MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

David Žárský

Lineární ODR se singulárními členy

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Studijní program: Matematická analýza
Studijní obor: Matematická analýza

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Tímto děkuji doc. Daliboru Pražákovi za nemalé množství volného času, které věnoval vedení této práce, za rychlost a flexibilitu při jejích úpravách a za neutuchající ochotu pomoci během celé její tvorby.

Název práce: Lineární ODR se singulárními členy

Autor: David Žárský

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V tomto textu se zabýváme soustavami dvou lineárních obyčejných diferenciálních rovnic, ve kterých některé z koeficientů již nejsou integrovatelné funkce, ale Radonovy znaménkové míry. Nejprve se věnujeme teorii míry a zobecnění pojmu derivace. Následně dokážeme, že studovaná soustava má právě jedno řešení (v zadefinovaném smyslu) a platí analogické verze známých vět jako např. Liouvilleova formule nebo variace konstant. To nám umožňuje studovat různé úlohy pro obecnější lineární rovnice druhého řádu a porovnat dokázané výsledky s klasickou teorií. Konkrétně se zaměříme na Sturmovu srovnávací větu, Sturm-Liouvilleovu teorii a Floquetovu teorii (soustavy s periodickými koeficienty).

Klíčová slova: soustava ODR, singulární členy, lineární teorie

Title: Linear ODEs with singular terms

Author: David Žárský

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In this text we focus on systems of two linear ordinary differential equations wherein some of the coefficients are no longer integrable functions, but signed Radon measures instead. First we devote our attention to measure theory and generalized notion of derivative. Then we prove that the studied system has a unique solution (in a defined sense) and that analogous versions of known theorems such as Liouville's formula or variation of parameters still hold. This allows us to study various problems connected with more general second-order linear equations and compare the derived results with classical theory. In particular, we will consider the Sturm Comparison Theorem, Sturm-Liouville theory and Floquet theory (systems with periodic coefficients).

Keywords: system of ODEs, singular terms, linear theory

Obsah

Seznam nejčastěji použitého značení

- $AC([a, b])\dots$ prostor absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, vizte Definici 1,
- $C([a, b])\dots$ prostor spojitých funkcí na intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ se standardní normou $||f||_{C([a,b])} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$, není-li řečeno jinak,
- $\mathcal{B}(X)\dots$ borelovská σ-algebra na $X \subseteq \mathbb{R}$ vzhledem k eukleidovské topologii, vizte Definici 3,
- $L^p(X, \mathcal{S}, \mu)\dots$ prostor všech $\mathcal{S}$-měřitelných funkcí, pro které je číslo

$$\begin{array}{lr} \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty), \\ \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ pro } \mu\text{-skoro všechna } x \in X\}, & p = \infty \end{array}$$

  značené jako $||f||_{L^p(X,\mathcal{S},\mu)}$ konečné. Je-li z kontextu jasné, na jaké σ-algebře $\mathcal{S}$ pracujeme, píšeme zkráceně $L^p(X, \mu)$ nebo dokonce $L^p(X)$, pokud je μ Lebesgueova míra,
- $|\mu|\dots$ variace znaménkové míry μ, vizte Definici 13,
- μ^+, $\mu^-\dots$ kladná a záporná část znaménkové míry μ, vizte Lemma 17,
- $f(x)\, d\mu(x)\dots$ znaménková míra s hustotou f vzhledem ke znaménkové míře μ, vizte Lemma 18,
- $\mathcal{M}(X)\dots$ prostor všech znaménkových měr na $\mathcal{B}(X)$, kde $X \subseteq \mathbb{R}$, vizte Lemma 19 a Definici 15,
- $Df\dots$ měrová derivace funkce f, vizte Definici 16, Lemma 21 a poznámku ihned za ním,
- $BV(a, b)\dots$ prostor funkcí s konečnou variací na omezeném intervalu $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, vizte Definici 17,
- $BPV([a, b])\dots$ prostor funkcí s konečnou bodovou variací na intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, vizte Definici 18,
- $\mu_f\dots$ přírůstková derivace funkce f, vizte Větu 4.

Úvod

Předpokládejme, že na intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ řešíme soustavu

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t), \\ y'(t) &= c_3(t)x(t) + c_4(t)y(t) + h(t), \\ (x(a), y(a)) &= (x_0, y_0) \end{aligned}$$

pro neznámé funkce x, $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, kde c_1, c_2, c_3, c_4, g, $h \in C([a, b])$ jsou pevně dané funkce a x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$ jsou pevně daná čísla. Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic víme, že dvojice x, $y \in C^1([a, b])$ řeší tuto soustavu právě tehdy, když jsou pro všechna $t \in [a, b]$ splněny integrální rovnice

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_a^t c_1(s)x(s)\,ds + \int_a^t c_2(s)y(s)\,ds + \int_a^t g(s)\,ds, \\ y(t) &= y_0 + \int_a^t c_3(s)x(s)\,ds + \int_a^t c_4(s)y(s)\,ds + \int_a^t h(s)\,ds. \end{aligned}$$

Dále víme, že existuje právě jedna dvojice x, $y \in C^1([a, b])$ řešící tyto rovnice.

Carathéodoryho teorie řešení nám říká, že pokud v předchozím požadujeme pouze c_1, c_2, c_3, c_4, g, $h \in L^1([a, b])$, tak existuje právě jedna dvojice funkcí x, $y \in AC([a, b])$ řešící uvedené integrální rovnice, kde $AC([a, b])$ značí množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$. To je navíc ekvivalentní tomu, že rovnice

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t), \\ y'(t) &= c_3(t)x(t) + c_4(t)y(t) + h(t) \end{aligned}$$

jsou splněny pro skoro všechna $t \in [a, b]$.

Všimněme si, že pokud pro $c_1 \in L^1([a, b])$ definujeme Radonovu znaménkovou míru ρ_{c_1} předpisem $\rho_{c_1}(A) := \int_A c_1(s)\,ds$ a obdobně pro míry ρ_{c_2}, ρ_{c_3}, ρ_{c_4}, ρ_g, ρ_h, tak lze integrální rovnice výše zapsat jako

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_a^t x(s)\,d\rho_{c_1}(s) + \int_a^t y(s)\,d\rho_{c_2}(s) + \int_a^t d\rho_g(s), \\ y(t) &= y_0 + \int_a^t x(s)\,d\rho_{c_3}(s) + \int_a^t y(s)\,d\rho_{c_4}(s) + \int_a^t d\rho_h(s). \end{aligned}$$

Všechny míry v těchto rovnicích jsou poměrně „hezké“, konkrétně tzv. *absolutně spojité vzhledem k Lebesgueově míře*, což znamená, že pokud je $\lambda(A) = 0$, tak nutně i $\rho_{c_1}(A) = 0$ (a stejně pro ρ_{c_2}, ρ_{c_3}, ρ_{c_4}, ρ_g, ρ_h), kde λ značí Lebesgueovu míru. Přirozeně se nabízí otázka, co se stane, když některá z měr již nebude absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře, ale bude to obecná Radonova znaménková míra. Taková míra může na rozdíl od předchozích přiřadit nenulové číslo i jednobodové množině, a tak nelze čekat, že by si řešení zachovalo stejnou kvalitu. Má v takovém případě ještě vůbec smysl hovořit o bodové derivaci, nebo je potřeba použít obecnější pojem derivace? Které z měr lze uvažovat jako obecné

Radonovy znaménkové míry, aby pak stále platily základní věty jako jednoznačnost řešení, Liouvilleova formule nebo variace konstant?

V následujícím textu ukážeme, že pokud jsou ρ_{c_3} a ρ_h obecné Radonovy znaménkové míry, tak existuje právě jedna dvojice $(x, y) \in AC([a, b]) \times BV((a, b))$ řešící příslušné integrální rovnice, které jsou navíc opět ekvivalentní jistým rovnicím pro derivace. Zatímco u funkce x půjde stále o derivaci bodovou, funkce y již nově nepatří do prostoru $AC([a, b])$, ale do prostoru funkcí s konečnou variací na (a, b) značeného $BV((a, b))$, jejichž derivací je Radonova znaménková míra. Prostor funkcí s konečnou variací má však dvě různé definice, které dávají vzniknout dvěma náhledům na derivaci jakožto znaménkovou míru, čemuž se budeme věnovat v první kapitole. Následně ukážeme, že řešení splňuje analogickou verzi základních vět z teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Na konkrétních příkladech také nahlédneme, že pokud dovolíme obecnější míru i jinde, tak už příslušné řešení nemusí některou ze známých vět splňovat.

Po odvození základní teorie tyto výsledky aplikujeme na vybrané problémy spojené s lineárními rovnicemi druhého řádu ve tvaru

$$x''(t) + P(t)x'(t) + Q(t)x(t) = 0,$$

kde $P \in L^1([a, b])$, ale Q je Radonova znaménková míra. Rovnice tohoto typu se přirozeně objevují v mnohých fyzikálních aplikacích, vizte např. článek [8]. Pro rovnice druhého řádu konkrétně dokážeme analogii Sturmovy srovnávací věty a budeme zkoumat vlastnosti řešení obecnější Sturm-Liouvilleovy úlohy. Nakonec se vrátíme k soustavám a podíváme se na případ s periodickými koeficienty.

Poznamenejme, že zobecněním soustav lineárních obyčejných diferenciálních rovnic se ve větší obecnosti zabývá např. kapitola 8 ve skriptech [10]. Zatímco náš přístup je založen na použití znalostí ze základních kurzů teorie míry a funkcionální analýzy, uvedená skripta se teorii míry vyhýbají a namísto toho používají méně známý typ integrálu nazývaný Kurzweil-Stieltjesův integrál.

1. Pomocné definice, tvrzení a značení

V této úvodní kapitole zavedeme pojmy, s nimiž budeme dále v textu pracovat, a připomeneme nebo dokážeme užitečná tvrzení, která pro tyto pojmy platí.

1.1 Absolutně spojité funkce

Definice 1. *Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Řekneme, že funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[a,b]$* ***absolutně spojitá****, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý konečný systém $\{(a_i,b_i) \subseteq [a,b] : i = 1,\dots,n\}$ po dvou disjunktních intervalů splňujících $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ platí $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$. Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme $AC([a,b])$.*

Věta 1. (Charakterizace AC funkcí). *Nechť $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní.*

(a) $f \in AC([a,b])$.

(b) Ve skoro všech $t \in [a,b]$ existuje vlastní $f'(t)$, $f' \in L^1([a,b])$ a platí

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b].$$

(c) Existuje funkce $g \in L^1([a,b])$ taková, že

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b],$$

neboli funkce f je tzv. neurčitý Lebesgueův integrál funkce g. V takovém případě pak navíc $f'(t) = g(t)$ pro s.v. $t \in [a,b]$.

Důkaz. Plyne z tvrzení v [7, sekce 15.4].

□

Lemma 1. *Nechť f, $g \in AC([a,b])$. Potom*

(a) $fg \in AC([a,b])$ a pro s.v. $t \in [a,b]$ je $(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \in \mathbb{R}$,

(b) pokud $g(t) \neq 0$ pro všechna $t \in [a,b]$, tak $\frac{1}{g} \in AC([a,b])$ a pro s.v. $t \in [a,b]$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)} \in \mathbb{R},$$

(c)

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [fg]_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Důkaz. Body (a) a (b) jsou důsledky Věty 1. Část (c) lze nalézt v [7, sekce 15.4].

□

1.2 Teorie míry a integrálu

Následující definice a tvrzení jsou povětšinou převzata z textu [5], a tak nebude-li řečeno jinak, příslušný důkaz lze nalézt v tomto zdroji. Alternativou může být též kniha [4].

Definice 2. *Systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá **σ-algebra** na X, pokud platí*

(a) $\emptyset \in \mathcal{S}$,

(b) $A \in \mathcal{S} \implies X \setminus A \in \mathcal{S}$,

(c) $\{A_j : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}$.

*Řekneme, že dvojice $(X, \mathcal{S})$ je **měřitelný prostor**, pokud X je množina a $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X. Prvky systému $\mathcal{S}$ pak nazýváme **$\mathcal{S}$-měřitelné množiny**.*

Definice 3. *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor. Nejmenší (vzhledem k inkluzi) σ-algebru $\mathcal{S}$ na X splňující $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ nazveme **borelovskou σ-algebrou** na $(X, \mathcal{T})$ a značíme ji $\mathcal{B}(X, \mathcal{T})$. Je-li z kontextu jasné, jakou topologii na X uvažujeme, tak budeme používat zkrácené značení $\mathcal{B}(X)$. Prvkům $\mathcal{B}(X, \mathcal{T})$ říkáme **borelovské množiny**.*

Je známým faktem, že v definici borelovské σ-algebry lze místo otevřených množin uvažovat uzavřené množiny a dostaneme totéž.

Nebude-li řečeno jinak, tak budeme dále na $\mathbb{R}$ uvažovat vždy eukleidovskou topologii $\mathcal{T}_e$ a na jakékoliv podmnožině $X \subseteq \mathbb{R}$ budeme uvažovat topologii podprostoru zděděnou z $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.

Lemma 2. *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffův σ-kompaktní topologický prostor, tj. existují kompaktní množiny $K_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Potom $\mathcal{B}(X, \mathcal{T})$ je rovna nejmenší σ-algebře na X obsahující všechny kompaktní podmnožiny X, kterou označme $\mathcal{K}(X, \mathcal{T})$.*

Důkaz. Místo $\mathcal{K}(X, \mathcal{T})$ a $\mathcal{B}(X, \mathcal{T})$ budeme zkráceně psát $\mathcal{K}$ a $\mathcal{B}$.

$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$: Nechť $K \subseteq X$ je kompaktní. Jelikož $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffův, K je uzavřená, z čehož plyne, že $K \in \mathcal{B}$. Tedy $\mathcal{B}$ je σ-algebra obsahující všechny kompaktní podmnožiny X, a tudíž i celé $\mathcal{K}$.

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}$: Nechť $F \subseteq X$ je uzavřená a položme $F_n = F \cap K_n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom každá F_n je uzavřená (jakožto průnik dvou uzavřených množin) a je to podmnožina kompaktu K_n, tudíž je kompaktní. Navíc $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, tj. F je spočetným sjednocením prvků $\mathcal{K}$. Jelikož $\mathcal{K}$ je z definice uzavřená na spočetná sjednocení, tak $F \in \mathcal{K}$. Tedy $\mathcal{K}$ je σ-algebra obsahující všechny uzavřené podmnožiny X, a tudíž i $\mathcal{B}$.

$\square$

Lemma 3. *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je omezený interval. Potom $\mathcal{B}(I) = \mathcal{K}(I)$.*

Důkaz. Každý metrický prostor je Hausdorffův, a tak zbývá ukázat, že I je σ-kompaktní. Nechť $a < b$ jsou krajní body intervalu I. Potom σ-kompaktnost plyne z rovností

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{3n}, b - \frac{b-a}{3n}\right]$$
$$[a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a, b - \frac{b-a}{3n}\right]$$
$$(a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{3n}, b\right]$$

a toho, že $[a,b]$ je kompaktní.

□

Definice 4. *Nechť $(X,\mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Zobrazení $\mu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ se nazývá **míra** na $\mathcal{S}$, pokud splňuje*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) pro každý systém $\{A_j \in \mathcal{S} : j \in \mathbb{N}\}$ po dvou disjunktních množin platí

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

*Trojici $(X,\mathcal{S},\mu)$ pak nazveme **prostor s mírou**.*

Definice 5. *Nechť $(X,\mathcal{S},\mu)$ je prostor s mírou a nechť je na X dána topologie $\mathcal{T}$. Řekneme, že μ je*

*(a) **borelovská**, pokud $\mathcal{S} = \mathcal{B}(X,\mathcal{T})$;*

*(b) **spojitá v bodě** $x \in X$, pokud $\{x\} \in \mathcal{S}$ a $\mu(\{x\}) = 0$;*

*(c) **spojitá**, pokud je spojitá v každém bodě $x \in X$;*

*(d) **úplná**, jestliže pro každou $A \in \mathcal{S}$ splňující $\mu(A) = 0$ platí implikace*

$$B \subseteq A \implies (B \in \mathcal{S} \wedge \mu(B) = 0);$$

*(e) **konečná**, pokud $\mu(X) < \infty$;*

*(f) **těsná**, pokud $(X,\mathcal{T})$ je Hausdorffův prostor, $\mathcal{K}(X,\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{S}$ a pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ je kompaktní}\}$;*

*(g) **Radonova**, jestliže $(X,\mathcal{T})$ je Hausdorffův lokálně kompaktní prostor a platí následující podmínky:*

(i) je-li $K \subseteq X$ kompaktní, tak $K \in \mathcal{S}$ a $\mu(K) < \infty$,

(ii) μ je těsná.

Definice 6. *Nechť μ je míra na $\mathcal{S}$ a ν je míra na $\mathcal{S}'$. Řekneme, že $(\nu,\mathcal{S}')$ **rozšiřuje** $(\mu,\mathcal{S})$, pokud $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ a $\mu(A) = \nu(A)$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. Naopak řekneme, že $(\nu,\mathcal{S}')$ **zužuje** $(\mu,\mathcal{S})$, pokud $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ a $\mu(A) = \nu(A)$ pro každou $A \in \mathcal{S}'$.*

Lemma 4. *Nechť $(X,\mathcal{S},\mu)$ je prostor s mírou a nechť je na X dána metrika. Nechť μ je konečná borelovská (vůči dané metrice) a X je σ-kompaktní. Potom μ je těsná.*

Důkaz. Jde o důsledek věty [9, str. 342, Věta 16.83].

□

Lemma 5. *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je omezený interval a $(I, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Pokud μ je konečná borelovská, tak už je Radonova. Naopak je-li μ konečná Radonova, tak $\mathcal{B}(I) \subseteq \mathcal{S}$ a když μ zúžíme na $\mathcal{B}(I)$, dostaneme konečnou borelovskou míru.*

Důkaz. Nechť μ je konečná borelovská míra a $K \subseteq I$ je kompaktní. Každá kompaktní množina v metrickém prostoru je uzavřená, tudíž i borelovská. Jelikož μ je z předpokladu borelovská, tak $K \in \mathcal{B}(I) = \mathcal{S}$. Navíc μ je konečná, a tak $\mu(K) \leq \mu(I) < \infty$, čímž je ověřena podmínka (i) z definice Radonovy míry. Z důkazu Lemmatu 3 plyne, že I je σ-kompaktní, a tak je μ díky Lemmatu 4 těsná, tj. splňuje i podmínku (ii) z definice Radonovy míry. Tudíž μ je Radonova.

Nyní nechť μ je konečná Radonova míra. Jelikož každá kompaktní podmnožina I je z definice $\mathcal{S}$-měřitelná, tak nutně $\mathcal{K}(I) \subseteq \mathcal{S}$. Díky Lemmatu 3 pak platí $\mathcal{B}(I) = \mathcal{K}(I) \subseteq \mathcal{S}$. Zúžíme-li μ na $\mathcal{B}(I)$, tak jde přímo z definice o borelovskou míru a zúžení konečné míry je konečná míra.

□

Definice 7. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, $D \in \mathcal{S}$. Funkce $f : D \to \mathbb{R}$ se nazývá **$\mathcal{S}$-měřitelná** na D, pokud pro každý interval $I \subset \mathbb{R}$ platí $f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$, kde $f^{-1}(I)$ značí vzor množiny I při zobrazení f. Je-li $D = X$, tak zkráceně řekneme, že f je **$\mathcal{S}$-měřitelná**.*

*Nechť μ je míra na $\mathcal{S}$, $D' \subseteq X$. Potom řekneme, že $f : D' \to \mathbb{R}$ je **μ-měřitelná** na $D \in \mathcal{S}$, jestliže existuje $D'' \in \mathcal{S}$, $D'' \subseteq D'$ taková, že $\mu(D \setminus D'') = 0$ a f je $\mathcal{S}$-měřitelná na D''. Je-li $D = X$, tak zkráceně řekneme, že f je **μ-měřitelná**.*

Poznamenejme, že pokud $f : D \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{S}$-měřitelná na $D \in \mathcal{S}$, tak i funkce f^+, f^- definované předpisem $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ a $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ jsou $\mathcal{S}$-měřitelné na D a platí $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Obdobně pro μ-měřitelnost.

Definice 8. *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor. Funkce $f : X \to \mathbb{R}$ se nazývá **borelovská**, pokud pro každý interval $I \subset \mathbb{R}$ platí $f^{-1}(I) \in \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$.*

Lemma 6. *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor a $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom f je borelovská.*

Definice 9. *Nechť $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory a $f : X \to Y$. Řekneme, že funkce f je **$\mathcal{S} - \mathcal{T}$ měřitelná**, jestliže pro každé $E \in \mathcal{T}$ je $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$.*

Lemma 7. *Nechť $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory a $f : X \to Y$. Nechť $\mathcal{G}$ je soubor podmnožin množiny Y a $\mathcal{T}$ je nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{G}$. Potom f je $\mathcal{S} - \mathcal{T}$ měřitelná právě tehdy, když pro každé $E \in \mathcal{G}$ platí $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$.*

Lemma 8. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $(Y, \mathcal{T})$ je měřitelný prostor a $f : X \to Y$ je $\mathcal{S} - \mathcal{T}$ měřitelná funkce. Potom zobrazení $f(\mu) : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ definované předpisem*

$$f(\mu)(E) := \mu(f^{-1}(E)), \quad E \in \mathcal{T}$$

*je míra, která se nazývá **obraz μ při zobrazení** f.*

Lemma 9. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $(Y, \mathcal{T})$ je měřitelný prostor a $f : X \to Y$ je $\mathcal{S} - \mathcal{T}$ měřitelná funkce. Potom pro každou $\mathcal{T}$-měřitelnou funkci $u : Y \to \mathbb{R}$ platí*

$$\int_Y u(y)\, df(\mu)(y) = \int_X u(f(x))\, d\mu(x),$$

má-li aspoň jeden z integrálů smysl (tj. může být i nekonečný).

Lemma 10. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $f : X \to [0, \infty)$ je nezáporná μ-měřitelná funkce. Definujme zobrazení $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ předpisem*

$$\nu(A) = \int_A f(x)\, d\mu(x), \quad A \in \mathcal{S}.$$

*Potom ν je míra, která se nazývá **míra s hustotou** f **vzhledem k** μ. Funkce f se pak nazývá **hustota míry** ν **vzhledem k** μ. Skutečnost, že míra ν je míra s hustotou f vzhledem k μ, budeme zkráceně psát jako $d\nu(x) = f(x)\, d\mu(x)$.*

Následující lemma ukazuje, proč volíme zrovna zápis $d\nu(x) = f(x)\, d\mu(x)$.

