodobnosti a matematickej štatistike. Aby sme mohli danú nerovnosť uplatniť, budeme ako integrand uvažovať hustotu pravdepodobnosti vzhľadom k n-rozmernej Lebesgueovej miere. V Andersonovej vete uvažujeme nezápornú funkciu f, ktorá má konečný integrál. Tieto predpoklady sú pre hustoty pravdepodobnosti splnené. Ďalej predpokladáme, že f je symetrická a kvázikonkávna. To vo všeobecnosti splnené nie je, no množstvo pravdepodobnostných rozdelení tento predpoklad spĺňa.



Obr. 4.1: Hustoty $\mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ pre rôzne hodnoty $\boldsymbol{\Sigma}$. Jedná sa o symetrické kvázikonkávne funkcie.

Poznámka. *V nasledujúcom texte budeme uvažovať pravdepodobnostný priestor* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Náhodným vektorom budeme vždy myslieť reálny náhodný vektor, teda merateľné zobrazenie* $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. *Zápisom* $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *rozumieme, že náhodný vektor* $\boldsymbol{X}$ *má n-rozmerné normálne rozdelenie so strednou hodnotou* $\boldsymbol{\mu}$ *a variančnou maticou* $\boldsymbol{\Sigma}$.

Tvrdenie 4.1. *Nech* $f_{\boldsymbol{X}}$ *je hustota náhodného vektoru* $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ *s rozdelením* $\mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, *kde* $\boldsymbol{\Sigma}$ *je pozitívne definitná matica. Potom* $f_{\boldsymbol{X}}$ *je symetrická a kvázikonkávna.*

Dôkaz. Husota $f_{\boldsymbol{X}}$ je tvaru

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \left((2\pi)^n \det(\boldsymbol{\Sigma})\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{x}\right),$$

teda $f_{\boldsymbol{X}}$ je zrejme symetrická. Ďalej ukážeme, že je aj kvázikonkávna. Nech $u > 0$, potom

$$\begin{aligned} K_u &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \geq u\} \\ &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{x} \leq -2\log\left(\left((2\pi)^n \det(\boldsymbol{\Sigma})\right)^{1/2} u\right)\right\} \end{aligned}$$

je konvexná množina, pretože kvadratická forma $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{x}$ s pozitívne definitnou maticou $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ je konvexná funkcia. Použili sme fakt, že inverzná matica pozitívne definitnej matice je pozitívne definitná matica.

$\square$

Konkrétne platí, že horné úrovňové množiny hustôt z tvrdenia 4.1 sú elipsoidy symetrické okolo počiatku, teda konvexné množiny. Táto vlastnosť je charakteristická pre celú rodinu rozdelení, ktorými sa budeme zaoberať v nasledujúcej sekcii.

4.1 Elipticky symetrické rozdelenia

Definícia 4.2. *Hovoríme, že náhodný vektor* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ *s hustotou* $f_{\boldsymbol{X}}$ *vzhľadom k* λ^n *má* mnohorozmerné elipticky symetrické rozdelenie *s parametrami* $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ *a* Ψ, *ak je* $f_{\boldsymbol{X}}$ *v tvare*

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{c_n}{\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \Psi\left((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

kde $c_n > 0$ *je normalizačná konštanta,* $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ *je vektor,* $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *je pozitívne definitná matica a* $\Psi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ *je funkcia. V tom prípade píšeme* $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{E}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \Psi)$.

Poznámka. *Elipticky symetrické rozdelenia sa v literatúre (napríklad Fang a kol., 1990) často definujú v širšej všeobecnosti pomocou charakteristických funkcií. V takom prípade sa pripúšťajú aj rozdelenia, ktoré nie sú absolútne spojité, to však v našej práci nebudeme potrebovať, pretože chceme pracovať práve s hustotou.*

Príklad 11. *Nech* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. *Potom zrejme platí* $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{E}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, t \mapsto \exp(-t/2))$.

Podľa predchádzajúceho príkladu teda môžeme uvažovať o elipticky symetrických rozdeleniach ako o zovšeobecnení mnohorozmerného normálneho rozdelenia. Elipticky symetrické rozdelenia zdieľajú niekoľko vlastností s normálnym rozdelením. Napríklad prostá lineárna transformácia náhodného vektoru s elipticky symetrickým rozdelením má elipticky symetrické rozdelenie. V nasledujúcich príkladoch ukážeme ďalšie typy elipticky symetrických rozdelení.

Príklad 12. *Náhodný vektor* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ *má* n-rozmerné t-rozdelenie s $\nu > 0$ stupňami voľnosti, *ak má hustotu*

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \nu^{n/2} \pi^{n/2} \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \left(1 + \frac{1}{\nu}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right)^{-\frac{n+\nu}{2}}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

s parametrami $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ *a* $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *kde* $\boldsymbol{\Sigma}$ *je pozitívne definitná matica. V tomto prípade* $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{E}_n\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, t \mapsto (1 + t/\nu)^{-\frac{n+\nu}{2}}\right)$.

