MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tomáš Vítek

Brouwerova věta o pevném bodě (přístupy a historie)

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu práce profesorovi Miroslavovi Huškovi za jeho ochotu kdykoliv poradit a především za jeho trpělivost se mnou. Dále bych chtěl poděkovat svým rodičům za jejich podporu během mého studia a také svým učitelům, kteří nesou velkou zásluhu na mém vztahu k matematice.

Název práce: Brouwerova věta o pevném bodě (přístupy a historie)

Autor: Tomáš Vítek

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Cílem práce bylo uvézt různé přístupy k důkazu Brouwerovy věty o pevném bodě a vyhnout se důkazům založeným na teorii homotopie, stupně zobrazení nebo jakékoliv netriviální algebraické topologii. Důkazy byly zvoleny tak, aby pro jejich porozumění dostačovaly pouze základní znalosti kombinatoriky a matematické analýzy a čtenář se u nich dozvěděl i o jiných základních topologických větách.

V práci nejprve kombinatoricky dokážeme Borsukovu-Ulamovu větu, ze které už Brouwerova věta jednoduše plyne. Následně použijeme základy matematické analýzy k důkazu věty známé jako The hairy ball problem, která také přímo implikuje Brouwerovu větu. Nakonec si ukážeme netradiční aplikaci Brouwerovy věty k důkazu základní věty algebry.

Klíčová slova: Brouwerova věta, Borsukova-Ulamova věta, The hairy ball problem, Základní věta algebry

Title: Brouwer fixed point theorem (proofs and history)

Author: Tomáš Vítek

Department: Department of mathematical analysis

Supervisor: prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc., Department of mathematical analysis

Abstract: The aim of this work was to present different approaches to the proof of Brouwer fixed point theorem and to avoid proofs based on homotopy theory, degree of mapping or any non-trivial algebraic topology. The proofs were chosen so that only a basic knowledge of combinatorics and mathematical analysis is required to understand them and the reader could learn about other fundamental topological theorems.

At first, we prove by a combinatorial procedure Borsuk-Ulam theorem from which Brouwer theorem simply follows. We then use the basics of mathematical analysis to prove a theorem known as The hairy ball problem, which also directly implies Brouwer theorem. Finally, we will show an unconventional application of Brouwer theorem to prove the fundamental theorem of algebra.

Keywords: Brouwer theorem, Borsuk-Ulam theorem, The hairy ball problem, Fundamental theorem of algebra

Obsah

Úvod

Brouwerova věta o pevném bodě je jednou ze základních topologických vlastností spojitých funkcí. Cílem tohoto textu je nejen uvedení některého z důkazů, ale také její zařazení do kontextu ostatních běžných topologických vět.

Třírozměrnou verzi dokázal již v roce 1904 lotyšský matematik Piers Bohl (odkaz). Případ pro libovolnou dimenzi dokázal v roce 1910 Jacques Hadamard i L.E.J. Brouwer, přičemž Hadamardův důkaz (odkaz) se neopíral o nástroje jako homotopie, či fundamentální grupa. Brouwer jich využil k zavedení pojmu stupně zobrazení, který vede na elegantní důkaz (odkaz).

V tomto textu se však těmito koncepty zabývat nebudeme, jelikož vyžadují netriviální znalosti algebraické topologie. Místo nich v první částí vybudujeme vztah mezi diskrétní kombinatorikou a topologii, ze kterého vyplyne Borsukova-Ulamova věta a ukážeme, že Brouwerova věta je jejím přímým důsledkem. V druhé části použijeme základní metody matematické analýzy k důkazu věty známé jako The hairy ball problem ze které se dá Brouwerova věta opět jednoduše odvodit. Ve třetí části pak využijeme nabyté znalosti k důkazu základní věty algebry.

Označme B^n jednotkovou kouli v prostoru $\mathbb{R}^n$. Nyní můžeme vyslovit Brouwerovu větu.

Věta 1 (Brouwerova věta o pevném bodě)**.** *Každá spojitá funkce $f : B^n \to B^n$ má alespoň jeden pevný bod, tj. $\exists x \in B^n : f(x) = x$.*

Oba důkazy budou pouze existenční, tedy nebudou obsahovat žádný algoritmus pro nalezení pevného bodu. Přesto, v dnešní době již algoritmy pro aproximaci pevného bodu existují, avšak tento text se jimi zbývat nebude.

1. Borsukova-Ulamova věta

1.1 Základní pojmy

Našim prvním cílem bude rozložit jednotkovou kouli na jednodušší objekty, přesněji na objekty generované pouze konečně mnoha body, které bude snazší studovat.

Definice 1. *Nechť $n,m \in \mathbb{N}, n \leq m$ a $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^m$ jsou afinně nezávislé body. Potom jejich konvexní obal*

$$\sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \, x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i, \lambda_i \in [0,1], \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

se nazývá simplex *dimenze n s vrcholy $x_0, \dots, x_n$.*
Simplex definovaný k libovolnými vrcholy z $x_0, \dots, x_n$ nazveme stranou *σ pro libovolné $k \in \mathbb{N}, k \leq n$.*
Je-li k=2, tj. jedná se o stranu, která je definována pouze dvěma body, pak ji nazveme hranou *σ.*

Dále musíme přesně definovat, co myslíme rozložením jednotkové koule, jelikož níže budeme potřebovat určité vlastnosti. Ve zbytku kapitoly, pokud nebude explicitně řečeno jinak, budeme požívat 1-normu, tj.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \, \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Definice 2. *Množinu simplexů T nazveme* triangulací *jednotkové koule B^n, pokud*

a) Průnik dvou simplexů z T je buď prázdný, nebo jejich společná strana,

b) pro každý simplex z T jsou i všechny jeho strany prvky T,

c) $B^n = \bigcup T$.

Vrcholem*, či* hranou *triangulace T myslíme simplex dimenze nula, respektive jedna, ležící v T.*
Množinu všech vrcholů triangulace T budeme značit $V(T)$.
Symbolem $\delta(T)$ budeme označovat délku nejdelší hrany triangulace T.
Symbolem $H(T)$ označme množinu všech simplexů ležících na hranici B^n.

Triangulací jednotkové koule existuje mnoho a definice výše může působit poněkud abstraktně, ukažme si tedy na příkladě jednu velmi důležitou, takzvanou *základní triangulaci*.