Lemma 11. *Nechť μ, ν jsou konečné míry na σ-algebře $\mathcal{S}$ a f je hustota míry ν vzhledem k μ. Potom pro každou μ-měřitelnou funkci g na $A \in \mathcal{S}$ platí*

$$\int_A g(x)\, d\nu(x) = \int_A g(x) f(x)\, d\mu(x),$$

pokud má aspoň jeden z integrálů smysl.

Lemma 12. (Spojitost integrálu). *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $f \in L^1(X, \mathcal{S}, \mu)$. Potom pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že*

$$(A \in \mathcal{S} \wedge \mu(A) < \delta) \implies \int_A |f(x)|\, d\mu(x) < \epsilon.$$

Lemma 13. *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je omezený interval a $(I, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s konečnou Radonovou mírou. Potom pro každé $p \in [1, \infty)$ je prostor $L^p(I, \mu)$ separabilní.*

Důkaz. Nechť $p \in [1, \infty)$. Podle [5, str. 39, Věta 17.7] (v tomto zdroji symbol $L^p(X)$ znamená $L^p(X, \mu)$) jsou jednoduché funkce husté v $L^p(I, \mu)$, přičemž funkce se nazývá jednoduchá, pokud je lineární kombinací charakteristických funkcí $\mathcal{S}$-měřitelných množin.

Nechť $E \in \mathcal{S}$. Podle Lemmatu 5 platí $\mathcal{B}(I) \subseteq \mathcal{S}$ a z Definice 5 je μ těsná. Díky [9, str. 341, Lemma 16.79] pak pro každé $\epsilon > 0$ existuje otevřená množina G taková, že $E \subseteq G \subseteq I$ a $\mu(G \setminus E) < \epsilon$. Potom

$$\int_I |\chi_G(x) - \chi_E(x)|^p\, d\mu(x) = \int_{G \setminus E} d\mu(x) = \mu(G \setminus E) < \epsilon.$$

Dle [7, str. 535, Věta 10.3.20] je každá otevřená $G \subseteq I$ rovna spočetnému sjednocení po dvou disjunktních otevřených intervalů $I_n \subseteq I$, $n \in \mathbb{N}$. Podle Leviho věty ([5, str. 11, Důsledek 4.14]) pak

$$\int_I \chi_G(x)\, d\mu(x) = \int_G 1\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} 1\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I \chi_{I_n}(x)\, d\mu(x).$$

Tudíž existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že (díky disjunktnosti I_n)

$$\int_I |\chi_G(x) - (\chi_{I_1}(x) + \ldots + \chi_{I_N}(x))|^p \, d\mu(x) = \int_I \chi_G(x) \, d\mu(x) -$$
$$- \sum_{n=1}^{N} \int_I \chi_{I_n}(x) \, d\mu(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_I \chi_{I_n}(x) \, d\mu(x) < \epsilon.$$

Odsud plyne, že množina všech lineárních kombinací charakteristických funkcí otevřených intervalů ležících v I je hustá v $L^p(I,\mu)$. Nechť $J \subseteq I$ je otevřený interval a $\overline{I}$ značí uzávěr I v $\mathbb{R}$. Potom existují spojité funkce $f_n : \overline{I} \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f_n(x) \to \chi_J(x)$ pro každé $x \in I$. Díky [5, str. 15, Věta 6.2] s majorantou 1 (konstantní funkce s hodnotou 1) platí (spojité funkce jsou borelovské, a tedy μ-měřitelné)

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |\chi_J(x) - f_n(x)|^p \, d\mu(x) = 0,$$

a tudíž prostor $C(\overline{I})$ je hustý v $L^p(I,\mu)$.

Podle [9, str. 6, Věta 1.26] je $C(\overline{I})$ separabilní jakožto metrický prostor s metrikou $\rho(f,g) := \sup_{x\in\overline{I}} |f(x) - g(x)|$. Nechť $f \in C(\overline{I})$ a D je spočetná hustá množina v $(C(\overline{I}),\rho)$. Pro každé $\epsilon > 0$ pak existuje $g \in D$ taková, že

$$\sup_{x\in\overline{I}} |f(x) - g(x)| < \epsilon^{(1/p)}.$$

Potom však

$$\int_I |f(x) - g(x)|^p \, d\mu(x) \le \epsilon \cdot \mu(I),$$

a tedy D je spočetná hustá podmnožina $L^p(I,\mu)$.

□

Lemma 14. *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je omezený interval a $(I,\mathcal{S},\mu)$ je prostor s konečnou Radonovou mírou. Nechť $p \in [1,\infty)$, $h \in L^p(I,\mu)$ a pro každý otevřený interval $J \subseteq I$ platí*

$$\int_J h(x) \, d\mu(x) = 0.$$

Potom $h = 0$ μ-skoro všude.

Důkaz. Nechť pro spor h není μ-skoro všude nulová. Nechť $G \subseteq I$ je otevřená a $\{I_n \subseteq I : n \in \mathbb{N}\}$ je soubor po dvou disjunktních otevřených intervalů splňující

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Potom pro každé $x \in I$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(x)\chi_{I_n}(x) = h(x)\chi_G(x).$$

Pro každé $N \in \mathbb{N}$ a každé $x \in I$ navíc

$$\left| \sum_{n=1}^{N} h(x)\chi_{I_n}(x) \right| \le |h(x)|$$

a $|h|$ je díky $h \in L^p(I,\mu)$, konečnosti μ a Hölderově nerovnosti μ-integrovatelná. Podle [5, str. 15, Důsledek 6.3] tak

$$\int_G h(x)\,d\mu(x) = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} h(x)\chi_{I_n}(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I h(x)\chi_{I_n}(x)\,d\mu(x) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} h(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Nechť $E \in \mathcal{S}$ a $\epsilon > 0$. Ze spojitosti integrálu (Lemma 12) plyne existence $\delta > 0$ splňujícího

$$(A \in \mathcal{S} \wedge \mu(A) < \delta) \implies \int_A |h(x)|\,d\mu(x) < \epsilon.$$

Podle [9, str. 341, Lemma 16.79] navíc existuje otevřená $G \subseteq I$ taková, že $E \subseteq G$ a $\mu(G \setminus E) < \delta$. Potom pro každé $\epsilon > 0$

$$\left|\int_E h(x)\,d\mu(x)\right| = \left|\int_G h(x)\,d\mu(x) - \int_{G\setminus E} h(x)\,d\mu(x)\right| = \left|\int_{G\setminus E} h(x)\,d\mu(x)\right| \leq \\ \leq \int_{G\setminus E} |h(x)|\,d\mu(x) < \epsilon,$$

a tedy $\int_E h(x)\,d\mu(x) = 0$ pro každou $E \in \mathcal{S}$. Označíme-li $E_+ = h^{-1}((0,\infty))$, $E_- = h^{-1}((-\infty,0))$, tak díky měřitelnosti h je E_+, $E_- \in \mathcal{S}$. Jelikož h není μ-skoro všude nulová, tak nutně $\mu(E_+) > 0$ nebo $\mu(E_-) > 0$. Bez újmy na obecnosti nechť $\mu(E_+) > 0$. Potom ale $\int_{E_+} h(x)\,d\mu(x) > 0$, což je spor.

□

Lemma 15. *Nechť $(X,\mathcal{S},\mu)$ je prostor s mírou. Definujme*

$$\overline{\mathcal{S}} := \{E \subseteq X : \exists\, E_*, E^* \in \mathcal{S} \text{ splňující } E_* \subseteq E \subseteq E^* \text{ a } \mu(E^* \setminus E_*) = 0\}, \\ \overline{\mu}(E) := \mu(E_*) = \mu(E^*),\ \ E \in \overline{\mathcal{S}}.$$

Potom $\overline{\mathcal{S}}$ je σ-algebra, $\overline{\mu}$ je úplná míra na $\overline{\mathcal{S}}$ a $(\overline{\mu},\overline{\mathcal{S}})$ rozšiřuje $(\mu,\mathcal{S})$. Navíc $\overline{\mu}$ je nejužší rozšíření μ na úplnou míru v tom smyslu, že pokud $(\nu,\mathcal{T})$ rozšiřuje $(\mu,\mathcal{S})$ a ν je úplná, tak $\overline{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}$ a $\nu(A) = \overline{\mu}(A)$ pro každou $A \in \overline{\mathcal{S}}$, neboli $(\nu,\mathcal{T})$ rozšiřuje $(\overline{\mu},\overline{\mathcal{S}})$.

Definice 10. *Nechť $(X,\mathcal{S},\mu)$ je prostor s mírou. Dvojici $(\overline{\mu},\overline{\mathcal{S}})$ definovanou v předchozím lemmatu nazveme* ***zúplněním*** *$(\mu,\mathcal{S})$.*

Definice 11. *Nechť $(X,\mathcal{S})$, $(Y,\mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory. Označme*

$$\mathcal{S} \times \mathcal{T} = \{A \times B \subseteq X \times Y : A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}\}.$$

Symbolem $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ budeme značit nejmenší σ-algebru na $X \times Y$ obsahující $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$.

Lemma 16. *Nechť $(X,\mathcal{S},\mu)$, $(Y,\mathcal{T},\nu)$ jsou prostory s konečnou mírou. Potom existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ taková, že*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad A \in \mathcal{S},\ B \in \mathcal{T}.$$

Věta 2. (Fubiniho věta). *Nechť* $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ *jsou prostory s konečnou úplnou mírou. Nechť* f *je* $(\overline{\mu \otimes \nu})$*-měřitelná funkce na* $(\overline{\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}})$*-měřitelné množině* $M \subseteq X \times Y$*. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x, y)\, d(\overline{\mu \otimes \nu})(x, y)$$

má smysl (tedy může být i nekonečný). Označme

$$\begin{aligned} M^{x,*} &= \{y \in Y : (x, y) \in M\}, \;\; x \in X, \\ M^{*,y} &= \{x \in X : (x, y) \in M\}, \;\; y \in Y. \end{aligned}$$

Potom má pro μ*-skoro všechna* x *smysl integrál*

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y)\, d\nu(y),$$

g *je* μ*-měřitelná a také má smysl integrál*

$$\int_X g(x)\, d\mu(x).$$

Obdobně má pro ν*-skoro všechna* y *smysl integrál*

$$h(y) := \int_{M^{*,y}} f(x, y)\, d\mu(x),$$

h *je* ν*-měřitelná a má smysl integrál*

$$\int_Y h(y)\, d\nu(y).$$

Navíc platí

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_{M^{x,*}} f(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) &= \int_M f(x, y)\, d(\overline{\mu \otimes \nu})(x, y) = \\ &= \int_Y \left(\int_{M^{*,y}} f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned}$$

Definice 12. *Nechť* $(X, \mathcal{S})$ *je měřitelný prostor. Zobrazení* $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ *se nazývá* ***znaménková míra*** *na* $\mathcal{S}$*, pokud splňuje*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$*,*

(b) pro každý systém $\{A_j \in \mathcal{S} : j \in \mathbb{N}\}$ *po dvou disjunktních množin platí*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Trojici $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *pak nazveme* ***prostor se znaménkovou mírou****.*

Oproti definici míry nepřipouštíme, aby znaménková míra nabývala hodnotu $\pm\infty$, ačkoliv bychom mohli. V tomto textu si však vystačíme se znaménkovými měrami s hodnotami v $\mathbb{R}$.

Definice 13. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor se znaménkovou mírou. Zobrazení $|\mu| : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ nazývané **variace** μ definujeme předpisem*

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| : A_j \in \mathcal{S} \text{ po dvou disjunktní}, \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq A \right\}, A \in \mathcal{S}.$$

.

Lemma 17. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor se znaménkovou mírou. Potom $|\mu|$ je konečná míra na $\mathcal{S}$. Navíc existuje jednoznačně určená dvojice konečných měr μ^+, μ^- na $\mathcal{S}$ taková, že pro každou $A \in \mathcal{S}$ platí*

$$\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A),$$
$$|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A).$$

*Míra μ^+ se nazývá **kladná část** μ, míra μ^- se nazývá **záporná část** μ a rozklad $\mu = \mu^+ - \mu^-$ se nazývá **Jordanův rozklad** μ.*

Definice 14. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor se znaménkovou mírou a $\mu = \mu^+ - \mu^-$ je její Jordanův rozklad. Nechť je na X dána topologie $\mathcal{T}$. Řekneme, že μ je*

*(a) **borelovská**, pokud $\mathcal{S} = \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$;*

*(b) **Radonova**, jestliže μ^+ a μ^- jsou Radonovy.*

Nechť $D \in \mathcal{S}$ a $f : D \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{S}$-měřitelná na D. Potom definujeme

$$\int_D f(x)\, d\mu(x) = \int_D f(x)\, d\mu^+(x) - \int_D f(x)\, d\mu^-(x),$$

pokud má rozdíl na pravé straně smysl.

Lemma 18. *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je omezený interval, $(I, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s Radonovou znaménkovou mírou a $f \in L^1(I, \mathcal{S}, |\mu|)$. Definujme $\nu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ předpisem $\nu(A) = \int_A f(x)\, d\mu(x), A \in \mathcal{S}$. Potom ν je Radonova znaménková míra na $\mathcal{S}$ a*

$$d\nu^+(x) = f^+(x)\, d\mu^+(x) + f^-(x)\, d\mu^-(x),$$
$$d\nu^-(x) = f^-(x)\, d\mu^+(x) + f^+(x)\, d\mu^-(x),$$
$$d|\nu|(x) = |f(x)|\, d|\mu|(x).$$

*Zobrazení ν nazveme **(znaménkovou) mírou s hustotou** f **vzhledem k** μ a značíme $d\nu(x) = f(x)\, d\mu(x)$. Funkci f pak nazveme **hustotou** ν **vzhledem k** μ.*

Je-li navíc $g \in L^1(I, \mathcal{S}, |\nu|)$, tak pro každou $A \in \mathcal{S}$ platí

$$\int_A g(x)\, d\nu(x) = \int_A g(x) f(x)\, d\mu(x).$$

Důkaz. Podle Lemmatu 10 jsou zobrazení ν^+ a ν^- definovaná předpisem jako ve znění dokazovaného tvrzení míry na $\mathcal{S}$. Jelikož z $f \in L^1(I, \mathcal{S}, |\mu|)$ plyne $f \in L^1(I, \mathcal{S}, \mu^+)$ a $f \in L^1(I, \mathcal{S}, \mu^-)$ (a tudíž totéž platí i pro f^+ a f^-), tak jsou to navíc míry konečné. Jejich rozdíl je tudíž znaménková míra na $\mathcal{S}$. Nechť $A \in \mathcal{S}$. Potom díky konečnosti všech integrálů platí

$$\begin{aligned}\nu^+(A) - \nu^-(A) &= \int_A f^+(x)\, d\mu^+(x) + \int_A f^-(x)\, d\mu^-(x) - \int_A f^-(x)\, d\mu^+(x) - \\ &- \int_A f^+(x)\, d\mu^-(x) = \int_A \Big(f^+(x) - f^-(x)\Big)\, d(\mu^+ - \mu^-)(x) = \\ &= \int_A f(x)\, d\mu(x) = \nu(A).\end{aligned}$$

Tedy ν je skutečně znaménková míra a $\nu^+ - \nu^-$ je její Jordanův rozklad. Analogickým výpočtem ověříme, že

$$\nu^+(A) + \nu^-(A) = \int_A \left(f^+(x) + f^-(x)\right)\, d(\mu^+ + \mu^-)(x) = \int_A |f(x)|\, d|\mu|(x),$$

a tudíž opravdu $d|\nu|(x) = |f(x)|\, d|\mu|(x)$.

Zbývá ukázat, že pokud je μ konečná Radonova míra a $f \in L^1(I, \mathcal{S}, \mu)$ je nezáporná, tak $d\nu(x) := f(x)\, d\mu(x)$ je Radonova (míra ν^+ ze znění lemmatu je totiž součtem dvou takových měr, stejně tak ν^-).

Jelikož μ je Radonova, tak pro každou kompaktní $K \subseteq I$ platí $K \in \mathcal{S}$. Dále

$$\nu(K) = \int_K f(x)\, d\mu(x) \leq \int_I f(x)\, d\mu(x) = \int_I |f(x)|\, d\mu(x) < \infty$$

díky $f \in L^1(I, \mathcal{S}, \mu)$, čímž je ověřena první podmínka z definice Radonovy míry.

Ze spojitosti integrálu (Lemma 12) plyne, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$(B \in \mathcal{S} \wedge \mu(B) < \delta) \implies \int_B f(x)\, d\mu(x) < \epsilon.$$

Nechť $A \in \mathcal{S}$, $\epsilon > 0$ jsou dány a $\delta > 0$ je příslušné δ ze spojitosti integrálu výše. Díky těsnosti μ existuje kompaktní $K \subseteq A$ taková, že $\mu(A \setminus K) < \delta$. Potom $\nu(A \setminus K) = \int_{A \setminus K} f(x)\, d\mu(x) < \epsilon$, čímž je ověřena i druhá podmínka z definice Radonovy míry.

Dodatek o funkci g snadno plyne z Lemmatu 11.

□

Lemma 19. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a označme jako $\mathcal{M}(X, \mathcal{S})$ množinu všech znaménkových měr na $\mathcal{S}$. Definujme $||\cdot||_{\mathcal{M}(X,\mathcal{S})} : \mathcal{M}(X, \mathcal{S}) \to [0, \infty)$ předpisem $||\mu||_{\mathcal{M}(X,\mathcal{S})} = |\mu|(X)$. Potom $||\cdot||_{\mathcal{M}(X,\mathcal{S})}$ je norma na $\mathcal{M}(X, \mathcal{S})$ a $\mathcal{M}(X, \mathcal{S})$ je s touto normou Banachův prostor.*

Dále jsou-li μ, $\nu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{S})$, tak pro všechna $A \in \mathcal{S}$ platí

$$|\mu + \nu|(A) \leq |\mu|(A) + |\nu|(A).$$

Důkaz. Lze nalézt v [9, str. 346, Věta 16.98].

□

Definice 15. *Nechť $X \subseteq \mathbb{R}$. Potom značíme $\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X))$.*

1.3 Funkce s konečnou variací

Pro potřeby pozdějších kapitol je zcela klíčové zadefinovat nový druh derivace, která už nebude definována bodově, ale stále si zachová nějakou z „nebodových“ vlastností klasické derivace. První možností je vyjít z integrace per partes. Nechť $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ a označme (zde i dále v textu) jako $\mathcal{D}((a, b))$ množinu všech funkcí třídy $C^\infty((a, b))$ s kompaktním nosičem v (a, b). Je-li $f \in C^1([a, b])$ a $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$, tak podle věty o integraci per partes platí

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\, dx = -\int_a^b f'(x)\varphi(x)\, dx.$$

Všimněme si, že $f'(x)\,dx$ je díky Lemmatu 18 Radonova znaménková míra. Předchozí vztah nás tak vybízí k tomu zadefinovat novou obecnější derivaci jako Radonovu znaménkovou míru Df splňující

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{(a,b)} \varphi(x)\,dDf(x)$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Takové derivaci budeme pro účely této práce říkat *měrová derivace* (častěji známá jako *distributivní derivace*).

Druhou možností je vyjít z tzv. Newton-Leibnizova vzorce, který říká, že pokud je $f \in C^1([a,b])$, tak pro každý podinterval $[c,d] \subseteq [a,b]$ platí

$$f(d) - f(c) = \int_c^d f'(x)\,dx.$$

Nabízí se tak zadefinovat novou derivaci jako Radonovu znaménkovou míru μ_f splňující pro každý podinterval $[c,d] \subseteq [a,b]$ vztah

$$f(d) - f(c) = \int_c^d d\mu_f(x).$$

Je ale potřeba rozhodnout, přes interval kterého typu integrovat. Jelikož obecná Radonova míra nemusí být v každém bodě spojitá, integrací např. přes intervaly (c,d) a $(c,d]$ můžeme dostat jiný výsledek.

I kvůli těmto dvěma náhledům na zobecněnou derivaci vznikají dvě různé definice pro funkci s konečnou variací. Nejprve se budeme věnovat měrové derivaci a z ní plynoucí definici funkce s konečnou variací a posléze se budeme zabývat derivací definovanou skrze Newton-Leibnizův vzorec, které budeme říkat *přírůstková derivace*. Poznamenejme, že ani termín *přírůstková derivace* není nijak rozšířený a jde jen o pojem zavedený pro potřeby této práce.

Definice 16. *Nechť $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ je omezený interval, $f \in L^1((a,b))$ a $((a,b),\mathcal{S},\mu)$ je prostor s Radonovou znaménkovou mírou. Řekneme, že μ je **měrová derivace** funkce f na (a,b), pokud pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ platí*

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{(a,b)} \varphi(x)\,d\mu(x). \tag{1.1}$$

Všimněme si, že podle Lemmatu 5 je každá měrová derivace funkce $f \in L^1((a,b))$ definovaná alespoň na $\mathcal{B}((a,b))$. Následující lemma nám pomůže k důkazu toho, že měrová derivace je v jistém smyslu určena jednoznačně.

Lemma 20. *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je omezený interval, $(I,\mathcal{S},\mu)$ je prostor s Radonovou mírou a $f : I \to \mathbb{R}$ je borelovská. Označme jako $\mu_{\mathcal{B}}$ zúžení μ na $\mathcal{B}(I)$. Potom pro každou $A \in \mathcal{B}(I)$ platí*

$$\int_A f(x)\,d\mu(x) = \int_A f(x)\,d\mu_{\mathcal{B}}(x),$$

pokud má aspoň jeden z integrálů smysl.

Důkaz. Z konstrukce integrálu podle obecné míry stačí ukázat, že tvrzení platí pro f nezápornou.

$\geq$: Podle definice integrálu je $\int_A f(x)\,d\mu(x)$ roven

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^n \alpha_j\mu(A_j) : \{A_1,\dots,A_n\} \text{ je rozklad } A,\ 0\leq \alpha_j \leq f \text{ na } A_j,\ j=1,\dots,n\right\},$$

přičemž soubor $\{A_1,\dots,A_n\}$ nazveme rozkladem množiny A, pokud $A_1,\dots,A_n$ jsou po dvou disjunktní prvky $\mathcal{S}$ splňující $A=\bigcup_{j=1}^n A_j$. Definice $\int_A f(x)\,d\mu_{\mathcal{B}}(x)$ je velmi podobná, jen musíme v předchozím změnit podmínku $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{S}$ na $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{B}(I)\subseteq\mathcal{S}$, neboli jedná se o supremum z menší množiny (vzhledem k inkluzi), tudíž nerovnost $\geq$ platí.