Príklad 13. *Náhodný vektor* $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^\top$ *má* n-rozmerné elipticky symetrické logistické rozdelenie, *ak má hustotu*

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = \frac{c_n}{\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \frac{\exp\left(-(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})\right)}{\left(1 + \exp\left(-(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})\right)\right)^2}, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,$$

s normalizačnou konštantou $c_n > 0$ a parametrami $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde $\boldsymbol{\Sigma}$ je pozitívne definitná matica. V tomto prípade $\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{E}_n\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, t \mapsto \frac{\exp(-t)}{(1+\exp(-t))^2}\right)$.

V nasledujúcom tvrdení ukážeme, že Andersonovu vetu 1.6 možno aplikovať na hustotu elipticky symetrických rozdelení s nerastúcou funkctiou Ψ.

Tvrdenie 4.3. *Nech $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{E}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \Psi)$, kde $\Psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ je nerastúca funkcia. Potom je $f_{\boldsymbol{X}}$ kvázikonkávna funkcia. Ak je naviac $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$, tak je tiež symetrická.*

Dôkaz. Najskôr nech $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$, potom hustota náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$ je

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{c_n}{\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \Psi\left(\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{x}\right), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Všimneme si, že $\boldsymbol{x}$ vystupuje v kvadratickej forme, preto je $f_{\boldsymbol{X}}$ symetrická. Ďalej pre $u > 0$ platí

$$\begin{aligned} K_u = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \geq u\} &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \Psi\left(\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{x}\right) \geq \frac{u\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}}{c_n}\right\} \\ &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{x} \leq \sup\left\{t \in [0,\infty) \mid \Psi(t) \leq \frac{u\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}}{c_n}\right\}\right\}. \end{aligned}$$

Pretože $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{x}$ je konvexná funkcia, K_u musí byť konvexná množina. Ak $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{0}$, množina K_u sa posunie, ale zostane konvexná.

□

Všimneme si, že predpoklad nerastúcej funkcie Ψ je v mnohých prípadoch splnený. Takými rozdeleniami sú predtým uvedené mnohorozmerné normálne rozdelenie, mnohorozmerné t-rozdelenie, či mnohorozmerné elipticky symetrické logistické rozdelenie. Teraz uvedieme tvrdenie, v ktorom využijeme Andersonovu vetu 1.6 na odhad pravdepodobnosti.

Tvrdenie 4.4. *Majme náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top \sim \mathcal{E}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \Psi)$, kde Ψ je nerastúca funkcia. Ďalej nech pre $i = 1, \ldots, n$ je $a_i > 0$ a nech $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Potom $\forall k \in [0,1]$ platí*

$$\mathsf{P}(|X_i - \mu_i - ky_i| \leq a_i, i = 1, \ldots, n) \geq \mathsf{P}(|X_i - \mu_i - y_i| \leq a_i, i = 1, \ldots, n).$$

Dôkaz. Označme $E = [-a_1, a_1] \times \cdots \times [-a_n, a_n]$ a $f_{(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})}$ hustotu náhodného vektoru $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}$. Potom platí

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(|X_i - \mu_i - ky_i| \leq a_i, i = 1, \ldots, n) &= \mathsf{P}((\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \in (E + k\boldsymbol{y})) \\ &= \int_{E+k\boldsymbol{y}} f_{(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} \\ &\geq \int_{E+\boldsymbol{y}} f_{(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\,\boldsymbol{x} \\ &= \mathsf{P}((\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \in (E + \boldsymbol{y})) \\ &= \mathsf{P}(|X_i - \mu_i - y_i| \leq a_i, i = 1, \ldots, n), \end{aligned}$$

kde nerovnosť plynie z Andersonovej vety 1.6 a tvrdenia 4.3.

□

Priamym dôsledkom Andersonovej vety je aj nasledujúce tvrdenie, ktoré je v podobnom tvare uvedené v článku Anderson (1955, Theorem 2). Z tohoto článku je prevzatý aj dôkaz.

Tvrdenie 4.5. *Majme náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top \sim \mathcal{E}_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}, \Psi)$, kde Ψ je nerastúca funkcia. Nech $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^\top$ je náhodný vektor taký, že $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ sú nezávislé. Potom pre symetrickú konvexnú množinu $E \subseteq \mathbb{R}^n$ a skalár $k \in [0,1]$ platí*

$$\mathsf{P}((\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{Y}) \in E) \geq \mathsf{P}((\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) \in E)\,.$$

Dôkaz. Označme $F_{\boldsymbol{X}}$ a $F_{\boldsymbol{Y}}$ distribučné funkcie príslušných náhodných vektorov. Pretože $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$ sú nezávislé, distribučná funkcia $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{X} + k\boldsymbol{Y}$ je

$$F_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathbb{R}^n} F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{u} - k\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\, F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n.$$

Náhodný vektor $\boldsymbol{U}$ má absolútne spojité rozdelenie, preto deriváciou oboch strán podľa všetkých zložiek dostaneme hustotu $f_{\boldsymbol{U}}$ náhodného vektoru $\boldsymbol{U}$

$$f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathbb{R}^n} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{u} - k\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\, F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}), \quad \text{pre } \lambda^n\text{-s.v. } \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n,$$

kde sme použili tvrdenie o zámene integrálu a derivácie A.4 z prílohy práce, ktorého predpoklady sú splnené z vlastností distribučných funkcií. Teraz môžeme počítať

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left((\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{Y}) \in E\right) &= \int_E \int_{\mathbb{R}^n} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{u} - k\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\, F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\, \boldsymbol{u} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_E f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{u} - k\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\, \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}\, F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{E - k\boldsymbol{y}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{u}) \,\mathrm{d}\, \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}\, F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}),
\end{aligned}$$

kde sme na zámenu poradia integrálov použili Fubiniho vetu A.1. Tvrdenie vety teraz plynie z tvrdenia 4.3 a Andersonovej vety 1.6.

