



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Jan Hrubeš

**Rovnice struktury tenkých akrečních  
disků v obecné metrice**

Ústav teoretické fyziky (116. • 32-UTF)

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Michal Bursa, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Fyzika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Na tomto místě bych chtěl poděkovat Mgr. Michalu Bursovi, Ph.D. za vedení bakalářské práce, ochotu, vstřícnost, příjemné konzultace a hlavně uvedení do zajímavé problematiky.

Název práce: Rovnice struktury tenkých akrečních disků v obecné metrice

Autor: Jan Hrubeš

Ústav: Ústav teoretické fyziky (116. • 32-UTF)

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Michal Bursa, Ph.D., Astronomický ústav Akademie věd České republiky

Abstrakt: Ve fyzice akrečních disků okolo extrémně hmotných objektů se projevuje vliv zakřivení prostoročasu na chování plynu a záření. Černé díry a také akreční disky okolo nich jsou běžně popisovány Kerrovou metrikou. Zkoušejí se ale i jiné metriky a testuje se, zda předpovědi, z jejich použití plynoucí, lépe neodpovídají reálným astronomickým objektům. Cílem této práce je zobecnit popis akrečního disku vypracovaný I. D. Novikovem a K. S. Thornem pro obecnou stacionární axiálně symetrickou metriku. Výsledky jsou ověřeny dosazením Kerrova řešení. V další části jsou pak rovnice řešeny pro stacionární axiálně symetrickou metriku s nábojem.

Klíčová slova: akreční disky, teorie relativity, metrika

Title: Thin accretion disk structure equation in a general metric

Author: Jan Hrubeš

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. Michal Bursa, Ph.D., Astronomical Institute of the Czech Academy of Sciences

Abstract: In the physics of accretion disks around extremely massive objects, the effect of spacetime curvature is manifested on the behaviour of gas and radiation. Black holes and the accretion disks around them are commonly described by the Kerr metric. However, other metrics are being tested to see if their predictions correspond better to real astronomical objects. The aim of this thesis is to generalize the description of the accretion disk developed by I. D. Novikov and K. S. Thorne for a general stationary axially symmetric metric. The results are then verified by substitution of the Kerr solution. In the last section the equations are solved for the stationary axially symmetric metric with charge parameter.

Keywords: accretion disks, general relativity, metric

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Rovnice struktury akrečního disku</b>	<b>3</b>
1.1 Zákony zachování v akrečním disku . . . . .	3
1.2 Zákon zachování hmotnosti . . . . .	4
1.3 Zákon zachování momentu hybnosti . . . . .	5
1.4 Zákon zachování energie . . . . .	6
1.5 Transformace souřadnic . . . . .	8
1.6 Profil záření disku . . . . .	10
1.7 Energie a moment hybnosti . . . . .	11
<b>2 Akreční disk v Kerrově metrice</b>	<b>13</b>
2.1 Kerrova metrika . . . . .	13
2.2 Zákon zachování hmotnosti disku v Kerrově metrice . . . . .	14
2.3 Zákony zachování energie a momentu hybnosti v Kerrově metrice	14
2.4 Výpočet profilu záření v Kerrově metrice . . . . .	16
<b>3 Akreční disk okolo nabitě rotující černé díry</b>	<b>21</b>
3.1 Metrika rotujícího objektu s nábojem . . . . .	21
3.2 Zákon zachování hmotnosti . . . . .	22
3.3 Úhlová rychlost . . . . .	22
3.4 Energie a moment hybnosti . . . . .	22
3.5 Zákony zachování energie a momentu hybnosti . . . . .	24
3.6 Výpočet profilu záření . . . . .	25
<b>Závěr</b>	<b>29</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>30</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>31</b>

# Úvod

V nynější době je již široce přijímána hypotéza předpovídající výskyt supermasivních černých děr ve středech některých galaxií, včetně té naší. Právě okolo takovýchto černých děr rotují částičky plynu a prachu a tvoří akreční disk. Tyto disky můžeme pozorovat také v binárních systémech, jako je například hvězda obíhající okolo černé díry nebo neutronové hvězdy. Rotující částice se o sebe třou, zahřívají se a produkují záření v různých oblastech spektra, které můžeme pozorovat. Díky tomu nám spektrální profil záření disku může pomoci objasnit charakter zakřivení prostoročasu v okolí příslušného centrálního objektu.

Předpokládá se, že prostoročas v okolí hmotného rotujícího objektu je popsán Kerrovým řešením Einsteinových rovnic. V posledních letech jsou ovšem navrhovány i jiné možné tvary metriky a zkoumá se jejich vliv na spektrální charakteristiky disku. Právě z případně pozorovaných odchylek od očekávaného spektra bychom mohli posoudit, zda jsou reálné černé díry přesně popsány Kerrovým prostoročasem. Jiná geometrie může být dána například existencí páté dimenze prostoročasu (Banerjee a kol., 2021).

Fyzika akrečních disků je zkoumána již mnoho let a k významnému pokroku došlo hlavně v sedmdesátých letech minulého století. Popis fyzikálních vlastností akrečního disku pomocí newtonovské mechaniky byl podán Shakurou a Sunyaevem (Shakura a Sunyaev, 1973) a brzy poté byl model rozšířen v rámci obecné teorie relativity v práci Novikova a Thorna (Novikov a Thorne, 1973). V jejich popisu je předpokládán charakter prostoročasu okolo rotující černé díry odpovídající Kerrově geometrii. Tento model zaznamenal nebývalý úspěch ve studiu akrečních disků okolo kompaktních objektů. Jak již bylo zmíněno, v poslední době se ovšem zkoumají i jiné možné metriky a vliv tvaru prostoročasu na spektrální charakteristiky zdrojů. Většinou je zkoumán vliv prostoročasu na transport záření mezi diskem a pozorovatelem. Vliv různého zakřivení na strukturu disků je studován například v (John a Stevens, 2019), kde se autoři zabývají metrikou navrženou Johannsenem a Psaltisem (Johannsen a Psaltis, 2011), která dovoluje popsat odchylky od obecné teorie relativity, konkrétně od Kerrova řešení gravitačních rovnic.

Cílem práce je zobecnit popis akrečních disků podaný Novikovem a Thornem i na jiné stacionární a axiálně symetrické geometrie než tu Kerrovu. V první kapitole znovu odvodíme rovnice struktury tenkého akrečního disku, v řešení ale zachováme obecné metrické koeficienty. Ve druhé kapitole pak do odvozených rovnic dosadíme Kerrovu metriku a porovnáme řešení s článkem (Page a Thorne, 1974). V kapitole třetí dosadíme metriku z článku (Banerjee a kol., 2021) a pokusíme se analyticky vyjádřit strukturní rovnice disku a porovnat charakter záření oproti případu Kerrovy geometrie.

# 1. Rovnice struktury akrečního disku

Popis radiální struktury akrečního disku získáme ze zákonů zachování hmotnosti, momentu hybnosti a energie, a to bez nutnosti znalosti konkrétních vlastností obíhající hmoty. Při odvození postupujeme analogicky k článku Page a Thorna (Page a Thorne, 1974). Nebudeme ovšem dosazovat žádnou konkrétní metriku, a rovnice radiální struktury tak dostaneme v obecném tvaru.

Kde není psáno jinak, používáme geometrizované jednotky, tedy pokládáme  $c = G = k = 1$ . Zde  $c$  je rychlost světla ve vakuu,  $G$  gravitační konstanta a  $k$  Boltzmanova konstanta. Dále používáme metrický tenzor se signaturou  $(- + ++)$ .

## 1.1 Zákony zachování v akrečním disku

Disk, který studujeme, vzniká gravitačním působením rotujícího centrálního tělesa na okolní materiál, který se pohybuje okolo tělesa po přibližně kruhových drahách, jeho radiální vzdálenost od tělesa se ovšem postupně snižuje. To je popsáno tím, že materiál má nenulovou radiální rychlost, ta je nicméně mnohem menší než rychlost azimutálního oběhu okolo tělesa.

Pro odvození rovnic popisujících chování disku učiníme o studovaném systému následující předpoklady:

1. Geometrie prostoročasu okolo centrálního objektu je stacionární, axiálně symetrická a je určena pouze vlastnostmi tohoto objektu.
2. Disk leží v ekvatoriální rovině centrálního objektu.
3. Disk je tenký, tedy jeho vertikální tloušťka je mnohem menší než příslušný poloměr.
4. Během doby, za kterou projde určitou oblastí disku velké množství hmoty v porovnání k typickému množství, které tato oblast obsahuje, se geometrie prostoročasu okolo tělesa znatelně nemění.
5. Hmota disku se pohybuje přibližně v ekvatoriální rovině po geodetických drahách a mnohem pomaleji radiálním směrem k centrálnímu tělesu. Z toho plyne, že radiální zrychlení způsobené gradientem tlaku je malé oproti zrychlení, které je způsobeno gravitační přitažlivostí tělesa.
6. Teplo z disku uniká pouze ve vertikálním směru.
7. Všechna energie, která je z disku přenesena k jeho povrchu, je ta přenášená fotony. To samé platí i pro hybnost.
8. Transport energie a hybnosti fotony mezi jednotlivými oblastmi disku je zanedbatelný.

Navíc pracujeme s metrikou, o které předpokládáme, že lze vyjádřit v souřadnicích, ve kterých závisí na radiální souřadnici nebo jejím analogu, ale nezávisí na časové a azimutální úhlové souřadnici. Tyto předpoklady zjednoduší popis systému, neboť bude možné použít tvar metriky platný pro ekvatoriální rovinu a také zanedbat některé členy tenzoru energie a hybnosti. Zároveň lze předpokládat, že dostatečně dobře popisují reálný fyzikální systém.

## 1.2 Zákon zachování hmotnosti

Nejdříve odvodíme relativistickou verzi zákona zachování hmotnosti v akrečním disku. Vyjdeme z jeho diferenciální verze ve tvaru:

$$\nabla_{\mu}(\rho u^{\mu}) = 0, \quad (1.1)$$

kde  $\rho$  značí klidovou hustotu částic disku a  $u^{\mu}$  jejich čtyřrychlost. Kovariantní divergenci přepíšeme pomocí determinantu metriky  $g_{\mu\nu}$ :

$$\nabla_{\mu}(\rho u^{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|}\rho u^{\mu})_{,\mu} = 0. \quad (1.2)$$

Díky předpokladům stacionárnosti a axiální symetrie systému a dále díky předpokladům kladeným na metriku dostáváme

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|}\rho u^r)_{,r} = 0. \quad (1.3)$$

Z toho vidíme, že platí vztah

$$\sqrt{|g|}\rho u^r = \text{konst.}, \quad (1.4)$$

který dále zintegrujeme dle vertikální souřadnice  $z$  od spodního okraje disku  $-H$  k hornímu okraji  $H$  ( $H$  je tedy polovina výšky disku) a dle úhlu  $\varphi$  okolo obvodu disku. Integrační konstantu označíme  $-\dot{M}$  a získáváme rovnici

$$\dot{M} = -2\pi\sqrt{|g|}\Sigma u^r. \quad (1.5)$$

Faktor  $2\pi$  dostáváme z integrace přes úhel  $\varphi$  vzhledem k tomu, že na něm žádná z veličin nezávisí a povrchová hustota  $\Sigma(r)$  je definována

$$\Sigma(r) = \int_{-H}^H \rho dz. \quad (1.6)$$

Vztah (1.5) je kýžený zákon zachování hmotnosti, dle kterého je množství hmoty, které proteče daným místem v disku za jednotku času, nezávislé na volbě místa.

Tento zákon je první z našich rovnic struktury disku.



### 1.3 Zákon zachování momentu hybnosti

Další strukturální rovnice odvodíme z relativistické verze zákonů zachování energie a hybnosti, která zní

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.7)$$

Z tenzoru energie a hybnosti  $T^{\mu\nu}$  dostaneme moment hybnosti vynásobením Killingovým vektorem spojeným s axiální symetrií, který má tvar  $\xi^\nu = \delta^\nu_\varphi$ . Zákon zachování potom vypadá jako

$$\nabla_\mu (T^\mu_\nu \xi^\nu) = \nabla_\mu (T^{\mu\nu} \xi_\nu) = \nabla_\mu J^\mu = 0. \quad (1.8)$$

Zdůrazněme, že dle předpokladu (5.) se materiál disku pohybuje po geodetických drahách na orbitách, pro které je energie vůči nekonečnu  $E = -u_t$  a moment hybnosti  $L = u_\varphi$ .