$\leq$: Nechť $\epsilon>0$. Podle definice integrálu existují $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{S}$ po dvou disjunktní množiny a $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ reálná čísla taková, že $A=\bigcup_{j=1}^n A_j$, $0\leq\alpha_j\leq f$ na A_j pro $j=1,\dots,n$ a

$$\int_A f(x)\,d\mu(x)-\sum_{j=1}^n\alpha_j\mu(A_j)<\frac{\epsilon}{2}.$$

Z těsnosti Radonovy míry pro každé $j=1,\dots,n$ existuje kompaktní $K_j\subseteq A_j$ taková, že $\mu(A_j)<\frac{\epsilon}{2n(1+\alpha_j)}+\mu(K_j)$. Označme $K:=\bigcup_{j=1}^n K_j\in\mathcal{B}(I)$. Potom $\{K_1,\dots,K_n\}\subseteq\mathcal{B}(I)$ je rozklad K a $0\leq\alpha_j\leq f$ na K_j pro každé $j=1,\dots,n$. Odsud dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n\alpha_j\mu(A_j)&=\sum_{j=1}^n\alpha_j\Big(\mu(A_j\setminus K_j)+\mu(K_j)\Big)\leq\sum_{j=1}^n\alpha_j\left(\frac{\epsilon}{2n(1+\alpha_j)}+\mu(K_j)\right)\leq\\&\leq\frac{\epsilon}{2}+\sum_{j=1}^n\alpha_j\mu(K_j)\leq\frac{\epsilon}{2}+\int_K f(x)\,d\mu_{\mathcal{B}}(x)\leq\frac{\epsilon}{2}+\int_A f(x)\,d\mu_{\mathcal{B}}(x),\end{aligned}$$

tudíž

$$\int_A f(x)\,d\mu(x)\leq\sum_{j=1}^n\alpha_j\mu(A_j)+\frac{\epsilon}{2}\leq\int_A f(x)\,d\mu_{\mathcal{B}}(x)+\epsilon$$

pro každé $\epsilon>0$, neboli skutečně $\int_A f(x)\,d\mu(x)\leq\int_A f(x)\,d\mu_{\mathcal{B}}(x)$.

□

Lemma 21. *Nechť $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ je omezený interval, $f\in L^1((a,b))$ a μ, ν jsou dvě měrové derivace f na (a,b). Potom $\mu_{\mathcal{B}}$, $\nu_{\mathcal{B}}$ definované jako v Lemmatu 20 jsou také měrové derivace f na (a,b) a $\mu_{\mathcal{B}}=\nu_{\mathcal{B}}$. Zúžení libovolné měrové derivace funkce f na borelovskou σ-algebru $B((a,b))$ budeme značit jako $Df\in\mathcal{M}((a,b))$ nebo $Df_{(a,b)}$, bude-li potřeba zdůraznit, na kterém intervalu pracujeme. Z předchozího plyne, že Df je určena jednoznačně.*

Důkaz. Snadno nahlédneme, že zúžení Radonovy znaménkové míry na borelovskou σ-algebru $\mathcal{B}((a,b))$ je Radonova znaménková míra. Nechť $\varphi\in\mathcal{D}((a,b))$. Potom φ je spojitá, a tedy i borelovská. Navíc $(a,b)\in\mathcal{B}((a,b))$. Použitím předchozího Lemmatu 20 na míry μ^+ a μ^- dostaneme, že platí

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx=-\int_{(a,b)}\varphi(x)\,d\mu(x)=-\int_{(a,b)}\varphi(x)\,d\mu_{\mathcal{B}}(x),$$

neboli $\mu_{\mathcal{B}}$ je měrová derivace f na (a,b).

Rovnost $\mu_{\mathcal{B}} = \nu_{\mathcal{B}}$ plyne z [9, str. 87, Lemma 6.1].

$\square$

Kdykoliv budeme dále v textu mluvit o měrové derivaci funkce f, budeme mít na mysli tuto jednoznačně určenou znaménkovou míru Df.

Zamysleme se nyní nad tím, proč jsou požadavky na kvalitu měrové derivace poměrně přirozené. Ze vztahu (1.1) plyne, že každá $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ musí být $\mathcal{S}$-měřitelná. Jelikož jde o spojitou, a tudíž borelovskou funkci, tak lze měřitelnost všech těchto funkcí zajistit tím, že $\mathcal{B}((a,b)) \subseteq \mathcal{S}$. Pokud bychom požadovali přímo $\mathcal{S} = \mathcal{B}((a,b))$, tak by měrová derivace byla borelovská, díky Lemmatu 21 jednoznačně určená a podle Lemmatu 5 dokonce Radonova. Pokud požadujeme obecnější podmínku $\mathcal{B}((a,b)) \subseteq \mathcal{S}$, tak už může teoreticky existovat větší množství měrových derivací téže funkce. Přidáme-li však požadavek „radonovskosti“, tak hodnota integrálu $\int_{(a,b)} \varphi(x)\, d\mu(x)$ stejně závisí pouze na $\mu_{\mathcal{B}}$ (Lemma 20) a zúžení na $\mathcal{B}((a,b))$ je pro všechny měrové derivace stejné (Lemma 21). V tomto smyslu je měrová derivace stále určena jednoznačně.

Nyní přichází na řadu (první) definice funkce s konečnou variací.

Definice 17. *Nechť $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ je omezený interval. Definujeme*

$$BV((a,b)) = \{f \in L^1((a,b)) : \textit{existuje } Df \in \mathcal{M}((a,b))\},$$
$$||f||_{BV((a,b))} = ||f||_{L^1((a,b))} + ||Df||_{\mathcal{M}((a,b))}.$$

Pokud $f \in BV((a,b))$, tak řekneme, že f je ***funkce s konečnou variací*** *na intervalu (a,b).*

Podle Lemmatu 17 je variace (vizte Definici 13) měrové derivace konečná, což odhaluje původ názvu „s konečnou variací“.

Lemma 22. *Nechť $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ je omezený interval. Potom $||\cdot||_{BV((a,b))}$ je norma na $BV((a,b))$ a $BV((a,b))$ je s touto normou Banachův prostor, pokud ztotožníme funkce, které se rovnají skoro všude.*

Důkaz. Snadno nahlédneme, že $BV((a,b))$ je vektorový prostor.

Je-li $||f||_{BV((a,b))} = 0$, tak speciálně $||f||_{L^1((a,b))} = 0$, a tedy $f = 0$ skoro všude. Zbylé vlastnosti normy snadno plynou z toho, že $||\cdot||_{L^1((a,b))}$ a $||\cdot||_{\mathcal{M}((a,b))}$ jsou normy.

Nechť $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV((a,b))$ je cauchyovská posloupnost v normě $||\cdot||_{BV((a,b))}$. Potom $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská v $L^1((a,b))$ a $\{Df_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská v prostoru $\mathcal{M}((a,b))$. Jelikož tyto prostory jsou Banachovy, tak existují $f \in L^1((a,b))$ a $\mu \in \mathcal{M}((a,b))$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{L^1((a,b))} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} ||Df_n - \mu||_{\mathcal{M}((a,b))} = 0.$$

Zbývá ukázat, že $\mu = Df$. Nechť tedy $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Potom

$$\left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\varphi'(x)\, dx \right| \leq ||f_n - f||_{L^1((a,b))} ||\varphi'||_{C(\operatorname{supp} \varphi)} \to 0 \text{ pro } n \to \infty,$$
$$\left| \int_{(a,b)} \varphi(x)\, d(Df_n - \mu)(x) \right| \leq ||\varphi||_{C(\operatorname{supp} \varphi)} ||Df_n - \mu||_{\mathcal{M}((a,b))} \to 0 \text{ pro } n \to \infty,$$

kde supp φ značí nosič funkce φ. Víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\int_a^b f_n(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{(a,b)} \varphi(x)\,dDf_n(x)$$

a přechodem k $\lim_{n\to\infty}$ dostaneme díky předchozím odhadům rovnost

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{(a,b)} \varphi(x)\,d\mu(x),$$

což podle definice znamená $\mu = Df$.

$\square$

Lemma 23. *Nechť $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ je omezený interval a $f \in BV((a,b))$. Potom*

$$||f||_{L^\infty((a,b))} \le \frac{1}{b-a}||f||_{L^1((a,b))} + ||Df||_{\mathcal{M}((a,b))}.$$

Důkaz. Podle věty [6, str. 11, Theorem 7.4] použité na $W = (a,b)$ a $n = 1$ platí pro skoro všechna $x \in (a,b)$ (konkrétně pro všechny Lebesgueovy body funkce f) nerovnost

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y) - f(x)|\,dy \le C\int_{(a,b)} d|Df|(y) = C||Df||_{\mathcal{M}((a,b))},$$

kde navíc $C = \frac{n\cdot[\operatorname{diam}((a,b))]^n}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1$ (ve znění Theorem 7.4 vzorec pro C uveden není, ale plyne z důkazu, jenž uveden je). Pro každé takové x je pak

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dy\right| \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\,dy \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y) - f(x)|\,dy +$$
$$+ \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)|\,dy \le ||Df||_{\mathcal{M}((a,b))} + \frac{1}{b-a}||f||_{L^1((a,b))}.$$

$\square$

Lemma 24. *Nechť $(c,d) \subseteq (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ jsou omezené intervaly a $f \in BV((a,b))$. Potom $f \in BV((c,d))$ a když zúžíme $Df_{(a,b)}$ na $\mathcal{B}((c,d))$, dostaneme $Df_{(c,d)}$.*

Důkaz. Z $f \in L^1((a,b))$ plyne $f \in L^1((c,d))$. Dále nechť $\varphi \in \mathcal{D}((c,d))$. Rozšiřme φ na (a,b) předpisem $\varphi(x) = 0$ pro $x \in (a,b) \setminus (c,d)$. Potom $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ a když označíme zúžení míry $Df_{(a,b)}$ na $\mathcal{B}((c,d))$ jako $Df_{\mathcal{B}}$ (což je Radonova znaménková míra), tak

$$\int_c^d f(x)\varphi'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{(a,b)} \varphi(x)\,dDf_{(a,b)}(x) =$$
$$= -\int_{(c,d)} \varphi(x)\,dDf_{(a,b)}(x) = -\int_{(c,d)} \varphi(x)\,dDf_{\mathcal{B}}(x).$$

Podle Lemmatu 21 tak $Df_{(c,d)} = Df_{\mathcal{B}}$, a tedy speciálně $f \in BV((c,d))$.

$\square$

Lemma 25. *Nechť* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *a* $f \in AC([a,b])$. *Potom* $f \in BV((a,b))$ *a platí* $dDf(x) = f'(x)\,dx$ *na* $\mathcal{B}((a,b))$.

Důkaz. Každá absolutně spojitá funkce na $[a,b]$ je spojitá, tedy i omezená, a tudíž třídy $L^1([a,b])$. Podle Věty 1 je $f' \in L^1([a,b])$, a tak je znaménková míra $f'(x)\,dx$ díky Lemmatu 18 Radonova.

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Po dodefinování funkce φ hodnotami $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ dostaneme absolutně spojitou funkci na $[a,b]$, a tak dle bodu (c) Lemmatu 1 platí

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx.$$

Tudíž skutečně $dDf(x) = f'(x)\,dx$ na $\mathcal{B}((a,b))$ a $f \in BV((a,b))$.

□

Ve zbytku textu použijeme zkrácené značení $BV((a,b)) = BV(a,b)$ a obdobně pro $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}$, L^1, L^∞ a $\mathcal{D}$. Při práci s měrovou derivací budeme místo $dDf(x)$ používat kratší zápis $Df(x)$. Až do konce tohoto textu bude $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ pevný interval, nebude-li řečeno jinak.

Věnujme se nyní druhému náhledu na funkce s konečnou variací, který souvisí se zobecněním derivace skrze Newton-Leibnizův vzorec.

Definice 18. *Nechť* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. *Konečná množina* $\{t_0, \ldots, t_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ *se nazývá* ***dělení*** *intervalu* $[a,b]$, *pokud*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Označme jako $\mathcal{P}$ *množinu všech dělení intervalu* $[a,b]$. *Pro* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *pak definujeme její* ***variaci*** $V_f(a,b)$ *na intervalu* $[a,b]$ *předpisem*

$$V_f(a,b) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})| : \{t_0, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P} \right\}.$$

Řekneme, že f *je* ***funkce s konečnou bodovou variací*** *na intervalu* $[a,b]$, *pokud* $V_f(a,b) < \infty$. *Množinu všech funkcí s konečnou bodovou variací na* $[a,b]$ *budeme značit symbolem* $BPV([a,b])$.

Není těžké si rozmyslet, že součet i součin dvou funkcí třídy $BPV([a,b])$ patří do $BPV([a,b])$ a že $f \in BPV([a,b])$ je omezená konstantou $|f(a)| + V_f(a,b)$.

Pro funkce $f \in BPV([a,b])$ se častěji používá termín „funkce s konečnou variací“ a značení $BV([a,b])$, ale to už jsme použili dříve pro něco jiného, a tak pro účely tohoto textu přidáváme slovo „bodovou“ (zatímco variace míry je „množinová“, variace funkce v definici výše je více „bodová“) a písmeno P, abychom oba pojmy snáze rozlišili.

Jenom z definice může být někdy obtížné ověřit, že $V_f(a,b) < \infty$, a tak se nám bude hodit následující charakterizační věta.

Věta 3. *Nechť* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Potom* $f \in BPV([a,b])$ *právě tehdy, když existují neklesající funkce* v_1, $v_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *takové, že* $f = v_1 - v_2$.

Důkaz. Vizte [7, str. 841, Věta 15.3.4].

□

Následující tvrzení ukazuje, jak zleva spojité funkce s konečnou bodovou variací souvisí se zobecněním derivace skrze Newton-Leibnizův vzorec.

Věta 4. *Nechť $f \in BPV([a,b])$ je zleva spojitá funkce. Potom existuje právě jedna Radonova znaménková míra μ_f na $\mathcal{B}([a,b))$ taková, že pro každý podinterval $[c,d] \subseteq [a,b]$ platí*

$$f(d) - f(c) = \mu_f([c,d)) = \int_{[c,d)} d\mu_f(x). \tag{1.2}$$

Tuto znaménkovou míru nazveme ***přírůstkovou derivací*** *funkce f na $[a,b]$.*

Pro každé $t \in [a,b)$ navíc $\mu_f(\{t\}) = f(t+) - f(t)$, kde $f(t+) = \lim_{s \to t+} f(s)$. Tudíž μ_f je spojitá v bodě $t \in [a,b)$ právě tehdy, když je f spojitá v bodě t.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že existuje nejvýše jedna míra s uvedenými vlastnostmi. Nechť tedy μ_f, ν_f jsou dvě Radonovy znaménkové míry na $\mathcal{B}([a,b))$ splňující (1.2) pro každý podinterval $[c,d] \subseteq [a,b]$. Rozšiřme μ_f na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ předpisem

$$\mu_f(A) := \mu_f^+(A \cap [a,b)) - \mu_f^-(A \cap [a,b)) = \mu_f(A \cap [a,b)), \;\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Potom jde o Radonovu znaménkovou míru na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zcela stejně rozšíříme i ν_f.

Dále rozšiřme funkci f na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} f(a), & x \in (-\infty, a], \\ f(x), & x \in (a,b), \\ f(b), & x \in [b, \infty). \end{cases}$$

Vidíme, že po těchto rozšířeních splňují μ_f a ν_f vztah (1.2) pro každý omezený interval $[c,d) \subseteq \mathbb{R}$, a tedy jejich hodnoty na těchto intervalech jsou stejné. Položme

$$\mathcal{O} := \emptyset \cup \{\text{všechna konečná sjednocení omezených intervalů typu } [c,d)\}.$$

Není příliš těžké ověřit, že $\mathcal{O}$ je tzv. okruh (vizte [5, str. 2, Definice 1.8]). Zúžením měr μ_f^+, μ_f^-, ν_f^+ a ν_f^- na $\mathcal{O}$ pak dle [5, str. 25, Definice 12.1] dostaneme čtyři pramíry, pro které platí

$$\mu_f^+ - \mu_f^- = \nu_f^+ - \nu_f^-,$$

neboli

$$\mu_f^+ + \nu_f^- = \mu_f^- + \nu_f^+.$$

Je známým faktem, že nejmenší σ-algebrou obsahující $\mathcal{O}$ je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, a tak jsou si díky Hopfově větě [5, str. 25, Věta 12.2] míry $\mu_f^+ + \nu_f^-$ a $\mu_f^- + \nu_f^+$ rovny na celé $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (protože obě rozšiřují tutéž pramíru a toto rozšíření je dle Hopfovy věty jednoznačné), speciálně na $\mathcal{B}([a,b))$, z čehož plyne $\mu_f = \nu_f$ na $\mathcal{B}([a,b))$.

Nyní dokážeme existenci μ_f. Rozšiřme f na $\mathbb{R}$ jako výše. Potom zřejmě f je zleva spojitá na $\mathbb{R}$ a $f \in BPV(I)$ pro každý omezený uzavřený interval $I \subseteq \mathbb{R}$, což podle poznámky před [3, str. 405, Věta 144] (v knize se značí $E_1 = \mathbb{R}$) znamená, že f je tzv. distribuční funkce. Podle [3, str. 405, Věta 144] existuje právě jedna funkce μ_f s vlastností S_1^* (vizte [3, str. 392, Definice 19]) splňující (1.2) pro každý omezený interval $[c, d) \subseteq \mathbb{R}$ a pro každé $t \in \mathbb{R}$ navíc platí rovnost $\mu_f(\{t\}) = f(t+) - f(t)$.

Podle [3, str. 391, Věta 136] pak $\mu_f = \mu_f^+ - \mu_f^-$ (v knize $\pi - \nu$), kde μ_f^+ a μ_f^- mají díky větě [3, str. 394, Věta 139] také vlastnost S_1^* a zároveň i S_1 (pro její definici vizte konec strany 40 v [3]). Stejným postupem jako na stranách 41 až 44 v [3] rozšíříme μ_f^+ a μ_f^- na C_1, což je systém podmnožin $\mathbb{R}$, pro který podle [3, str. 33, Definice 3] platí $\mathcal{O} \subseteq C_1$, kde $\mathcal{O}$ je jako výše. Potom μ_f^+ a μ_f^- jsou díky bodu II ve větě [3, str. 44, Věta 9] pramíry na $\mathcal{O}$. Pomocí dříve zmíněné Hopfovy věty rozšíříme μ_f^+ a μ_f^- na (ne nutně konečné) míry na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Následně tyto míry zúžíme na $\mathcal{B}([a, b))$ (což už konečná míra z konstrukce je) a položíme $\mu_f = \mu_f^+ - \mu_f^-$. Potom μ_f je znaménková míra na $\mathcal{B}([a, b))$, která splňuje (1.2) pro každý podinterval $[c, d] \subseteq [a, b]$.

Z konstrukce v Hopfově větě navíc plyne, že míry μ_f^+ a μ_f^- na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ jsou tzv. Lebesgue-Stieltjesovy míry (vizte [5, str. 23, Definice 11.1]), z čehož podle [5, str. 48, Lemma 22.1] plyne, že jsou to těsné míry. Konečnost na kompaktních podmnožinách $\mathbb{R}$ pak snadno dostaneme z konečnosti na omezených intervalech. Tedy μ_f^+ a μ_f^- jsou Radonovy míry na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, a tak i jejich zúžení na $\mathcal{B}([a, b))$ je Radonova míra (která je navíc konečná). Tudíž μ_f je Radonova.

□

Jako další ukážeme, že pro přírůstkové derivace platí za vhodných podmínek klasické pravidlo pro derivaci součinu.

Lemma 26. (Integrace per partes). *Nechť f, $g \in BPV([a, b])$ jsou zleva spojité. Potom $fg \in BPV([a, b])$ je zleva spojitá a pro všechna $a \leq c < d \leq b$ platí*

$$f(d)g(d) - f(c)g(c) = \int_{[c,d)} f(s)\, d\mu_g(s) + \int_{[c,d)} g(s)\, d\mu_f(s) + \int_{[c,d)} \mu_f(\{s\})\, d\mu_g(s).$$

Speciálně pokud $f \in C([a, b])$, tak pro všechna $a \leq c < d \leq b$

$$f(d)g(d) - f(c)g(c) = \int_{[c,d)} f(s)\, d\mu_g(s) + \int_{[c,d)} g(s)\, d\mu_f(s),$$

a tudíž $d\mu_{fg}(x) = f(x)\, d\mu_g(x) + g(x)\, d\mu_f(x)$.

Důkaz. Jelikož součin funkcí zachovává spojitost zleva i náležení do $BPV([a, b])$, tak $fg \in BPV([a, b])$ je zleva spojitá funkce.

Označme $I = [a, b)$. Každá zleva spojitá funkce je borelovská a BPV-funkce jsou omezené, a tak $f \in L^1(I, \mathcal{B}(I), |\mu_g|)$ a $g \in L^1(I, \mathcal{B}(I), |\mu_f|)$. Míry $f(x)\, d\mu_g(x)$ a $g(x)\, d\mu_f(x)$ jsou tudíž díky Lemmatu 18 Radonovy znaménkové míry na $\mathcal{B}(I)$, a tak totéž platí i pro jejich součet.

Nechť $a \leq c < d \leq b$. Označme $X = Y = [c, d)$ a

$$\mathrm{int}(M) := \{(s, r) \in \mathbb{R}^2 : c < r < s < d\}, \quad M := \mathrm{int(M)} \cup \Big((c, d) \times \{c\}\Big).$$

Díky otevřenosti $\mathrm{int}(M)$ v eukleidovské topologii na $\mathbb{R}^2$ platí, že ($\mathbb{Q}$ značí množinu všech racionálních čísel)

$$\mathrm{int}(M) = \bigcup \Big\{(z_1, z_2) \times (w_1, w_2) \subseteq \mathrm{int}(M) : z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{Q}\Big\}.$$

Protože otevřené intervaly jsou borelovské, tak $\mathrm{int}(M)$ je spočetné sjednocení $(\mathcal{S}_{\mu_f^+} \otimes \mathcal{S}_{\mu_g^+})$-měřitelných množin, a tudíž $\mathrm{int}(M)$ je $(\mathcal{S}_{\mu_f^+} \otimes \mathcal{S}_{\mu_g^+})$-měřitelná. Jelikož $(c,d) \times \{c\}$ je zřejmě také $(\mathcal{S}_{\mu_f^+} \otimes \mathcal{S}_{\mu_g^+})$-měřitelná, tak totéž platí i pro M. Odsud plyne i $(\overline{\mathcal{S}_{\mu_f^+} \otimes \mathcal{S}_{\mu_g^+}})$-měřitelnost M.