Příklad. Nejdřív si označme $e_i \in \mathbb{R}^n, e_i = (0, \dots ,0,1,0, \dots ,0))$, kde jednotka se nachází na i-té pozici. Poté základní triangulace jednotkové koule B^n je nejmenší triangulace obsahující všechny simplexy, jejichž vrcholy jsou libovolné k-tice bodů z množiny $\{0, +e_1, -e_1, +e_2, -e_2, \dots , +e_n, -e_n\}$, přičemž neobsahuje žádný simplex, který by měl zároveň $+e_i$ a $-e_i$ jako své vrcholy pro $i \in \mathbb{N}, i \leq n$. Označme si ji Z.
Dalším způsobem jak si základní triangulaci geometricky představit je, že se jedná o triangulaci indukovanou řezy jednotkové koule souřadnicovými nadrovinami $n_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$, tj. každý simplex v Z se buďto nachází na hranici Z (pokud počátek není jedním z jeho vrcholů), nebo se jedná o jehlan s vrcholem v počátku a základnou tvořenou nějakým simplexem ležícím na hranici Z.

Základní triangulaci jsme zavedli, neboť má důležitou vlastnost, kterou obecné triangulace mít nemusí, znaménka všech souřadnic jsou stejná pro každé dva body uvnitř každého simplexu v Z. Pro případ $n = 2$ to znamená, že vnitřek každého simplexu v Z se nachází přesně v jednom ze čtyř kvadrantů roviny $\mathbb{R}^2$.

Tuto vlastnost nemá pouze základní triangulace, chtěli bychom tedy nějak zaručit, že triangulace T kterou zkonstruujeme bude tuto vlastnost mít.

Definice 3. *Nechť T a S jsou triangulace jednotkové koule B^n. Potom řekneme, že T* zjemňuje *S, jestliže pro každý simplex $\tau \in T$ existuje simplex $\sigma \in S$ takový, že $\tau \subseteq \sigma$.*

Není těžké nahlédnout, že pro libovolné zjemnění základní triangulace se nebude znaménko souřadnic měnit uvnitř žádného simplexu, neboť pokud se nemění již pro vnitřek simplexu σ, tak se nemění ani pro vnitřek simplexu $\tau \subseteq \sigma$.

Uvědomme si, že pro libovolnou triangulaci T existuje zjemnění S s libovolně malým $\delta(S)$, neboť libovolnou hranu můžeme nahradit dvěma hranami poloviční délky se společným vrcholem v polovině původní hrany.

Poslední vlastností, které je potřeba před přechodem ke kombinatorice, je určitá forma symetrie.

Definice 4. *Nechť T je triangulace B^n. Pak řekneme, že T je* protilehle symetrická na hranici, *jestliže pro každý simplex $\sigma \in H(T)$ platí $-\sigma \in H(T)$.*

1.2 Tuckerovo lemma

Nyní už máme k dispozici všechny pojmy k vyslovení Tuckerova lemmatu, které mluví o existenci určité hrany vzhledem k očíslování vrcholů nějaké triangulace. Existence této hrany nám v budoucnu pomůže k důkazu Borsukovy-Ulamovy věty.

Lemma 2 (Tuckerovo lemma)**.** *Nechť T je triangulace B^n, která je protilehle symetrická na své hranici a zjemňuje základní triangulaci.*
Nechť $\lambda : V(T) \to \{+1, -1, +2, -2, \dots , +n, -n\}$ je očíslování vrcholů splňující $\lambda(-v) = -\lambda(v)$, kde v je vrchol na hranici B^n. Potom existuje hrana v T, jejíž dva vrcholy v_1, v_2 splňují $\lambda(v_1) = -\lambda(v_2)$.

Poznámka. Obvykle v literatuře bývá Tuckerovo lemma formulováno bez předpokladu, že T zjemňuje základní triangulaci a opravdu tento předpoklad není nezbytný pro platnost Tuckerova lemmatu. Avšak jeho důkaz by se značně zvětšil ve své délce a vyžadoval by další netriviální znalosti, přičemž k důkazu Borsukovy-Ulamovy věty, kam směřujeme, je tato verze Tuckerova lemmatu postačující.

Jediný elementární důkaz obecné verze Tuckerova lemmatu vychází z platnosti právě Borsukovy-Ulamovy věty, tedy bylo by možné, až tuto větu dokážeme pomocí této verze Tuckerova lemmatu, se vrátit zpět a dokázat Tuckerovo lemma v úplné obecnosti. Tento text se však tímto směrem ubírat nebude.

Důkaz. Důkaz budeme vézt sporem, pro případ $n = 1$ by jednotková koule byla uzavřený interval $[-1{,}1]$ a všechny vrcholy triangulace T by ležely v tomto intervalu. Z lichosti očíslování λ máme vrcholy s hodnotou jak +1, tak -1, tedy není těžké ukázat, že musí existovat dva vrcholy s čísly +1 a -1 vedle sebe. Pro obecné n je důkaz podobný, ale zdaleka ne tak jednoduchý, musíme totiž uvažovat simplexy všech možných dimenzí. Zvolíme určité simplexy s žádoucími vlastnostmi a vytvoříme na nich graf. Poté ukážeme, že tento graf má pouze jeden vrchol lichého stupně, což je spor.

Nechť $\sigma \in$ T, pak označme $\lambda(\sigma) = \{\lambda(v) : v \text{ je vrchol } \sigma\}$. Zvolme bod x ležící uvnitř σ, potom definujme množinu
$S(\sigma) = \{+i : x_i > 0, i \in \mathbb{N}, i \leq n\} \cup \{-i : x_i < 0, i \in \mathbb{N}, i \leq n\}$. Množina $S(\sigma)$ nezávisí na očíslování λ a je dobře definována, neboť T je zjemněním základní triangulace a tedy znaménko všech souřadnic se nemění uvnitř každého simplexu, tj. všechny možné body x uvnitř σ dávají stejnou množinu $S(\sigma)$. Počátek jakožto simplex má $S(\{0\}) = \emptyset$.

Simplex $\sigma \in$ T nazveme *šťastný*, jestliže $S(\sigma) \subseteq \lambda(\sigma)$. Uvědomme si, že simplex $\{0\}$ je vždy šťastný, neboť $\emptyset \subseteq \{\lambda(0)\}$. Také jelikož T je zjemnění základní triangulace, tak nutně v T existuje hrana, jejíž jeden vrchol je počátek a druhý vrchol leží na úsečce z počátku do bodu $\pm e_{|\lambda(0)|}$, jehož znaménko je totožné se znaménkem $\lambda(0)$. Označme tento simplex σ_s a pozorujme, že nutně musí být také šťastný, neboť $S(\sigma_s) = \{\lambda(0)\} \subseteq \lambda(\sigma_s)$.