K dalšímu postupu potřebujeme tenzor energie a hybnosti v akrečním disku. Ten modelujeme jako kapalinu a zmíněný tenzor tedy napíšeme ve tvaru

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu} + u^\mu q^\nu + q^\mu u^\nu. \quad (1.9)$$

Zanedbáváme člen ve tvaru  $\Pi u^\mu u^\nu$ , kde  $\Pi$  je specifická vnitřní energie. Toto zjednodušení můžeme provést, neboť předpokládáme (5.) malé radiální zrychlení oproti dostředivému zrychlení, které je způsobeno gravitační přitažlivostí tělesa, a tedy také zanedbatelnost vnitřní energie, kterou identifikujeme s energií příslušnou radiálním tlakovým silám, oproti gravitační potenciální energii. Dále také zanedbáváme člen spojený s hustotou energie záření, který by měl tvar  $\frac{4}{3}Eu^\mu u^\nu$ , kde  $E$  je hustota energie záření. Tento člen je malý oproti  $\rho u^\mu u^\nu$ , jelikož hustota je navíc násobena  $c^2$  (jedničkou v geometrizovaných jednotkách).

První dva členy ve vztahu (1.9) odpovídají tenzoru energie a hybnosti pro nestlačitelnou tekutinu. V prvním členu dále zanedbáme tlak  $p$  vzhledem k tomu, že ve standardních jednotkách je tento člen dělen druhou mocninou rychlosti světla  $p/c^2$  a je v našem případě malý oproti členu s hustotou  $\rho$ . Třetí člen v rovnici (1.9) je dán tenzorem napětí  $\tau^{\mu\nu}$  a je způsoben viskózními silami v kapalině. Poslední dva členy odpovídají energii záření a veličina  $q^\mu$  udává tok záření. Vynásobením tenzoru (1.9) Killingovým vektorem  $\xi_\nu$  dostáváme vztah

$$J^\mu = \rho u^\mu u_\varphi + p\xi^\mu + \tau^\mu_\varphi + u^\mu q_\varphi + u_\varphi q^\mu. \quad (1.10)$$

Z něho vypočteme divergenci postupně po jednotlivých členech, počínaje tím prvním

$$\nabla_\mu (\rho u^\mu u_\varphi) = \nabla_\mu (\rho u^\mu) u_\varphi + \rho u^\mu \nabla_\mu u_\varphi = \rho u^\mu \nabla_\mu u_\varphi = \rho u^r \nabla_r u_\varphi, \quad (1.11)$$

kde jsme ve druhém kroku použili rovnici kontinuity  $\nabla_\mu (\rho u^\mu) = 0$  a ve třetím kroku předpoklad stacionárnosti a axiální symetrie. Když tento člen dále zintegrujeme podle souřadnice  $\varphi$  přes celý obvod disku a podle souřadnice  $z$  od spodního k hornímu okraji, dostáváme

$$\int_{-H}^H \int_0^{2\pi} \rho u^r \nabla_r u_\varphi d\varphi dz = 2\pi \Sigma u^r L_{,r} = -\frac{\dot{M}}{\sqrt{|g|}} L_{,r}. \quad (1.12)$$

V posledním kroku jsme využili vztah (1.5).

Divergence dalšího členu v (1.10) je nulová, jak snadno vidíme z rozpisu

$$\nabla_{\mu}(p\xi^{\mu}) = \nabla_{\mu}p \cdot \xi^{\mu} + p\nabla_{\mu}\xi^{\mu} = 0, \quad (1.13)$$

jelikož divergence Killingova vektoru je rovna nule a gradient tlaku má nulovou složku ve směru  $\varphi$ .

Posuňme se nyní k třetímu členu v (1.10)

$$\nabla_{\mu}\tau^{\mu}_{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|}\tau^{\mu}_{\varphi})_{,\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|}\tau^r_{\varphi})_{,r}. \quad (1.14)$$

V prním kroku jsme využili přepis kovariantní divergence a v dalším pak nulovost některých členů tenzoru napětí. Tenzor napětí  $\tau^r_{\varphi}$  bude dále vhodnější přetransformovat do souřadnic, jež jsou spojeny s lokálním klidovým systémem materiálu disku, tedy do tvaru  $\tau^{(r)(\varphi)}$ , čemuž se budeme věnovat v podkapitole 1.5. Divergenci posledních dvou členů v (1.10) vypočteme najednou, jelikož mají podobný tvar:

$$\nabla_{\mu}(u^{\mu}q_{\varphi}) + \nabla_{\mu}(u_{\varphi}q^{\mu}) = (\nabla_{\mu}u_{\varphi})q^{\mu} + u_{\varphi}(\nabla_{\mu}q^{\mu}) = u_{\varphi}(\nabla_{\mu}q^{\mu}). \quad (1.15)$$

Nejdříve jsme využili toho, že  $q$  má složku pouze ve směru  $z$ , a poté navíc nezávislosti  $u_{\varphi}$  na souřadnici  $z$ . Nyní můžeme rovnici integrovat opět přes celý obvod a výšku disku podle souřadnic  $\varphi$  a  $z$ . Dostaneme

$$\int_{-H}^H \int_0^{2\pi} u_{\varphi}(\nabla_{\mu}q^{\mu}) d\varphi dz = 4\pi LF, \quad (1.16)$$

kde  $F$  definujeme jako  $F = q^z(r, H) = -q^z(r, -H)$ .

Dohromady tedy ze vztahu (1.10) po vynásobení  $\sqrt{|g|}$  dostáváme

$$(\dot{M}L - 2\pi\sqrt{|g|}W^r_{\varphi})_{,r} = 4\pi\sqrt{|g|}LF, \quad (1.17)$$

kde jsme navíc definovali tenzor

$$W^r_{\varphi} = \int_{-H}^H \tau^r_{\varphi} dz. \quad (1.18)$$

Vztah bychom přeznačením mohli dostat do jednoduššího tvaru, nicméně s tím počkáme, než přetransformujeme tenzor napětí.

## 1.4 Zákon zachování energie

Nyní se budeme věnovat třetí ze strukturních rovnic akrečního disku. Stejně jako v případě zákona zachování momentu hybnosti vyjdeme ze vztahu (1.7), tenzor energie a hybnosti ale tentokrát vynásobíme Killingovým vektorem spojeným s předpokládanou časovou symetrií  $\eta_{\nu} = \delta^t_{\nu}$ , čímž dostaneme čtyřvektor hustoty toku energie

$$S^{\mu} = \rho u^{\mu}u_t + p\eta^{\mu} + \tau^{\mu}_t + u^{\mu}q_t + u_tq^{\mu}, \quad (1.19)$$

z něhož vypočteme divergenci. U prvního členu je rovna

$$\nabla_{\mu}(\rho u^{\mu} u_t) = \nabla_{\mu}(\rho u^{\mu}) u_t + \rho u^{\mu} \nabla_{\mu} u_t = \rho u^r \nabla_r u_t. \quad (1.20)$$

Využili jsme rovnici kontinuity  $\nabla_{\mu}(\rho u^{\mu}) = 0$  a závislost  $u_t$  pouze na radiální souřadnici. Integrací dle souřadnic  $\varphi$  a  $z$  v mezích od 0 do  $2\pi$  a od  $-H$  do  $H$  dále dostáváme

$$\int_{-H}^H \int_0^{2\pi} \rho u^r \nabla_r u_t \, d\varphi dz = 2\pi \Sigma u^r E_{,r} = \frac{\dot{M}}{\sqrt{|g|}} E_{,r}. \quad (1.21)$$

Znovu jsme využili zákona zachování hmotnosti (1.5).

Divergence členu s Killingovým vektorem je nulová

$$\nabla_{\mu}(p \xi^{\mu}) = 0, \quad (1.22)$$

neboť gradient tlaku nemá časovou složku. Přepsáním kovariantní divergence dostáváme v dalším členu

$$\nabla_{\mu} \tau^{\mu}_t = \frac{1}{\sqrt{|g|}} (\sqrt{|g|} \tau^{\mu}_t)_{,\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} (\sqrt{|g|} \tau^r_t)_{,r}. \quad (1.23)$$

S využitím vztahu  $u^{\mu} \tau^{\nu}_{\mu} = 0 \Rightarrow u^t \tau^r_t + u^{\varphi} \tau^r_{\varphi} = 0 \Rightarrow \tau^r_t = -\frac{u^{\varphi}}{u^t} \tau^r_{\varphi} = -\Omega \tau^r_{\varphi}$  můžeme dále psát

$$\nabla_{\mu} \tau^{\mu}_t = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} (\sqrt{|g|} \Omega \tau^r_{\varphi})_{,r}. \quad (1.24)$$

Divergence posledních dvou členů v (1.19) vychází podobně jako u zákona zachování momentu hybnosti

$$\nabla_{\mu}(u^{\mu} q_t) + \nabla_{\mu}(u_t q^{\mu}) = (\nabla_{\mu} u_t) q^{\mu} + u_t (\nabla_{\mu} q^{\mu}) = u_t (\nabla_{\mu} q^{\mu}). \quad (1.25)$$

Navíc využíváme nezávislost  $u_t$  na  $z$ . Integrací dle  $z$  a  $\varphi$  v obvyklých mezích dostáváme

$$\int_{-H}^H \int_0^{2\pi} u_t (\nabla_{\mu} q^{\mu}) \, d\varphi dz = -4\pi EF. \quad (1.26)$$

Celkově nám tedy po vynásobení  $\sqrt{|g|}$  vychází

$$(\dot{M}E - 2\pi \sqrt{|g|} \Omega W^r_{\varphi})_{,r} = 4\pi \sqrt{|g|} EF. \quad (1.27)$$

Tato rovnice nám spolu s rovnicí (1.17) dává soustavu, kterou můžeme vyřešit vzhledem k neznámým funkcím  $W^r_{\varphi}$  a  $F$ . Funkce  $W^r_{\varphi}$  nám dává otáčivý moment působící na určitém poloměru v disku a funkce  $F$  vyjadřuje tok zářivé energie z jednoho z povrchů disku. Vyřešením soustavy tedy získáváme profil emitovaného záření. Nejdříve ale rovnice transformujeme do souřadnicového systému, který je spojen s materiálem disku.