□

Zhruba povedané, tvrdenie 4.5 dokazuje, že za daných predpokladov je rozdelenie náhodného vektoru $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$ viac rozptýlené, než rozdelenie náhodného vektoru $\boldsymbol{X} + k\boldsymbol{Y}$.

Poznámka. *Tvrdenie 4.5 platí nielen pre elipticky symetrické rozdelenia, ale aj pre iné rozdelenia s hustotou splňujúcou predpoklady Andersonovej vety 1.6. Jednoduchým príkladom sú rovnomerné rozdelenia na symetrických konvexných telesách.*

4.2 Simultánne intervalové odhady

Andersonova veta nachádza praktické využitie pre simultánne intervalové odhady.

Predstavme si, že máme náhodný výber $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ s rozsahom n z rozdelenia $F_{\boldsymbol{\theta_X}} \in \mathcal{F} = \{F_{\boldsymbol{\theta}} \mid \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$, kde $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$, $p \geq 2$ je neprázdny parametrický priestor. Rozdelenia $F_{\boldsymbol{\theta}}$ teda závisia od p-rozmerného parametru $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^\top$. Majme dané intervalové odhady $B_i^{(n)}$ jednotlivých zložiek θ_i, $i = 1, \ldots, p$ také, že

$$\mathsf{P}\left(\theta_i \in B_i^{(n)}\right) \geq 1 - \alpha \quad \forall i \in \{1, \ldots, p\} \ \ \forall F_{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{F},$$

kde $\alpha \in (0, 1)$. Potom typicky platí

$$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{\theta} \in B_1^{(n)} \times \cdots \times B_p^{(n)}\right) < 1 - \alpha \text{ pre nejaké } F_{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{F}.$$

Voľne povedané, z intervalových odhadov jednotlivých zložiek parametru s pravdepodobnosťou pokrytia $1 - \alpha$ nemôžeme kartézskym súčinom vytvoriť simultánny mnohorozmerný interval pokrytia pre celý parameter s pravdepodobnosťou pokrytia $1 - \alpha$. Nasledujúca teória nám dá návod, ako v špeciálnych prípadoch konštruovať simultánne intervalové odhady tak, aby sme dodržali pravdepodobnosť pokrytia.

Uvedieme tvrdenie, ktoré neskôr použijeme v dôkaze vety 4.8.

Tvrdenie 4.6. *Nech X je reálna náhodná veličina a $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sú dve párne funkcie také, že $f(X)$ a $g(X)$ majú konečné druhé momenty a $f(|x|), g(|x|)$ sú neklesajúce (nerastúce) na $[0, \infty)$. Potom $\mathsf{cov}(f(X), g(X)) \geq 0$.*

Dôkaz. Myšlienka nasledujúceho dôkazu pochádza z článku Khatri (1967, Lemma 5). Označme P_X a P_Y rozdelenia náhodných veličín X a Y. Platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{cov}\,(f(X), g(X)) &= \mathsf{E}\,\left[(f(X) - \mathsf{E}\,(f(X)))\,(g(X) - \mathsf{E}\,(g(X)))\right] \\
&= \mathsf{E}\,[f(X)g(X)] - \mathsf{E}\,[f(X)]\,\mathsf{E}\,[g(X)] \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\,\mathrm{d}\,\mathsf{P}_X(x)\,\mathrm{d}\,\mathsf{P}_X(y) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

pretože podľa predpokladu budú mať výrazy $(f(x) - f(y))$ a $(g(x) - g(y))$ vždy rovnaké znamienko (to záleží len od $|x| - |y|$). Z toho plynie $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ pre každý vektor $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$, čo vysvetľuje žiadanú nerovnosť.

$\square$

Ďalšie tvrdenie hovorí o vlastnosti pozitívne definitných reálnych matíc, ktorú využijeme v dôkaze vety 4.8. Hlavným minorom štvorcovej matice $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ budeme rozumieť maticu tvorenú prvými k riadkami a k stĺpcami $\boldsymbol{\Lambda}$, kde $k \leq n$.

Tvrdenie 4.7. *Nech $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitívne definitná matica v tvare*

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \boldsymbol{\sigma}^\top \\ \boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}, \end{pmatrix}$$

kde $\sigma_{11} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $\boldsymbol{\Sigma}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Potom existuje $\gamma > 0$ také, že rozšírená matica

$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \boldsymbol{\sigma}^\top & \gamma \\ \boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} & \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\sigma} \\ \gamma & \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\sigma}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

je pozitívne definitná.