Podívejme se dále na nějaké vlastnosti šťastných simplexů. Nechť σ je šťastný simplex a označme $k = |S(\sigma)|$. Potom dimenze σ je nejvýše k, neboť pro libovolný bod simplexu je nejvýše k souřadnic nenulových, tedy simplex σ leží v lineárním podprostoru $\mathbb{R}^n$ dimenze k, generovaném těmito souřadnicemi. Na druhou stranu dimenze σ nemůže být menší než $k - 1$, protože je potřeba aby simplex σ měl alespoň k vrcholů s různými hodnotami očíslování, jinak by nemohl být šťastný.

Řekneme, že simplex σ je *pevný*, jestliže $\dim \sigma = k - 1$. To znamená, že očíslování vrcholů se nemůže nijak měnit, jinak by σ nebyl šťastný. Řekneme, že simplex σ je *volný*, jestliže $\dim \sigma = k$, tedy buď existují dva vrcholy, ve kterých má λ stejnou hodnotu, nebo v některém z vrcholů nabývá λ hodnoty, která se nenachází v $S(\sigma)$. Uvědomme si, že každý simplex ležící na hranici je nutně pevný.

Uvažujme množinu všech šťastných simplexů triangulace T a definujme graf G, jehož vrcholy tvoří právě tato množina a vrcholy $\sigma,\tau \in$ T jsou spojeny hranou, jestliže

a) σ a τ jsou si protilehlé na hranici T, tj. $\sigma = -\tau \in$ H(T), nebo

b) σ je stranou τ, splňující $\lambda(\sigma) = S(\tau)$, jinými slovy očíslování vrcholů σ je samo dostatečné, aby byl celý simplex τ šťastný.

Upozorňujeme, že pojmy *vrchol* a *hrana* mají úplně jiný význam v triangulaci T a v grafu G.

Výše jsme si ukázali, že simplex $\{0\}$ je šťastný a stejně tak simplex σ_s. Z podmínky b) plyne, že v grafu G je mezi simplexem $\{0\}$ a simplexem σ_s hrana. Navíc žádná jiná hrana ze simplexu $\{0\}$ vézt nemůže, jelikož se nenachází na hranici a σ_s je jediný simplex v T, který je šťastný pouze hodnotou $\lambda(0)$. Z toho plyne, že simplex $\{0\}$ má v grafu G stupeň jedna.

Nyní pro spor předpokládejme, že v T neexistuje hrana, jejíž dva vrcholy v_1, v_2 splňují $\lambda(v_1) = -\lambda(v_2)$. Budeme chtít ukázat, že v takovém případě má každý vrchol σ grafu G, různý od $\{0\}$, stupeň dva. To je ale spor, neboť konečný graf nemůže mít pouze jeden vrchol lichého stupně.

Rozlišme několik případů.

1. σ je pevný a šťastný simplex, potom aby simplex τ mohl mít se σ společnou hranu v grafu G, tak musí buď $\tau = -\sigma$, nebo σ musí být stranou τ. Nemuže nastat, že τ by byl stranou σ, neboť σ je pevný simplex, tedy potřebuje očíslování všech svých vrcholů, aby byl šťastný. Žádná jeho strana jej nemůže sama činit šťastným. Mohou tedy nastat pouze dva případy:

   (a) σ leží na hranici triangulace T. Potom jedním sousedem je simplex $-\sigma$ a pro jakýkoliv jiný simplex τ, který je sousedem σ, tvoří σ stranu τ. Navíc k tomu aby τ byl šťastný stačí pouze očíslování vrcholů σ. Definujme lineární podprostor L generován souřadnicovými osami x_i, kde $i \in S(\sigma)$ nebo $-i \in S(\sigma)$. Nechť k je dimeze L, pak jelikož σ je pevný a šťastný tak $k = \dim \sigma + 1$. Uvažujme průnik k-rozměrné nadroviny L a jednotkové koule B^n. To je zřejmě k-rozměrná koule, a protože triangulace T je zjemnění základní triangulace, tak simplexy ležící v L triangulují tuto kouli. Tedy σ ležící v $L \cap B^n$ je $(k-1)$-rozměrný simplex na hranici triangulace koule B^k. Potom existuje právě jeden simplex dimenze k jehož stanou je právě σ a protože leží v $L \cap B^n$, tak stačí pouze očíslování vrcholů σ aby byl šťastný.

   (b) σ neleží na hranici triangulace T. Podobnou úvahou jako v bodě (a) dostaneme, že σ je stranou právě dvou simplexů a tyto dva simplexy jsou šťastné pouze pomocí očíslování vrcholů σ.

2. σ je volný šťastný simplex, potom rozebereme dva případy:

   (a) Platí $S(\sigma) = \lambda(\sigma)$ a tedy existuje očíslování, které se na vrcholech σ vyskytuje dvakrát. Potom σ má dva sousedy, což jsou strany σ, které vzniknou vypuštěním jednoho z vrcholů s dvojtým očíslováním. Dále σ nemůže být stranou žádného šťastného simplexu se kterým bude sousedit, neboť je-li σ stranou τ, pak jelikož σ je volný šťastný simplex, tak $|S(\sigma)| < |S(\tau)|$ a jelikož předpokládáme $S(\sigma) = \lambda(\sigma)$, tak $\lambda(\sigma) \neq S(\tau)$.

   (b) Existuje přebytečné očíslování $i \in \lambda(\sigma) \setminus S(\sigma)$. Také nemůže platit $-i \in S(\sigma)$, protože pak by existovala hrana jejíž dva vrcholy v_1, v_2 by splňovaly $\lambda(v_1) = -\lambda(v_2)$. Jedním sousedem simplexu σ je ta jeho strana, která neobsahuje vrchol s očíslováním i.

Dále neboť $\lambda(\sigma) = S(\sigma) \cup \{i\}$, tak σ je stranou přesně jednoho volného simplexu, který je šťastný pouze pomocí očíslování vrcholů σ a splňuje $S(\tau) = S(\sigma) \cup \{i\}$. Tedy σ má přesně dva sousedy.

Tedy jsme ukázali, že pokud neexistuje hrana jejíž dva vrcholy v_1, v_2 by splňovaly $\lambda(v_1) = -\lambda(v_2)$, tak všechny vrcholy grafu G mají stupeň 2, kromě simplexu $\{0\}$, který má stupeň jedna, což je spor.

□

1.3 Borsukova-Ulamova věta

Obdobně jako jsme označili jednotkovou kouli B^n, označme jednotkovou sféru $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Nezapomeňme si uvědomit, že přirozené číslo n u sféry udává její dimenzi, nikoliv dimenzi prostoru ve kterém se nachází. Jinými slovy hranice jednotkové koule B^n je jednotková sféra S^{n-1}, ne S^n.