## 1.5 Transformace souřadnic

Nyní nalezneme transformační vztah mezi globálním souřadnicovým systémem (značíme řeckými indexy) a lokálním klidovým systémem materiálu disku (indexy píšeme latinkou a v závorkách). Vydeme ze vztahu

$$g_{\mu\nu}e_{(a)}^{\mu}e_{(b)}^{\nu} = \eta_{ab}, \quad (1.28)$$

kde  $\eta_{ab}$  značí Minkowského metrický tenzor. Obecný metrický tenzor má ve stacionárním axiálně symetrickém případě v Boyerových-Lindquistových souřadnicích tvar

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + 2g_{t\varphi}d\varphi dt. \quad (1.29)$$

Vektor čtyřrychlosti v globálních souřadnicích má tvar  $u^{\mu} = u^t(1,0,0,\Omega)$ , kde pro úhlovou rychlost  $\Omega$  platí  $\Omega = \frac{u^{\varphi}}{u^t}$ . Časový vektor tetrády volíme shodně s vektorem čtyřrychlosti pozorovatele, do jehož soustavy transformujeme. Tetrádový vektor  $e_{(t)}^{\mu}$  proto hledáme ve tvaru  $e_{(t)}^{\mu} = u^t(1,0,0,\Omega)$ . Nyní tedy dle vztahu (1.28) máme

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}e_{(t)}^{\mu}e_{(t)}^{\nu} &= -1 = g_{tt}e_{(t)}^t e_{(t)}^t + 2g_{t\varphi}e_{(t)}^t e_{(t)}^{\varphi} + g_{\varphi\varphi}e_{(t)}^{\varphi} e_{(t)}^{\varphi} \\ &= g_{tt}(u^t)^2 + 2g_{t\varphi}\Omega(u^t)^2 + g_{\varphi\varphi}(\Omega u^t)^2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

A z toho vidíme, že platí

$$u^t = \sqrt{-\frac{1}{g_{tt} + 2g_{t\varphi}\Omega + g_{\varphi\varphi}\Omega^2}}. \quad (1.31)$$

Tím máme určený vektor  $e_{(t)}^{\mu}$  v závislosti pouze na metrických koeficientech a úhlové rychlosti. Dále snadno dostáváme pro vektor  $e_{(r)}^{\mu}$  vztah

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}e_{(r)}^{\mu}e_{(r)}^{\nu} &= 1 = g_{rr}e_{(r)}^r e_{(r)}^r \\ \rightarrow e_{(r)}^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}(0,1,0,0). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Podobně pro  $e_{(\theta)}^{\mu}$  máme

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}e_{(\theta)}^{\mu}e_{(\theta)}^{\nu} &= 1 = g_{\theta\theta}e_{(\theta)}^{\theta} e_{(\theta)}^{\theta} \\ \rightarrow e_{(\theta)}^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}(0,0,1,0). \end{aligned} \quad (1.33)$$

V případě  $e_{(\varphi)}^{\mu}$  je situace složitější. Vektor hledáme ve tvaru  $e_{(\varphi)}^{\mu} = u^t(A,0,0,B)$ . Do vztahu (1.28) nejdříve dosadíme smíšenou dvojici vektorů tetrády

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}e_{(\varphi)}^{\mu}e_{(t)}^{\nu} &= 0 = g_{tt}e_{(t)}^t e_{(\varphi)}^t + g_{t\varphi}e_{(t)}^t e_{(\varphi)}^{\varphi} + g_{t\varphi}e_{(\varphi)}^t e_{(t)}^{\varphi} + g_{\varphi\varphi}e_{(\varphi)}^{\varphi} e_{(t)}^{\varphi} = \\ &= Ag_{tt}(u^t)^2 + Bg_{t\varphi}(u^t)^2 + A\Omega g_{\varphi t}(u^t)^2 + B\Omega g_{\varphi\varphi}(u^t)^2, \end{aligned} \quad (1.34)$$

z čehož po vydělení  $(u^t)^2$  pro  $A$  dostáváme

$$A = \frac{-B(g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi})}{g_{tt} + \Omega g_{\varphi t}} = \frac{-B\mathcal{P}}{\mathcal{R}}. \quad (1.35)$$

Pro zjednodušení jsme zavedli označení  $g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi} = \mathcal{P}$  a  $g_{tt} + \Omega g_{\varphi t} = \mathcal{R}$ . Nyní dosadíme do (1.28) dvojici vektorů  $e_{(\varphi)}^\mu$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} e_{(\varphi)}^\mu e_{(\varphi)}^\nu &= 1 = g_{tt} e_{(\varphi)}^t e_{(\varphi)}^t + 2g_{t\varphi} e_{(\varphi)}^t e_{(\varphi)}^\varphi + g_{\varphi\varphi} e_{(\varphi)}^\varphi e_{(\varphi)}^\varphi = \\ &= A^2 g_{tt} (u^t)^2 + B^2 g_{\varphi\varphi} (u^t)^2 + 2AB g_{\varphi t} (u^t)^2. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Do tohoto vztahu dosadíme z (1.35) a pro  $B$  dostaneme

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{u^t} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi}}{g_{tt} + \Omega g_{\varphi t}}\right)^2 g_{tt} - 2 \frac{g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi}}{g_{tt} + \Omega g_{\varphi t}} g_{\varphi t} + g_{\varphi\varphi}}} = \\ &= \frac{1}{u^t \sqrt{(g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi})^2 g_{tt} - 2(g_{\varphi t} + \Omega g_{\varphi\varphi})(g_{tt} + \Omega g_{\varphi t})g_{\varphi t} + g_{\varphi\varphi}(g_{tt} + \Omega g_{\varphi t})^2}}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Následným roznásobením a úpravou výrazu ve jmenovateli dostáváme

$$B = \frac{1}{u^t} \frac{|g_{tt} + \Omega g_{\varphi t}|}{\sqrt{(g_{\varphi\varphi} g_{tt} - g_{t\varphi}^2)(g_{tt} + 2g_{t\varphi}\Omega + g_{\varphi\varphi}\Omega^2)}} \quad (1.38)$$

a s využitím vztahu (1.31) konečně

$$B = \frac{|g_{tt} + \Omega g_{\varphi t}|}{\sqrt{g_{t\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi} g_{tt}}} = \frac{|\mathcal{R}|}{\sqrt{\mathcal{S}}}. \quad (1.39)$$

Nově jsme zavedli označení  $g_{t\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi} g_{tt} = \mathcal{S}$ . Zpětným dosazením do (1.35) máme

$$A = \frac{-\text{sgn}(g_{tt} + \Omega g_{\varphi t})(g_{\varphi t} + \Omega g_{\varphi\varphi})}{\sqrt{g_{t\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi} g_{tt}}} = -\frac{\text{sgn}(\mathcal{R}) \mathcal{P}}{\sqrt{\mathcal{S}}}. \quad (1.40)$$

Tím už jsme získali závislost vektoru  $e_{(\varphi)}^\mu$  na úhlové rychlosti a metrice. Abychom zápis učinili ještě více kompaktním, označíme  $\mathcal{T} = g_{tt} + 2g_{t\varphi}\Omega + g_{\varphi\varphi}\Omega^2$ . Pro čtyřrychlost potom platí  $u^t = \frac{1}{\sqrt{-\mathcal{T}}}$ . Nyní můžeme vypsát nalezenou tetradu:

$$\begin{aligned} e_{(t)}^t &= \frac{1}{\sqrt{-\mathcal{T}}}, & e_{(t)}^\varphi &= \frac{\Omega}{\sqrt{-\mathcal{T}}}, \\ e_{(r)}^r &= \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}, & e_{(\theta)}^\theta &= \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}, \\ e_{(\varphi)}^t &= -\frac{\text{sgn}(\mathcal{R}) \mathcal{P}}{\sqrt{-\mathcal{T}} \mathcal{S}}, & e_{(\varphi)}^\varphi &= \frac{|\mathcal{R}|}{\sqrt{-\mathcal{T}} \mathcal{S}}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Všechny ostatní složky jednotlivých vektorů jsou nulové. Ještě shrneme použité značení:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi}, & \mathcal{R} &= g_{tt} + \Omega g_{\varphi t}, \\ \mathcal{S} &= g_{t\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi} g_{tt}, & \mathcal{T} &= g_{tt} + 2g_{t\varphi}\Omega + g_{\varphi\varphi}\Omega^2. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Naším cílem bylo nalézt transformační vztah pro tenzor napětí  $\tau^\mu_\nu$  mezi lokálním klidovým souřadným systémem disku a globálními souřadnicemi. Konečně tedy

můžeme psát

$$\begin{aligned}
\tau_{\varphi}^r &= \tau^{(a)(b)} e_{(a)}^r e_{(b)}^{\alpha} g_{\alpha\varphi} = \tau^{(a)(b)} e_{(a)}^r e_{(b)}^t g_{t\varphi} + \tau^{(a)(b)} e_{(a)}^r e_{(b)}^{\varphi} g_{\varphi\varphi} = \\
&= \tau^{(r)(\varphi)} e_{(r)}^r e_{(\varphi)}^t g_{t\varphi} + \tau^{(r)(\varphi)} e_{(r)}^r e_{(\varphi)}^{\varphi} g_{\varphi\varphi} = \tau^{(r)(\varphi)} e_{(r)}^r (e_{(\varphi)}^t g_{t\varphi} + e_{(\varphi)}^{\varphi} g_{\varphi\varphi}) = \\
&= \tau^{(r)(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}} \left( \frac{\mathcal{P} g_{t\varphi} - \mathcal{R} g_{\varphi\varphi}}{\sqrt{-\mathcal{I} \mathcal{J}}} \right) = \tau^{(r)(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}} \frac{g_{t\varphi}^2 - g_{tt} g_{\varphi\varphi}}{\sqrt{-\mathcal{I} \mathcal{J}}} = \\
&= \tau^{(r)(\varphi)} \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{-\mathcal{I} g_{rr}}}.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Využili jsme nulovosti některých složek tenzoru napětí a vztahů (1.41). Znaménka u složek  $e_{(\varphi)}^t$  a  $e_{(\varphi)}^{\varphi}$  jsme zvolili tak, abychom dostali kladný výsledek. Nyní víme, jak vyjádřit tenzor napětí v globálních souřadnicích pomocí tenzoru napětí v lokální klidové soustavě, a můžeme se vrátit k naší soustavě rovnic odvozené ze zákonů zachování.

## 1.6 Profil záření disku

Využitím transformačního vztahu (1.43) a definováním  $W^{(r)(\varphi)} = \int_{-H}^H \tau^{(r)(\varphi)} dz$  dostáváme místo rovnic (1.17) a (1.27) soustavu

$$\left( \dot{M}L - 2\pi \sqrt{\frac{|g| \mathcal{J}}{-\mathcal{I} g_{rr}}} W^{(r)(\varphi)} \right)_{,r} = 4\pi \sqrt{|g|} LF, \tag{1.44}$$

$$\left( \dot{M}E - 2\pi \Omega \sqrt{\frac{|g| \mathcal{J}}{-\mathcal{I} g_{rr}}} W^{(r)(\varphi)} \right)_{,r} = 4\pi \sqrt{|g|} EF. \tag{1.45}$$

Pro další zjednodušení zavedeme označení

$$f = 4\pi \sqrt{|g|} \frac{F}{\dot{M}}, \tag{1.46}$$

$$w = 2\pi \sqrt{\frac{|g| \mathcal{J}}{-\mathcal{I} g_{rr}}} \frac{W^{(r)(\varphi)}}{\dot{M}}. \tag{1.47}$$

Rovnice poté získávají podobu

$$(L - w)_{,r} = fL, \tag{1.48}$$

$$(E - \Omega w)_{,r} = fE. \tag{1.49}$$

Soustavu nyní vyřešíme. Rovnici (1.48) vynásobíme  $\Omega$  a odečteme od rovnice (1.49), čímž dostaneme

$$(E - \Omega w)_{,r} - \Omega(L - w)_{,r} = f(E - \Omega L). \tag{1.50}$$

K dalšímu postupu se hodí vztah mezi derivacemi  $E_{,r}$  a  $L_{,r}$ , totiž

$$E_{,r} = \Omega L_{,r}, \tag{1.51}$$

který je v obecnější podobě odvozen v článku (Ostriker a Gunn, 1969). Vraťme se nyní k (1.50), z něž rozderivováním a užitím právě zmíněného vztahu dostaneme

$$-\Omega_{,r}w = f(E - \Omega L) \Rightarrow w = \frac{f(E - \Omega L)}{-\Omega_{,r}}. \quad (1.52)$$

Tento vztah dosadíme zpět do (1.48) a vznikne nám diferenciální rovnice

$$\left( L - \frac{f(E - \Omega L)}{-\Omega_{,r}} \right)_{,r} = fL, \quad (1.53)$$

kterou vyřešíme. Derivováním, úpravami a dalším využitím vztahu (1.51) postupně získáme

$$\begin{aligned} f_{,r} \frac{(E - \Omega L)}{-\Omega_{,r}} + f \frac{(E_{,r} - \Omega_{,r}L - \Omega L_{,r})(-\Omega_{,r}) + \Omega_{,rr}(E - \Omega L) + L\Omega_{,r}^2}{\Omega_{,r}^2} &= L_{,r} \\ f_{,r} \frac{(E - \Omega L)}{-\Omega_{,r}} + f \frac{2L\Omega_{,r}^2 + \Omega_{,rr}(E - \Omega L)}{\Omega_{,r}^2} &= L_{,r}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Rovnici nyní vynásobíme výrazem  $(E - \Omega L)$

$$f_{,r} \frac{(E - \Omega L)^2}{-\Omega_{,r}} + f \frac{2L\Omega_{,r}^2(E - \Omega L) + \Omega_{,rr}(E - \Omega L)^2}{\Omega_{,r}^2} = (E - \Omega L)L_{,r}, \quad (1.55)$$

kde na levé straně poznáváme derivaci součinu

$$\left( \frac{(E - \Omega L)^2}{-\Omega_{,r}} f \right)_{,r} = (E - \Omega L)L_{,r}. \quad (1.56)$$

Tuto rovnici můžeme integrovat od nejnižší stabilní orbity  $r_0$  dané vztahem  $L_{,r} = 0$ . Jelikož jde o poslední stabilní orbitu, je na ní zanedbatelná složka  $W^{(r)(\varphi)}$  tenzoru napětí a díky tomu je nulové  $w$  dle definice (1.47). Integrací v mezích  $r$  až  $r_0$  se tedy zbavíme integrační konstanty, jelikož na této orbitě jsou obě strany rovnice nulové. S nulovou integrační konstantou dostáváme

$$\frac{(E - \Omega L)^2}{-\Omega_{,r}} f = \int_{r_0}^r (E - \Omega L)L_{,r} dr. \quad (1.57)$$

Nakonec tedy máme explicitní vyjádření pro  $f$  ve formě integrálu

$$f = -\frac{\Omega_{,r}}{(E - \Omega L)^2} \int_{r_0}^r (E - \Omega L)L_{,r} dr, \quad (1.58)$$

které se můžeme po dosažení konkrétní metriky pokusit analyticky vyřešit.