Dále konstantní funkce s hodnotou 1 uvažovaná na množině M je zřejmě $(\mathcal{S}_{\mu_f^+} \otimes \mathcal{S}_{\mu_g^+})$-měřitelná funkce, protože vzorem libovolného intervalu je buď $\emptyset$, nebo M. Z toho plyne i její $(\overline{\mu_f^+ \otimes \mu_g^+})$-měřitelnost. Protože integrál z nezáporné měřitelné funkce má smysl vždy, tak podle Fubiniho věty (Věta 2) platí

$$\begin{aligned}
&\int_{[c,d)} \left(\int_{[c,s)} 1 \, d\mu_g^+(r) \right) d\mu_f^+(s) = \int_X \left(\int_{M^{s,*}} 1 \, d\mu_g^+(r) \right) d\mu_f^+(s) = \\
&= \int_M 1 \, d(\overline{\mu_f^+ \otimes \mu_g^+})(s,r) = \int_Y \left(\int_{M^{*,r}} 1 \, d\mu_f^+(s) \right) d\mu_g^+(r) = \\
&= \int_{[c,d)} \left(\int_{(r,d)} 1 \, d\mu_f^+(s) \right) d\mu_g^+(r) < \infty,
\end{aligned}$$

přičemž konečnost integrálu plyne z toho, že μ_f^+ a μ_g^+ jsou konečné míry.

Obdobně ukážeme, že pořadí integrace lze prohodit i pro dvojice měr (μ_f^+, μ_g^-), (μ_f^-, μ_g^+), (μ_f^-, μ_g^-), což spolu s konečností jednotlivých integrálů znamená, že

$$\int_{[c,d)} \left(\int_{[c,s)} d\mu_g(r) \right) d\mu_f(s) = \int_{[c,d)} \left(\int_{(r,d)} d\mu_f(s) \right) d\mu_g(r).$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
&\mu_f([c,d)) \cdot \mu_g([c,d)) = \int_{[c,d)} \left(\int_{[c,d)} d\mu_g(r) \right) d\mu_f(s) = \\
&= \int_{[c,d)} \left(\int_{[c,s)} d\mu_g(r) \right) d\mu_f(s) + \int_{[c,d)} \left(\int_{[s,d)} d\mu_g(r) \right) d\mu_f(s) = \\
&= \int_{[c,d)} \left(\int_{(r,d)} d\mu_f(s) \right) d\mu_g(r) + \int_{[c,d)} \left(\int_{[s,d)} d\mu_g(r) \right) d\mu_f(s).
\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}
&\int_{[c,d)} \left(\int_{(r,d)} d\mu_f(s) \right) d\mu_g(r) = \int_{[c,d)} \Big(\mu_f([r,d)) - \mu_f(\{r\}) \Big) \, d\mu_g(r) = \\
&= \int_{[c,d)} \Big(f(d) - f(r) \Big) \, d\mu_g(r) - \int_{[c,d)} \mu_f(\{r\}) \, d\mu_g(r) = \\
&= f(d)\Big(g(d) - g(c)\Big) - \int_{[c,d)} f(r) \, d\mu_g(r) - \int_{[c,d)} \mu_f(\{r\}) \, d\mu_g(r)
\end{aligned}$$

a analogicky

$$\int_{[c,d)} \left(\int_{[s,d)} d\mu_g(r) \right) d\mu_f(s) = g(d)\Big(f(d) - f(c)\Big) - \int_{[c,d)} g(s) \, d\mu_f(s).$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
&\Big(f(d) - f(c)\Big) \cdot \Big(g(d) - g(c)\Big) = \mu_f([c,d)) \cdot \mu_g([c,d)) = \\
&= - \int_{[c,d)} \mu_f(\{r\}) \, d\mu_g(r) - \int_{[c,d)} f(r) \, d\mu_g(r) - \int_{[c,d)} g(s) \, d\mu_f(s) + \\
&+ f(d)\Big(g(d) - g(c)\Big) + g(d)\Big(f(d) - f(c)\Big),
\end{aligned}$$

z čehož dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_{[c,d)} f(s)\, d\mu_g(s) + \int_{[c,d)} g(s)\, d\mu_f(s) + \int_{[c,d)} \mu_f(\{s\})\, d\mu_g(s) = \\
&= f(d)\Big(g(d) - g(c)\Big) + g(d)\Big(f(d) - f(c)\Big) - \Big(f(d) - f(c)\Big) \cdot \Big(g(d) - g(c)\Big) = \\
&= f(d)g(d) - f(c)g(c).
\end{aligned}$$

Pokud je $f \in C([a,b])$, tak je díky Větě 4 μ_f spojitá, a tedy pro každé $a \le c < d \le b$ skutečně

$$f(d)g(d) - f(c)g(c) = \int_{[c,d)} f(s)\, d\mu_g(s) + \int_{[c,d)} g(s)\, d\mu_f(s),$$

z čehož už snadno plyne, že μ_{fg} definovaná jako ve znění je skutečně přírůstkovou derivací funkce fg.

□

Poznamenejme, že kdykoliv v tomto textu použijeme Fubiniho větu, tak se její předpoklady ověří podobně jako v právě provedeném důkazu. Vždy půjde o integrál typu

$$\int_M f(x)g(y)\, d(\overline{\mu \otimes \nu})(x,y),$$

kde μ, ν jsou Radonovy znaménkové míry, M je $(\overline{\mathcal{S}_\mu \otimes \mathcal{S}_\nu})$-měřitelná množina (bez výjimky půjde o otevřený trojúhelník sjednocený s některými ze svých hran) a f (resp. g) je $\mathcal{S}_\mu$-měřitelná (resp. $\mathcal{S}_\nu$-měřitelná) funkce. Součin fg je potom $(\mathcal{S}_\mu \otimes \mathcal{S}_\nu)$-měřitelný. Konečnost příslušného integrálu pak vždy ověříme díky tomu, že f bude $|\mu|$-integrovatelná a g bude $|\nu|$-integrovatelná. Jelikož Fubiniho věta vyžaduje úplnost, tak budeme při jejím použití místo μ a ν uvažovat zúplnění těchto měr (přesněji jejich kladné a záporné části) z Definice 10. Není příliš těžké si rozmyslet, že to za těchto předpokladů nezmění hodnotu daného integrálu.

V následujícím lemmatu mimo jiné nahlédneme, že pokud je $f \in BPV([a,b])$ zleva spojitá, tak má přírůstkovou i měrovou derivaci a tyto derivace jsou v jistém smyslu stejné.

Lemma 27. *(a) Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a existuje Radonova znaménková míra ρ na $\mathcal{B}([a,b))$ taková, že pro každý podinterval $[c,d] \subseteq [a,b]$ platí*

$$f(d) - f(c) = \rho([c,d)).$$

Potom $f \in BPV([a,b])$, f je zleva spojitá a $\mu_f = \rho$. Je-li navíc $d\rho(s) = g(s)\, ds$ pro nějakou $g \in L^1([a,b])$, tak $f \in AC([a,b])$.

(b) Pro každou $f \in AC([a,b])$ platí $f \in BPV([a,b])$ a $d\mu_f(x) = f'(x)\, dx$.

(c) Je-li $f \in BPV([a,b])$, tak f je omezená a $f \in L^\infty([a,b]) \subseteq L^1([a,b])$. Pokud je navíc f zleva spojitá, tak $f \in BV(a,b)$ a zúžením přírůstkové derivace μ_f na $\mathcal{B}(a,b)$ dostaneme měrovou derivaci Df.

Důkaz. **(a)** Pro každé $t \in [a,b]$ podle předpokladu platí

$$f(t) = f(a) + \rho([a,t)) = \Big(f^+(a) + \rho^+([a,t))\Big) - \Big(f^-(a) + \rho^-([a,t))\Big).$$

Tedy f je rozdílem dvou neklesajících funkcí, a tak podle Věty 3 patří do prostoru $BPV([a,b])$.

Nechť nyní $c \in (a,b]$ a $\tau \in (0, c-a)$. Potom

$$f(c) - f(c-\tau) = \rho([c-\tau, c)),$$

a tedy

$$|f(c) - f(c-\tau)| \leq |\rho|([c-\tau, c)). \tag{1.3}$$

Nechť $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, c-a)$ je posloupnost splňující $\tau_n \searrow 0$. Potom

$$[c-\tau_1, c) \supseteq [c-\tau_2, c) \supseteq \dots \quad \text{a} \quad |\rho|([c-\tau_1, c)) < \infty,$$

z čehož plyne

$$0 = |\rho|(\emptyset) = |\rho|\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [c-\tau_n, c)\right) = \lim_{n\to\infty} |\rho|\left([c-\tau_n, c)\right).$$

Odsud a z (1.3) tak dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} |f(c) - f(c-\tau_n)| = 0,$$

neboli f je zleva spojitá v bodě c. Tudíž existuje právě jedna přírůstková derivace této funkce a z předpokladu je jí zřejmě ρ.

Pokud je $d\rho(s) = g(s)\,ds$ pro $g \in L^1([a,b])$, tak díky definici přírůstkové derivace a Větě 1 snadno nahlédneme, že $f \in AC([a,b])$.

(b) Jelikož pro každý podinterval $[c,d] \subseteq [a,b]$ platí díky Větě 1

$$f(d) - f(c) = \int_{[c,d)} f'(x)\,dx$$

a $f'(x)\,dx$ je podle Lemmatu 18 Radonova znaménková míra, jde o důsledek předchozího bodu tohoto lemmatu.

(c) Omezenost f již víme. Jelikož každá neklesající funkce je lebesgueovsky měřitelná (vizte [7, str. 837, Věta 15.2.5]) a f je rozdílem dvou takových funkcí (Věta 3), tak je i f lebesgueovsky měřitelná, tudíž $f \in L^\infty([a,b])$.

Nechť nyní navíc f je zleva spojitá a $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$. Dodefinujme φ v krajních bodech intervalu $[a,b]$ hodnotou $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Potom $\varphi \in AC([a,b])$. Podle Lemmatu 26 o integraci per partes a bodu (b) tohoto lemmatu pak

$$\begin{aligned}
0 = \varphi(b)f(b) - \varphi(a)f(a) &= \int_{[a,b)} \varphi(s)\,d\mu_f(s) + \int_{[a,b)} f(s)\,d\mu_\varphi(s) = \\
&= \int_{(a,b)} \varphi(s)\,d\mu_f(s) + \varphi(a)\mu_f(\{a\}) + \int_a^b f(s)\varphi'(s)\,ds = \\
&= \int_{(a,b)} \varphi(s)\,d\mu_f(s) + \int_a^b f(s)\varphi'(s)\,ds,
\end{aligned}$$

přičemž poslední rovnost platí díky $\varphi(a) = 0$. Tudíž

$$\int_a^b f(s)\varphi'(s)\,ds = -\int_{(a,b)} \varphi(s)\,d\mu_f(s).$$

Zúžením μ_f na $\mathcal{B}(a,b)$ tak skutečně dostaneme Df, a tedy $f \in BV(a,b)$.

$\square$

Jsou-li $\mu, \nu_1, \ldots, \nu_n$ znaménkové míry definované na téže σ-algebře $\mathcal{S}$ a pro $i = 1, \ldots, n$ je f_i integrovatelná funkce vzhledem k $|\nu_i|$ a $\rho_i(A) := \int_A f_i(x)\, d\nu_i(x)$, $A \in \mathcal{S}$, tak zavedeme značení

$$d|\mu|(x) \leq |f_1(x)|\, d|\nu_1|(x) + \ldots + |f_n(x)|\, d|\nu_n|(x),$$

čímž budeme myslet

$$|\mu|(A) \leq |\rho_i|(A) + \ldots + |\rho_n|(A), \;\; A \in \mathcal{S}.$$

„Klasickou teorií“ obyčejných diferenciálních rovnic budeme v dalším mít na mysli teorii pro soustavy s koeficienty třídy $L^1([a,b])$, tj. Carathéodoryho teorii.

2. Základní teorie

Až do konce tohoto textu budou c_1, c_2, c_3, c_4, $g \in L^1([a,b])$ pevné funkce a $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pevná dvojice čísel. Nechť dále $h \in L^1([a,b])$.

Na $[a,b]$ uvažme soustavu

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t), \\ y'(t) &= c_3(t)x(t) + c_4(t)y(t) + h(t), \\ (x(a), y(a)) &= (x_0, y_0) \end{aligned}$$

pro neznámé funkce x, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Jak již bylo řečeno v úvodu, existuje právě jedna dvojice x, $y \in AC([a,b])$ splňující pro každé $t \in [a,b]$ integrální rovnice

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_a^t c_1(s)x(s)\,ds + \int_a^t c_2(s)y(s)\,ds + \int_a^t g(s)\,ds, \\ y(t) &= y_0 + \int_a^t c_3(s)x(s)\,ds + \int_a^t c_4(s)y(s)\,ds + \int_a^t h(s)\,ds, \end{aligned}$$

což je ekvivalentní tomu, že $x(a) = x_0$, $y(a) = y_0$ a pro skoro všechna $t \in [a,b]$ platí

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t), \\ y'(t) &= c_3(t)x(t) + c_4(t)y(t) + h(t). \end{aligned}$$

Pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu $A \subseteq [a,b]$ položme

$$\rho_{c_3}(A) := \int_A c_3(s)\,ds, \quad \rho_h(A) := \int_A h(s)\,ds.$$

Dle Lemmatu 18 jsou ρ_{c_3} a ρ_h Radonovy znaménkové míry a výše uvedené integrální rovnice lze zapsat jako

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_a^t c_1(s)x(s)\,ds + \int_a^t c_2(s)y(s)\,ds + \int_a^t g(s)\,ds, \\ y(t) &= y_0 + \int_a^t x(s)\,d\rho_{c_3}(s) + \int_a^t c_4(s)y(s)\,ds + \int_a^t d\rho_h(s). \end{aligned}$$

Cílem této kapitoly je nahradit ve druhé rovnici Radonovy znaménkové míry ρ_{c_3} a ρ_h obecnými Radonovými znaménkovými měrami μ a ν, tj.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_a^t c_1(s)x(s)\,ds + \int_a^t c_2(s)y(s)\,ds + \int_a^t g(s)\,ds, \\ y(t) &= y_0 + \int_a^t x(s)\,d\mu(s) + \int_a^t c_4(s)y(s)\,ds + \int_a^t d\nu(s) \end{aligned}$$

a zjistit, jakou (a zda vůbec nějakou) soustavu diferenciálních rovnic splňuje řešení těchto integrálních rovnic.

První věcí, kterou je potřeba si rozmyslet, je interval, přes nějž budeme vzhledem k mírám μ a ν integrovat. Zatímco $\rho_{c_3}(\{t\}) = \rho_h(\{t\}) = 0$ pro každé $t \in [a,b]$, μ a ν už tuto vlastnost mít nemusí, a tak může být rozdíl v tom, zda integrujeme přes (a,t), $[a,t)$, $(a,t]$ nebo $[a,t]$.

Rádi bychom zachovali, že pokud (x, y) je řešení na intervalu $[a, b]$ s počáteční podmínkou (x_0, y_0), tak je to také řešení na každém podintervalu $[c, d] \subseteq [a, b]$ s počáteční podmínkou $(x(c), y(c))$. Rovnice pro $x(t)$ se nijak nezměnila, a tak nebude dělat problém, ovšem rovnice pro $y(t)$ nás vede k tomu, že jedinými možnými volbami intervalů, přes něž můžeme vzhledem k mírám μ a ν integrovat, jsou intervaly typu $[a, t)$ a $(a, t]$.

Kdybychom totiž integrovali např. přes uzavřený interval $[a, t]$, tak pro každé $t \in [c, d]$ dostaneme

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_{[a,t]} x(s)\, d\mu(s) + \int_a^t c_4(s)y(s)\, ds + \int_{[a,t]} d\nu(s) = \\ &= y_0 + \int_{[a,c]} x(s)\, d\mu(s) + \int_a^c c_4(s)y(s)\, ds + \int_{[a,c]} d\nu(s) + \\ &+ \int_{[c,t]} x(s)\, d\mu(s) + \int_c^t c_4(s)y(s)\, ds + \int_{[c,t]} d\nu(s) - \\ &- x(c)\mu(\{c\}) - \nu(\{c\}) = y(c) + \int_{[c,t]} x(s)\, d\mu(s) + \\ &+ \int_c^t c_4(s)y(s)\, ds + \int_{[c,t]} d\nu(s) - x(c)\mu(\{c\}) - \nu(\{c\}), \end{aligned}$$

což nemusí být rovno

$$y(c) + \int_{[c,t]} x(s)\, d\mu(s) + \int_c^t c_4(s)y(s)\, ds + \int_{[c,t]} d\nu(s),$$

pokud $\mu(\{c\}) \neq 0$ nebo $\nu(\{c\}) \neq 0$. Na podobný problém narazíme, když budeme integrovat přes intervaly (a, t). Naopak zvolíme-li např. $[a, t)$, tak analogickým výpočtem ověříme, že pro každé $t \in [c, d]$ skutečně platí

$$y(t) = y(c) + \int_{[c,t)} x(s)\, d\mu(s) + \int_c^t c_4(s)y(s)\, ds + \int_{[c,t)} d\nu(s).$$

Jak uvidíme později, polouzavřené intervaly jsou klíčové i pro to, aby platilo, že když „slepíme" řešení (x_1, y_1) na intervalu $[c, d]$ s řešením (x_2, y_2) na intervalu $[d, e]$ splňujícím $(x_2(d), y_2(d)) = (x_1(d), y_1(d))$, tak dostaneme řešení na $[c, e]$.

Ve zbytku textu budeme používat intervaly $[a, t)$, neboli

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_a^t c_1(s)x(s)\, ds + \int_a^t c_2(s)y(s)\, ds + \int_a^t g(s)\, ds, \\ y(t) &= y_0 + \int_{[a,t)} x(s)\, d\mu(s) + \int_a^t c_4(s)y(s)\, ds + \int_{[a,t)} d\nu(s), \end{aligned}$$

ale celou teorii lze upravit i pro polouzavřené intervaly druhého typu. Poznamenejme, že výběr intervalů $[a, t)$ je důvodem, proč jsme se v první kapitole zabývali funkcemi třídy $BPV([a, b])$, které jsou zleva spojité. V definici jejich přírůstkové derivace (vizte Větu 4) totiž vystupují právě intervaly tohoto tvaru, což, jak za chvíli nahlédneme, je velmi důležité. Pokud bychom chtěli integrovat přes intervaly $(a, t]$, museli bychom se v první kapitole zabývat zprava spojitými funkcemi $f \in BPV([a, b])$ a ukázat, že existuje právě jedna Radonova znaménková míra μ_f na $\mathcal{B}((a, b])$ splňující pro každý podinterval $[c, d] \subseteq [a, b]$ vztah $\mu_f((c, d]) = f(d) - f(c)$.

Z druhé rovnice vidíme, že stačí, aby μ a ν byly Radonovy znaménkové míry definované na nějaké σ-algebře podmnožin intervalu $[a,b)$, což bude nadále náš trvalý předpoklad (příslušné σ-algebry budeme po řadě značit jako $\mathcal{S}_\mu$ a $\mathcal{S}_\nu$). Z Lemmatu 5 pak plyne, že jde o znaménkové míry definované alespoň na $\mathcal{B}([a,b))$.

Jako další musíme určit, do kterých prostorů by funkce x a y měly patřit. Jelikož integrální rovnice pro $x(t)$ zůstala nedotčena, tak je rozumné očekávat, že stále $x \in AC([a,b])$. Integrální rovnice pro $y(t)$ však doznala značné změny a kvůli tomu, že míry μ a ν nemusí být všude spojité, nelze ani od funkce y očekávat spojitost všude (a tedy speciálně ani absolutní spojitost). Potřebujeme, aby integrály $\int_a^t c_2(s)y(s)\,ds$ a $\int_a^t c_4(s)y(s)\,ds$ byly dobře definované a konečné. Jelikož c_2, $c_4 \in L^1([a,b])$, tak k tomu postačuje, aby $y \in L^\infty(a,b)$.

Ověřme, že za podmínky $x \in AC([a,b])$, $y \in L^\infty(a,b)$ jsou dobře definované a konečné i ostatní integrály. Z $x \in C([a,b])$ plyne, že x je borelovská, a tedy $\mathcal{S}_\mu$-měřitelná. Dále pro každé $t \in [a,b]$

$$\left| \int_{[a,t)} x(s)\,d\mu(s) \right| \leq ||x||_{C([a,b])} \cdot |\mu|([a,b)) < \infty.$$

Zřejmě $c_1 x \in L^1([a,b])$, a tak je $\int_a^t c_1(s)x(s)\,ds$ dobře definován a konečný. Konvergence integrálu $\int_a^t g(s)\,ds$ plyne z $g \in L^1([a,b])$. Dále pro každé $t \in [a,b]$

$$\left| \int_{[a,t)} d\nu(s) \right| = |\nu([a,t))| \leq |\nu|([a,t)) \leq |\nu|([a,b)) < \infty.$$

Následující lemma již dává tušit, jaké diferenciální rovnice funkce x a y splňují.