Dôkaz. Matica $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ je zrejme symetrická. Pretože $\boldsymbol{\Sigma}$ je pozitívne definitná matica, podľa Sylvestrovho kritéria (tvrdenie A.6 v prílohe práce) sú determinanty všetkých hlavných minorov matice $\boldsymbol{\Sigma}$ kladné. Podľa rovnakého kritéria je teda pozitívna definitnosť matice $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ ekvivalentná podmienke $\det\left(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}\right) > 0$. Podľa tvrdenia A.8 z prílohy práce platí

$$\begin{aligned}
\det\left(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}\right) &= \det(1)\det\left(\boldsymbol{\Sigma} - \begin{pmatrix}\gamma \\ \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma, & \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\sigma}^\top\end{pmatrix}\right) = \det\left(\boldsymbol{\Sigma} - \begin{pmatrix}\gamma^2 & \boldsymbol{\sigma}^\top \\ \boldsymbol{\sigma} & \frac{1}{\gamma^2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^\top\end{pmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix}\sigma_{11} - \gamma^2 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \frac{1}{\gamma^2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^\top\end{pmatrix}\right) = \left(\sigma_{11} - \gamma^2\right)\det\left(\boldsymbol{\Sigma}_{22} - \frac{1}{\gamma^2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^\top\right) \\
&= \left(\sigma_{11} - \gamma^2\right)\det\left(\boldsymbol{\Sigma}_{22}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\boldsymbol{\sigma}^\top\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\right),
\end{aligned}$$

kde v poslednej rovnosti sme použili tvrdenie A.9 z prílohy práce a regularitu matice $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$. Pretože $\boldsymbol{\Sigma}$ je pozitívne definitná, tak $\det\left(\boldsymbol{\Sigma}_{22}\right) > 0$. Stačí teda ukázať, že existuje $\gamma > 0$ také, že $\gamma^2 < \sigma_{11}$ a $\boldsymbol{\sigma}^\top\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\sigma} < \gamma^2$, čo je ekvivalentné tomu, že

$$\sigma_{11} - \boldsymbol{\sigma}^\top\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\sigma} > 0. \tag{4.1}$$

Vzťah (4.1) je ale splnený z tvrdenia A.7 z prílohy práce použitého na pozitívne definitnú maticu $\boldsymbol{\Sigma}$. Tým je dôkaz dokončený.

□

Nasledujúce tvrdenie a myšlienka dôkazu sú prevzaté z článku Khatri (1967, Theorem 1). Do dôkazu sú doplnené medzikroky a vysvetlenia. Napríklad krok, v ktorom použijeme naše vlastné tvrdenie 4.7, v uvedenom článku nie je vysvetlený.

Veta 4.8. *Majme náhodné vektory* $\boldsymbol{X}^{(1)} = \left(X_1^{(1)}, \ldots, X_n^{(1)}\right)^\top \sim \mathcal{N}_n\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\right)$ *a* $\boldsymbol{X}^{(2)} = \left(X_1^{(2)}, \ldots, X_n^{(2)}\right)^\top \sim \mathcal{N}_n\left(\boldsymbol{\mu}, \mathsf{diag}\left(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{nn}\right)\right)$, *kde* $\boldsymbol{\Sigma} = \left(\sigma_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ *a* $\mathsf{diag}\left(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{nn}\right)$ *je diagonálna matica s prvkami* σ_{ii} *na diagonále. Potom pre* $a_i > 0, i = 1, \ldots, n$ *platí*

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\left|X_i^{(1)} - \mu_i\right| \leq a_i, i = 1, \ldots, n\right) &\geq \prod_{i=1}^n \mathsf{P}\left(\left|X_i^{(1)} - \mu_i\right| \leq a_i\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\left|X_i^{(2)} - \mu_i\right| \leq a_i, i = 1, \ldots, n\right).
\end{aligned}$$

Dôkaz. Najskôr predpokladajme, že matica $\boldsymbol{\Sigma}$ je pozitívne definitná. Označme

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \boldsymbol{\sigma}^\top \\ \boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{pmatrix}.$$

Ďalej označme $Y_1 = X_1^{(1)} - \mu_1$, $\boldsymbol{Y}_2 = \left(X_2^{(1)} - \mu_2, \ldots, X_n^{(1)} - \mu_n\right)^\top$, $C_1 = [-a_1, a_1]$ a $C_2 = [-a_2, a_2] \times \cdots \times [-a_n, a_n]$. Podľa tvrdenia 4.7 môžeme náhodný vektor $\left(Y_1, \boldsymbol{Y}_2\right)^\top$ rozšíriť o náhodnú veličinu Z tak, že platí

$$\begin{pmatrix}Y_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \\ Z\end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_{n+1}\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \boldsymbol{\sigma}^\top & \gamma \\ \boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} & \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\sigma} \\ \gamma & \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\sigma}^\top & 1\end{pmatrix}\right),$$

kde $\gamma > 0$ sme zvolili také, aby bola variančná matica pozitívne definitná. Potom podľa tvrdenia A.10 z prílohy práce platí