## 1.7 Energie a moment hybnosti

V zákonech zachování uvažujeme specifický moment hybnosti v nekonečnu  $L$  a specifickou energii v nekonečnu  $E$  částic na geodetických orbitách, které jsou

dány příslušnými složkami čtyřrychlosti obíhajících částic. Explicitně je můžeme dostat snížením indexu u čtyřrychlosti  $u^t$ . (Připomeňme, že vektor čtyřrychlosti má tvar  $u^\mu = u^t(1,0,0,\Omega)$ .) Pro moment hybnosti tak dostáváme

$$L = u_\varphi = u^\mu g_{\mu\varphi} = u^t(g_{\varphi t} + \Omega g_{\varphi\varphi}) = u^t \mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}}{\sqrt{-\mathcal{I}}}. \quad (1.59)$$

Podobně pro energii získáme vztah

$$E = -u_t = -u^\mu g_{\mu t} = -u^t(g_{t t} + \Omega g_{\varphi t}) = -u^t \mathcal{R} = -\frac{\mathcal{R}}{\sqrt{-\mathcal{I}}}. \quad (1.60)$$



## 2. Akreční disk v Kerrově metrice

Nyní využijeme nalezených obecných vztahů pro strukturní charakteristiky akrečních disků, dosadíme Kerrovu metriku a nalezené výsledky porovnáme s těmi, jež jsou uvedeny v článku Page a Thorna (Page a Thorne, 1974).

### 2.1 Kerrova metrika

Kerovo řešení Einsteinových rovnic gravitačního pole popisuje prostoročas v okolí rotujícího nenabitého objektu, například rotující černé díry. Metrika je stationární, axiálně symetrická, a je tak prototypem metrik, pro které jsme konstruovali naše řešení. V Boyerových-Lindquistových souřadnicích  $(t, r, \theta, \varphi)$  má Kerrova metrika tvar

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mr}{\Sigma} a \sin^2 \theta dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.1)$$

kde  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ,  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ ,  $a = \frac{J}{M}$  je specifický moment hybnosti,  $r$  je radiální vzdálenost od tělesa,  $M$  jeho hmotnost,  $\varphi$  a  $\theta$  úhly v horizontálním respektive vertikálním směru a  $J$  moment hybnosti. Pro  $a = 0$  dostáváme Schwarzschildovu metriku. Zobecněním Kerrovy metriky pro případ nabitého tělesa je metrika Kerrova-Newmanova, jejíž verzi se budeme věnovat v další kapitole. V ekvatoriální rovině, v níž disk dle předpokladu leží, se metrika zjednoduší ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ )

$$ds^2 = \left(\frac{2M}{r} - 1\right) dt^2 - \frac{4Ma}{r} dt d\varphi + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + dz^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 M}{r}\right) d\varphi^2. \quad (2.2)$$

Souřadnici  $\theta$  jsme nahradili souřadnicí  $z$ , která značí vertikální vzdálenost nad ekvatoriální rovinou a souvisí s úhlem  $\theta$  vztahem  $z = r \cos \theta$ . Jednotlivé metrické koeficienty tedy jsou

$$\begin{aligned} g_{tt} &= \left(\frac{2M}{r} - 1\right), & g_{\varphi t} &= -\frac{2Ma}{r}, & g_{rr} &= \frac{r^2}{\Delta}, \\ g_{zz} &= 1, & g_{\varphi\varphi} &= \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 M}{r}\right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Tyto koeficienty nyní dosadíme do odvozených rovnic. Začneme se zákonem zachování hmotnosti.

## 2.2 Zákon zachování hmotnosti disku v Kerrově metrice

Pro dosažení do vztahu (1.5) potřebujeme znát pouze determinant metriky  $g$ , který nyní vypočteme

$$g = g_{tt}(g_{rr}g_{zz}g_{\varphi\varphi}) - g_{\varphi t}^2(g_{rr}g_{zz}) = \frac{\left(\frac{2M}{r} - 1\right) r^2 \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r}\right)}{r^2 - 2Mr + a^2} - \frac{4a^2M^2}{r^2 - 2Mr + a^2} = \frac{r^2(2Mr - r^2 - a^2)}{r^2 - 2Mr + a^2} = -r^2. \quad (2.4)$$

Determinant, jak je ostatně známo, vychází v jednoduchém tvaru. Dostáváme zákon zachování hmotnosti

$$\dot{M} = -2\pi r \Sigma u^r. \quad (2.5)$$

Připomeňme, že nám tento zákon říká, že množství hmoty, které proteče daným místem v disku za jednotku času, je nezávislé na volbě tohoto místa.

## 2.3 Zákony zachování energie a momentu hybnosti v Kerrově metrice

Pro porovnání nalezených výsledků s výsledky Page a Thorna (Page a Thorne, 1974) zde zavedeme po jejich vzoru stejné označení pro funkce:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= 1 + \frac{a_*}{r_*^{\frac{3}{2}}}, & \mathcal{C} &= 1 - \frac{3}{r_*} + \frac{2a_*}{r_*^{\frac{3}{2}}}, \\ \mathcal{D} &= 1 - \frac{2}{r_*} + \frac{a_*^2}{r_*^2}, & \mathcal{F} &= 1 - \frac{2a_*}{r_*^{\frac{3}{2}}} + \frac{a_*^2}{r_*^2}, \\ \mathcal{G} &= 1 - \frac{2}{r_*} + \frac{a_*}{r_*^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

kde  $a_*$  je bezrozměrný parametr související se specifickým momentem hybnosti  $a$  vztahem  $a_* = \frac{a}{M}$  a  $r_*$  je rovněž bezrozměrná souřadnice definovaná jako  $r_* = \frac{r}{M}$ . Pro černou díru s horizontem událostí (což je náš případ) platí  $a < M$  a tedy  $a_* < 1$ . Nyní nalezneme vztahy mezi výše uvedenými funkcemi a našimi koeficienty  $\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{S}$  a  $\mathcal{T}$ . Začněme s  $\mathcal{P} = g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi}$ . Metrické koeficienty známe, potřebujeme ještě úhlovou rychlost na orbitě  $\Omega$ , která má pro Kerrovu metriku známý tvar

$$\Omega = \frac{\sqrt{M}}{r_*^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{M}} = \frac{1}{Mr_*^{\frac{3}{2}}\mathcal{B}}. \quad (2.7)$$

Nyní upravíme vyjádření

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \Omega \left( \frac{g_{t\varphi}}{\Omega} + g_{\varphi\varphi} \right) = \Omega \left( \frac{-\frac{2Ma}{r}}{\frac{\sqrt{M}}{r^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{M}}} + \left( r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} \right) \right) = \\
&= \Omega \left( \left( -\frac{2Ma}{r} \right) \left( \frac{r^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{M}}{\sqrt{M}} \right) + \left( r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} \right) \right) = \\
&= \Omega \left( -2\sqrt{M}ar^{\frac{1}{2}} - \frac{2Ma^2}{r} + r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) = \\
&= \Omega r^2 \left( 1 - \frac{2\sqrt{M}a}{r^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2}{r^2} \right) = \frac{\Omega r^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{\Omega \mathcal{B}} \mathcal{F} = \frac{r^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}}{\mathcal{B}}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Pokračujeme s  $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \Omega \left( \frac{g_{tt}}{\Omega} + g_{\varphi t} \right) = \Omega \left( \frac{-1 + \frac{2M}{r}}{\frac{\sqrt{M}}{r^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{M}}} - \frac{2Ma}{r} \right) = \\
&= \Omega \left( \left( -1 + \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{r^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{M}}{\sqrt{M}} \right) - \frac{2Ma}{r} \right) = \\
&= \Omega \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}} \left( -1 + \frac{2M}{r} - \frac{a\sqrt{M}}{r^{\frac{3}{2}}} + \frac{2aM^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{5}{2}}} - \frac{2aM^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{5}{2}}} \right) = \\
&= -\Omega \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}} \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{a\sqrt{M}}{r^{\frac{3}{2}}} \right) = -\frac{\Omega}{\Omega \mathcal{B}} \mathcal{G} = -\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{B}}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Zbývá nám určit vztahy pro další dva koeficienty. Nejdříve upravme

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= g_{t\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi}g_{tt} = \frac{4a^2M^2}{r^2} - \left( -1 + \frac{2M}{r} \right) \left( r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} \right) = \\
&= \frac{4a^2M^2}{r^2} + r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} - 2Mr - \frac{2a^2M^2}{r} - \frac{4a^2M^2}{r^2} = \\
&= r^2 + a^2 - 2Mr = r^2 \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right) = r^2 \mathcal{D}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

a poté pokračujeme posledním ze vztahů, který pro jednodušší zápis vydělíme  $\Omega^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{T}}{\Omega^2} &= \frac{g_{tt}}{\Omega^2} + \frac{2g_{t\varphi}}{\Omega} + g_{\varphi\varphi} = \left( -1 + \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{r^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{M}}{\sqrt{M}} \right)^2 + \\
&+ 2 \left( \frac{r^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{M}}{\sqrt{M}} \right) \left( -\frac{2aM}{r} \right) + r^2 + a^2 + \frac{2a^2M^2}{r} = \\
&= -\frac{r^3}{M} + 3r^2 - \frac{2r^{\frac{3}{2}}a}{\sqrt{M}} = -\frac{r^3}{M} \left( 1 - \frac{3M}{r} + \frac{2a\sqrt{M}}{r^{\frac{3}{2}}} \right) = -\frac{\mathcal{C}}{\Omega^2 \mathcal{B}^2}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Tím jsme dostali  $\mathcal{T} = -\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}^2}$ . K dosažení do zákonů zachování (1.44) a (1.45) nám ještě chybí vyjádření

$$\frac{1}{g_{rr}} = \frac{r^2 - 2Mr + a^2}{r^2} = \mathcal{D}. \tag{2.12}$$

Nyní můžeme konečně dosadit a místo rovnice (1.44) snadno dostáváme

$$\left( -\frac{\dot{M}L}{2\pi} + r^2 \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{C}}} \mathcal{D}W^{(r)(\varphi)} \right)_{,r} + 2rLF = 0, \quad (2.13)$$

což je rovnice (5.6.6) z (Novikov a Thorne, 1973). Podobně dosadíme i do (1.45)

$$\left( -\frac{\dot{M}E}{2\pi} + r^2 \Omega \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{C}}} \mathcal{D}W^{(r)(\varphi)} \right)_{,r} + 2rEF = 0, \quad (2.14)$$

což je rovnice analogická k rovnici (30) z (Page a Thorne, 1974).