Lemma 28. *Nechť $x \in C([a,b])$ a $y \in L^\infty(a,b)$. Pro $t \in [a,b]$ definujme*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(t) &:= x_0 + \int_a^t \Big(c_1(s)x(s) + c_2(s)y(s) + g(s) \Big)\,ds, \\
\mathcal{F}_2(t) &:= y_0 + \int_{[a,t)} x(s)\,d\mu(s) + \int_a^t c_4(s)y(s)\,ds + \int_{[a,t)} d\nu(s).
\end{aligned}$$

Potom $\mathcal{F}_1 \in AC([a,b])$, $\mathcal{F}_2 \in BV(a,b)$, $\mathcal{F}_2 \in BPV([a,b])$, $\mathcal{F}_2$ je zleva spojitá a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1'(t) &= c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t) \ \textit{pro s.v.}\ t \in [a,b], \\
D\mathcal{F}_1(t) &= \Big(c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t) \Big)\,dt \ \textit{na}\ \mathcal{B}(a,b), \\
d\mu_{\mathcal{F}_1}(t) &= \Big(c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t) \Big)\,dt \ \textit{na}\ \mathcal{B}([a,b)), \\
D\mathcal{F}_2(t) &= x(t)\,d\mu(t) + c_4(t)y(t)\,dt + \,d\nu(t) \ \textit{na}\ \mathcal{B}(a,b), \\
d\mu_{\mathcal{F}_2}(t) &= x(t)\,d\mu(t) + c_4(t)y(t)\,dt + \,d\nu(t) \ \textit{na}\ \mathcal{B}([a,b)).
\end{aligned}$$

Důkaz. Z předpokladů lemmatu vidíme, že $\mathcal{F}_1$ je neurčitý Lebesgueův integrál funkce $c_1x + c_2y + g \in L^1(a,b)$. Z Věty 1 tak plyne, že $\mathcal{F}_1$ je absolutně spojitá funkce na $[a,b]$ a pro skoro všechna $t \in [a,b]$ platí

$$\mathcal{F}_1'(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t).$$

Díky Lemmatu 25 a Lemmatu 27 navíc víme, že

$$\begin{aligned}
D\mathcal{F}_1(t) &= \mathcal{F}_1'(t)\,dt = \Big(c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t) \Big)\,dt \text{ na } \mathcal{B}(a,b), \\
d\mu_{\mathcal{F}_1}(t) &= \mathcal{F}_1'(t)\,dt = \Big(c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t) \Big)\,dt \text{ na } \mathcal{B}([a,b)).
\end{aligned}$$

Položme
$$\psi_1(t) = y_0 + \int_{[a,t)} x(s)\,d\mu(s), \quad t \in [a,b].$$
Jelikož x je spojitá, tak je borelovská, a tedy μ-měřitelná. Díky omezenosti této funkce navíc $x \in L^1([a,b),\mathcal{B}([a,b)),|\mu|)$, a tak je $d\rho(s) := x(s)\,d\mu(s)$ podle Lemmatu 18 Radonova znaménková míra na $\mathcal{B}([a,b))$. Pro každé $a \le c < d \le b$ pak platí
$$\psi_1(d) - \psi_1(c) = \rho([c,d)),$$
z čehož díky Lemmatu 27 plyne, že $\psi_1 \in BPV([a,b])$, $\psi_1 \in BV(a,b)$, ψ_1 je zleva spojitá a
$$d\mu_{\psi_1}(t) = x(t)\,d\mu(t) \text{ na } \mathcal{B}([a,b)),\;\; D\psi_1(t) = x(t)\,d\mu(t) \text{ na } \mathcal{B}(a,b).$$

Analogicky odvodíme, že i funkce
$$\psi_2(t) := \int_{[a,t)} d\nu(s),\;\; \psi_3(t) := \int_a^t c_4(s)y(s)\,ds$$
patří do „obou prostorů s konečnou variací“, jsou zleva spojité a
$$\begin{aligned} d\mu_{\psi_2}(t) &= d\nu(t) \text{ na } \mathcal{B}([a,b)),\;\; D\psi_2(t) = d\nu(t) \text{ na } \mathcal{B}(a,b),\\ d\mu_{\psi_3}(t) &= c_4(t)y(t)\,dt \text{ na } \mathcal{B}([a,b)),\;\; D\psi_3(t) = c_4(t)y(t)\,dt \text{ na } \mathcal{B}(a,b). \end{aligned}$$

Jelikož $\mathcal{F}_2 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$, tak už snadno nahlédneme, že $\mathcal{F}_2 \in BV(a,b)$, $\mathcal{F}_2 \in BPV([a,b])$, $\mathcal{F}_2$ je zleva spojitá a
$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{F}_2} &= \mu_{\psi_1} + \mu_{\psi_2} + \mu_{\psi_3} \text{ na } \mathcal{B}([a,b)),\\ D\mathcal{F}_2 &= D\psi_1 + D\psi_2 + D\psi_3 \text{ na } \mathcal{B}(a,b), \end{aligned}$$
čímž je důkaz završen.

□

Předchozí lemma nás motivuje k následující definici.

Definice 19. *Dvojici funkcí x, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ nazveme řešením soustavy*
$$x'(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t), \tag{2.1}$$
$$Dy(t) = x(t)\,d\mu(t) + c_4(t)y(t)\,dt + d\nu(t) \tag{2.2}$$
na intervalu $[a,b]$ s počáteční podmínkou (x_0,y_0), pokud platí $x \in AC([a,b])$, $y \in BV(a,b)$ a pro každé $t \in [a,b]$
$$x(t) = x_0 + \int_a^t c_1(s)x(s)\,ds + \int_a^t c_2(s)y(s)\,ds + \int_a^t g(s)\,ds, \tag{2.3}$$
$$y(t) = y_0 + \int_{[a,t)} x(s)\,d\mu(s) + \int_a^t c_4(s)y(s)\,ds + \int_{[a,t)} d\nu(s). \tag{2.4}$$

Abychom viděli, proč a v jakém smyslu funkce x, y splňující integrální rovnice (2.3), (2.4) řeší soustavu (2.1), (2.2), dokažme následující lemma.

Lemma 29. *Dvojice x, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ řeší soustavu (2.1), (2.2) s počáteční podmínkou (x_0, y_0) právě tehdy, když $x \in AC([a,b])$, $y \in BPV([a,b])$, y je zleva spojitá, $(x(a), y(a)) = (x_0, y_0)$ a*

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t) \ \textit{pro s.v. } t \in [a,b], \\ d\mu_y(t) &= x(t)\,d\mu(t) + c_4(t)y(t)\,dt + d\nu(t) \ \textit{na } \mathcal{B}([a,b)). \end{aligned}$$

V takovém případě navíc

$$Dy(t) = x(t)\,d\mu(t) + c_4(t)y(t)\,dt + d\nu(t) \ \textit{na } \mathcal{B}(a,b).$$

Důkaz. $\Longrightarrow$: Z (2.3) a (2.4) pro $t = a$ zřejmě $(x(a), y(a)) = (x_0, y_0)$. Díky Lemmatu 23 je $y \in L^\infty(a,b)$. Jelikož $x \in AC([a,b])$ je spojitá, tak můžeme použít Lemma 28 na $\mathcal{F}_1 = x$, $\mathcal{F}_2 = y$ a dostaneme všechna zbývající tvrzení včetně dodatku o Dy.

$\Longleftarrow$: Podle části (c) Lemmatu 27 je $y \in BV(a,b)$. Díky Větě 1 pak pro každé $t \in [a,b]$ platí

$$x(t) = x(a) + \int_a^t x'(s)\,ds = x_0 + \int_a^t \Big(c_1(s)x(s) + c_2(s)y(s) + g(s)\Big)\,ds,$$

tj. je splněna rovnost (2.3). Z definice přírůstkové derivace pak pro každé $t \in [a,b]$

$$y(t) = y(a) + \int_{[a,t)} d\mu_y(s) = y_0 + \int_{[a,t)} x(s)\,d\mu(s) + \int_a^t c_4(s)y(s)\,ds + \int_{[a,t)} d\nu(s),$$

díky čemuž platí i rovnost (2.4).

$\square$

Podobně jako v klasické teorii tak máme dvě ekvivalentní formulace pro definici řešení. Hlavní rozdíl spočívá v tom, že nic netvrdíme o bodové derivaci funkce y, ačkoliv i ta podle [7, str. 841, Důsledek 15.3.5] existuje skoro všude vlastní a je integrovatelná, nýbrž o její měrové (resp. přírůstkové) derivaci, což je Radonova znaménková míra.

Nyní dokažme dříve zmíněné lemma o lepení řešení, které je další ilustrací toho, proč je nezbytné integrovat přes polouzavřené intervaly.

Lemma 30. *Nechť $a \le c < d < e \le b$. Nechť x_1, $y_1 : [c,d] \to \mathbb{R}$ řeší soustavu (2.1), (2.2) na $[c,d]$ s počáteční podmínkou (x_0, y_0) a x_2, $y_2 : [d,e] \to \mathbb{R}$ řeší tutéž soustavu na $[d,e]$ s počáteční podmínkou $(x_1(d), y_1(d))$.*

Potom funkce x, $y : [c,e] \to \mathbb{R}$ definované jako

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in [c,d], \\ x_2(t), & t \in (d,e], \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \in [c,d], \\ y_2(t), & t \in (d,e] \end{cases}$$

řeší soustavu (2.1), (2.2) na $[c,e]$ s počáteční podmínkou (x_0, y_0).

Navíc $Dy_{(c,d)} = Dy_1$ a $Dy_{(d,e)} = Dy_2$.

Důkaz. Díky tomu, že $x_1 \in C([c,d])$, $x_2 \in C([d,e])$ a $x_1(d) = x_2(d)$ dostáváme $x \in C([c,e])$. Z faktů $y_1 \in BPV([c,d])$, $y_2 \in BPV([d,e])$ plyne, že $y_1 \in L^\infty([c,d])$, $y_2 \in L^\infty([d,e])$, a tudíž $y \in L^\infty([c,e])$. Když ukážeme, že pro každé $t \in [c,e]$ platí

$$x(t) = x_0 + \int_c^t c_1(s)x(s)\,ds + \int_c^t c_2(s)y(s)\,ds + \int_c^t g(s)\,ds, \tag{2.5}$$

$$y(t) = y_0 + \int_{[c,t)} x(s)\,d\mu(s) + \int_c^t c_4(s)y(s)\,ds + \int_{[c,t)} d\nu(s), \tag{2.6}$$

tak už z toho díky Lemmatu 28 plyne i $x \in AC([c,e])$ a $y \in BV(c,e)$, a tedy podle Definice 19 (x,y) řeší (2.1), (2.2) na $[c,e]$ s počáteční podmínkou (x_0,y_0).

Rovnosti (2.5), (2.6) jsou zřejmě platné pro všechna $t \in [c,d]$, poněvadž na tomto intervalu je $x = x_1$, $y = y_1$ a dvojice (x_1,y_1) řeší (2.1), (2.2) na $[c,d]$ s počáteční podmínkou (x_0,y_0).

Nechť tedy $t \in (d,e]$. Poněvadž (x_2,y_2) řeší (2.1), (2.2) na $[d,e]$ s počáteční podmínkou $(x_1(d),y_1(d))$, tak

$$\begin{aligned}
y(t) = y_2(t) = y_1(d) + \int_{[d,t)} x_2(s)\,d\mu(s) + \int_d^t c_4(s)y_2(s)\,ds + \int_{[d,t)} d\nu(s) = \\
= y_0 + \int_{[c,d)} x_1(s)\,d\mu(s) + \int_c^d c_4(s)y_1(s)\,ds + \int_{[c,d)} d\nu(s) + \\
+ \int_{[d,t)} x_2(s)\,d\mu(s) + \int_d^t c_4(s)y_2(s)\,ds + \int_{[d,t)} d\nu(s) = \\
= y_0 + \int_{[c,d)} x(s)\,d\mu(s) + \int_c^d c_4(s)y(s)\,ds + \\
+ \int_{[d,t)} x(s)\,d\mu(s) + \int_d^t c_4(s)y(s)\,ds + \int_{[c,t)} d\nu(s) = \\
= y_0 + \int_{[c,t)} x(s)\,d\mu(s) + \int_c^t c_4(s)y(s)\,ds + \int_{[c,t)} d\nu(s).
\end{aligned}$$

Platnost rovnosti (2.5) ověříme analogicky.

Podle Lemmatu 28 platí

$$Dy(s) = x(s)\,d\mu(s) + c_4(s)y(s)\,ds + d\nu(s) \text{ na } \mathcal{B}(c,e)$$

a díky Lemmatu 24 je $Dy_{(c,d)}$ rovna zúžení Dy na $\mathcal{B}(c,d)$. Zúžíme-li míry v předchozí rovnosti na $\mathcal{B}(c,d)$, obdržíme rovnost

$$Dy_{(c,d)}(s) = x_1(s)\,d\mu(s) + c_4(s)y_1(s)\,ds + d\nu(s),$$

což je opět dle Lemmatu 28 rovno Dy_1. Analogicky ukážeme, že $Dy_{(d,e)} = Dy_2$. □

2.1 Existence a jednoznačnost řešení

První a zcela zásadní otázkou, která vyvstává při studiu jakékoliv rovnice, je otázka existence a jednoznačnosti jejího řešení. Nejprve dokážeme existenci a jednoznačnost řešení na libovolném dostatečně krátkém podintervalu a následně z toho odvodíme tentýž závěr i pro celý interval $[a,b]$. K tomu budeme potřebovat následující tzv. zobecněnou Banachovu větu o kontrakci.

Věta 5. (Zobecněná Banachova věta o kontrakci). *Nechť $(X, ||\cdot||_X)$ je Banachův prostor, $\mathcal{P}$ je metrický prostor a pro $\phi : X \times \mathcal{P} \to X$ platí, že*

(i) pro každé $x \in X$ je zobrazení $p \mapsto \phi(x,p)$ spojité,
(ii) $\exists\, 0 < \gamma < 1 \ \forall p \in \mathcal{P} \ \forall x, y \in X : ||\phi(x,p) - \phi(y,p)||_X \leq \gamma ||x-y||_X$.

Potom

(a) $\forall p \in \mathcal{P} \ \exists!\, x(p) \in X : \phi(x(p), p) = x(p)$,
(b) zobrazení $p \mapsto x(p)$ je spojité.

Důkaz. Vizte [1, str. 123, Theorem 1.244]

□

Podmínce (i) z předchozí věty budeme říkat *spojitá závislost na parametru* a podmínce (ii) *podmínka uniformní kontrakce.*

Pro potřeby pozdějších kapitol budeme uvažovat lehce obecnější úlohu s parametrem λ a další Radonovou znaménkovou mírou $([a,b), \mathcal{S}_\omega, \omega)$.

Lemma 31. *Nechť $K > 0$. Potom existuje $0 < T \leq b-a$ takové, že pro každý podinterval $[c,d] \subseteq [a,b]$ délky nejvýše T a každou trojici $(x_0, y_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times [-K, K]$ má soustava*

$$x'(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t), \tag{2.7}$$
$$Dy(t) = x(t)\, d(\lambda\omega + \mu)(t) + c_4(t)y(t)\, dt + \, d\nu(t) \tag{2.8}$$

na $[c,d]$ právě jedno řešení (x,y) splňující počáteční podmínku (x_0, y_0) ve smyslu Definice 19. Pokud navíc $(x_0^n, y_0^n, \lambda_n) \to (x_0, y_0, \lambda)$ v $\mathbb{R}^2 \times [-K,K]$ a (x_n, y_n) jsou řešení (2.7), (2.8) na $[c,d]$ s počáteční podmínkou (x_0^n, y_0^n) pro $\lambda = \lambda_n$, tak

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||_{C([c,d])} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} ||y_n - y||_{BV(c,d)} = 0,$$
$$y_n \to y \ \text{v normě prostoru } C([c,d]).$$

Důkaz. Ze spojitosti integrálu (Lemma 12) víme, že existuje $T > 0$ takové, že pro každý interval $[c,d] \subseteq [a,b]$ délky nejvýše T platí

$$||c_1||_{L^1([c,d])} < \frac{1}{4}, \ ||c_4||_{L^1([c,d])} < \frac{1}{4e}, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} 32e||c_2||_{L^1([c,d])} &< \frac{1}{1 + ||\mu||_{\mathcal{M}([a,b))} + K||\omega||_{\mathcal{M}([a,b))}} \leq \\ &\leq \frac{1}{1 + ||\mu||_{\mathcal{M}([c,d))} + K||\omega||_{\mathcal{M}([c,d))}}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Toto T lze navíc případně zmenšit tak, aby

$$\begin{aligned} 0 < 4T &< \frac{1}{1 + ||\mu||_{\mathcal{M}([a,b))} + K||\omega||_{\mathcal{M}([a,b))}} \leq \\ &\leq \frac{1}{1 + ||\mu||_{\mathcal{M}([c,d))} + K||\omega||_{\mathcal{M}([c,d))}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Nechť tedy $[c,d] \subseteq [a,b]$ je libovolný podinterval délky nejvýše T. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $c = 0$, $d = T$. Pro jednoduchost zápisu budeme psát $||\cdot||_1 := ||\cdot||_{L^1([0,T])} = ||\cdot||_{L^1(0,T)}$ a $||\cdot||_C := ||\cdot||_{C([0,T])}$. Pokud ρ bude znaménková míra definovaná na $\mathcal{B}([0,T))$, budeme značit $||\rho|| := ||\rho||_{\mathcal{M}([0,T))}$. Bude-li ρ definovaná pouze na $\mathcal{B}(0,T)$, tak $||\rho|| := ||\rho||_{\mathcal{M}(0,T)}$. Dále není těžké nahlédnout, že prostor $C([0,T]) \times BV(0,T)$ s normou

$$||(f_1,f_2)||_{C([0,T])\times BV(0,T)} := ||f_1||_{C([0,T])} + ||f_2||_{BV(0,T)}$$

je Banachův. Pro jednoduchost zápisu budeme značit

$$||(f_1,f_2)||_{C\times BV} := ||(f_1,f_2)||_{C([0,T])\times BV(0,T)}.$$

Zvolme $M > 0$ takové, že

$$4e||c_2||_1(||\mu|| + K||\omega||) < Te^M(||\mu|| + K||\omega||) < \frac{1}{4}. \tag{2.12}$$

To lze, protože z nerovnosti (2.10) plyne

$$4e||c_2||_1(||\mu|| + K||\omega||) < \frac{1}{8}$$

a ze vztahu (2.11) dostáváme

$$T(||\mu|| + K||\omega||) < \frac{1}{4}.$$

Hledáme tedy e^M-násobek čísla menšího než $\frac{1}{4}$ tak, aby byl výsledek mezi $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{4}$, což lze zařídit.

Všimněme si, že z (2.12) speciálně plyne

$$\frac{e}{T}e^{-M}||c_2||_1 < \frac{1}{4}. \tag{2.13}$$

Položme $L = \frac{1}{T}$ a definujme následující normy:

$$\begin{aligned}
||f_1||_{C,w} &= \sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt-M}|f_1(t)| \text{ na } C([0,T]),\\
||f_2||_{1,w} &= \int_0^T e^{-Lt}|f_2(t)|\,dt \text{ na } L^1(0,T) \text{ a } L^1([0,T]),\\
||\rho||_w &= \frac{T}{e}||\rho|| \text{ na } \mathcal{M}(0,T) \text{ a } \mathcal{M}([0,T)),\\
||f_2||_{BV,w} &= ||f_2||_{1,w} + ||Df_2||_w \text{ na } BV(0,T),\\
||(f_1,f_2)||_{C\times BV,w} &= ||f_1||_{C,w} + ||f_2||_{BV,w} \text{ na } C([0,T]) \times BV(0,T).
\end{aligned}$$

Není těžké nahlédnout, že jde o normy, které jsou ekvivalentní klasickým normám uvažovaným na těchto prostorech, díky čemuž jde opět o Banachovy prostory.

Nechť $\mathcal{F} : C([0,T]) \times BV(0,T) \times \mathbb{R}^2 \times [-K,K] \to C([0,T]) \times BV(0,T)$ je definováno jako $\mathcal{F}(x,y,x_0,y_0,\lambda) = (\mathcal{F}_1(x,y,x_0,y_0,\lambda), \mathcal{F}_2(x,y,x_0,y_0,\lambda))$, kde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(t) &= x_0 + \int_0^t \Big(c_1(s)x(s) + c_2(s)y(s) + g(s)\Big)\,ds, \quad t \in [0,T],\\
\mathcal{F}_2(t) &= y_0 + \int_{[0,t)} x(s)\,d(\lambda\omega + \mu)(s) + \int_0^t c_4(s)y(s)\,ds + \int_{[0,t)} d\nu(s), \quad t \in (0,T)
\end{aligned}$$

při zkráceném značení $\mathcal{F}_1(t) = \mathcal{F}_1(x, y, x_0, y_0, \lambda)(t)$ a obdobně pro $\mathcal{F}_2(t)$.

Jelikož $BV(0,T) \subseteq L^\infty(0,T)$, tak z Lemmatu 28 víme, že $\mathcal{F}_1 \in AC([0,T])$, $\mathcal{F}_2 \in BV(0,T)$ a

$$D\mathcal{F}_2(s) = x(s)\, d(\lambda\omega + \mu)(s) + c_4(s)y(s)\, ds + d\nu(s) \text{ na } \mathcal{B}(0,T).$$

$\mathcal{F}$ je tak skutečně zobrazení do $C([0,T]) \times BV(0,T)$ a jeho složky $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ patří přesně do těch prostorů, do nichž má patřit řešení soustavy (2.7), (2.8). Tvrdíme, že když má zobrazení $\mathcal{F}$ se zafixovanými argumenty (x_0, y_0, λ) právě jeden pevný bod, tak už má soustava (2.7), (2.8) na $[0,T]$ právě jedno řešení s počáteční podmínkou (x_0, y_0).

Pokud by totiž (x_1, y_1), (x_2, y_2) byla dvě taková řešení, tak po zúžení funkcí y_1 a y_2 na $(0,T)$ díky Definici 19 snadno nahlédneme, že obě dvojice jsou pevným bodem $\mathcal{F}$, a tedy $x_1 = x_2$ na $[0,T]$ a $y_1 = y_2$ skoro všude v $(0,T)$. Díky stejné počáteční podmínce ale $y_1(0) = y_2(0)$ a s pomocí spojitosti zleva pak $y_1 = y_2$ na $[0,T]$, a tedy obě řešení jsou stejná. Řešení tudíž existuje nejvýše jedno.

Je-li (x,y) pevný bod $\mathcal{F}$ a funkci $y = \mathcal{F}_2$ rozšíříme na $[0,T]$ stejným předpisem, který splňuje na $(0,T)$, tak zřejmě $x \in AC([0,T])$, $y \in BV(0,T)$ a jsou splněny integrální rovnice z Definice 19, a tedy (x,y) řeší (2.7), (2.8) na $[0,T]$ s počáteční podmínkou (x_0, y_0). Jednoznačně určený pevný bod (x,y) zobrazení $\mathcal{F}$ je tudíž zároveň jednoznačně určeným řešením (2.7), (2.8) na $[0,T]$ s počáteční podmínkou (x_0, y_0) (po rozšíření $y = \mathcal{F}_2$ jako výše).