Nyní můžeme formulovat větu, která je v literatuře často považována za jinou formulaci samotné Borsukovy-Ulamovy věty, avšak její platnost lze z Tuckerova lemmatu nahlédnout přirozeně a také bude hrát významnou roli v důkazu kýžené Brouwerovy věty o sekci níže.

Věta 3 (1. Borsukova věta)**.** *Neexistuje spojité zobrazení $f : B^n \to S^{n-1}$ liché na hranici, tj. $\forall x \in S^{n-1} : f(-x) = -f(x)$.*

Důkaz. Předpokládejme, že existuje spojité zobrazení $f : B^n \to S^{n-1}$ liché na hranici. Naším cílem bude zkonstruovat triangulaci T a její očíslování λ, které bude ve sporu s Tuckerovým lemmatem.

Nejprve položme $\epsilon = \frac{1}{n}$. Potom pro každé $y \in S^{n-1}$ platí

$$\|y\|_\infty = max\{|y_i| : i = 1, \cdots, n\} \geq \epsilon,$$

jinak by muselo platit $\|y\| < 1$. Dále víme, že spojitá funkce na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá, tedy existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, z \in B^n$ splňující $\|x - z\| < \delta$ platí $\|f(x) - f(z)\|_\infty < 2\epsilon$. Zvolme libovolnou triangulaci T jednotkové koule B^n, která je protilehle symetrická na své hranici, délka nejdelší hrany je menší než δ a T zjemňuje základní triangulaci.

Označme $k(v) = min\{i : |f(v)_i| \geq \epsilon\}$, kde v je vrchol triangulace T. Potom definujme $\lambda : V(T) \to \{\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n\}$ jako

$$\lambda(v) = \begin{cases} +k(v) & jestliže\, f(v)_{k(v)} > 0, \\ -k(v) & jestliže\, f(v)_{k(v)} < 0. \end{cases}$$

Jelikož f je lichá na S^{n-1}, dostaneme $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ pro každý vrchol v ležící na hranici. Tím jsme splnili všechny předpoklady Tuckerova lemmatu a existuje tedy hrana s vrcholy v, w splňující $\lambda(v) = -\lambda(w) > 0$. Potom $f(v)_{\lambda(v)} \geq \epsilon$ a $f(w)_{-\lambda(w)} \leq -\epsilon$, z čehož dostaneme, že $\|f(v) - f(w)\|_\infty \geq 2\epsilon$, což je spor. Tedy neexistuje spojité zobrazení $f : B^n \to S^{n-1}$ liché na hranici.

□

Jak již bylo zmíněno výše, Borsukova-Ulamova věta má mnoho podob, avšak ta nejčastěji používaná mluví o protilehlých bodech na jednotkové sféře.

Věta 4 (Borsukova-Ulamova věta)**.** *Nechť* $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ *je spojité zobrazení. Potom existuje bod* $x \in S^n$ *splňující* $f(x) = f(-x)$*.*

Důkaz. Předpokládejme, že takový bod $x \in S^n$ neexistuje. Definujme funkci $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ předpisem $g(x) = f(x) - f(-x)$, která je na S^n lichá a nemá žádný nulový bod. Kolmá projekce π horní poloviny jednotkové sféry S^n na jednotkovou kouli B^n, definovaná předpisem $\pi(x_1, \ldots ,x_n,x_{n+1}) = (x_1, \ldots ,x_n)$, je zřejmě homeomorfismus. Tedy funkce

$$h(x) = \frac{g(\pi^{-1}(x))}{\|g(\pi^{-1}(x))\|} : B^n \to S^{n-1}$$

je dobře definovaná, spojitá a lichá na hranici, což je spor s 1. Borsukovou větou.

□

1.4 Brouwerova věta

Jelikož již máme dokázanou Borsukovu-Ulamovu větu, tak můžeme vyslovit větu, která je striktně slabší, než 1. Borsukova věta a mluví o neexistenci takzvané *retrakce* jednotkové koule na svou hranici.

Věta 5 (2. Borsukova věta)**.** *Neexistuje spojité zobrazení* $f : B^n \to S^{n-1}$*, které je identitou na hranici, tj.* $\forall x \in S^{n-1} : f(x) = x$*.*

Důkaz. Je zřejmě vidět, že tato věta plyne okamžitě z 1. Borsukovy věty, neboť identické zobrazení je liché.

□

Nyní již máme vše potřebné k důkazu Brouwerovy věty o pevném bodě, který se bude především opírat o neexistenci retrakce jednotkové koule na svou hranici.

Věta 6 (Brouwerova věta o pevném bodě)**.** *Každá spojitá funkce* $f : B^n \to B^n$ *má alespoň jeden pevný bod, tj.* $\exists x \in B^n : f(x) = x$*.*

Důkaz. Předpokládejme, že f nemá pevný bod, tj. $\forall x \in B^n : f(x) \neq x$. Potom definujme funkci r následujícím způsobem, pro $x \in B^n$ definujme polopřímku s počátkem v bodě $f(x)$ procházející bodem x. Jako $r(x)$ pak definujme průsečík této polopřímky se sférou S^{n-1}. V případě, že $f(x) \in S^{n-1}$, tak má tato polopřímka dva průsečíky s S^{n-1}, tedy definujme r tak, aby $r(x) \neq f(x)$. Protože f nemá žádný pevný bod, tak je funkce r dobře definovaná a zřejmě je spojitá.

Dále si uvědomme, že pro x ležící na hranici, tj. $x \in S^{n-1}$ je r identické zobrazení, neboť přímo bod x je průsečíkem výše definované polopřímky s S^{n-1}. Tedy funkce $r : B^n \to S^{n-1}$ je identitou na hranici, což je ovšem spor s 2. Borsukovou větou. Dostáváme tedy, že f musí mít pevný bod.

□

Tímto jsme získali první z důkazů Brouwerovy věty o pevném bodě a to pomocí silnější Borsukovy-Ulamovy věty. V další kapitole uvedeme druhý důkaz a to opět pomocí silnějšího tvrzení známého jako The hairy ball problem.

Meteriály pro tuto kapitolu jsme čerpali z Matoušek a kol. (2003) a z Granas a Dugundji (2003).

2. The hairy ball problem

2.1 Základní pojmy

Stěžejní věta minulé kapitoly, Borsukova-Ulamova, mluvila o vlastnostech spojitého zobrazení na sféře. V této kapitole se budeme zabývat velmi podobnou myšlenkou s tím rozdílem, že místo běžné funkce do reálných čísel budeme zkoumat vektorová pole.