## 2.4 Výpočet profilu záření v Kerrově metrice

Nyní pokročíme k samotnému výpočtu integrálu (1.58). Vidíme, že předně potřebujeme určit výrazy  $\Omega_{,r}$ ,  $(E - \Omega L)$  a  $L_{,r}$ . Energie v nekonečnu a moment hybnosti v nekonečnu jsou dány vztahy (1.59), respektive (1.60). V zápisu pomocí funkcí (2.6) to znamená

$$L = \frac{r^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}}{\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.15)$$

$$E = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.16)$$

což jsou rovnice (5.4.7) ve výše uvedeném. Pro usnadnění výpočtu zavedeme novou proměnnou  $x$  vztahem  $x = \sqrt{\frac{r}{M}}$  a dále vše včetně funkcí (2.6) budeme vyjadřovat v řeči této proměnné. Dosadíme do výrazu  $(E - \Omega L)$ . Nejsnazší je vyjít právě ze vztahů (2.15) a (2.16)

$$(E - \Omega L) = \frac{\mathcal{G}x^2\mathcal{B} - \mathcal{F}}{\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}x^2}. \quad (2.17)$$

Dosazením do čitatele dostaneme

$$\mathcal{G}x^2\mathcal{B} - \mathcal{F} = \left( x^2 - 2 + \frac{a_*}{x} \right) \left( 1 + \frac{a_*}{x^3} \right) - 1 + \frac{2a_*}{x^3} - \frac{a_*^2}{x^4} = x^2 - 3 + \frac{2a_*}{x} = \mathcal{C}x^2 \quad (2.18)$$

a ve výsledku máme jednoduchý vztah

$$(E - \Omega L) = \frac{\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{B}}. \quad (2.19)$$

Snadným derivováním získáme

$$\Omega_{,r} = -\frac{3}{2} \frac{M^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}}{(r^{\frac{3}{2}} + aM^{\frac{1}{2}})^2} = -\frac{3}{2} \frac{M^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{5}{2}} \mathcal{B}^2} = -\frac{3}{2} \frac{1}{x^5 M^2 \mathcal{B}^2}. \quad (2.20)$$

Faktor  $-\frac{\Omega_{,r}}{(E - \Omega L)^2}$  před integrálem v (1.58) má tedy tvar

$$-\frac{\Omega_{,r}}{(E - \Omega L)^2} = \frac{3}{2} \frac{1}{M^2 x^5 \mathcal{C}} = \frac{3}{2M^2} \frac{1}{x^2 (x^3 - 3x + 2a_*)}. \quad (2.21)$$

Dále vypočteme derivaci momentu hybnosti, využijeme vzorce pro derivaci složené funkce a budeme rovnou počítat v proměnné  $x$

$$\begin{aligned} L_{,r} &= \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x} \frac{1}{xM} = \frac{-3a_*^3 + 8a_*^2x - 6a_*x^2 - 3a_*^2x^3 + 9a_*x^4 - 6x^5 + x^7}{2x^8 \left( \frac{2a_* - 3x + x^3}{x^3} \right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{(a_* + x^3)(-3a_*^2 + 8a_*x - 6x^2 + x^4)}{2x^8 \mathcal{C}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mathcal{B}(-3a_*^2 + 8a_*x - 6x^2 + x^4)}{2x^5 \mathcal{C}^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Celkově má tedy integrand tvar

$$(E - \Omega L)L_{,r} = \frac{(x^4 - 6x^2 + 8a_*x - 3a_*^2)}{2x^5 \mathcal{C}} = \frac{(-3a_*^2 + 8a_*x - 6x^2 + x^4)}{2x^2(x^3 - 3x + 2a_*)}. \quad (2.23)$$

Vidíme, že číselník nám nečiní problém, jelikož můžeme využít linearitu integrálu a rozdělit ho na čtyři části. Větší problém je ve jmenovateli, nicméně vidíme, že celý výraz půjde zintegrovat, pokud zvládneme rozložit mnohočlen  $x^3 - 3x + 2a$  na součin. To by mělo být možné, pokud má rovnice  $x^3 - 3x + 2a = 0$  reálné kořeny. Abychom zjistili, zda to tak je, vypočteme diskriminant ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  a  $d$  značí, jak je zvykem, koeficienty u jednotlivých členů polynomu od nejvyššího po nejnižší)

$$D = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 = 108(1 - a_*^2) \geq 0. \quad (2.24)$$

Vidíme tedy, že všechny kořeny rovnice jsou reálné. Zbývá je nalézt. Obecný vzorec pro řešení kubické rovnice by se příliš nehodil vzhledem k tomu, že výsledek obsahuje komplexní čísla a nelze ho snadno upravit. Jedná se o takzvaný *casus irreducibilis* a kořeny ani obecně nelze vyjádřit pomocí reálných radikálů. Můžeme nicméně využít trigonometrického vzorce pro řešení kubické rovnice, který nalezne kořeny ve tvaru goniometrických funkcí. Pro tvar rovnice  $x^3 + bx + c = 0$  (Zavádíme tedy nyní jiné značení.) tento vzorec zní  $x_k = 2\sqrt{-\frac{b}{3}} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{-3}{b}}\right) - \frac{2\pi k}{3}\right]$ , kde  $k$  je celé číslo, jehož hodnotu volíme od 0 do 2. Dosazením do vzorce získáváme tři kořeny

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \cos\left[\frac{1}{3} \arccos(-a_*)\right], \\ x_2 &= 2 \cos\left[\frac{1}{3} \arccos(-a_*) - \frac{2\pi}{3}\right], \\ x_3 &= 2 \cos\left[\frac{1}{3} \arccos(-a_*) - \frac{4\pi}{3}\right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nyní tedy dokážeme rozložit jmenovatel integrandu na součin. Stále ale integrujeme podle proměnné  $r$ , a tak provedeme snadnou substituci  $dr = 2xMdx$ ,  $r_0 \rightarrow x_0$ , a  $r \rightarrow x$  a integrand ještě mírně upravíme

$$\begin{aligned} M \int_{x_0}^x \frac{(-3a_*^2 + 8a_*x - 6x^2 + x^4)}{x(x^3 - 3x + 2a_*)} dx &= M \int_{x_0}^x \frac{x(x^3 - 6x + 8a_*) - 3a_*^2}{x(x^3 - 3x + 2a_*)} dx = \\ &= M \int_{x_0}^x \frac{-3a_*^2}{x(x^3 - 3x + 2a_*)} + \frac{(x^3 - 3x + 2a_*) - 3x + 6a_*}{x^3 - 3x + 2a_*} dx = \\ &= M \int_{x_0}^x 1 + \frac{-3a_*^2}{x(x^3 - 3x + 2a_*)} + \frac{-3x + 6a_*}{x^3 - 3x + 2a_*} dx. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Hodnota integrační meze  $x_0$  je dána vztahem  $L_{,r} = 0$ , a dle (2.22) jde tedy o kladný kořen rovnice

$$x_0^4 - 6x_0^2 + 8a_*x_0 - 3a_*^2 = 0. \quad (2.27)$$

Jde o kvartickou rovnici, kterou je v principu možno analyticky vyřešit dosazením do vzorce, výsledný výraz nicméně neuvádíme, neboť je rozsáhlý a samotná hodnota  $x_0$  se ve výsledcích vyskytuje jako parametr, který nepotřebujeme pro nalezení primitivní funkce. Integrace prvního sčítance ve (2.26) je prostá, u zbylých využijeme odvozeného rozkladu jmenovatele na součin. Budeme tedy postupovat od prvního k poslednímu sčítanci

$$\int_{x_0}^x 1 \, dx = x - x_0, \quad (2.28)$$

dále v rozloženém jmenovateli využijeme rozkladu na parciální zlomky, speciálně rovnosti

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} &= \frac{1}{x(x-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - \\ &- \frac{1}{x(x-x_2)(x_1-x_2)(x_2-x_3)} + \frac{1}{x(x-x_3)(x_1-x_3)(x_2-x_3)}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

díky čemuž integrujeme výrazy tvaru

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{x(x-y)} dx = \int_{x_0}^x \left( \frac{1}{y(x-y)} - \frac{1}{xy} \right) dx = \frac{\ln \frac{x-y}{x_0-y} - \ln \frac{x}{x_0}}{y}. \quad (2.30)$$

Využitím tohoto vypočteného integrálu na jednotlivé členy ve vztahu (2.29) získáme složitý výsledek

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{-3a_*^2}{x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} dx &= -3a_*^2 \left[ \left( \frac{\ln \frac{x-x_1}{x_0-x_1}}{x_1(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - \right. \right. \\ &- \frac{\ln \frac{x-x_2}{x_0-x_2}}{x_2(x_1-x_2)(x_2-x_3)} + \frac{\ln \frac{x-x_3}{x_0-x_3}}{x_3(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \left. \right) + \left( \frac{-\ln x}{x_1(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - \right. \\ &- \frac{-\ln x}{x_2(x_1-x_2)(x_2-x_3)} + \left. \left. \frac{-\ln x}{x_3(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Druhá z vnitřních závorek lze naštěstí zjednodušit. Vychází totiž

$$\begin{aligned} \frac{-\ln x}{x_1(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - \frac{-\ln x}{x_2(x_1-x_2)(x_2-x_3)} + \\ + \frac{-\ln x}{x_3(x_1-x_3)(x_2-x_3)} = \frac{-\ln x}{x_1x_2x_3} \end{aligned} \quad (2.32)$$

a součin kořenů ve jmenovateli můžeme určit využitím Viětových vztahů, konkrétně toho, že pro součin kořenů kubické rovnice platí  $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$ . V našem

případě tedy ze vzorce plyne rovnost  $x_1x_2x_3 = -2a_*$ , díky čemuž konečně dostáváme

$$\int_{x_0}^x \frac{-3a_*^2}{x(x^3 - 3x + 2a_*)} dx = -\frac{3}{2}a_* \ln \frac{x}{x_0} - 3a_*^2 \left( \frac{\ln \frac{x-x_1}{x_0-x_1}}{x_1(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - \right. \\ \left. - \frac{\ln \frac{x-x_2}{x_0-x_2}}{x_2(x_1-x_2)(x_2-x_3)} + \frac{\ln \frac{x-x_3}{x_0-x_3}}{x_3(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \right). \quad (2.33)$$

Další část integrálu (2.26) vypočteme podobným způsobem. Rozklad na parciální zlomky dává

$$-3 \int_{x_0}^x \frac{x}{x^3 - 3x + 2a_*} = -3 \int_{x_0}^x \frac{x}{(x-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - \\ - \frac{x}{(x-x_2)(x_1-x_2)(x_2-x_3)} + \frac{x}{(x-x_3)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} dx. \quad (2.34)$$

Všechny sčítance mají stejný tvar, integrace například prvního z nich dává

$$-3 \int_{x_0}^x \frac{\left(\frac{x_1}{x-x_1} + 1\right)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} dx = -3 \left( \frac{x_1 \ln \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + x - x_0}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \right). \quad (2.35)$$

Sečtením všech tří zlomků vzešlých z integrálu podle tohoto vzoru dostaneme

$$-3 \left( \frac{x_1 \ln \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + x - x_0}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - \frac{x_2 \ln \frac{x-x_2}{x_0-x_2} + x - x_0}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} + \frac{x_3 \ln \frac{x-x_3}{x_0-x_3} + x - x_0}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \right) = \\ = -3 \left( \frac{x_1 \ln \frac{x-x_1}{x_0-x_1}}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - \frac{x_2 \ln \frac{x-x_2}{x_0-x_2}}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} + \frac{x_3 \ln \frac{x-x_3}{x_0-x_3}}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \right). \quad (2.36)$$

Členy  $x - x_0$  se po převedení na společného jmenovatele odečty. Poslední, co zbývá z interálu (2.26), je člen

$$6 \int_{x_0}^x \frac{a_*}{x^3 - 3x + 2a_*} = 6a_* \int_{x_0}^x \frac{1}{(x-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - \\ - \frac{1}{(x-x_2)(x_1-x_2)(x_2-x_3)} + \frac{1}{(x-x_3)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} dx = \\ = 6a_* \left( \frac{\ln \frac{x-x_1}{x_0-x_1}}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - \frac{\ln \frac{x-x_2}{x_0-x_2}}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} + \frac{\ln \frac{x-x_3}{x_0-x_3}}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} \right). \quad (2.37)$$

Když nyní spojíme výsledky (2.21), (2.28), (2.33), (2.36) a (2.37) dohromady a vynásobíme výraz hmotností  $M$  vzešlou ze substituce, získáváme výsledek integrálu (1.58), respektive (2.26), a tím pádem explicitní výraz pro  $f$

$$f = \frac{3}{2M} \frac{1}{x^2(x^3 - 3x + 2a_*)} \left[ x - x_0 - \frac{3}{2}a_* \ln \frac{x}{x_0} - \right. \\ \left. - \frac{3(x_1 - a_*)^2}{x_1(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \ln \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + \frac{3(x_2 - a_*)^2}{x_2(x_1-x_2)(x_2-x_3)} \ln \frac{x-x_2}{x_0-x_2} - \right. \\ \left. - \frac{3(x_3 - a_*)^2}{x_3(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \ln \frac{x-x_3}{x_0-x_3} \right]. \quad (2.38)$$