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{pmatrix} | Z = z \sim \mathcal{N}_n \left(z \begin{pmatrix} \gamma \\ \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \gamma^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \frac{1}{\gamma^2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^\top \end{pmatrix} \right), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Z toho plynie, že Y_1 a $\boldsymbol{Y}_2$ sú podmienene nezávislé pri podmienke Z. Položme $f(z) = \mathsf{E}\,[\mathbb{1}_{C_1}(Y_1) \mid Z = z]$ a $g(z) = \mathsf{E}\,[\mathbb{1}_{C_2}(\boldsymbol{Y}_2) \mid Z = z]$. Potom platí

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(Y_1 \in C_1, \boldsymbol{Y}_2 \in C_2\right) &= \mathsf{E}\,[\mathbb{1}_{C_1}(Y_1)\,\mathbb{1}_{C_2}(\boldsymbol{Y}_2)] \\ &= \mathsf{E}\,[\mathsf{E}\,[\mathbb{1}_{C_1}(Y_1)\,\mathbb{1}_{C_2}(\boldsymbol{Y}_2) \mid Z]] \\ &= \mathsf{E}\,[f(Z)g(Z)] \\ &= \mathsf{E}\,[f(Z)]\,\mathsf{E}\,[g(Z)] + \mathsf{cov}\left(f(Z), g(Z)\right) \\ &\geq \mathsf{E}\,[f(Z)]\,\mathsf{E}\,[g(Z)] \\ &= \mathsf{P}\left(Y_1 \in C_1\right)\mathsf{P}\left(\boldsymbol{Y}_2 \in C_2\right) \\ &= \mathsf{P}\left(\left|X_1^{(1)} - \mu_1\right| \leq a_1\right)\mathsf{P}\left(\left|X_i^{(1)} - \mu_i\right| \leq a_i, i = 2, \ldots, n\right), \end{aligned}$$

kde v tretej rovnosti sme použili podmienenú nezávislosť a nerovnosť plynie z nasledujúceho. Už vieme, že $Y_1 \mid Z = z$ a $\boldsymbol{Y}_2 \mid Z = z$ majú normálne rozdelenia, pričom ich variančné matice nezávisia od z a stredná hodnota je násobok z. Preto podľa tvrdenia 4.1 a Andersonovej vety 1.6 sú $f(z)$ a $g(z)$ symetrické nerastúce funkcie $|z|$. Podľa tvrdenia 4.6 sú teda nezáporne korelované.

Ďalej vieme, že marginálne rozdelenie $\boldsymbol{Y}_2$ je $\mathcal{N}_{n-1}\left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{22}\right)$, kde $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ pozitívne definitná. Preto môžeme rovnakým spôsobom ďalej rozkladať pravdepodobnosť $\mathsf{P}\left(\left|X_i^{(1)} - \mu_i\right| \leq a_i, i = 2, \ldots, n\right)$. Nakoniec, rovnosť

$$\prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}\left(\left|X_i^{(1)} - \mu_i\right| \leq a_i\right) = \mathsf{P}\left(\left|X_i^{(2)} - \mu_i\right| \leq a_i, i = 1, \ldots, n\right)$$

vyplýva z faktu, že združená normalita a nekorelovanosť implikuje nezávislosť.

Z toho plynie dané tvrdenie pre pozitívne definitnú variančnú maticu $\boldsymbol{\Sigma}$. Dôkaz pre prípad singulárnej variančnej matice $\boldsymbol{\Sigma}$ je uvedený v článku Khatri (1967, Theorem 1) a je založený na aproximácii singulárnej matice $\boldsymbol{\Sigma}$ pozitívne definitnými maticami.

□

V sekcii 4.1 sme uviedli, že Andersonovu vetu 1.6 možno použiť nielen na normálne rozdelenia, ale tiež na elipticky symetrické rozdelenia. Rozšírením vety 4.8 je nasledujúca veta.

Veta 4.9. *Nech*

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma}^\top & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

je pozitívne definitná matica, kde $\boldsymbol{\Sigma}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{n-1}$ *a* $\sigma_{nn} \in \mathbb{R}$. *Ďalej nech* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top \sim \mathcal{E}_n\left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\theta, \Psi\right)$, *kde*

$$\boldsymbol{\Sigma}_\theta = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \theta\boldsymbol{\sigma} \\ \theta\boldsymbol{\sigma}^\top & \sigma_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, 1]$$

a $C \subseteq \mathbb{R}^{p-1}$ je konvexná symetrická množina. Potom pre $h > 0$ platí, že

$$P_\theta\left((X_1, \ldots, X_{n-1})^\top \in C, |X_n| \le h\right)$$

je neklesajúcou funkciou θ. Znakom P_θ rozumieme pravdepodobnosť za predpokladu $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{E}_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\theta, \Psi)$.

Dôkaz. Das Gupta a kol. (1972, Theorem 2.1). Dôkaz tejto vety je zložitejší než dôkaz vety 4.8 a používa rozšírenia Andersonovej vety. Tiež je zaujímavé, že nie je nutné predpokladať žiadnu monotóniu funkcie Ψ.

□

Vyššie uvedené nerovnosti teda hovoria, že ak v niektorých prípadoch zanedbáme kovariancie medzi jednotlivými zložkami náhodných vektorov, dostaneme vektory, ktoré budú menej koncentrované okolo svojich stredných hodnôt.