Naším cílem tak bude ukázat, že jsou splněny předpoklady Věty 5 pro

$$X = \Big(C([0,T]) \times BV(0,T), ||\cdot||_{C\times BV,w}\Big),\ \mathcal{P} = \mathbb{R}^2 \times [-K,K],\ \phi = \mathcal{F},$$

přičemž při tomto značení je $(x,y) \in X$ a $(x_0, y_0, \lambda) \in \mathcal{P}$.

Nejprve ukážeme, že $\mathcal{F}$ je uniformní kontrakce, což rozdělíme do čtyř kroků. Nechť $x_1, x_2 \in C([0,T])$; $y_1, y_2 \in BV(0,T)$ a $(x_0, y_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times [-K,K]$. Označme až do odvolání $\mathcal{F}(\cdot,\cdot) = \mathcal{F}(\cdot,\cdot,x_0,y_0,\lambda)$ a stejně tak pro $\mathcal{F}_1$ a $\mathcal{F}_2$. Z definice $\mathcal{F}$ platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(x_1,y_1)(t) - \mathcal{F}_1(x_2,y_2)(t) &= \int_0^t c_1(s)\Big(x_1(s) - x_2(s)\Big) + c_2(s)\Big(y_1(s) - y_2(s)\Big)\, ds,\\
\mathcal{F}_2(x_1,y_1)(t) - \mathcal{F}_2(x_2,y_2)(t) &= \int_{[0,t)} \Big(x_1(s) - x_2(s)\Big)\, d(\lambda\omega + \mu)(s) +\\
&\quad + \int_0^t c_4(s)\Big(y_1(s) - y_2(s)\Big)\, ds.
\end{aligned}$$

Krok 1. Pro libovolné $t \in [0,T]$ máme

$$\begin{aligned}
&e^{-Lt-M}\left|\int_0^t c_1(s)\Big(x_1(s) - x_2(s)\Big) + c_2(s)\Big(y_1(s) - y_2(s)\Big)\, ds\right| \leq\\
&\leq e^{-Lt-M}\int_0^t |c_1(s)|\cdot|x_1(s) - x_2(s)|\, ds + e^{-Lt-M}\int_0^t |c_2(s)|\cdot|y_1(s) - y_2(s)|\, ds.
\end{aligned}$$

Označme integrály na posledním řádku po řadě jako I a II. Potom

$$\begin{aligned}
I &\leq e^{-Lt-M}\int_0^t |c_1(s)|e^{Ls+M}||x_1 - x_2||_{C,w}\, ds =\\
&= \Big(\int_0^t e^{L(s-t)}|c_1(s)|\, ds\Big)\, ||x_1 - x_2||_{C,w} \leq ||c_1||_1||x_1 - x_2||_{C,w} \leq \frac{1}{4}||x_1 - x_2||_{C,w},
\end{aligned}$$

přičemž poslední nerovnost platí díky (2.9).

Pro odhad II využijeme Lemma 23, díky němuž dostáváme

$$||y_1 - y_2||_{L^\infty(0,T)} \leq ||D(y_1 - y_2)|| + \frac{1}{T}||y_1 - y_2||_1 = \frac{e}{T}||D(y_1 - y_2)||_w +$$
$$+ \frac{1}{T}\int_0^T e^{Ls}e^{-Ls}|y_1(s) - y_2(s)|\, ds \leq \frac{e}{T}||D(y_1 - y_2)||_w + \frac{e^{LT}}{T}||y_1 - y_2||_{1,w} =$$
$$= \frac{e}{T}||D(y_1 - y_2)||_w + \frac{e}{T}||y_1 - y_2||_{1,w} = \frac{e}{T}||y_1 - y_2||_{BV,w}. \tag{2.14}$$

Díky (2.14) pak obdržíme odhad

$$II \leq e^{-M}||c_2||_1 \cdot ||y_1 - y_2||_{L^\infty(0,T)} \leq e^{-M}||c_2||_1 \frac{e}{T}||y_1 - y_2||_{BV,w} \leq$$
$$\leq \frac{1}{4}||y_1 - y_2||_{BV,w},$$

přičemž poslední nerovnost plyne z (2.13). Celkem tak

$$||\mathcal{F}_1(x_1, y_1) - \mathcal{F}_1(x_2, y_2)||_{C,w} =$$
$$= \sup_{t\in[0,T]} \left(e^{-Lt-M}\left|\int_0^t c_1(s)\big(x_1(s) - x_2(s)\big) + c_2(s)\big(y_1(s) - y_2(s)\big)\, ds\right|\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{4}||x_1 - x_2||_{C,w} + \frac{1}{4}||y_1 - y_2||_{BV,w} = \frac{1}{4}||(x_1, y_1) - (x_2, y_2)||_{C\times BV,w}.$$

Krok 2. Podle Fubiniho věty je

$$J := \int_0^T e^{-Lt}\left|\int_{[0,t)} x_1(s) - x_2(s)\, d(\lambda\omega + \mu)(s) + \int_0^t c_4(s)\big(y_1(s) - y_2(s)\big)\, ds\right| dt \leq$$
$$\leq \int_0^T e^{-Lt}\left(\int_{[0,t)} |x_1(s) - x_2(s)|\, d(|\lambda||\omega| + |\mu|)(s)\right) dt +$$
$$+ \int_0^T e^{-Lt}\left(\int_0^t |c_4(s)| \cdot |y_1(s) - y_2(s)|\, ds\right) dt =$$
$$= \int_{[0,T)} |x_1(s) - x_2(s)| \left(\int_s^T e^{-Lt}\, dt\right) d(|\lambda||\omega| + |\mu|)(s) +$$
$$+ \int_0^T |c_4(s)| \cdot |y_1(s) - y_2(s)| \left(\int_s^T e^{-Lt}\, dt\right) ds.$$

Jelikož

$$\int_s^T e^{-Lt}\, dt = \frac{1}{L}\left(e^{-Ls} - e^{-LT}\right) \leq \frac{1}{L}e^{-Ls} = Te^{-Ls},$$

tak díky (2.14) dostáváme

$$J \leq Te^M \int_{[0,T)} e^{-Ls-M}|x_1(s) - x_2(s)|\, d(|\lambda||\omega| + |\mu|)(s) +$$
$$+ T\int_0^T e^{-Ls}|c_4(s)| \cdot |y_1(s) - y_2(s)|\, ds \leq Te^M||x_1 - x_2||_{C,w}\left(K||\omega|| + ||\mu||\right) +$$
$$+ T||c_4||_1 \cdot ||y_1 - y_2||_{L^\infty(0,T)} \leq Te^M\left(K||\omega|| + ||\mu||\right)||x_1 - x_2||_{C,w} +$$
$$+ T||c_4||_1 \frac{e}{T}||y_1 - y_2||_{BV,w} \leq \frac{1}{4}||x_1 - x_2||_{C,w} + \frac{1}{4}||y_1 - y_2||_{BV,w} =$$
$$= \frac{1}{4}||(x_1, y_1) - (x_2, y_2)||_{C\times BV,w},$$

přičemž poslední nerovnost platí díky (2.9) a (2.12).

Tudíž

$$||\mathcal{F}_2(x_1,y_1)-\mathcal{F}_2(x_2,y_2)||_{1,w}=J\leq\frac{1}{4}||(x_1,y_1)-(x_2,y_2)||_{C\times BV,w}.$$

Krok 3. Podle Lemmatu 28 platí

$$\begin{aligned}D\Big(\mathcal{F}_2(x_1,y_1)-\mathcal{F}_2(x_2,y_2)\Big)(s)=\Big(x_1(s)-x_2(s)\Big)\,d(\lambda\omega+\mu)(s)+\\+c_4(s)\Big(y_1(s)-y_2(s)\Big)\,ds.\end{aligned}$$

.

Díky Lemmatu 18 a Lemmatu 19 pak

$$\begin{aligned}\Big|D\Big(\mathcal{F}_2(x_1,y_1)-\mathcal{F}_2(x_2,y_2)\Big)\Big|(s)\leq|x_1(s)-x_2(s)|\,d(|\lambda||\omega|+|\mu|)(s)+\\+|c_4(s)|\cdot|y_1(s)-y_2(s)|\,ds.\end{aligned}$$

.

Tudíž s využitím (2.14)

$$\begin{aligned}&||D\left(\mathcal{F}_2(x_1,y_1)-\mathcal{F}_2(x_2,y_2)\right)||_w\leq\frac{T}{e}\int_{(0,T)}|x_1(s)-x_2(s)|\,d(|\lambda||\omega|+|\mu|)(s)+\\&+\frac{T}{e}\int_0^T|c_4(s)|\cdot|y_1(s)-y_2(s)|\,ds\leq\frac{T}{e}\left(K||\omega||+||\mu||\right)e^{LT+M}||x_1-x_2||_{C,w}+\\&+\frac{T}{e}||c_4||_1\frac{e}{T}||y_1-y_2||_{BV,w}=Te^M(K||\omega||+||\mu||)||x_1-x_2||_{C,w}+\\&+||c_4||_1||y_1-y_2||_{BV,w}\leq\frac{1}{4}||x_1-x_2||_{C,w}+\frac{1}{4}||y_1-y_2||_{BV,w}=\\&=\frac{1}{4}||(x_1,y_1)-(x_2,y_2)||_{C\times BV,w},\end{aligned}$$

přičemž poslední nerovnost platí díky (2.9) a (2.12).

Krok 4. Celkem jsme zjistili, že

$$\begin{aligned}&||\mathcal{F}(x_1,y_1)-\mathcal{F}(x_2,y_2)||_{C\times BV,w}=||\mathcal{F}_1(x_1,y_1)-\mathcal{F}_1(x_2,y_2)||_{C,w}+\\&+||\mathcal{F}_2(x_1,y_1)-\mathcal{F}_2(x_2,y_2)||_{1,w}+||D\left(\mathcal{F}_2(x_1,y_1)-\mathcal{F}_2(x_2,y_2)\right)||_w\leq\\&\leq\frac{1}{4}||(x_1,y_1)-(x_2,y_2)||_{C\times BV,w}+\frac{1}{4}||(x_1,y_1)-(x_2,y_2)||_{C\times BV,w}+\\&+\frac{1}{4}||(x_1,y_1)-(x_2,y_2)||_{C\times BV,w}=\frac{3}{4}||(x_1,y_1)-(x_2,y_2)||_{C\times BV,w},\end{aligned}$$

neboli $\mathcal{F}$ je skutečně uniformní kontrakce.

Nyní ověříme, že $\mathcal{F}$ splňuje i podmínku spojité závislosti na parametru. Nechť tedy $x\in C([0,T])$; $y\in BV(0,T)$; (x_0,y_0,λ), $(\overline{x_0},\overline{y_0},\overline{\lambda})\in\mathbb{R}^2\times[-K,K]$. Na $R^2\times[-K,K]$ uvažujme „manhattanskou“ normu $|(x_0,y_0,\lambda)|:=|x_0|+|y_0|+|\lambda|$, která je ekvivalentní standardní eukleidovské normě. Pro jednoduchost označme $\mathcal{F}(\cdot,\cdot,\cdot)=\mathcal{F}(x,y,\cdot,\cdot,\cdot)$ a stejně tak pro $\mathcal{F}_1$ a $\mathcal{F}_2$.

Pro každé $t\in[0,T]$ platí

$$\mathcal{F}_1(x_0,y_0,\lambda)(t)-\mathcal{F}_1(\overline{x_0},\overline{y_0},\overline{\lambda})(t)=x_0-\overline{x_0},$$

a tudíž

$$||\mathcal{F}_1(x_0, y_0, \lambda) - \mathcal{F}_1(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})||_C \leq |(x_0, y_0, \lambda) - (\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})|.$$

Dále pro každé $t \in (0, T)$

$$|\mathcal{F}_2(x_0, y_0, \lambda)(t) - \mathcal{F}_2(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})(t)| = \left|y_0 - \overline{y_0} + (\lambda - \overline{\lambda}) \int_{[0,t)} x(s)\, d\omega(s)\right| \leq$$
$$\leq |y_0 - \overline{y_0}| + |\lambda - \overline{\lambda}| \cdot ||x||_C \cdot ||\omega|| \leq R|(x_0, y_0, \lambda) - (\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})|,$$

kde $R := \max\{1, ||x||_C \cdot ||\omega||\}$. Z toho plyne, že

$$||\mathcal{F}_2(x_0, y_0, \lambda) - \mathcal{F}_2(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})||_1 \leq RT|(x_0, y_0, \lambda) - (\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})|.$$

Měrovou derivací funkce $\mathcal{F}_2(x_0, y_0, \lambda) - \mathcal{F}_2(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})$ je míra $(\lambda - \overline{\lambda})x(s)\, d\omega(s)$, a tak díky Lemmatu 18

$$||D\left(\mathcal{F}_2(x_0, y_0, \lambda) - \mathcal{F}_2(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})\right)|| = |\lambda - \overline{\lambda}| \int_{(0,T)} |x(s)|\, d|\omega|(s) \leq$$
$$\leq |\lambda - \overline{\lambda}| \cdot ||x||_C \cdot ||\omega|| \leq R|(x_0, y_0, \lambda) - (\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})|.$$

Je-li nyní $\epsilon > 0$ dáno, tak zvolme $0 < \delta < \min\{\frac{\epsilon}{3}, \frac{\epsilon}{3RT}, \frac{\epsilon}{3R}\}$. Potom z nerovnosti $|(x_0, y_0, \lambda) - (\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})| < \delta$ díky předchozím výpočtům plyne, že

$$||\mathcal{F}(x_0, y_0, \lambda) - \mathcal{F}(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})||_{C\times BV} = ||\mathcal{F}_1(x_0, y_0, \lambda) - \mathcal{F}_1(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})||_C +$$
$$+ ||\mathcal{F}_2(x_0, y_0, \lambda) - \mathcal{F}_2(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})||_1 + ||D\left(\mathcal{F}_2(x_0, y_0, \lambda) - \mathcal{F}_2(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{\lambda})\right)|| \leq$$
$$\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Zobrazení $(x_0, y_0, \lambda) \mapsto \mathcal{F}(x, y, x_0, y_0, \lambda)$ je tedy skutečně spojité zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^2 \times [-K, K]$ s manhattanskou normou do $C([0, T]) \times BV(0, T)$ s normou $||(\cdot, \cdot)||_{C\times BV}$, a tedy i jako zobrazení z $\mathbb{R}^2 \times [-K, K]$ s eukleidovskou normou do $C([0, T]) \times BV(0, T)$ s normou $||(\cdot, \cdot)||_{C\times BV,w}$.

Použitím zobecněné Banachovy věty o kontrakci (Věta 5) na

$$X = \left(C([0, T]) \times BV(0, T), ||\cdot||_{C\times BV,w}\right), \;\; \mathcal{P} = \mathbb{R}^2 \times [-K, K], \;\; \phi = \mathcal{F}$$

dostaneme z bodu (a) této věty existenci a jednoznačnost řešení na $[0, T]$. Navíc pokud trojice $(x_0^n, y_0^n, \lambda_n)$ konvergují k (x_0, y_0, λ) v prostoru $\mathbb{R}^2 \times [-K, K]$ a (x_n, y_n) jsou řešení (2.7), (2.8) na $[0, T]$ s počáteční podmínkou (x_0^n, y_0^n) pro $\lambda = \lambda_n$, tak z bodu (b) Banachovy věty použité na tytéž prostory platí

$$\lim_{n\to\infty} ||(x_n, y_n) - (x, y)||_{C\times BV,w} = 0,$$

z čehož plyne

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||_{C,w} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} ||y_n - y||_{BV,w} = 0$$

a díky ekvivalenci norem též

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||_C = 0, \quad \lim_{n\to\infty} ||y_n - y||_{BV(0,T)} = 0.$$

Zbývá ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[0,T]}|y_n(t)-y(t)|\right)=0.$$

Všimněme si, že z $\lim_{n\to\infty}||x_n-x||_C=0$ plyne $\alpha:=\sup_{n\in\mathbb{N}}||x_n||_C<\infty$.

Pro každé $t\in[0,T]$ a každé $n\in\mathbb{N}$ tak

$$\Big|\int_{[0,t)}\lambda_n x_n(s)-\lambda x(s)\,d\omega(s)\Big|=\Big|\int_{[0,t)}(\lambda_n-\lambda)\,x_n(s)+\lambda\Big(x_n(s)-x(s)\Big)\,d\omega(s)\Big|\leq$$
$$\leq\alpha|\lambda_n-\lambda|\cdot||\omega||+|\lambda|\cdot||x_n-x||_C\cdot||\omega||.$$

Díky (2.14) navíc pro všechna $t\in[0,T]$ a všechna $n\in\mathbb{N}$ platí

$$\Big|\int_0^t c_4(s)\Big(y_n(s)-y(s)\Big)\,ds\Big|\leq||c_4||_1\cdot||y_n-y||_{L^\infty(0,T)}\leq\frac{e}{T}||c_4||_1\cdot||y_n-y||_{BV,w}.$$

Jsou-li tedy $t\in[0,T]$ a $n\in\mathbb{N}$ libovolné, tak

$$|y_n(t)-y(t)|=\Big|y_0^n-y_0+\int_{[0,t)}\lambda_n x_n(s)-\lambda x(s)\,d\omega(s)+$$
$$+\int_{[0,t)}x_n(s)-x(s)\,d\mu(s)+\int_0^t c_4(s)\Big(y_n(s)-y(s)\Big)\,ds\Big|\leq$$
$$\leq|y_0^n-y_0|+\alpha|\lambda_n-\lambda|\cdot||\omega||+|\lambda|\cdot||x_n-x||_C\cdot||\omega||+||x_n-x||_C\cdot||\mu||+$$
$$+\frac{e}{T}||c_4||_1\cdot||y_n-y||_{BV,w}=:V(n).$$

Vidíme, že díky vztahům

$$\lim_{n\to\infty}|(x_0^n,y_0^n,\lambda_n)-(x_0,y_0,\lambda)|=0,\ \ \lim_{n\to\infty}||x_n-x||_C=0,\ \ \lim_{n\to\infty}||y_n-y||_{BV,w}=0$$

platí $\lim_{n\to\infty}V(n)=0$, a tudíž

$$0\leq\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[0,T]}|y_n(t)-y(t)|\right)\leq\lim_{n\to\infty}V(n)=0,$$

neboli skutečně

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[0,T]}|y_n(t)-y(t)|\right)=0.$$

□

Předchozí důkaz používá podobně jako klasická teorie argument s pevným bodem, ovšem ověření podmínky uniformní kontrakce je zde výrazně delší a oproti standardnímu důkazu zavádíme „převážené“ ekvivalentní normy. Podívejme se na hlavní důvody, proč jsme se k tomuto kroku uchýlili.

Funkce y již není spojitá, a tak Banachovu větu nelze použít na prostor $C([0,T])\times C([0,T])$, ale místo toho jsme pro y zvolili prostor $BV(0,T)$. To nám umožňuje použít bodový odhad

$$||y_1-y_2||_{L^\infty(0,T)}\leq\frac{1}{T}||y_1-y_2||_{L^1(0,T)}+||D(y_1-y_2)||_{\mathcal{M}(0,T)}$$

z Lemmatu 23, jenž však obsahuje zlomek $1/T$, který jde pro $T \to 0+$ do nekonečna, což je pro potřeby získání uniformní kontrakce nepříjemné. Druhou překážkou je možná nespojitost měr μ a ω. Pokud je $c_3 \in L^1([0,T])$, tak platí, že pro $T \to 0+$ jde $\int_0^T |c_3(s)|\, ds$ k nule, avšak $\int_{[0,T)} d|\mu|(s)$ totéž kvůli možné nespojitosti míry $|\mu|$ v bodě 0 splňovat nemusí. To jsou hlavní důvody pro zavedení ekvivalentních norem, díky nimž už zobrazení $\mathcal{F}$ je uniformní kontrakce.

Nyní je již vše připraveno pro to, abychom pomocí lepení řešení jako v klasické teorii dokázali existenci a jednoznačnost řešení na celém intervalu $[a,b]$.

Věta 6. *Pro každou trojici $(x_0, y_0, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ má soustava*

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t),\\
Dy(t) &= x(t)\, d(\lambda\omega + \mu)(t) + c_4(t)y(t)\, dt + \, d\nu(t)
\end{aligned}
$$

na $[a,b]$ právě jedno řešení (x,y) splňující počáteční podmínku (x_0,y_0) ve smyslu Definice 19. Pokud navíc $(x_0^n, y_0^n, \lambda_n) \to (x_0, y_0, \lambda)$ v $\mathbb{R}^3$ a (x_n, y_n) jsou řešení (2.7), (2.8) *na $[a,b]$ s počáteční podmínkou (x_0^n, y_0^n) pro $\lambda = \lambda_n$, tak*

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||_{C([a,b])} = 0,\\
&\lim_{n\to\infty} ||y_n - y||_{BV(a,b)} = 0,\\
&y_n \to y \text{ v normě prostoru } C([a,b]).
\end{aligned}
$$

Důkaz. Nechť $(x_0, y_0, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ a $K > 0$ je pevně zvoleno tak, aby $\lambda \in (-K, K)$. Díky Lemmatu 31 víme, že existuje $T > 0$ takové, že pokud ve znění věty nahradíme interval $[a,b]$ libovolným uzavřeným podintervalem délky nejvýše T a podmínku $(x_0, y_0, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ nahradíme podmínkou $(x_0, y_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times [-K, K]$, tak platí její závěr. Z toho již plyne existence i jednoznačnost řešení na celém $[a,b]$.

Co se týče existence, tak vezmeme řešení (x_1, y_1) soustavy (2.7), (2.8) na intervalu $[a, a+T]$ s počáteční podmínkou (x_0, y_0) a podle Lemmatu 30 ho „slepíme“ s řešením (x_2, y_2) téže soustavy na intervalu $[a+T, a+2T]$ s počáteční podmínkou $(x_1(a+T), y_1(a+T))$. Tím dostaneme řešení (x,y) na intervalu $[a, a+2T]$ s počáteční podmínkou (x_0, y_0) a takto postupujeme dále, dokud nezískáme řešení na celém intervalu $[a,b]$ splňující počáteční podmínku (x_0, y_0).