Definice 5. *Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$.* Vektorové pole *na U je zobrazení $v : U \to \mathbb{R}^n$, přičemž řekneme, že vektorové pole je spojité respektive spojitě diferencovatelné, jestliže je spojité respektive spojitě diferencovatelné v každé své složce.*

Definice 6. *Řekneme že vektorové pole v na sféře je* tečné *jestliže $\forall u \in S^{n-1}$: $u \cdot v(u) = 0$, kde $\cdot$ je eukleidovský skalární součin. Řekneme, že v je* jednotkové, *jestliže $\forall u \in S^{n-1} : \|v(u)\| = 1$, kde $\|\cdot\|$ je eukleidovská norma.*

Hlavní myšlenkou této kapitoly bude zkoumání toku vektorového pole na jednotkové sféře a jak se s ním mění objem. Tento proces si lze představit jako mírná deformace této sféry tak, že každý bod posunu o malou vzdálenost ve směru vektorového toku v tomto bodě. Nás bude například zajímat, jak se změní při této deformaci objem původní sféry, případně na jaký objekt se bude sféra tímto způsobem deformovat.

První lemma bude mluvit obecném vektorovém toku na kompaktní souvislé množině, tedy ne jen na sféře, a řekne nám, že objem této oblasti se bude měnit polynomiálně v závislosti na velikosti deformace.

Lemma 7. *Nechť A je kompaktní souvislá množina v $\mathbb{R}^n$ a v je spojitě diferencovatelné vektorové pole definované na okolí A. Jestliže $t \in \mathbb{R}$ je dostatečně malé, tak zobrazení $f_t : A \to \mathbb{R}^n$ definované vztahem $f_t(x) = x + tv(x)$ je prosté a zobrazí oblast A na oblast $f_t(A)$ jejíž objem je polynomiální funkce proměnné t.*

Důkaz. Jelikož A je kompaktní a v je spojitě diferencovatelné, tak je v také lipschitzovské, tj. existuje $C > 0$ takové, že $\|v(x) - v(y)\| \leq C\|x - y\|$ pro všechny $x,y \in A$. Zvolme t takové, že $|t| < C^{-1}$, potom f_t je prosté, neboť $f_t(x) = f_t(y)$ nám dává $x-y = tv(y)-tv(x)$ a vezmeme li normu na obou stranách rovnosti dostaneme $\|x - y\| = |t| \|v(x) - v(y)\| \leq |t| C \|x - y\| < \|x - y\|$, tedy musí platit $\|x - y\| = 0$, tudíž $x = y$.

Pro objem $f_t(A)$ platí

$$Objem f_t(A) = \int_{f_t(A)} 1 = \int_A |Det(f_t')|,$$

musíme tedy nejdříve spočíst f_t'. Jelikož $f_t(x) = x + tv(x)$ a v je spojitě diferencovatelné vektorové pole, tak platí

$$f_t' = I + t\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}^n,$$

tudíž determinant $f_t'(x)$ je polynom v t tvaru $1 + \alpha_1(x)t + \cdots + \alpha_n(x)t^n$, kde $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ jsou spojité funkce. Je zřejmé, že pro $|t|$ dostatečně malé je tento determinat pozitivní. Tedy objem $f_t(A)$ má tvar

$$Objem f_t(A) = \int_A 1 + \alpha_1(x)t + \cdots + \alpha_n(x)t^n dx = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,$$

což je přesně polynomiální funkce proměnné t.

□

Ještě než vyslovíme druhé lemma, připomeňme si jedno tvrzení ze základního kurzu matematické analýzy, konkrétně větu o inverzní funkci, kterou budeme potřebovat při důkazu druhého lemmatu.

Věta 8 (Věta o inverzní funkci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitě diferencovatelná funkce. Jestliže je $f'(x)$ regulární v bodě x, tak existuje okolí $U \subset G$ bodu x a okolí V bodu $f(x)$ takové, že $f : U \to V$ je bijekce a $f^{-1} : V \to U$ je spojitě diferencovatelná funkce.*

Druhé lemma již bude hovořit o specifickém vektorovém toku na jednotkové sféře a řekne nám, že deformací sféry tímto tokem dostaneme opět sféru akorát většího poloměru v závislosti na velikosti deformace.

Lemma 9. *Nechť v je spojitě diferencovatelné tečné jednotkové vektorové pole na sféře S^{n-1}. Jestliže $t \in \mathbb{R}$ je dostatečně malé, tak zobrazení $f_t : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ definované vztahem $f_t(u) = u + tv(u)$ zobrazí jednotkovou sféru S^{n-1} na sféru o poloměru $\sqrt{1+t^2}$.*

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že $\forall u \in S^{n-1} : \|f_t(u)\| = \sqrt{1+t^2}$, neboť $\|u\| = 1$, protože u je bod na jednotkové sféře, v je jednotkové vektorové pole, které je tečné k S^{n-1}, tedy můžeme použít Pythagorovu větu:

$$\forall u \in S^{n-1} : \|f_t(u)\|^2 = \|u + tv(u)\|^2 = \|u\|^2 + \|tv(u)\|^2 = 1 + t^2$$

.

Jestliže t je dostatečně malé, tak matice prvních derivací f_t je regulární na celé S^{n-1} (viz důkaz lemmatu 7). Nyní si uvědomme, že otevřené okolí libovolného bodu v S^{n-1} je difeomorfní otevřené množině v $\mathbb{R}^{n-1}$. Použijeme-li větu o inverzní funkci, dostaneme, že pro každý bod S^{n-1} existuje jeho otevřené okolí, které se pomocí f_t zobrazí na otevřenou množinu. Potom $f_t(S^{n-1})$ je sjednocením těchto otevřených obrazů, což je otevřená podmnožina sféry o poloměru $\sqrt{1+t^2}$. Ale zároveň $f_t(S^{n-1})$ je kompaktní, tedy uzavřená, protože S^{n-1} je kompaktní a spojitý obraz kompaktu je kompakt. Dohromady $f_t(S^{n-1})$ je zároveň otevřená i uzavřená, a protože sféra o poloměru $\sqrt{1+t^2}$ je souvislá, tak musí $f_t(S^{n-1})$ být celá tato sféra.

□

2.2 The hairy ball problem

Se znalostmi předchozích dvou lemmat již můžeme dokázat poněkud slabší verzi The hairy ball problem, která mluví o spojitě diferencovatelných vektorových polích a hlavní myšlenkou bude právě změna objemu sféry při deformaci vektorovým polem.