Teraz ukážeme, ako možno využiť tvrdenie 4.8 ku konštrukcii simultánnych intervalových odhadov.

Príklad 14. *Majme náhodný výber $\boldsymbol{X}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{X}^{(n)}$ s rozsahom n z rozdelenia $\mathcal{N}_p\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^p\right)$, teda $\boldsymbol{X}^{(i)} = (X_1^{(i)}, \ldots, X_p^{(i)})^\top$ má rozdelenie $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ a rozptyly jednotlivých zložiek $\sigma_{jj}, j = 1, ..., p$ sú známe. Chceme zostrojiť simultánny intervalový odhad p-rozmerného parametru $\boldsymbol{\mu}$ s pravdepodobnosťou pokrytia aspoň $1 - \alpha$.*

Položme $\beta = 1 - \left(1 - (1-\alpha)^{1/p}\right)/2$. Vieme, že

$$Y_j := \sqrt{\frac{n}{\sigma_{jj}}}\left(\overline{X}_j^{(n)} - \mu_j\right) \sim \mathcal{N}_1(0,1), \text{ kde } \overline{X}_j^{(n)} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_j^{(k)} \text{ pre } j = 1, \ldots, p.$$

Položme

$$B_j^{(n)} := \left(\overline{X}_j^{(n)} - \sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{n}} u_\beta, \overline{X}_j^{(n)} + \sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{n}} u_\beta\right), \; j = 1, \ldots, p,$$

kde u_β je β-kvantil rozdelenia $\mathcal{N}_1(0,1)$. Potom $P\left(\mu_j \in B_j^{(n)}\right) = (1-\alpha)^{1/p}$, $j = 1, \ldots, p$.

Ďalej vieme, že $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_p)^\top$ spĺňa predpoklady vety 4.8 pre rozptyly $\sigma_{jj} = 1$, $j = 1, \ldots, p$ a nulový vektor stredných hodnôt. Dostávame teda

$$P\left(\boldsymbol{\mu} \in B_1^{(n)} \times \cdots \times B_p^{(n)}\right) \ge \prod_{j=1}^p P\left(\mu_j \in B_j^{(n)}\right) = \left((1-\alpha)^{1/p}\right)^p = 1 - \alpha.$$

Dostali sme teda simultánny intervalový odhad pre parameter $\boldsymbol{\mu}$ s pravdepodobnosťou pokrytia aspoň $1 - \alpha$.

Postup v uvedenom príklade sa dá modifikovať pre náhodné výbery z normálneho rozdelenia s neznámymi rozptylmi jednotlivých zložiek.

Poznámka. *Voľba pravdepodobnosti pokrytia jednotlivých zložiek $(1-\alpha)^{1/p}$ v uvedenom príklade sa často nazýva* Šidákova korekcia *(tiež v duálnom probléme testovania hypotéz) po českom matematikovi Zbyňkovi Šidákovi, ktorý sa venoval uvedenej problematike. V porovnaní s* Bonferroniho korekciou, *kde pokladáme pravdepodobnosť pokrytia jednotlivých zložiek $1 - \alpha/p$, dostávame užšie intervaly spoľahlivosti.*

Na záver numericky porovnáme získanú metódu s Bonferroniho korekciou.

Príklad 15 (Porovnanie Šidákovej a Bonferroniho korekcie)**.** *Uvažujme náhodný výber* $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ *z rozdelenia* $\mathcal{N}_2\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^2\right)$ *o rozsahu* n*, kde rozptyly* σ_{11} *a* σ_{22} *sú známe. Chceme zostrojiť simultánne intervaly spoľahlivosti pre zložky parametru* $\boldsymbol{\mu}$ *s pravdepodobnosťou pokrytia* 0,95.

Ak použijeme Šidákovu korekciu, položíme podľa predošlého príkladu $\beta = 1 - (1 - \sqrt{0{,}95})/2 \approx 0{,}98734$*. Potom* $u_\beta \approx 2{,}23649$ *a dostaneme intervaly*

$$\left(\overline{X}_j^{(n)} - 2{,}23649\sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{n}}, \overline{X}_j^{(n)} + 2{,}23649\sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{n}}\right), \qquad j \in \{1, 2\},$$

dĺžka jednotlivých intervalov je teda $4{,}47298\sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{n}}$.

V prípade Bonferroniho korekcie položíme $\gamma = 1 - 0{,}05/4 = 0{,}9875$*. Potom* $u_\gamma \approx 2{,}24140$ *a dostávame intevaly*

$$\left(\overline{X}_j^{(n)} - 2{,}2414\sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{n}}, \overline{X}_j^{(n)} + 2{,}2414\sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{n}}\right), \qquad j \in \{1, 2\},$$

dĺžka jednotlivých intervalov je $4{,}4828\sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{n}}$.

Pri použití Šidákovej korekcie sme teda dostali užšie intervaly, no rozdiel nie je veľmi výrazný. Ak by sme pravdepodobnosť pokrytia zvýšili na 0,99*, rozdiel by sa ešte zmenšil. Naopak, pri pravdepodobnosti pokrytia* 0,9 *by bol rozdiel markantnejší.*

Ďalšie aplikácie Andersonovej vety v matematickej štatistike, napríklad pre testovanie hypotéz, môžeme nájsť v prehľadovom článku Perlman (1988).