Jsou-li $(x,y), (\overline{x}, \overline{y})$ dvě řešení na intervalu $[a,b]$ splňující počáteční podmínku (x_0, y_0), tak jsou to také řešení na každém uzavřeném podintervalu délky nejvýše T, speciálně na intervalech $[a, a+T]$, $[a+T, a+2T]$ a tak dále. Na těchto intervalech je ale řešení svou počáteční podmínkou určeno jednoznačně, a tak postupně dostaneme rovnosti $x = \overline{x}$, $y = \overline{y}$ na $[a, a+T]$, $[a+T, a+2T]$ atd., tudíž i na celém $[a,b]$.

Zbývá ukázat tvrzení o limitách. Nechť tedy $(x_0^n, y_0^n, \lambda_n) \in \mathbb{R}^3$ konvergují k $(x_0, y_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times (-K, K)$ a bez újmy na obecnosti nechť $\lambda_n \in (-K, K)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme jako (x_n, y_n) řešení na intervalu $[a,b]$ s počáteční podmínkou (x_0^n, y_0^n) pro $\lambda = \lambda_n$. Nalezněme dělení $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1} < a_k = b$ takové, že

$$
\begin{aligned}
&\forall j \in \{1, \ldots, k\} : \frac{T}{2} \le |a_j - a_{j-1}| \le T,\\
&\forall n \in \mathbb{N}\ \forall j \in \{1, \ldots, k-1\} : |D(y_n - y)|(\{a_j\}) = 0.
\end{aligned}
$$

To lze zařídit, poněvadž každá konečná míra definovaná na všech jednobodových podmnožinách intervalu (a, b) je nespojitá v nejvýše spočetně mnoha bodech (plyne z [5, str. 44, Věta 19.9]) a máme spočetně mnoho takových měr, takže je potřeba vyhnout se pouze spočetně mnoha bodům.

Z Lemmatu 31 víme, že

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||_{C([a,a_1])} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} ||y_n - y||_{BV(a,a_1)} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[a,a_1]} |y_n(t) - y(t)| \right) = 0.$$

Z toho speciálně plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} |x_n(a_1) - x(a_1)| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} |y_n(a_1) - y(a_1)| = 0,$$

a tudíž $(x_n(a_1), y_n(a_1), \lambda_n)$ konvergují k $(x(a_1), y(a_1), \lambda)$ v $R^2 \times [-K, K]$. Opět z Lemmatu 31 tak dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||_{C([a_1,a_2])} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} ||y_n - y||_{BV(a_1,a_2)} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[a_1,a_2]} |y_n(t) - y(t)| \right) = 0.$$

Z nerovností

$$||x_n - x||_{C([a,a_2])} \leq ||x_n - x||_{C([a,a_1])} + ||x_n - x||_{C([a_1,a_2])},$$
$$\sup_{t\in[a,a_2]} |y_n(t) - y(t)| \leq \sup_{t\in[a,a_1]} |y_n(t) - y(t)| + \sup_{t\in[a_1,a_2]} |y_n(t) - y(t)|$$

již nyní díky předchozímu snadno plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||_{C([a,a_2])} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[a,a_2]} |y_n(t) - y(t)| \right) = 0.$$

Dále

$$||D(y_n - y)||_{\mathcal{M}(a,a_2)} = |D(y_n - y)|((a, a_2)) = |D(y_n - y)|((a, a_1))+$$
$$+ |D(y_n - y)|(\{a_1\}) + |D(y_n - y)|((a_1, a_2)) = |D(y_n - y)|((a, a_1))+$$
$$+ |D(y_n - y)|((a_1, a_2)) = ||D(y_n - y)||_{\mathcal{M}(a,a_1)} + ||D(y_n - y)||_{\mathcal{M}(a_1,a_2)}.$$

Uvědomme si, že díky poslední části Lemmatu 30 platí, že když zúžíme měrovou derivaci řešení na intervalu $[a, a_2]$ na $\mathcal{B}(a, a_1)$, tak je to totéž jako uvažovat ono řešení pouze na intervalu $[a, a_1]$ a vzít jeho měrovou derivaci. Totéž platí pro zúžení na $\mathcal{B}(a_1, a_2)$. To nám umožňuje použít dokázané výsledky pro limitu BV-norem na intervalech (a, a_1) a (a_1, a_2).

Jelikož navíc

$$||y_n - y||_{L^1(a,a_2)} = ||y_n - y||_{L^1(a,a_1)} + ||y_n - y||_{L^1(a_1,a_2)},$$

tak

$$||y_n - y||_{BV(a,a_2)} = ||y_n - y||_{BV(a,a_1)} + ||y_n - y||_{BV(a_1,a_2)},$$

a tudíž

$$\lim_{n\to\infty} ||y_n - y||_{BV(a,a_2)} = 0.$$

Analogickým postupem rozšíříme výsledky o limitách na celý interval $[a, b]$.

□

2.2 Homogenní soustava

V této sekci se budeme zabývat tzv. homogenní soustavou, tj. případem $g = 0$, $\nu = 0$, a dokážeme analogické věty, které pro ni platí v klasické teorii. Následující důkazy jsou svou myšlenkou velmi podobné těm standardním díky tomu, že pokud derivujeme spojitou a zleva spojitou funkci třídy $BPV([a, b])$, tak pro přírůstkovou derivaci platí známý vzorec pro derivaci součinu (vizte Lemma 26). Pouze v důkazu věty o variaci konstant narazíme na případ, kdy derivujeme dvě zleva spojité funkce, z nichž ani jedna nemusí být také zprava spojitá, a tak je potřeba být opatrnější.

Věta 7. *Množina všech řešení homogenní soustavy*

$$x'(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t), \tag{2.15}$$
$$Dy(t) = x(t)\, d\mu(t) + c_4(t)y(t)\, dt \tag{2.16}$$

tvoří podprostor vektorového prostoru $C([a, b]) \times L^\infty([a, b])$ *dimenze* 2. *Libovolnou bázi* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *tohoto podprostoru nazveme* ***fundamentálním systémem*** *soustavy* (2.15), (2.16). *Maticovou funkci* $\mathbb{F} : [a, b] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ *definovanou předpisem*

$$\mathbb{F}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$$

pak v takovém případě nazveme ***fundamentální maticí*** *soustavy* (2.15), (2.16).

Dále je-li $(\overline{x}, \overline{y})$ *pevně dané (tzv. partikulární) řešení soustavy*

$$x'(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t), \tag{2.17}$$
$$Dy(t) = x(t)\, d\mu(t) + c_4(t)y(t)\, dt + d\nu(t), \tag{2.18}$$

tak pro řešení (x, y) *této soustavy splňující počáteční podmínku* (x_0, y_0) *existuje právě jedna dvojice* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *taková, že pro každé* $t \in [a, b]$ *platí*

$$x(t) = \overline{x}(t) + \alpha x_1(t) + \beta x_2(t),$$
$$y(t) = \overline{y}(t) + \alpha y_1(t) + \beta y_2(t).$$

Důkaz. Označme množinu všech řešení soustavy (2.15), (2.16) jako $\mathcal{H}$. Nechť (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathcal{H}$ splňují $(x_1(a), y_1(a)) = (1, 0)$, $(x_2(a), y_2(a)) = (0, 1)$ a nechť dále $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Označme $\hat{x} = \alpha x_1 + \beta x_2$ a $\hat{y} = \alpha y_1 + \beta y_2$. Potom pro každý podinterval $[c, d] \subseteq [a, b]$ platí

$$(\alpha\mu_{y_1} + \beta\mu_{y_2})([c, d)) = \alpha\mu_{y_1}([c, d)) + \beta\mu_{y_2}([c, d)) = \alpha\,(y_1(d) - y_1(c)) +$$
$$+ \beta\,(y_2(d) - y_2(c)) = (\alpha y_1(d) + \beta y_2(d)) - (\alpha y_1(c) + \beta y_2(c)) = \hat{y}(d) - \hat{y}(c),$$

a tedy podle Lemmatu 27 je $\hat{y}$ zleva spojitá funkce patřící do $BPV([a, b])$ a

$$d\mu_{\hat{y}}(s) = \alpha\, d\mu_{y_1}(s) + \beta\, d\mu_{y_2}(s) = \alpha\Big(x_1(s)\, d\mu(s) + c_4(s)y_1(s)\, ds\Big) +$$
$$+ \beta\Big(x_2(s)\, d\mu(s) + c_4(s)y_2(s)\, ds\Big) = \hat{x}(s)\, d\mu(s) + c_4(s)\hat{y}(s)\, ds.$$

Dále pro skoro všechna $t \in [a, b]$ platí

$$(\hat{x}(t))' = \alpha x_1'(t) + \beta x_2'(t) = \alpha\Big(c_1(t)x_1(t) + c_2(t)y_1(t)\Big) +$$
$$+ \beta\Big(c_1(t)x_2(t) + c_2(t)y_2(t)\Big) = c_1(t)\hat{x}(t) + c_2(t)\hat{y}(t)$$

a $\hat{x}$ je jakožto součet absolutně spojitých funkcí také absolutně spojitá. Díky Lemmatu 29 je tak $(\hat{x}, \hat{y})$ jednoznačně určeným řešením soustavy (2.15), (2.16) splňujícím počáteční podmínku

$$\alpha(x_1(a), y_1(a)) + \beta(x_2(a), y_2(a)) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) = (\alpha, \beta),$$

a tedy dvojice (x_1, y_1) a (x_2, y_2) generují $\mathcal{H}$. Díky lineární nezávislosti jejich hodnot v bodě a jsou tyto dvojice navíc lineárně nezávislé, a tak tvoří bázi $\mathcal{H}$, z čehož plyne $\dim \mathcal{H} = 2$.

Nyní nechť (x_1, y_1), (x_2, y_2) je libovolná báze $\mathcal{H}$, $(\overline{x}, \overline{y})$ je partikulární řešení, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ a $\hat{x} = \alpha x_1 + \beta x_2$, $\hat{y} = \alpha y_1 + \beta y_2$. Podobně jako výše odvodíme, že pro $x := \overline{x} + \hat{x}$ a $y := \overline{y} + \hat{y}$ platí $x \in AC([a,b])$, $y \in BPV([a,b])$ je zleva spojitá,

$$\begin{aligned} d\mu_y(s) = d\mu_{\overline{y}}(s) + d\mu_{\hat{y}}(s) = \Big(\overline{x}(s)\, d\mu(s) + c_4(s)\overline{y}(s)\, ds + d\nu(s)\Big) + \\ + \Big(\hat{x}(s)\, d\mu(s) + c_4(s)\hat{y}(s)\, ds\Big) = x(s)\, d\mu(s) + c_4(s)y(s)\, ds + d\nu(s) \end{aligned}$$

a pro skoro všechna $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} x'(s) = (\overline{x}(s))' + (\hat{x}(s))' = \Big(c_1(s)\overline{x}(s) + c_2(s)\overline{y}(s) + g(s)\Big) + \\ + \Big(c_1(s)\hat{x}(s) + c_2(s)\hat{y}(s)\Big) = c_1(s)x(s) + c_2(s)y(s) + g(s), \end{aligned}$$

a tedy dvojice (x, y) je díky Lemmatu 29 řešení (2.17), (2.18) s počáteční podmínkou (x_0, y_0) právě tehdy, když $(x(a), y(a)) = (x_0, y_0)$, což po krátkém výpočtu vede na soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_0 - \overline{x}(a) &= \alpha x_1(a) + \beta x_2(a), \\ y_0 - \overline{y}(a) &= \alpha y_1(a) + \beta y_2(a) \end{aligned}$$

pro neznámou dvojici (α, β). Tato soustava má právě jedno řešení tehdy, když jsou dvojice $(x_1(a), y_1(a))$ a $(x_2(a), y_2(a))$ lineárně nezávislé. Pokud by byly lineárně závislé, tak ale každou lineární kombinací $k(x_1, y_1) + l(x_2, y_2)$ dostaneme řešení homogenní soustavy s počáteční podmínkou ležící v lineárním obalu dvojice $(x_1(a), y_1(a))$, a tedy nezískáme celé $\mathcal{H}$. To je však spor s tím, že (x_1, y_1), (x_2, y_2) tvoří bázi tohoto prostoru.

□

Věta 8. (Liouvilleova formule). *Nechť (x_1, y_1), (x_2, y_2) jsou dvě řešení homogenní soustavy*

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t), \\ Dy(t) &= x(t)\, d\mu(t) + c_4(t)y(t)\, dt \end{aligned}$$

a označme

$$w(t) := \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix} = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t), \ \ t \in [a,b].$$

Potom $w \in AC([a,b])$ a

$$w(t) = w(a) \cdot e^{\left(\int_a^t c_1(s) + c_4(s)\, ds\right)}, \ \ t \in [a,b],$$

speciálně každá fundamentální matice $\mathbb{F}(t)$ je pro všechny časy $t \in [a,b]$ regulární.

Důkaz. Jelikož podle Lemmatu 29 jsou $y_1,\ y_2 \in BPV([a,b])$ zleva spojité a funkce $x_1,\ x_2 \in AC([a,b]) \subseteq BPV([a,b])$ jsou spojité, tak $w = x_1y_2 - x_2y_1$ je díky Lemmatu 26 zleva spojitá funkce třídy $BPV([a,b])$ (jakožto rozdíl dvou funkcí s těmito vlastnostmi) a podle téhož lemmatu platí

$$\begin{aligned}
&d\mu_w(s) = \Big(x_1(s)\,d\mu_{y_2}(s) + y_2(s)\,d\mu_{x_1}(s)\Big) - \Big(x_2(s)\,d\mu_{y_1}(s) + y_1(s)\,d\mu_{x_2}(s)\Big) = \\
&= x_1(s)\Big(x_2(s)\,d\mu(s) + c_4(s)y_2(s)\,ds\Big) + y_2(s)\Big(c_1(s)x_1(s)\,ds + c_2(s)y_1(s)\,ds\Big) - \\
&- x_2(s)\Big(x_1(s)\,d\mu(s) + c_4(s)y_1(s)\,ds\Big) - y_1(s)\Big(c_1(s)x_2(s)\,ds + c_2(s)y_2(s)\,ds\Big) = \\
&= c_1(s)\Big(x_1(s)y_2(s) - x_2(s)y_1(s)\Big)\,ds + c_4(s)\Big(x_1(s)y_2(s) - x_2(s)y_1(s)\Big)\,ds = \\
&= \Big(c_1(s) + c_4(s)\Big)w(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Tedy pro každé $t \in [a,b]$

$$w(t) = w(a) + \mu_w([a,t)) = w(a) + \int_a^t \Big(c_1(s) + c_4(s)\Big)w(s)\,ds.$$

Poněvadž $w = x_1y_2 - x_2y_1 \in L^\infty([a,b])$, tak jde o neurčitý Lebesgueův integrál funkce $(c_1 + c_4)w \in L^1([a,b])$. Z Věty 1 potom plyne, že $w \in AC([a,b])$ a $w'(t) = (c_1(t) + c_4(t))\,w(t)$ pro skoro všechna $t \in [a,b]$. Odsud dostáváme, že w je jednoznačně určené řešení rovnice $z'(t) = (c_1(t) + c_4(t))\,z(t)$ s počáteční podmínkou $z(a) = w(a)$ v Carathéodoryho smyslu. Jiným takovým řešením je ale funkce

$$z(t) = w(a) \cdot e^{\left(\int_a^t c_1(s)+c_4(s)\,ds\right)},\ \ t \in [a,b].$$

Z jednoznačnosti řešení tak nutně

$$w(t) = w(a) \cdot e^{\left(\int_a^t c_1(s)+c_4(s)\,ds\right)},\ \ t \in [a,b]. \tag{2.19}$$

Je-li $\mathbb{F}$ libovolná fundamentální matice, tak díky lineární nezávislosti počátečních podmínek (vizte důkaz Věty 7) je $\mathbb{F}(a)$ regulární, neboli $w(a) \neq 0$. Z rovnosti (2.19) pak snadno nahlédneme, že $w(t) \neq 0$ pro každé $t \in [a,b]$, a tedy skutečně $\mathbb{F}(t)$ je pro každé $t \in [a,b]$ regulární.

□

Díky teorii pro homogenní soustavu nyní snadno ukážeme, že existuje právě jedno řešení nehomogenní soustavy, které v daném bodě $c \in [a,b]$ nabývá předepsanou hodnotu.

Věta 9. *Nechť $c \in [a,b]$ a $(x_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$. Potom existuje právě jedno řešení (x,y) soustavy*

$$x'(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t), \tag{2.20}$$

$$Dy(t) = x(t)\,d\mu(t) + c_4(t)y(t)\,dt + \,d\nu(t) \tag{2.21}$$

na $[a,b]$ splňující $(x(c), y(c)) = (x_c, y_c)$.

Důkaz. Nechť (x_1, y_1), (x_2, y_2) je libovolný fundamentální systém homogenní soustavy, $\mathbb{F}$ je příslušná fundamentální matice a $(\overline{x}, \overline{y})$ je libovolné partikulární řešení. Podle Věty 7 lze každé řešení (x,y) soustavy (2.20), (2.21) zapsat jako

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x}(t) \\ \overline{y}(t) \end{pmatrix} + \mathbb{F}(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},\ \ t \in [a,b]$$

pro jednoznačně určenou dvojici $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Tedy (x, y) splňuje podmínku $(x(c), y(c)) = (x_c, y_c)$ právě tehdy, když

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{x}(c) \\ \overline{y}(c) \end{pmatrix} = \mathbb{F}(c) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Podle Liouvilleovy formule (Věta 8) je $\mathbb{F}(c)$ regulární, a tak existuje právě jedna dvojice $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ splňující (2.22), čímž je důkaz hotov.

□

V klasické teorii platí, že pokud je (x_1, y_1), (x_2, y_2) fundamentální systém homogenní soustavy

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t), \\ y'(t) &= c_3(t)x(t) + c_4(t)y(t) \end{aligned}$$

a

$$\mathbb{F}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}, \ t \in [a, b]$$

je příslušná fundamentální matice, tak lze (jednoznačně určené) řešení (x, y) soustavy (zde $h \in L^1([a, b])$)

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t), \\ y'(t) &= c_3(t)x(t) + c_4(t)y(t) + h(t) \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $(x(a), y(a)) = (x_0, y_0)$ při konvenci $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$, $\vec{p}(t) = (g(t), h(t))$, $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ napsat jako

$$\vec{x}(t) = \mathbb{F}(t)\mathbb{F}^{-1}(a)\vec{x}_0 + \int_a^t \mathbb{F}(t)\mathbb{F}^{-1}(s)\vec{p}(s)\, ds, \ \ t \in [a, b].$$

Označíme-li

$$\mathbb{F}(a) = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & \overline{\alpha_2} \\ \overline{\beta_1} & \overline{\beta_2} \end{pmatrix}; \ \mathbb{F}^{-1}(a) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}; \ w(t) = \det \mathbb{F}(t), \ \ t \in [a, b],$$

tak lze předchozí rovnost díky vztahu

$$\mathbb{F}^{-1}(t) = \frac{1}{w(t)} \begin{pmatrix} y_2(t) & -x_2(t) \\ -y_1(t) & x_1(t) \end{pmatrix}, \ \ t \in [a, b]$$

ekvivalentně přepsat jako

$$\vec{x}(t) = \mathbb{F}(t)\vec{k}(t), \ \ t \in [a, b],$$

kde složky vektorové funkce $\vec{k}(t) = (k_1(t), k_2(t))$ pro každé $t \in [a, b]$ splňují

$$\begin{aligned} k_1(t) &= \alpha_1 x_0 + \alpha_2 y_0 + \int_a^t \frac{y_2(s)g(s) - x_2(s)h(s)}{w(s)}\, ds, \\ k_2(t) &= \beta_1 x_0 + \beta_2 y_0 + \int_a^t \frac{-y_1(s)g(s) + x_1(s)h(s)}{w(s)}\, ds. \end{aligned}$$

Jelikož v námi uvažované úloze pracujeme namísto $h(s)\, ds$ s $d\nu(s)$, tak bychom čekali, že když v předpisu funkcí k_1, k_2 změníme $h(s)\, ds$ na $d\nu(s)$, bude opět platit

$$\vec{x}(t) = \mathbb{F}(t)\vec{k}(t), \ \ t \in [a, b].$$

Následující věta ukazuje, že tomu tak skutečně je.

Věta 10. (Variace konstant). *Nechť* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *je fundamentální systém homogenní soustavy*

$$x'(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t),$$
$$Dy(t) = x(t)\,d\mu(t) + c_4(t)y(t)\,dt$$

a $\mathbb{F}$ *je příslušná fundamentální matice. Nechť* (x, y) *je řešení soustavy*

$$x'(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t),$$
$$Dy(t) = x(t)\,d\mu(t) + c_4(t)y(t)\,dt + \,d\nu(t)$$

s počáteční podmínkou (x_0, y_0). *Potom s použitím značení zavedeného před touto větou platí*

$$\vec{x}(t) = \mathbb{F}(t)\vec{k}(t), \;\; t \in [a, b],$$

kde funkce k_1, k_2 *splňují pro každé* $t \in [a, b]$

$$k_1(t) = \alpha_1 x_0 + \alpha_2 y_0 + \int_a^t \frac{y_2(s)g(s)}{w(s)}\,ds - \int_{[a,t)} \frac{x_2(s)}{w(s)}\,d\nu(s),$$
$$k_2(t) = \beta_1 x_0 + \beta_2 y_0 - \int_a^t \frac{y_1(s)g(s)}{w(s)}\,ds + \int_{[a,t)} \frac{x_1(s)}{w(s)}\,d\nu(s).$$

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že díky Větě 8 je funkce w absolutně spojitá a nenulová na $[a, b]$, a tudíž $1/w$ je dobře definovaná a absolutně spojitá funkce na $[a, b]$. To spolu s $x_i \in C([a, b])$, $y_i \in BPV([a, b]) \subseteq L^\infty([a, b])$, $i = 1, 2$ a $g \in L^1([a, b])$ znamená, že $(y_i g)/w \in L^1([a, b])$ a $x_i/w \in C([a, b])$ pro $i = 1, 2$.