Věta 10 (The hairy ball problem pro spojitě diferencovatelná vektorová pole)**.** *Na jednotkové sféře sudé dimenze neexistuje spojitě diferencovatelné tečné jednotkové vektorové pole.*

Důkaz. Předpokládejme, že na jednotkové sféře S^{n-1} existuje spojitě diferencovatelné tečné jednotkové vektorové pole v. Definujme

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq \|x\| \leq b\},$$

pro nějaké $b > a > 0$. A je tedy množina bodů mezi dvěma sférami se středem v počátku o poloměru a a b. Dále rozšíříme vektorové pole v do A v následujícím smyslu $v(ru) = rv(u)$, kde $a \leq r \leq b$ a $u \in S^{n-1}$. Z toho plyne, že zobrazení $f_t(x) = x + tv(x)$ je definováno na A opět jako $f_t(ru) = rf_t(u)$. Tedy z lemmatu 9 plyne, že pro dostatečně malé t zobrazí f_t sféru o poloměru r na sféru o poloměru $r\sqrt{1+t^2}$. Potom dostaneme, že

$$f_t(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : a\sqrt{1+t^2} \leq \|x\| \leq b\sqrt{1+t^2}\},$$

což je opět množina bodů mezi sférami se středem v počátku. Dostáváme tedy, že

$$Objem f_t(A) = \left(\sqrt{1+t^2}\right)^n Objem A,$$

avšak pro n liché tento objem není polynomiální funkcí proměnné t, což je spor s lemmatem 7. Tedy pokud je n liché, tak na jednotkové sféře S^{n-1}, která má sudou dimenzi, neexistuje spojitě diferencovatelné tečné jednotkové vektorové pole.

□

Nyní již máme vše připravené abychom mohli vyslovit a dokázat The hairy ball problem. Bude se jednat o použití Weierstrassovy věty o aproximaci, tvrzení ze základního kurzu matematické analýzy, které říká, že libovolnou spojitou funkci na kompaktu, tedy i vektorové pole na jednotkové sféře, lze libovolně přesně aproximovat polynomem, čili spojitě diferencovatelným zobrazením, pro které pak lze použít předchozí větu.

Věta 11 (Weierstrassova věta o aproximaci)**.** *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina a $f : K \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom pro každé $\epsilon > 0$ existuje polynom p takový, že pro každé $x \in K$ platí $|f(x) - p(x)| < \epsilon$.*

Věta 12 (The hairy ball problem)**.** *Na jednotkové sféře sudé dimenze neexistuje spojité tečné všude nenulové vektorové pole.*

Důkaz. Předpokládejme, že na jednotkové sféře S^{n-1} existuje spojité tečné všude nenulové vektorové pole v. Jelikož S^{n-1} je kompaktní, funkce $\|v\|$ nabývá svého minima, označme jej $m \in \mathbb{R}$, a protože v je všude nenulové, tak $m > 0$.

Použijeme-li Weierstrassovu větu o aproximaci, dostaneme, že existuje funkce $p : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ polynomiální v každé složce, splňující pro každé $u \in S^{n-1}$

$$\|v(u) - p(u)\| < \frac{m}{2}.$$

Jelikož p je polynomiální, tak je spojitě diferencovatelné. Definujme vektorové pole $w(u) = p(u) - (p(u) \cdot u)u, u \in S^{n-1}$, které je zřejmě také spojitě diferencovatelné. Pro každé $u \in S^{n-1}$ platí

$$w(u) \cdot u = p(u) \cdot u - (p(u) \cdot u)u \cdot u = p(u) \cdot u - (p(u) \cdot u) \|u\|^2 = p(u) \cdot u - p(u) \cdot u = 0,$$

tedy w je tečné vektorové pole. Platí $v(u) \cdot u = 0$, neboť v je taky tečné vektorové pole, tedy pro každé $u \in S^{n-1}$

$$\begin{aligned} \|w(u) - p(u)\| = |p(u) \cdot u| = |p(u) \cdot u - v(u) \cdot u| = \\ = |(p(u) - v(u)) \cdot u| \le \|p(u) - v(u)\| \|u\| < \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Kdyby existovalo $u \in S^{n-1}$ takové, že $w(u) = 0$, tak z předchozí nerovnosti dostaneme $\|p(u)\| < \frac{m}{2}$ a platí

$$0 < m \le \|v(u)\| \le \|v(u) - p(u)\| + \|p(u)\| < \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m,$$

což je spor, tedy w je všude nenulové. Dohromady $w/\|w\|$ je dobře definované, spojitě diferencovatelné tečné jednotkové vektorové pole na S^{n-1}. To je ovšem pro sféry sudé dimenze spor s větou 10, a tedy na jednotkové sféře sudé dimenze neexistuje spojité tečné všude nenulové vektorové pole.

□

Poznámka. Předpoklad, že dimenze sféry je sudá, je nutný pro platnost věty The hairy ball problem, neboť pro sféru liché dimenze můžeme definovat vektorové pole $v(x_1, \cdots, x_n) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \cdots, x_n, -x_{n-1})$, které je zřejmě spojité tečné a všude nenulové.

2.3 Brouwerova věta podruhé

Pro tento důkaz Brouwerovy věty o pevném bodě budeme opět předpokládat existenci funkce bez pevného bodu a našim cílem bude pomocí stereografické projekce vytvořit netriviální spojité tečné všude nenulové vektorové pole na sféře sudé dimenze, což bude spor s The hairy ball problem.

Věta 13 (Brouwerova věta o pevném bodě)**.** *Každá spojitá funkce $f : B^n \to B^n$ má alespoň jeden pevný bod, tj. $\exists x \in B^n : f(x) = x$.*

Důkaz. Předpokládejme, že f nemá pevný bod, tj. $\forall x \in B^n : f(x) \neq x$. Definujme vektorové pole

$$w(x) = x - \frac{(1 - \|x\|^2)f(x)}{1 - x \cdot f(x)}, x \in B^n,$$

které je dobře definované, neboť $x \cdot f(x) = \|x\| \, \|f(x)\| \, cos\alpha$ a pokud by nastalo $\|x\| = \|f(x)\| = cos\alpha = 1$, tak už platí $x = f(x)$. Vektorové pole w je zřejmě spojité a splňuje $\forall u \in S^{n-1} : w(u) = u$. Jestliže jsou x a $f(x)$ lineárně nezávislé, pak je vidět, že w je nenulové. Jestliže jsou lineárně závislé, tedy existuje nějaké $t \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = tx$, pak platí

$$w(x) = x - \frac{(1 - \|x\|^2)f(x)}{1 - x \cdot f(x)} = \frac{(1 - x \cdot f(x))x}{1 - x \cdot f(x)} - \frac{(1 - x \cdot x)f(x)}{1 - x \cdot f(x)} =$$
$$= \frac{x - t(x \cdot x)x - f(x) + t(x \cdot x)x}{1 - x \cdot f(x)} = \frac{x - f(x)}{1 - x \cdot f(x)} \neq 0,$$

tedy w je všude nenulové.