Záver

V práci sme sa venovali Andersonovej vete, do detailov sme rozobrali jej dôkaz a diskutovali sme jej možné rozšírenia a aplikácie. Využili sme, že Andersonova veta má zaujímavé geometrické interpretácie a preto sme často problematiku znázorňovali graficky. Tiež sme uviedli užitočné príklady a doplnili kroky v dôkazoch tvrdení a viet.

Okrem iného sme sa zamerali na štúdium prípadov, kedy v Andersonovej vete nastane rovnosť alebo naopak ostrá nerovnosť. Pri tejto téme sme narazili na niektoré nejasnosti a problémy, ktoré sa nám čiastočne podarilo vyriešiť. Práca by sa však dala ďalej rozvíjať, napríklad štúdiom domnienky 2.8, ktorá zostáva otvoreným problémom. Tiež by bolo zaujímavé uvažovať, v ktorých prípadoch nastane rovnosť vo vete 3.4.

Inou problematikou, ktorej by sa dalo ďalej venovať, sú aplikácie vety 3.9. Táto veta je motivovaná práve Andersonovou vetou. Na konci kapitoly 3 sme uviedli jednoduchý príklad jej využitia, no zdá sa, že by sa dali nájsť ďalšie, ktoré by poskytovali hlbšie výsledky.

Nakoniec, Andersonova veta má obrovské množstvo aplikácií v matematickej štatistike. V kapitole 4 sme niektoré z nich naznačili, no rozsah tejto práce nám ani zďaleka nedovoľuje obsiahnuť všetky. Niektoré z ďalších použití Andersonovej vety môžeme nájsť v článkoch Anderson (1996) a Perlman (1988).

Zoznam použitej literatúry

Anderson, T. W. (1955). The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**, 170–176.

Anderson, T. W. (1996). Some inequalities for symmetric convex sets with applications. *The Annals of Statistics*, **24**(2), 753–762.

Anděl, J. (2005). *Základy matematické statistiky.* 1. edice. Matfyzpress, Praha.

Bogachev, V. I. (2007). *Measure theory.* Springer-Verlag, Berlin.

Ciesielski, K., Fejzić, H. a Freiling, C. (2001/02). Measure zero sets with non-measurable sum. *Real Anal. Exchange*, **27**(2), 783–793.

Das Gupta, S., Eaton, M. L., Olkin, I., Perlman, M., Savage, L. J. a Sobel, M. (1972). Inequalitites on the probability content of convex regions for elliptically contoured distributions. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. II: Probability theory*, pages 241–265.

Dharmadhikari, S. a Joag-Dev, K. (1988). *Unimodality, convexity, and applications.* Academic Press, Inc., Boston, MA.

Ding, J. a Zhou, A. (2007). Eigenvalues of rank-one updated matrices with some applications. *Applied Mathematics Letters*, **20**(12), 1223–1226.

Fang, K. T., Kotz, S. a Ng, K. W. (1990). *Symmetric multivariate and related distributions.* Chapman and Hall, Ltd., London.

Gilbert, G. T. (1991). Positive definite matrices and Sylvester's criterion. *The American Mathematical Monthly*, **98**(1), 44–46.

Jogdeo, K. (1970). An inequality for a strict unimodal function with an application to a characterization of independence. *Sankhyā Ser. A*, **32**, 405–410.

Khatri, C. G. (1967). On certain inequalities for normal distributions and their applications to simultaneous confidence bounds. *Ann. Math. Statist.*, **38**, 1853–1867.

Mudholkar, G. S. (1966). The integral of an invariant unimodal function over an invariant convex set—an inequality and applications. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17**, 1327–1333.

Ouellette, D. V. (1981). Schur complements and statistics. *Linear Algebra and its Applications*, **36**, 187–295.

Perlman, M. D. (1988). Anderson's theorem on the integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set, and its applications in probability and statistics. Technical Report No. 126, Department of Statistics, University of Washington, Seattle, Washington. URL `https://stat.uw.edu/sites/default/files/files/reports/1988/tr126.pdf`, cit. 10.04.2022.

Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis.* Mathematics series. McGraw-Hill.

Schneider, R. (1993). *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory.* Cambridge University Press, Cambridge.

Soms, A. P. (1984). A note on equality in Anderson's theorem. Technical Report No. 2648, Mathematics Research Center, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin. URL https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/ADA141509.pdf, cit. 27.04.2022.

Soms, A. P. (1991). A note on equality in Anderson's theorem. *Comm. Statist. Theory Methods*, **20**(1), 141–145.