To už je výsledek (15n) z (Page a Thorne, 1974). Zpětným dosazením do vztahu (1.46) získáme tok zářivé energie  $F$  jako explicitní funkci radiální souřadnice  $x$  (případně  $r$  po zpětné substituci  $r = Mx^2$ ). Vychází

$$\begin{aligned}
F = \frac{3\dot{M}}{8\pi M^2} \frac{1}{x^4 (x^3 - 3x + 2a_*)} & \left[ x - x_0 - \frac{3}{2} a_* \ln \frac{x}{x_0} - \right. \\
- \frac{3(x_1 - a_*)^2}{x_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \ln \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} & + \frac{3(x_2 - a_*)^2}{x_2(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)} \ln \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} - \\
\left. - \frac{3(x_3 - a_*)^2}{x_3(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \ln \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \right]. & \quad (2.39)
\end{aligned}$$



# 3. Akreční disk okolo nabité rotující černé díry

Nyní znovu dosadíme do strukturních rovnic tenkého akrečního disku. Místo Kerrovy metriky ale dosadíme metriku, která se oproti ní liší tím, že se v ní vyskytuje náboj. Může jít o případ Kerrova-Newmanova řešení Einsteinových rovnic, které opravdu odpovídá přímo nabitě rotující černé díře, ale podle moderních teorií může tento „náboj“ odpovídat projevům dalších jinak skrytých prostoročasových dimenzí, jak je popsáno v (Dadhich a kol., 2000) pro případ Reissnerova-Nordsröмова řešení.

## 3.1 Metrika rotujícího objektu s nábojem

My použijeme metriku, která je popsána v (Banerjee a kol., 2021) a odpovídá již zmíněnému Kerrovu-Newmanovu řešení s tím rozdílem, že náboj, který se v ní vyskytuje, není umocněn na druhou. U Kerrovy-Newmanovy metriky druhá mocnina implikuje nezápornost tohoto členu. Příklad se záporným  $q$  je tedy fyzikálně nový a teoreticky může odpovídat projevu vyšší dimenze. Zvolíme-li Boyerovy-Lindquistovy souřadnice, má metrika tvar

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr - M^2q}{\Sigma^2} \right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (2Mr - M^2q)}{\Sigma^2} dt d\varphi + \frac{\Sigma^2}{\Delta} dr^2 + \Sigma^2 d\theta^2 + \left( r^2 + a^2 + \frac{a^2 \sin^2 \theta (2Mr - M^2q)}{\Sigma^2} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.1)$$

kde  $q$  je bezrozměrný nábojový parametr,  $a = \frac{J}{M}$ ,  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  stejně jako u Kerrovy metriky a  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + M^2q$ . Navíc vidíme, že v limitě  $q = 0$  dostáváme Kerrovu metriku. Z toho je jasné, že i každý z dalších výsledků musí v limitě  $q = 0$  nabývat tvaru, který jsme získali v minulé kapitole. Dále se omezíme na ekvatoriální rovinu  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , přejdeme od souřadnice  $\theta$  k souřadnici  $z$  a metrika se zjednoduší

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{M^2q}{r^2} \right) dt^2 - \left( \frac{4aM}{r} - \frac{2aM^2q}{r^2} \right) dt d\varphi + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + dz^2 + \left( r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} - \frac{a^2M^2q}{r^2} \right) d\varphi^2. \quad (3.2)$$

Z toho už můžeme rovnou přechíst jednotlivé metrické koeficienty

$$g_{tt} = -1 + \frac{2M}{r} - \frac{M^2q}{r^2}, \quad g_{\varphi t} = -\frac{2Ma}{r} + \frac{aM^2q}{r^2}, \quad g_{rr} = \frac{r^2}{\Delta}, \quad (3.3)$$

$$g_{zz} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} - \frac{a^2M^2q}{r^2}.$$

Se znalostí metriky můžeme znovu začít dosazovat do zákonů zachování.

### 3.2 Zákon zachování hmotnosti

Jediná obtíž v dosazení do vztahu (1.5) opět spočívá ve vypočtení determinantu použité metriky

$$\begin{aligned}
g &= g_{tt}(g_{rr}g_{zz}g_{\varphi\varphi}) - g_{\varphi t}^2(g_{rr}g_{zz}) = \frac{\left(-1 + \frac{2M}{r} - \frac{M^2q}{r^2}\right) r^2 \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} - \frac{a^2M^2q}{r^2}\right)}{r^2 - 2Mr + a^2 + M^2q} \\
&- \frac{\left(-\frac{2Ma}{r} + \frac{a^2M^2q}{r^2}\right)^2 r^2}{r^2 - 2Mr + a^2 + M^2q} = \\
&= \frac{-r^6 + 2Mr^5 - a^2r^4 - M^2qr^4 - 4a^2M^3qr + 4a^2M^3qr - a^2M^4q^2 + a^2M^4q^2}{r^4 - 2Mr^3 + a^2r^2 + M^2qr^2} \\
&= -r^2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Determinant tedy vychází stejně jako u Kerrovy metriky. Díky tomu má i zákon zachování hmotnosti stejný, jednoduchý tvar

$$\dot{M} = -2\pi r \Sigma u^r. \tag{3.5}$$

### 3.3 Úhlová rychlost

Jelikož pro další postup potřebujeme dosazovat do vztahů, ve kterých se vyskytuje úhlová rychlost  $\Omega$ , musíme nejdříve určit její konkrétní podobu pro naši metriku. Vyjdeme ze vzorce, který je uveden v již zmíněném (Banerjee a kol., 2021) (vztah (5))

$$\Omega = \frac{-\partial_r g_{t\varphi} \pm \sqrt{(-\partial_r g_{t\varphi})^2 - (\partial_r g_{\varphi\varphi})(\partial_r g_{tt})}}{\partial_r g_{\varphi\varphi}}. \tag{3.6}$$

Různá znaménka odpovídají různým směrům rotace. Dosadíme, zvolíme záporné znaménko a po zderivování a úpravě dostaneme

$$\Omega = \frac{\sqrt{M}}{a\sqrt{M} + \frac{r^2}{\sqrt{r-Mq}}}. \tag{3.7}$$

Vidíme, že úhlová rychlost má stále relativně jednoduchý tvar. Otázkou zůstává, zda podobně jednoduché zůstanou i ostatní veličiny.

### 3.4 Energie a moment hybnosti

Nyní uvidíme, že i energie a moment hybnosti lze zapsat jednoduše způsobem analogickým k tomu použitému u Kerrovy metriky.

Začneme dosazením do vzorce (1.60)

$$E = -\frac{\mathcal{R}}{\sqrt{-\mathcal{I}}} = -\frac{g_{tt} + \Omega g_{\varphi t}}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\varphi}\Omega - g_{\varphi\varphi}\Omega^2}}. \tag{3.8}$$

Vztah se pokusíme upravit podobně jako u Kerrovy metriky, a tedy vytkneme  $\Omega$  z čitatele i jmenovatele. V čitateli vychází

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{R}}{\Omega} &= \frac{g_{tt}}{\Omega} + g_{t\varphi} = \frac{-1 + \frac{2M}{r} - \frac{qM^2}{r^2}}{\frac{\sqrt{M}}{a\sqrt{M + \frac{r^2}{\sqrt{r-Mq}}}}} - \frac{2aM}{r} + \frac{aqM^2}{r^2} = -\frac{2aM}{r} + \frac{aqM^2}{r^2} + \\
&+ \left( \frac{a\sqrt{M} + \frac{r^2}{\sqrt{r-Mq}}}{\sqrt{M}} \right) \left( -1 + \frac{2M}{r} - \frac{qM^2}{r^2} \right) = -a - \frac{r^2}{\sqrt{M(r-Mq)}} + \\
&+ \frac{2Mr}{\sqrt{M(r-Mq)}} - \frac{qM^2}{\sqrt{M(r-Mq)}} = \\
&= -\frac{r^2}{\sqrt{M(r-Mq)}} \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{a\sqrt{M(r-qM)}}{r^2} + \frac{M^2q}{r^2} \right) = -\frac{\mathfrak{G}}{\Omega\mathfrak{B}}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Také analogicky k minulé kapitole zavádíme nové značení. Zatímco  $\mathfrak{G}$  značí výraz v závorce,  $\mathfrak{B}$  musíme ještě určit:

$$\frac{1}{\mathfrak{B}} = \frac{\sqrt{M}}{\left( a\sqrt{M} + \frac{r^2}{\sqrt{r-Mq}} \right) \sqrt{M(r-Mq)}} \rightarrow \mathfrak{B} = 1 + \frac{a\sqrt{M(r-Mq)}}{r^2}. \tag{3.10}$$

Místo  $\mathfrak{B}$  můžeme vyjádřit úhlovou rychlost

$$\Omega = \frac{\sqrt{M(r-Mq)}}{\mathfrak{B}r^2}. \tag{3.11}$$

Pokročíme nyní ke jmenovateli vztahu (3.8). Z výrazu pod odmocninou vytkneme  $-\Omega^2$  a počítejme

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \frac{g_{tt}}{\Omega^2} + \frac{2g_{t\varphi}}{\Omega} + g_{\varphi\varphi} = \left( -1 + \frac{2M}{r} - \frac{M^2q}{r^2} \right) \left( \frac{a\sqrt{M} + \frac{r^2}{\sqrt{r-Mq}}}{\sqrt{M}} \right)^2 + \\
&+ 2 \left( \frac{-2aM}{r} + \frac{aMq}{r^2} \right) \left( \frac{a\sqrt{M} + \frac{r^2}{\sqrt{r-Mq}}}{\sqrt{M}} \right) + r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} - \\
&- \frac{a^2M^2q}{r^2} = \frac{-r^4}{M(r-Mq)} + \frac{3Mr^3}{M(r-Mq)} - \frac{2ar^2}{\sqrt{M(r-Mq)}} - \\
&- \frac{2qr^2M^2}{M(r-Mq)} = \frac{-r^4}{M(r-Mq)} \left( 1 - \frac{3M}{r} + \frac{2(a\sqrt{M(r-Mq)} + qM^2)}{r^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Člen v závorce označíme jako  $\mathfrak{C}$  a člen před závorkou vychází jako  $\frac{r^4}{M(r-Mq)} = \frac{1}{\Omega^2\mathfrak{B}^2}$ . Víme tedy, že  $\mathcal{R} = -\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}}$  a  $\mathcal{T} = -\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}^2}$ . Z toho už dostáváme

$$E = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.13}$$

což je vztah analogický k (2.16).

Přesuňme se k momentu hybnosti a dosadme do (1.59). Začneme opět s čitatelem, ze kterého vytkneme  $\Omega$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{P}}{\Omega} &= g_{\varphi\varphi} + \frac{g_{\varphi t}}{\Omega} = r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} - \frac{a^2M^2q}{r^2} + \\
&+ \left( -\frac{2aM}{r} + \frac{aM^2q}{r^2} \right) \left( \frac{a\sqrt{M} + \frac{r^2}{\sqrt{r-Mq}}}{\sqrt{M}} \right) = r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} - \frac{a^2M^2q}{r^2} - \\
&- \frac{2a^2M}{r} - \frac{2arM}{\sqrt{M(r-Mq)}} + \frac{a^2M^2q}{r^2} + \frac{aqM^2}{\sqrt{M(r-Mq)}} = \\
&= r^2 + a^2 - \frac{2arM}{\sqrt{M(r-Mq)}} + \frac{aqM^2}{\sqrt{M(r-Mq)}} = \\
&= r^2 \left( 1 - \frac{2aM}{\sqrt{M(r-Mq)r}} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{aqM^2}{\sqrt{M(r-Mq)r^2}} \right) = \frac{\sqrt{M(r-Mq)}\mathfrak{F}}{\Omega\mathfrak{B}}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Vztah pro  $\mathcal{S}$  již známe, a rovnou tedy vidíme

$$L = \frac{\sqrt{M(r-Mq)}\mathfrak{F}}{\mathfrak{C}^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.15}$$

což je opět vztah analogický k (2.15). Jak energie, tak moment hybnosti jdou tedy opět vyjádřit v jednodušším tvaru pomocí bezrozměrných funkcí.