Uvažujme $\mathbb{R}^n$ jako nadrovinu $\{x_{n+1} = 0\}$ v $\mathbb{R}^{n+1}$. Naším cílem bude zobrazit vektorové pole w na dolní polokouli S^n pomocí stereografické projekce ze severního pólu, tzn. bodu $(0, \cdots, 0, 1) \in S^n$. Stereografická projekce má dobře známý tvar

$$s(x) = \frac{1}{x \cdot x + 1}(2x_1, \cdots, 2x_n, x \cdot x - 1), x \in B^n.$$

Uvažujme derivaci s, což je matice jejíž sloupcové vektory tvoří bázi tečného prostoru S^n tedy vynásobíme-li s' vektorovým polem w zprava, dostaneme vektorové pole, které je tečné k S^n, označmě jej W. Vektorové pole W lze vyjádřit jako

$$W(s(x)) = \left. \frac{ds(x + tw(x))}{dt} \right|_{t=0}, x \in B^n$$

a protože w je všude nenulové, tak i W je nenulové všude na dolní polokouli S^n.

Nyní se zaměřme na chování W na rovníku S^n, tj. S^{n-1}. Tam platí že $s(x) = x$ pro každé $x \in S^{n-1}$. Zároveň si připomeňme, že na S^{n-1} platí $w(x) = x$, tedy pro $x \in S^{n-1}$ chceme spočítat

$$W(x) = \left. \frac{ds(x + tw(x))}{dt} \right|_{t=0} = s'(x)w(x) = s'(x)x.$$

Spočtěme první složku, ta se bude rovnat

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{2x_1}{x \cdot x + 1} \right) x_i \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{2x_1}{x \cdot x + 1} \right) x_1 \right) + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{2x_1}{x \cdot x + 1} \right) x_i \right) =$$
$$= \frac{2(x \cdot x + 1)x_1 - 4x_1^3}{(x \cdot x + 1)^2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{-4x_1 x_i^2}{(x \cdot x + 1)^2} =$$
$$= -2x_1 \frac{-x \cdot x - 1 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + 2x_n^2}{(x \cdot x + 1)^2} =$$
$$= -2x_1 \frac{x \cdot x - 1}{(x \cdot x + 1)^2} = 0,$$

neboť $x \in S^{n-1}$ a tedy $x \cdot x = \|x\|^2 = 1$. Identicky se spočtou i všechny ostatní složky kromě poslední a také vyjdou rovny nule. Pro poslední složku platí

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x \cdot x - 1}{x \cdot x + 1} \right) x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i(x \cdot x + 1) - 2x_i x \cdot x - 1)}{(x \cdot x + 1)^2} x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{4x_i^2}{(x \cdot x + 1)^2} = \frac{4x \cdot x}{(x \cdot x + 1)^2} = \frac{4}{2^2} = 1.$$

Tedy pro všechny $x \in S^{n-1}$ platí $W(x) = (0, \cdots ,0,1)$. Tímto jsme definovali spojité tečné všude nenulové vektorové pole na dolní polokouli S^n.

Obdobně, pomocí stereografické projekce z jižního pólu zobrazíme vektorové pole $-w$ na horní polokouli S^n a rovněž dostaneme spojité tečné všude nenulové vektorové pole. Povšimněme si, že jelikož zobrazujeme vektorové pole $-w$ místo w, tak na rovníku bude toto vektorové pole opět nabývat hodnoty $(0, \cdots ,0,1)$, tedy můžeme tato dvě vektorová pole slepit, čímž dostaneme spojité tečné všude nenulové vektorové pole na S^n. To je ale spor s větou 12 pro n sudé, tudíž $f : B^n \to B^n$ má pro n sudé alespoň jeden pevný bod.

Pro liché $n = 2k-1$ bude důkaz plynout z toho, že pokud by existovala spojitá funkce $f : B^{2k-1} \to B^{2k-1}$ bez pevného bodu, pak by ani funkce $F : B^{2k} \to B^{2k}$ definována jako $F(x_1, \cdots ,x_{2k}) = (f(x_1, \cdots ,x_{2k-1}),0)$ neměla žádný pevný bod, což je spor.

□

Tímto jsme dostali alternativní důkaz Brouwerovy věty o pevném bodě, který plyne ze silnější věty The hairy ball problem. V další kapitole si ukážeme zajímavou aplikaci Brouwerovy věty o pevném bodě a to důkaz základní věty algebry.

Materiály pro tuto kapitolu pochází z Milnor (1978).

3. Základní věta algebry

Našim cílem v této kapitole bude dokázat jedno z nejznámějších tvrzení a to základní větu algebry právě pomocí Brouwerovy věty o pevném bodě. Jelikož zde budeme pracovat s komplexními čísly, zaveďme značení pro jednotkový disk $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ a jednotkovou kružnici $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Samozřejmě platí, že D je homeomorfní B^2 a C je homeomorfní S^1.

Dále budeme potřebovat tvrzení z kurzu komplexní analýzy, které se týká toho, že každé komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ můžeme zapsat jako $z = re^{i\psi}$ pro $\psi \in \mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$

Věta 14 (O spojitosti argumentu)**.** *Nechť $f : D \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je spojitá funkce. Potom f lze zapsat jako $f(z) = r(z)e^{i\psi(z)}$ a funkce $r : D \to [0, \infty]$ a $\psi : D \to \mathbb{R}$ jsou spojité.*

Důležitou definicí, kterou budeme v této kapitole používat, je definice esenciálního zobrazení na sféře.

Definice 7. *Nechť $f : S^n \to S^n$ je spojité zobrazení. Pak řekneme, že f je* esenciální*, jestliže neexistuje spojité rozšíření $F : B^{n+1} \to S^n$.*

Povšimněme si, že tato definice úzce souvisí s Brouwerovou větou o pevném bodě, přesněji, 2. Borsukova věta říká přesně, že identita na S^n je esenciální zobrazení, neboť neexistuje spojité zobrazení $F : B^{n+1} \to S^n$, které je identitou na hranici, tj. neexistuje spojité rozšíření této identity.

Pro důkaz základní věty algebry nám ale nebude stačit, že identické zobrazení je esenciální, budeme potřebovat esencialitu obecnějšího zobrazení, o čemž mluví následující věta.