A. Pomocné tvrdenia

Veta A.1 (Fubini)**.** *Nech* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *a* $(Y, \mathcal{D}, \nu)$ *sú priestory so* σ*-konečnými mierami. Potom pre* $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$ *platí*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\,(\mu\otimes\nu)(x,y) &= \int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\,\nu(y)\,\mathrm{d}\,\mu(x)\\ &= \int_Y \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\,\mu(x)\,\mathrm{d}\,\nu(y).\end{aligned}$$

Dôkaz. Rudin (1987, Theorem 8.8). □

Tvrdenie A.2. *Nech* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je priestor s mierou,* $f\colon X \to [0, \infty]$ *je merateľná funkcia a* $\int_X f(x)\,\mathrm{d}\,\mu(x) = 0$*. Potom* $f = 0$ μ*-skoro všade.*

Dôkaz. Rudin (1987, Theorem 1.39). □

Tvrdenie A.3 (Spojitosť miery)**.** *Nech* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je priestor s mierou,* $A_n \in \mathcal{A}$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Potom*

$$\mu(A_1) < \infty, A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \implies \mu(A_n) \to \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right). \tag{A.1}$$

Dôkaz. Rudin (1987, Theorem 1.19). □

Tvrdenie A.4 (Zámena integrálu a derivácie)**.** *Nech* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je priestor s mierou,* $I \subseteq \mathbb{R}$ *je otvorený interval a* $f\colon I \times X \to \mathbb{R}$ *je funkcia. Nech ďalej*

- $f(t, \cdot)$ *je merateľná pre každé* $t \in I$*,*
- *pre každé* $t \in I$ *derivácia* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} f(t, x)$ *existuje vlastná pre* μ*-skoro všetky* $x \in X$*,*
- *existuje* $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ *taká, že pre všetky* $t \in I$ *platí* $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} f(t,x)\right| \le g(x)$ *pre* μ*-skoro všetky* $x \in X$*,*
- *existuje* $t_0 \in I$ *také, že* $f(t_0, \cdot) \in \mathcal{L}_1(\mu)$*.*

Potom

- $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}_1(\mu)$ *pre všetky* $t \in I$*,*
- *funkcia*
$$F\colon t \mapsto \int_X f(t,x)\,\mathrm{d}\,\mu(x)$$
je diferencovateľná na I*,*

- *pre $t \in I$ platí*
$$F'(t) = \int_X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} f(t,x) \,\mathrm{d}\,\mu(x).$$

Dôkaz. Bogachev (2007, Corollary 2.8.7). □

Tvrdenie A.5 (Supporting hyperplane theorem)**.** *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexná uzavretá množina. Nech $\boldsymbol{x}_0 \in \partial(A)$. Potom existuje vektor $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$ taký, že*
$$\boldsymbol{h}^\top(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in A.$$

Dôkaz. Schneider (1993, Theorem 1.3.2). □

Tvrdenie A.6 (Sylvestrovo kritérium)**.** *Nech $\boldsymbol{\Lambda}$ je reálna štvorcová symetrická matica. Potom $\boldsymbol{\Lambda}$ je pozitívne definitná práve vtedy, keď všetky jej hlavné minory majú kladný determinant.*

Dôkaz. Gilbert (1991, Theorem (Sylvester's criterion)). □

Tvrdenie A.7 (Schurov komplement)**.** *Majme reálnu symetrickú maticu*
$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^\top & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$
kde $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $k < n$ je regulárna matica. Potom $\boldsymbol{\Lambda}$ je pozitívne definitná práve vtedy, keď je pozitívne definitná matica $\boldsymbol{C}$ a matica $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^\top$.

Dôkaz. Ouellette (1981, Corollary 3.1). □

Tvrdenie A.8 (Determinant blokovej matice)**.** *Majme reálnu blokovú maticu*
$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$
kde $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $k < n$ je regulárna matica. Potom platí
$$\det(\boldsymbol{\Lambda}) = \det(\boldsymbol{D}) \det\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\right).$$

Dôkaz. Ouellette (1981, Theorem 2.1). □

Tvrdenie A.9. *Nech* $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *je regulárna matica a* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ *sú vektory. Potom platí*

$$\det(\mathbf{\Lambda} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top) = (1 + \boldsymbol{v}^\top \mathbf{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{u}) \det(\mathbf{\Lambda}).$$

Dôkaz. Ding a Zhou (2007, Lemma 1.1).

□

Tvrdenie A.10. *Nech* $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)^\top \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$. *Nech* $p \in \{1, ..., n-1\}$. *Označme* $\boldsymbol{Y}_1 = (X_1, ..., X_p)^\top$, $\boldsymbol{Y}_2 = (X_{p+1}, ..., X_n)^\top$, $\boldsymbol{\mu}_1 = (\mu_1, ..., \mu_p)^\top$, $\boldsymbol{\mu}_2 = (\mu_{p+1}, ..., \mu_n)^\top$ *a*

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{\Sigma}_{11}$ *je typu* $p \times p$. *Ďalej predpokladajme, že* $\mathbf{\Sigma}$ *je regulárna. Potom pre* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n-p}$ *platí, že* $\boldsymbol{Y}_1 | \boldsymbol{Y}_2 = \boldsymbol{y} \sim \mathcal{N}_p\left(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\mathbf{\Sigma}}\right)$, *kde*

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\mu}} &= \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_2) \\ \tilde{\mathbf{\Sigma}} &= \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}. \end{aligned}$$

Dôkaz. Anděl (2005, Věta 4.12).

□