### 3.5 Zákony zachování energie a momentu hybnosti

Pro dosažení do rovnic (1.44) a (1.45), tak abychom dostali vztahy podobné zákonům zachování (2.13) a (2.14), ještě potřebujeme upravit výraz pro koeficient  $\mathcal{S}$  v naší metrice. Počítejme tedy

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= g_{t\varphi} - g_{\varphi\varphi}g_{tt} = \left( -\frac{2Ma}{r} + \frac{aM^2q}{r^2} \right) - \\
&- \left( r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} - \frac{a^2M^2q}{r^2} \right) \left( -1 + \frac{2M}{r} - \frac{M^2q}{r^2} \right) = \\
&= r^2 - 2Mr + a^2 + M^2q = r^2\mathfrak{D}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Pro přehled nyní shrneme zavedené bezrozměrné funkce příslušné k metrice

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= 1 + \frac{a\sqrt{M(r-Mq)}}{r^2}, \quad \mathfrak{C} = 1 - \frac{3M}{r} + \frac{2(a\sqrt{M(r-Mq)} + qM^2)}{r^2}, \\
\mathfrak{D} &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{M^2q}{r^2}, \quad \mathfrak{F} = 1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{-2aMr + aqM^2}{\sqrt{M(r-Mq)r^2}}, \\
\mathfrak{G} &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{a\sqrt{M(r-qM)}}{r^2} + \frac{M^2q}{r^2}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Zákony zachování mají v zápisu pomocí těchto funkcí stejný tvar jako pro Kerrovu metriku. Konkrétně napíšme zákon zachování energie

$$\left( -\frac{\dot{M}E}{2\pi} + r^2 \Omega \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{E}}} \mathfrak{D}W^{(r)(\varphi)} \right)_{,r} + 2rEF = 0 \quad (3.18)$$

a zákon zachování momentu hybnosti

$$\left( -\frac{\dot{M}L}{2\pi} + r^2 \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{E}}} \mathfrak{D}W^{(r)(\varphi)} \right)_{,r} + 2rLF = 0. \quad (3.19)$$

### 3.6 Výpočet profilu záření

Pro výpočet integrálu (1.58) jsou hlavní výrazy  $(E - \Omega L)$  a  $L_{,r}$ . Už předem víme, že derivace momentu hybnosti bude tentokrát mnohem složitější. Začneme proto relativně jednoduchou derivací úhlové rychlosti

$$\Omega_{,r} = \frac{\sqrt{M}(4Mq - 3r)r}{2\sqrt{r - Mq}(r^2 + a\sqrt{M(r - Mq)})^2} = \frac{\sqrt{M}(4Mq - 3r)}{2\sqrt{r - Mq}\mathfrak{B}^2r^3} \quad (3.20)$$

a pokračujme vyčíslením výrazu  $(E - \Omega L)$ . S využitím (3.11) dostaneme

$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}^{\frac{1}{2}}} - \Omega \frac{\sqrt{M(r - Mq)}\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mathfrak{E}\mathfrak{B}r^2 - (Mr - M^2q)\mathfrak{F}}{r^2\mathfrak{B}\mathfrak{E}^{\frac{1}{2}}} \quad (3.21)$$

a dále upravíme výraz v čitateli

$$\begin{aligned} & \mathfrak{E}\mathfrak{B}r^2 - (Mr - M^2q)\mathfrak{F} = \\ & = r^2 \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{a\sqrt{M(r - qM)} + M^2q}{r^2} \right) \left( 1 + \frac{a\sqrt{M(r - Mq)}}{r^2} \right) - \\ & - (Mr - M^2q) \left( 1 - \frac{2aM}{\sqrt{M(r - Mq)}r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{aM^2q}{\sqrt{M(r - qM)}r^2} \right) = r^2 - \\ & - 2Mr - \frac{2aM\sqrt{M(r - Mq)}}{r} + 2a\sqrt{M(r - Mq)} + M^2q + \\ & + \frac{a^2M(r - Mq) + aM^2q\sqrt{M(r - Mq)}}{r^2} - Mr + M^2q + \\ & + \frac{2aM\sqrt{M(r - Mq)}}{r} - \frac{a^2M(r - Mq) + aM^2q\sqrt{M(r - Mq)}}{r^2} = \\ & = r^2 - 3Mr + 2qM^2 + 2a\sqrt{M(r - Mq)} = r^2\mathfrak{E}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ve výsledku tedy získáváme jednoduchý vztah

$$(E - \Omega L) = \frac{\mathfrak{E}^{\frac{1}{2}}}{\mathfrak{B}}, \quad (3.23)$$

stejně jako u Kerrový metriky. Tím pádem i faktor před integrálem nabývá analogického tvaru

$$-\frac{\Omega_{,r}}{(E - \Omega L)^2} = \frac{\sqrt{M}(3r - 4Mq)}{2\sqrt{r - Mq}r^3\mathfrak{E}}. \quad (3.24)$$

I dále bychom chtěli postupovat podobně jako v předchozí kapitole, nicméně problém je, že nelze zavést proměnnou  $x$  tak, aby zjednodušila výpočet. To je dáno složitostí vztahů (3.17), hlavně výskytem odmocniny v některých členech. I tak se můžeme pokusit zderivovat moment hybnosti. Výsledný výraz je složitý, ale v čitateli je možno vytknout  $\mathfrak{B}$  a ve jmenovateli nalézt  $\mathfrak{C}$  tak, že po zavedení redukovaných veličin  $r_* = \frac{r}{M}$  a  $a_* = \frac{a}{M}$  vychází

$$L_{,r} = \frac{\mathfrak{B}r_*^2 \left( -4q^2 + a_*^2(4q - 3r_*) + 9qr_* - 6r_*^2 + r_*^3 + 8a_*(r_* - q)^{\frac{3}{2}} \right)}{2r_*^5 \sqrt{r_* - q} \mathfrak{C}^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.25)$$

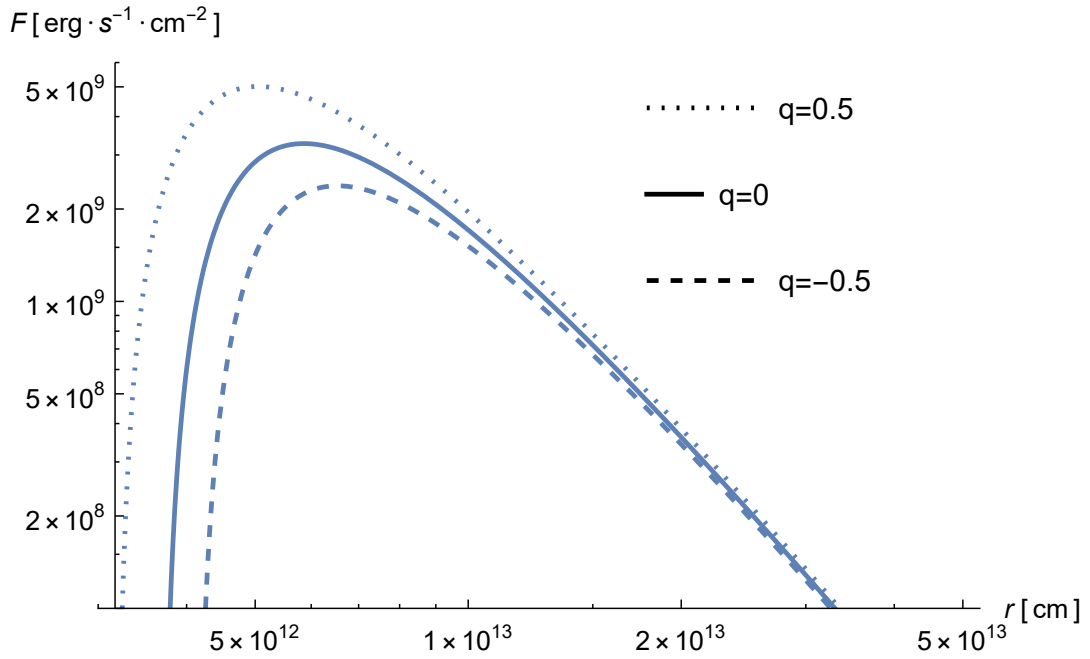
Z toho získáváme integrand ve tvaru

$$(E - \Omega L)L_{,r} = \frac{\left( -4q^2 + a_*^2(4q - 3r_*) + 9qr_* - 6r_*^2 + r_*^3 + 8a_*(r_* - q)^{\frac{3}{2}} \right)}{2r_* \sqrt{r_* - q} (r_*^2 - 3r_* + 2a_* \sqrt{r_* - q} + 2q)}. \quad (3.26)$$

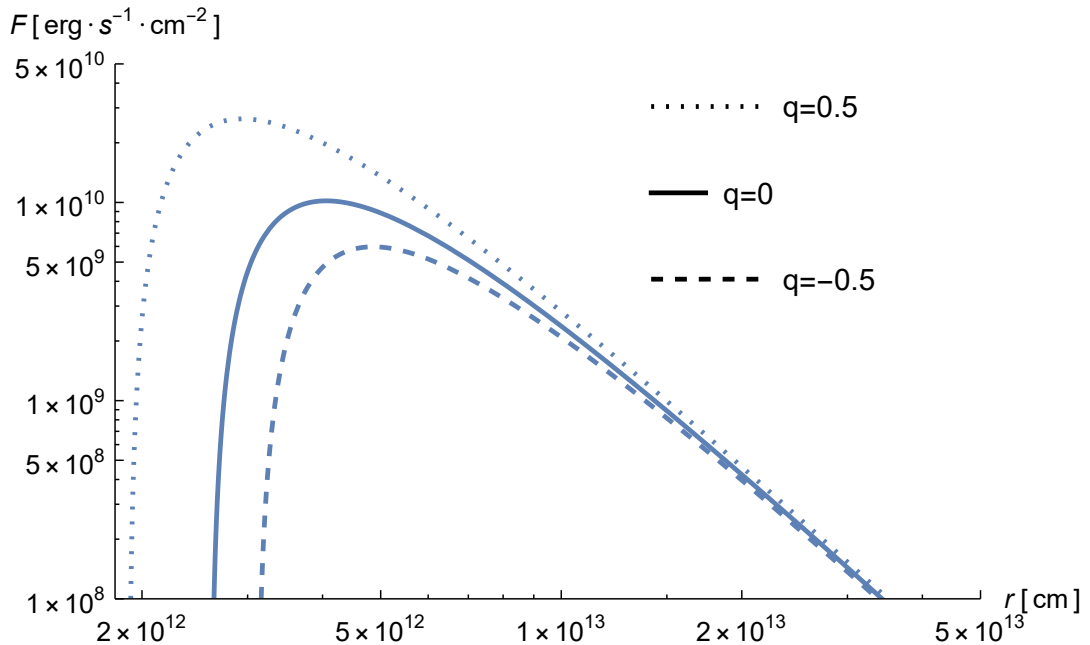
Zatímco čítenel nám díky linearitě v principu nečiní problém, jmenovatel je třeba dále upravit tak, abychom dostali integrovatelný výraz. Užitečné je zavést substituci  $r_* = x^2 + q$ . Tím ve jmenovateli získáme součin tří členů, z nichž jeden je kvartický polynom