Věta 15 (Esencialita z^n)**.** *Zobrazení $f : C \to C$ definováno jako $f(z) = z^n$ je esenciální pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že f není esenciální na C. Potom existuje spojité rozšíření $F : D \to C$. Jelikož $C \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tak pomocí věty o spojitosti argumentu můžeme zapsat $F(z) = r(z)e^{i\psi(z)}$, kde $r : D \to [0, \infty]$ a $\psi : D \to \mathbb{R}$ jsou spojitá zobrazení, přičemž r je konstantní a rovno jedné, neboť obor hodnot F leží v jednotkové kružnici. Tedy platí $F(z) = e^{i\psi(z)}$. Potom definujme spojitá zobrazení $h_1, \cdots, h_n : D \to C$ vztahem

$$h_k(z) = e^{i\frac{\psi(z)+2k\pi}{n}},$$

což jsou přesně zobrazení splňující $(h_k(z))^n = F(z)$ na D, tedy jsou to n-té odmocniny z F. Jelikož $F(1) = 1$, tak existuje $j \in \mathbb{N}, j \leq n$ takové, že $h_j(1) = 1$. Potom zobrazení $h_j \circ F : D \to C$ je spojité a je identitou na C, což je spor s 2. Borsukovou větou a tedy zobrazení f je esenciální.

□

Dále se podívejme na větu, která mluví o tzv. bodech shody dvou zobrazení a využívá právě pojmu esenciálního zobrazení.

Věta 16 (Věta o bodě shody)**.** *Nechť* $f, g : B^{n+1} \to B^{n+1}$ *jsou dvě spojité funkce,* $f(S^n) \subset S^n$ *a* $f|_{S^n} : S^n \to S^n$ *je esenciální. Potom* f *a* g *mají alespoň jeden bod shody, tj.* $\exists x \in B^{n+1} : f(x) = g(x)$*.*

Důkaz. Předpokládejme, že zobrazení f a g nemají žádný bod shody, tj. $\forall x \in B^{n+1} : f(x) \neq g(x)$. Potom definujme zobrazení r tak, že pro $x \in B^{n+1}$ uvažujme polopřímku s počátkem v bodě $g(x)$ procházející bodem $f(x)$. Pak $r(x)$ definujme jako průsečík této polopřímky se sférou S^n, přičemž pokud by nastalo, že $g(x) \in S^n$, tak by měla tato polopřímka dva průsečíky s S^n. V takovém případě definujme r tak, aby $r(x) \neq g(x)$. Jelikož f a g nemají žádný bod shody, tak je zobrazení r dobře definované a zřejmě spojité.

Protože $f(S^n) \subset S^n$, tak platí, že $r = f$ na S^n, tedy $r : B^{n+1} \to S^n$ je spojité rozšíření zobrazení $f|_{S^n} : S^n \to S^n$, které je ovšem esenciální, což je spor. Tedy zobrazení f a g mají alespoň jeden bod shody.

□

Povšimněme si, že důkaz této věty je velmi podobný důkazu Brouwerovy věty o pevném bodě. To protože Brouwerovu větu okamžitě dostaneme z věty o bodě shody, pokud si vzpomeneme, že identita na jednotkové sféře je esenciální zobrazení. Tedy dosadíme-li $f = id$, tak dostaneme, že existuje $x \in B^{n+1}$ takové, že $g(x) = f(x) = x$. Můžeme tedy vnímat větu o bodě shody jako mezikrok v důkazu Brouwerovy věty z 2. Borsukovy věty.

Nyní již máme vše potřebné k důkazu základní věty algebry.

Věta 17 (Základní věta algebry)**.** *Každý komplexní nekonstantní polynom má alespoň jeden kořen v* $\mathbb{C}$*.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat, že tento polynom bude monický. Označme jej $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, pro $n \in \mathbb{N}$ a $a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ a budeme hledat řešení rovnice $p(z) = 0$. Položme $R = \max\{1, |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|\}$ a uvažujme $z = Rw$, pro $w \in \mathbb{C}$. Potom upravíme rovnici $p(z) = 0$ do tvaru

$$w^n = -\frac{1}{R}\left(a_{n-1}w^{n-1} + \cdots + \frac{a_1 w}{R^{n-2}} + \frac{a_0}{R^{n-1}}\right)$$

a označme

$$g(w) = -\frac{1}{R}\left(a_{n-1}w^{n-1} + \cdots + \frac{a_1 w}{R^{n-2}} + \frac{a_0}{R^{n-1}}\right).$$

Zobrazení g je spojité a pro $|w| \leq 1$ platí

$$\begin{aligned} |g(w)| &\leq \frac{1}{R}\left(|a_{n-1}|\,|w|^{n-1} + \cdots + \frac{|a_1|\,|w|}{R^{n-2}} + \frac{|a_0|}{R^{n-1}}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{R}\left(|a_{n-1}| + \cdots + \frac{|a_1|}{R^{n-2}} + \frac{|a_0|}{R^{n-1}}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{R}\left(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|\right) \leq 1, \end{aligned}$$

tedy platí, že $g : D \to D$ je spojité zobrazení. Připomeňme si, že hledáme řešení rovice $w^n = g(w)$. Využijme faktu, že funkce $w \mapsto w^n : D \to D$ zobrazí C do C a je esenciální na C, čímž jsme splnili všechny předpoklady věty o bodě shody, tedy zobrazení $w \mapsto w^n$ a g mají alespoň jeden bod shody a tedy rovnice $w^n = g(w)$ má alespoň jedno řešení. Tím dostáváme, že i rovnice $p(z) = 0$ má alespoň jedno řešení a tedy polynom p má alespoň jeden kořen v $\mathbb{C}$.

$\square$

Tímto jsme dostali poněkud netradiční důkaz základní věty algebry, který se neopírá například o znalost, že polynomy jsou holomorfní zobrazení, nebo o práci se symetrickými polynomy.

Materiály pro tuto kapitolu byly čerpány z Dodson (1984), Fort Jr (1952) a Fujimoto a kol. (2016).

Seznam použité literatury

Dodson, M. (1984). A Brouwer type coincidence theorem and the fundamental theorem of algebra. *Canadian Mathematical Bulletin*, **27**(4), 478–480.

Fort Jr, M. (1952). Some properties of continuous functions. *The American Mathematical Monthly*, **59**(6), 372–375.

Fujimoto, T., Karunathilake, N. a Ranade, R. R. (2016). A proof of the fundamental theorem of algebra via Reich's coincidence theorem and a reason why there exists no proof based on a simple application of Brouwer fixed point theorem. *Kagawa University, Economic Review*, **89**(1), 1–13.

Granas, A. a Dugundji, J. (2003). *Fixed point theory*, volume 14. Springer.

Matoušek, J., Björner, A. a Ziegler, G. M. (2003). *Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry*, volume 2003. Springer.

Milnor, J. (1978). Analytic proofs of the "hairy ball theorem" and the Brouwer fixed point theorem. *The American Mathematical Monthly*, **85**(7), 521–524.