$$2x(q + x^2)(x^4 + (2q - 3)x^2 + 2a_*x + q(q - 1)). \quad (3.27)$$

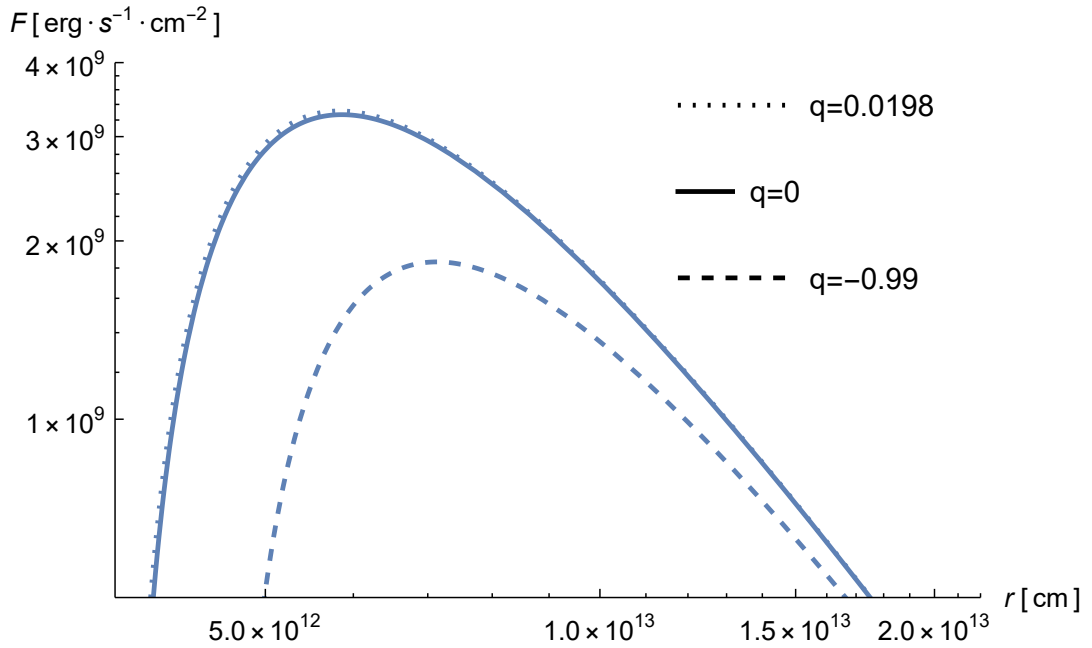
Dále už jsme integrál (3.26) vyřešili numericky, abychom mohli výsledky porovnat s funkcí (2.39) z kapitoly 2. Výsledky jsou vykresleny v grafech na další straně. Počítali jsme tři případy, kdy nejdříve je  $a_* = 0.5$ , poté  $a_* = 0$ , což vlastně odpovídá Schwarzschildově respektive Reissnerově-Nordsrömově metrice a v posledním případě je zvolena extrémní hodnota  $a_* = 0.99$ , ke které byly dopočteny vhodné hodnoty  $q$ . Pro černou díru totiž platí vztah  $a_*^2 + q = 1$ , pro větší hodnoty součtu  $a_*^2 + q$  jde o nahou singularitu. Pro tyto dopočtené hodnoty  $q$  byl ještě navíc pro porovnání vykreslen graf s  $a_* = 0$ . Za  $M$  jsme ve všech grafech dosadili předpokládanou hmotnost černé díry ve středu naší galaxie Sagittaria A\*, která činí  $M = 8.26 \cdot 10^{36}$  kg. Grafy jsou vykresleny v jednotkách CGS.



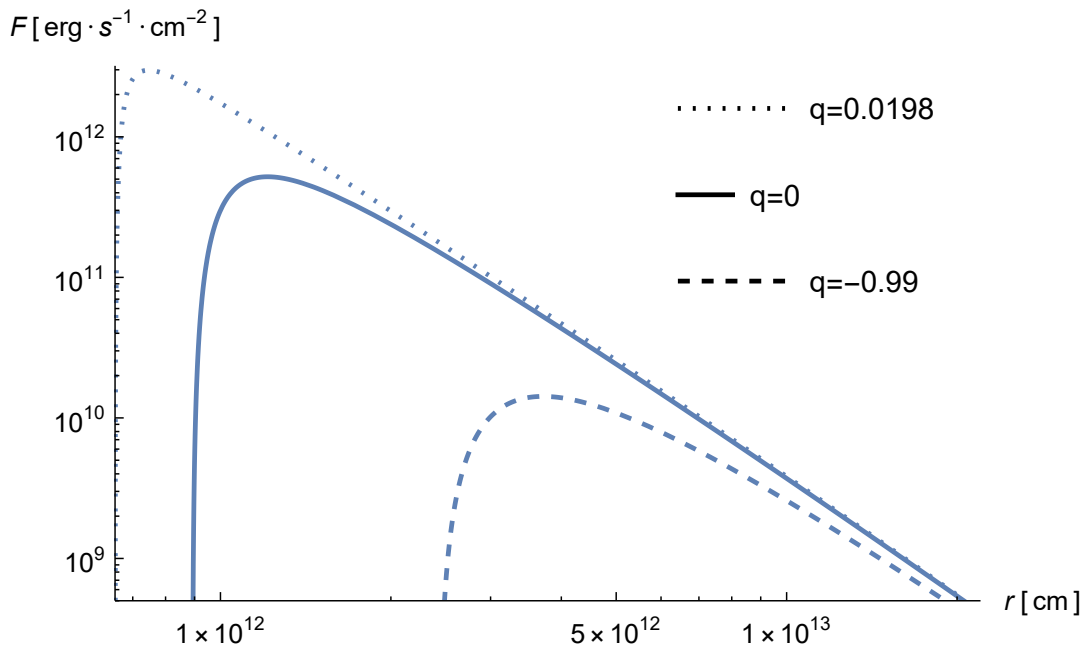
Obrázek 3.1: Graf závislosti zářivého toku z jednoho povrchu disku na vzdálenosti od centrálního tělesa. Jako centrální těleso byla zvolena předpokládaná černá díra ve středu naší galaxie Sagittarius A\*, za specifický moment hybnosti je zvolena hodnota  $a_* = 0$ . Jednotlivé křivky odpovídají různým specifickým nábojům centrálního tělesa.



Obrázek 3.2: Graf závislosti zářivého toku z jednoho povrchu disku na vzdálenosti od centrálního tělesa. Jako centrální těleso byla zvolena předpokládaná černá díra ve středu naší galaxie Sagittarius A\*, za specifický moment hybnosti je zvolena hodnota  $a_* = 0.5$ . Jednotlivé křivky odpovídají různým specifickým nábojům centrálního tělesa.



Obrázek 3.3: Graf závislosti zářivého toku z jednoho povrchu disku na vzdálenosti od centrálního tělesa. Jako centrální těleso byla zvolena předpokládaná černá díra ve středu naší galaxie Sagittarius A\*, za specifický moment hybnosti je zvolena hodnota  $a_* = 0$ . Jednotlivé křivky odpovídají různým specifickým nábojům centrálního tělesa.



Obrázek 3.4: Graf závislosti zářivého toku z jednoho povrchu disku na vzdálenosti od centrálního tělesa. Jako centrální těleso byla zvolena předpokládaná černá díra ve středu naší galaxie Sagittarius A\*, za specifický moment hybnosti je zvolena hodnota  $a_* = 0.99$ . Jednotlivé křivky odpovídají různým specifickým nábojům centrálního tělesa.



# Závěr

Moderní experimenty a objevy umožňují testovat obecnou teorii relativity a s ní i naše porozumění gravitaci lépe než kdy předtím. Testy probíhající v silném gravitačním poli, jaké je například v blízkosti supermasivních černých děr, mohou odhalit odchylky od očekávaného chování prostoročasu. Jednou z možností studia velkých astrofyzikálních objektů je detekce záření, které vydává akreční disk, jehož vlastnosti jsou ovlivněny právě geometrií prostoročasu okolo objektu.

Teoretickým studiem akrečních disků jsme se zabývali v této práci. Vyšli jsme ze známých prací zabývajících se fyzikálními vlastnostmi disků a zobecnili tento popis pro různé stacionární axiálně symetrické metriky. Nalezené řešení jsme ověřili dosazením Kerrovy metriky, pro niž již byl znám analytický vzorec pro tok zářivé energie.

Podobný analytický výsledek jsme se pokusili získat i pro metriku ve tvaru Kerrova-Newmanova řešení, lišící se výskytem elektrického náboje. Nalezené řešení ve tvaru integrálu se jeví jako problematické pro analytické nalezení primitivní funkce, nicméně nebylo plně ukázáno, že ji nalézt nelze, a bylo by možné se tomu dále věnovat. Integrál jsme dořešili numericky a srovnali výsledky pro různé hodnoty nábojů. Nalezené toky energie se i pro malá  $a_*$  odlišují v závislosti na hodnotě náboje. Pro objekty s větším momentem hybnosti je tento efekt ještě výraznější.

Do obecného řešení rovnic akrečních disků by bylo dále možné dosadit složitější typy metrik, například Hartleovu-Thorneovu metriku popisující tělesa s kvadrupólovým momentem, jako jsou třeba neutronové hvězdy. Lze očekávat, že u těchto složitějších metrik by též nebylo možné nalézt přesný analytický výraz pro energetický tok z disku.

Užitečné by také bylo podívat se na otázku opačnou, a to jak z naměřené charakteristiky záření určit moment hybnosti a případný náboj černé díry, a tím potenciálně odhalit něco o vlastnostech prostoročasu okolo těchto objektů.

# Seznam použité literatury

- BANERJEE, I., CHAKRABORTY, S. a SENGUPTA, S. (2021). Looking for extra dimensions in the observed quasi-periodic oscillations of black holes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2021**(09), 037. doi: 10.1088/1475-7516/2021/09/037.
- DADHICH, N., MAARTENS, R., PAPADOPOULOS, P. a REZANIA, V. (2000). Black holes on the brane. *Physics Letters B*, **487**(1-2), 1–6. doi: 10.1016/S0370-2693(00)00798-x.
- JOHANNSEN, T. a PSALTIS, D. (2011). Metric for rapidly spinning black holes suitable for strong-field tests of the no-hair theorem. *Physical Review D*, **83** (12). doi: 10.1103/physrevd.83.124015.
- JOHN, A. J. a STEVENS, C. Z. (2019). Bondi accretion in the spherically symmetric johannsen–psaltis spacetime. *The European Physical Journal C*, **79** (11). doi: 10.1140/epjc/s10052-019-7481-1.
- NOVIKOV, I. D. a THORNE, K. S. (1973). Astrophysics of black holes. In *Black Holes (Les Astres Occlus)*, pages 408–439.
- OSTRIKER, J. P. a GUNN, J. E. (1969). On the Nature of Pulsars. I. Theory. *Astrophysical Journal*, **157**, 1395. doi: 10.1086/150160.
- PAGE, D. N. a THORNE, K. S. (1974). Disk-Accretion onto a Black Hole. Time-Averaged Structure of Accretion Disk. *Astrophysical Journal*, **191**, 499–506. doi: 10.1086/152990.
- SHAKURA, N. I. a SUNYAEV, R. A. (1973). Black holes in binary systems. Observational appearance. *Astronomy and Astrophysics*, **24**, 337–355.

# Seznam obrázků

3.1	Graf závislosti zářivého toku z jednoho povrchu disku na vzdálenosti od centrálního tělesa. Jako centrální těleso byla zvolena předpokládaná černá díra ve středu naší galaxie Sagittarius A*, za specifický moment hybnosti je zvolena hodnota $a_* = 0$ . Jednotlivé křivky odpovídají různým specifickým nábojům centrálního tělesa. . . . .	27
3.2	Graf závislosti zářivého toku z jednoho povrchu disku na vzdálenosti od centrálního tělesa. Jako centrální těleso byla zvolena předpokládaná černá díra ve středu naší galaxie Sagittarius A*, za specifický moment hybnosti je zvolena hodnota $a_* = 0.5$ . Jednotlivé křivky odpovídají různým specifickým nábojům centrálního tělesa. . . . .	27
3.3	Graf závislosti zářivého toku z jednoho povrchu disku na vzdálenosti od centrálního tělesa. Jako centrální těleso byla zvolena předpokládaná černá díra ve středu naší galaxie Sagittarius A*, za specifický moment hybnosti je zvolena hodnota $a_* = 0$ . Jednotlivé křivky odpovídají různým specifickým nábojům centrálního tělesa. . . . .	28
3.4	Graf závislosti zářivého toku z jednoho povrchu disku na vzdálenosti od centrálního tělesa. Jako centrální těleso byla zvolena předpokládaná černá díra ve středu naší galaxie Sagittarius A*, za specifický moment hybnosti je zvolena hodnota $a_* = 0.99$ . Jednotlivé křivky odpovídají různým specifickým nábojům centrálního tělesa. . . . .	28