Na $[a, b]$ definujme funkce

$$k_{11}(t) = \alpha_1 x_0 + \alpha_2 y_0 + \int_a^t \frac{y_2(s)g(s)}{w(s)}\,ds, \quad k_{12}(t) = -\int_{[a,t)} \frac{x_2(s)}{w(s)}\,d\nu(s),$$
$$k_{21}(t) = \beta_1 x_0 + \beta_2 y_0 - \int_a^t \frac{y_1(s)g(s)}{w(s)}\,ds, \quad k_{22}(t) = \int_{[a,t)} \frac{x_1(s)}{w(s)}\,d\nu(s).$$

Potom $k_{11}, k_{21} \in AC([a, b])$ a

$$d\mu_{k_{11}}(s) = \frac{y_2(s)g(s)}{w(s)}\,ds, \quad d\mu_{k_{21}}(s) = -\frac{y_1(s)g(s)}{w(s)}\,ds.$$

Jako důsledek Lemmatu 28 jsou pak $k_{12}, k_{22} \in BPV([a, b])$ zleva spojité a

$$d\mu_{k_{12}}(s) = -\frac{x_2(s)}{w(s)}\,d\nu(s), \quad d\mu_{k_{22}}(s) = \frac{x_1(s)}{w(s)}\,d\nu(s).$$

Označme $x = k_1 x_1 + k_2 x_2$ a $y = k_1 y_1 + k_2 y_2$. Podle Lemmatu 26 pak (x_1 a x_2 jsou absolutně spojité a k_1, $k_2 \in BPV([a, b])$ zleva spojité)

$$d\mu_x(s) = k_1(s)\,d\mu_{x_1}(s) + x_1(s)\,d\mu_{k_1}(s) + k_2(s)\,d\mu_{x_2}(s) + x_2(s)\,d\mu_{k_2}(s) =$$
$$= k_1(s)\Big(c_1(s)x_1(s)\,ds + c_2(s)y_1(s)\,ds\Big) + x_1(s)\left(\frac{y_2(s)g(s)}{w(s)}\,ds - \frac{x_2(s)}{w(s)}\,d\nu(s)\right) +$$
$$+ k_2(s)\Big(c_1(s)x_2(s)\,ds + c_2(s)y_2(s)\,ds\Big) + x_2(s)\left(-\frac{y_1(s)g(s)}{w(s)}\,ds + \frac{x_1(s)}{w(s)}\,d\nu(s)\right) =$$
$$= c_1(s)\Big(k_1(s)x_1(s) + k_2(s)x_2(s)\Big)\,ds + c_2(s)\Big(k_1(s)y_1(s) + k_2(s)y_2(s)\Big)\,ds +$$
$$+ \frac{x_1(s)y_2(s) - x_2(s)y_1(s)}{w(s)} g(s)\,ds = \Big(c_1(s)x(s) + c_2(s)y(s) + g(s)\Big)\,ds.$$

Díky bodu (a) Lemmatu 27 tak $x \in AC([a,b])$. Podle definice přírůstkové derivace a Věty 1 pak pro s.v. $t \in [a,b]$

$$x'(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t).$$

Předchozí výpočet μ_x proběhl bez problémů díky tomu, že jsme vždy derivovali součin spojité a zleva spojité BPV-funkce. Chceme-li ale tentýž postup použít pro μ_y, musíme být opatrnější, poněvadž v součinech y_1k_{12} a y_2k_{22} vystupují BPV-funkce, které jsou obecně pouze zleva spojité.

Nechť $[c,d] \subseteq [a,b]$. Potom

$$\begin{aligned}
V := &\int_{[c,d)} \mu_{k_{12}}(\{s\})\, d\mu_{y_1}(s) + \int_{[c,d)} \mu_{k_{22}}(\{s\})\, d\mu_{y_2}(s) = \\
= &-\int_{[c,d)} \frac{x_2(s)}{w(s)}\nu(\{s\})\, d\mu_{y_1}(s) + \int_{[c,d)} \frac{x_1(s)}{w(s)}\nu(\{s\})\, d\mu_{y_2}(s) = \\
= &-\int_{[c,d)} \frac{x_2(s)}{w(s)}\nu(\{s\})x_1(s)\, d\mu(s) - \int_{[c,d)} \frac{x_2(s)}{w(s)}\nu(\{s\})c_4(s)y_1(s)\, ds + \\
+ &\int_{[c,d)} \frac{x_1(s)}{w(s)}\nu(\{s\})x_2(s)\, d\mu(s) + \int_{[c,d)} \frac{x_1(s)}{w(s)}\nu(\{s\})c_4(s)y_2(s)\, ds = \\
= &\int_c^d c_4(s)\frac{x_1(s)y_2(s) - x_2(s)y_1(s)}{w(s)}\nu(\{s\})\, ds = \int_c^d c_4(s)\nu(\{s\})\, ds = 0,
\end{aligned}$$

přičemž poslední rovnost platí díky tomu, že ν je podle [5, str. 44, Věta 19.9] skoro všude spojitá. Jelikož podle Lemmatu 26 platí

$$\begin{aligned}
&\Big(y_1(d)k_{12}(d) + y_2(d)k_{22}(d)\Big) - \Big(y_1(c)k_{12}(c) + y_2(c)k_{22}(c)\Big) = \int_{[c,d)} y_1(s)\, d\mu_{k_{12}}(s) + \\
&+ \int_{[c,d)} k_{12}(s)\, d\mu_{y_1}(s) + \int_{[c,d)} y_2(s)\, d\mu_{k_{22}}(s) + \int_{[c,d)} k_{22}(s)\, d\mu_{y_2}(s) + V,
\end{aligned}$$

tak díky $V = 0$ je přírůstková derivace funkce $y_1k_{12} + y_2k_{22}$ rovna

$$y_1(s)\, d\mu_{k_{12}}(s) + k_{12}(s)\, d\mu_{y_1}(s) + y_2(s)\, d\mu_{k_{22}}(s) + k_{22}(s)\, d\mu_{y_2}(s),$$

tj. tuto funkci můžeme derivovat jako klasický součin (s tím, že derivací je míra). Protože výrazy y_1k_{11} a y_2k_{21} už jsou součinem (absolutně) spojité a zleva spojité BPV-funkce, tak můžeme všechny členy v definici funkce y derivovat, jak jsme zvyklí, a dostaneme

$$\begin{aligned}
&d\mu_y(s) = k_1(s)\, d\mu_{y_1}(s) + y_1(s)\, d\mu_{k_1}(s) + k_2(s)\, d\mu_{y_2}(s) + y_2(s)\, d\mu_{k_2}(s) = \\
&= k_1(s)\Big(x_1(s)\, d\mu(s) + c_4(s)y_1(s)\, ds\Big) + y_1(s)\Big(\frac{y_2(s)g(s)}{w(s)}\, ds - \frac{x_2(s)}{w(s)}\, d\nu(s)\Big) + \\
&+ k_2(s)\Big(x_2(s)\, d\mu(s) + c_4(s)y_2(s)\, ds\Big) + y_2(s)\Big(-\frac{y_1(s)g(s)}{w(s)}\, ds + \frac{x_1(s)}{w(s)}\, d\nu(s)\Big) = \\
&= \Big(k_1(s)x_1(s) + k_2(s)x_2(s)\Big)\, d\mu(s) + c_4(s)\Big(k_1(s)y_1(s) + k_2(s)y_2(s)\Big)\, ds + \\
&+ \frac{x_1(s)y_2(s) - x_2(s)y_1(s)}{w(s)}\, d\nu(s) = x(s)\, d\mu(s) + c_4(s)y(s)\, ds + d\nu(s),
\end{aligned}$$

speciálně $y \in BPV([a,b])$ je zleva spojitá. Jelikož snadno ověříme, že platí rovnost $(x(a), y(a)) = (x_0, y_0)$, tak je (x,y) díky Lemmatu 29 skutečně řešení uvedené soustavy s počáteční podmínkou (x_0, y_0).

□

2.3 Protipříklady

Na předchozích stranách jsme ukázali, že když v soustavě

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t), \\ y'(t) &= c_3(t)x(t) + c_4(t)y(t) + h(t) \end{aligned}$$

místo funkcí c_3 a h uvažujeme obecné Radonovy znaménkové míry μ a ν, tak platí analogická tvrzení jako v běžné teorii obyčejných diferenciálních rovnic. Na konkrétních příkladech homogenních soustav ($g = 0$, $h = 0$) nyní ukážeme, proč může nahrazení některé z dalších funkcí působit potíže.

Pokud mírou nahradíme funkci c_2 a funkce c_1, c_3, c_4 ponecháme beze změny, tak jde o totéž jako námi studovaná soustava, jen s prohozenými rolemi funkcí x a y. Uvažme tedy případ, kdy jsou jak c_2, tak c_3 nahrazeny měrami.

Příklad 1. Na intervalu $[0, 2]$ řešme úlohu s $c_1 = c_4 = 0$, „$c_2 = c_3 = \delta_1$", kde δ_1 je tzv. Diracova míra v bodě 1 (která je Radonova) definovaná předpisem

$$\delta_1(A) = \begin{cases} 1, & 1 \in A, \\ 0, & 1 \notin A, \end{cases} \quad A \subseteq [0, 2],$$

tj. řešme soustavu

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{[0,t)} y(s)\, d\delta_1(s), \\ y(t) &= y_0 + \int_{[0,t)} x(s)\, d\delta_1(s). \end{aligned}$$

Řešení této soustavy lze explicitně spočítat. Snadno totiž nahlédneme, že pro $t \in [0, 1]$ platí $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$. Je-li $t \in (1, 2]$, tak

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{[0,t)} y(s)\, d\delta_1(s) = x_0 + y(1) = x_0 + y_0, \\ y(t) &= y_0 + \int_{[0,t)} x(s)\, d\delta_1(s) = y_0 + x(1) = y_0 + x_0. \end{aligned}$$

Pro každou počáteční podmínku (x_0, y_0) tedy příslušné řešení (x, y) existuje, je určeno jednoznačně a platí

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & t \in [0, 1], \\ x_0 + y_0, & t \in (1, 2], \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} y_0, & t \in [0, 1], \\ x_0 + y_0, & t \in (1, 2]. \end{cases}$$

Nechť (x_1, y_1), (x_2, y_2) jsou řešení této soustavy s lineárně nezávislými počátečními podmínkami (x_0, y_0), $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ a nechť $w(t) = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t)$ je determinant příslušné fundamentální matice. Pokud by platila Liouvilleova formule, tak bychom pro každé $t \in [0, 2]$ dostali

$$w(t) = w(0) \cdot e^{\left(\int_0^t c_1(s) + c_4(s)\, ds\right)} = w(0) \cdot e^0 = w(0).$$

Avšak dle předchozího pro každé $t \in (1, 2]$ platí

$$w(t) = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t) = (x_0 + y_0)(\overline{x}_0 + \overline{y}_0) - (\overline{x}_0 + \overline{y}_0)(x_0 + y_0) = 0,$$

a jelikož (x_0, y_0), $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ jsou lineárně nezávislé, tak $w(0) \neq 0$. Tedy nejenže neplatí Liouvilleova formule, ale fundamentální matice může být singulární na množině nenulové Lebesgueovy míry, a tak nemusí platit ani variace konstant.

Nyní se podívejme na případ, kdy nahradíme jednu z funkcí c_1, c_4 mírou (oboje vede na úlohu téhož typu, pouze s prohozenou rolí x a y) a ostatní funkce ponecháme beze změny.

Příklad 2. Na intervalu $[0, 2]$ řešme úlohu s „$c_1 = -\delta_1$“, $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, kde δ_1 je opět Diracova míra v bodě 1, tj. řešme soustavu

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 - \int_{[0,t)} x(s)\, d\delta_1(s), \\ y(t) &= y_0. \end{aligned}$$

Její řešení lze opět snadno přímo spočítat. Zřejmě $x(t) = x_0$ na $[0, 1]$. Je-li $t \in (1, 2]$, tak

$$x(t) = x_0 - \int_{[0,t)} x(s)\, d\delta_1(s) = x_0 - x(1) = x_0 - x_0 = 0.$$

Pro každou počáteční podmínku (x_0, y_0) tedy příslušné řešení (x, y) existuje, je určeno jednoznačně a platí

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in (1, 2], \end{cases} \quad y(t) = y_0, \ \ t \in [0, 2].$$

Nechť (x_1, y_1), (x_2, y_2) jsou řešení této soustavy s lineárně nezávislými počátečními podmínkami (x_0, y_0), $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ a nechť $w(t) = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t)$ je determinant příslušné fundamentální matice. Jelikož „$c_1 = -\delta_1$“, tak bychom čekali, že Liouvilleova formule bude mít tvar

$$w(t) = w(0) \cdot e^{-\left(\int_{[0,t)} d\delta_1(s)\right)} = \begin{cases} w(0), & t \in [0, 1], \\ w(0) \cdot e^{-1} \neq 0, & t \in (1, 2]. \end{cases}$$

Dle předchozího však pro každé $t \in (1, 2]$ platí

$$w(t) = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t) = 0 \cdot \overline{y}_0 - 0 \cdot y_0 = 0,$$

a tudíž

$$w(t) = \begin{cases} w(0), & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in (1, 2]. \end{cases}$$

Znovu tak neplatí očekávaná analogie Liouvilleovy formule. Navíc fundamentální matice může být opět singulární na množině nenulové Lebesgueovy míry, a tudíž nemusí platit ani variace konstant.

Všimněme si, že uvedená soustava je spíše jedinou rovnicí pro neznámou funkci x, kterou lze zapsat jako

$$Dx(t) = -x(t)\, d\delta_1(t).$$

Výše uvedené potíže s Liouvilleovou formulí pak plynou z toho, že řešení této rovnice nesplňuje očekávaný vzorec

$$x(t) = x(0) \cdot e^{-\left(\int_{[0,t)} d\delta_1(s)\right)}.$$

Celkem vidíme, že když v homogenní soustavě nahradíme Radonovou znaménkovou mírou právě jednu z funkcí c_2 a c_3, tak řešení splňuje očekávanou analogii všech základních vět z teorie lineárních obyčejných diferenciálních rovnic. Naopak pokud Radonovou znaménkovou mírou nahradíme libovolnou z funkcí c_1 a c_4, tak už očekávané analogie základních vět obecně platit nemusí. Z předchozích příkladů rovněž plyne, že když mírou nahradíme funkci c_2 nebo c_3 a následně ještě libovolnou ze zbylých funkcí, tak opět nemusí platit analogie základních vět. Jedinou „bezpečnou“ možností je tudíž nahrazení právě jedné z funkcí c_2 a c_3, což vede na úlohu téhož typu, jen případně s prohozenou rolí x a y (při nahrazení funkce c_2 mírou bychom pak v nehomogenní soustavě nahradili mírou funkci g a funkci h nechali beze změny).

3. Sturmova srovnávací věta

Nejprve zaveďme konvenci, že pokud má funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ měrovou i přírůstkovou derivaci a zúžením přírůstkové derivace na $\mathcal{B}(a, b)$ dostaneme tu měrovou (např. pokud jde o zleva spojitou BPV-funkci), tak budeme obě derivace nazývat „měrovou derivací“ a obě budeme značit symbolem Df (připomeňme též dříve zavedené značení $dDf(s) = Df(s)$).

Teorii z předchozí kapitoly nyní použijeme ke studiu lineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu. Připomeňme, že rovnici druhého řádu

$$x''(t) + P(t)x'(t) + Q(t)x(t) = h(t)$$

s počáteční podmínkou $(x(a), x'(a)) = (x_0, y_0)$, kde P, Q, $h \in L^1([a, b])$, lze pomocí substituce $y := x'$ převést na soustavu dvou rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= -Q(t)x(t) - P(t)y(t) + h(t). \end{aligned}$$

V řeči ekvivalentní integrální formulace jde o soustavu

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_a^t y(s)\,ds, \\ y(t) &= y_0 - \int_a^t x(s)Q(s)\,ds - \int_a^t P(s)y(s)\,ds + \int_a^t h(s)\,ds. \end{aligned}$$

Předchozí teorie nám nyní umožňuje znaménkové míry $Q(s)\,ds$ a $h(s)\,ds$ nahradit obecnými Radonovými znaménkovými měrami Q a ρ, a tak předpokládejme, že $([a, b), \mathcal{S}_Q, Q)$ a $([a, b), \mathcal{S}_\rho, \rho)$ jsou prostory s Radonovou znaménkovou mírou, a zabývejme se soustavou

$$x'(t) = y(t), \tag{3.1}$$

$$Dy(t) = -x(t)\,dQ(t) - P(t)y(t)\,dt + d\rho(t), \tag{3.2}$$

jejíž řešení definujeme jako v Definici 19. Díky Větě 6 víme, že tato soustava má při předepsané počáteční podmínce právě jedno řešení.

Z jistých důvodů, jejichž užitečnost nahlédneme později, bychom rádi ukázali, že každé řešení soustavy (3.1), (3.2) řeší i rovnici

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = \nu(t) \tag{3.3}$$

pro vhodnou kladnou funkci $p \in AC([a, b])$ a vhodné prostory $([a, b), \mathcal{S}_q, q)$, $([a, b), \mathcal{S}_\nu, \nu)$ s Radonovou znaménkovou mírou a naopak že každé řešení rovnice (3.3) pro dané p, q a ν s vlastnostmi jako výše řeší i (3.1), (3.2) pro vhodnou funkci $P \in L^1([a, b])$ a vhodné prostory $([a, b), \mathcal{S}_Q, Q)$, $([a, b), \mathcal{S}_\rho, \rho)$ s Radonovou znaménkovou mírou. Nejprve ale musíme zadefinovat, v jakém smyslu má být rovnice (3.3) splněna. Po zavedení substituce $y = x'$ dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t), \\ (p(t)y(t))' &= -q(t)x(t) + \nu(t), \end{aligned}$$

což nás vede k následující definici.

Definice 20. *Nechť $p \in AC([a,b])$ je kladná funkce. Nechť dále $([a,b), \mathcal{S}_q, q)$ a $([a,b), \mathcal{S}_\nu, \nu)$ jsou prostory s Radonovou znaménkovou mírou. Řekneme, že dvojice funkcí x, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ řeší rovnici*

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = \nu(t) \tag{3.4}$$

s počáteční podmínkou (x_0, y_0), pokud $x \in AC([a,b])$, $py \in BV(a,b)$ a pro každé $t \in [a,b]$ platí

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_a^t y(s)\,ds, \\ p(t)y(t) &= p(a)y_0 - \int_{[a,t)} x(s)\,dq(s) + \int_{[a,t)} d\nu(s). \end{aligned}$$

Lemma 32. *Dvojice x, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ řeší rovnici (3.4) s počáteční podmínkou (x_0, y_0) ve smyslu Definice 20 právě tehdy, když funkce $(x, \overline{y}) := (x, py)$ řeší soustavu*

$$x'(t) = \frac{1}{p(t)}\overline{y}(t), \tag{3.5}$$

$$D\overline{y}(t) = -x(t)\,dq(t) + \,d\nu(t) \tag{3.6}$$

s počáteční podmínkou $(x_0, p(a)y_0) =: (x_0, \overline{y}_0)$ ve smyslu Definice 19.

Důkaz. $\Longrightarrow$: Jelikož $p \in AC([a,b])$ je kladná, tak $1/p \in AC([a,b]) \subseteq L^1([a,b])$, a tedy soustava (3.5), (3.6) má tvar jako v Definici 19.

Podle Definice 20 je $x \in AC([a,b])$, $\overline{y} = py \in BV(a,b)$ a pro každé $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_a^t y(s)\,ds = x_0 + \int_a^t \frac{p(s)}{p(s)} y(s)\,ds = x_0 + \int_a^t \frac{1}{p(s)}\overline{y}(s)\,ds, \\ \overline{y}(t) &= p(t)y(t) = p(a)y_0 - \int_{[a,t)} x(s)\,dq(s) + \int_{[a,t)} d\nu(s), \end{aligned}$$

což podle Definice 19 završuje důkaz této implikace.

$\Longleftarrow$: Nechť $(x, \overline{y}) = (x, py)$ je řešení soustavy (3.5), (3.6) s počáteční podmínkou $(x_0, p(a)y_0)$. Podle Definice 19 pak $x \in AC([a,b])$, $py \in BV(a,b)$. Platnost integrálních rovnic v Definici 20 pak snadno plyne z platnosti integrálních rovnic z Definice 19 podobně jako v předchozí implikaci.

□

Předchozí lemma je sice jednoduché, ale velmi užitečné, protože nám umožňuje na dvojice $(x, py) = (x, \overline{y})$ aplikovat teorii ze druhé kapitoly. Výhodné je například to, že v případě $\nu = 0$ řeší dvojice $(x, \overline{y})$ homogenní soustavu s nulovými „diagonálními“ koeficienty c_1 a c_4, a tak je determinant libovolné fundamentální matice díky Liouvilleově formuli konstantní. Předchozí lemma je také přípravou pro lemma následující.

Lemma 33. *Dvojice funkcí x, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ řeší rovnici (3.4) s počáteční podmínkou (x_0, y_0) ve smyslu Definice 20 právě tehdy, když řeší soustavu*

$$x'(t) = y(t), \tag{3.7}$$

$$Dy(t) = -\frac{x(t)}{p(t)}\,dq(t) - \frac{p'(t)}{p(t)}y(t)\,dt + \frac{1}{p(t)}\,d\nu(t) \tag{3.8}$$

s touž počáteční podmínkou ve smyslu Definice 19.

Důkaz. $\Longleftarrow$: Všimněme si, že z faktů $p \in AC([a,b])$ a $p > 0$ na $[a,b]$ díky Větě 1 a Lemmatu 1 víme, že $1/p \in AC([a,b])$ a $p' \in L^1([a,b])$. Z toho plyne, že $1/p$, $p'/p \in L^1([a,b])$ a také $1/p \in L^1([a,b), \mathcal{S}_q, |q|)$ a $1/p \in L^1([a,b), \mathcal{S}_\nu, |\nu|)$. Míra s hustotou $1/p$ vzhledem ke q nebo ν je tedy podle Lemmatu 18 Radonova znaménková míra, a tak má soustava (3.7), (3.8) tvar jako v Definici 19.

Nechť (x,y) je (jednoznačně určené) řešení této soustavy s počáteční podmínkou (x_0,y_0). Potom podle Lemmatu 29 platí $x \in AC([a,b])$, $y \in BPV([a,b])$ je zleva spojitá a

$$x'(t) = y(t) = \frac{1}{p(t)} p(t)y(t) \text{ pro s.v. } t \in [a,b], \tag{3.9}$$

$$Dy(t) = -\frac{x(t)}{p(t)}\, dq(t) - \frac{p'(t)}{p(t)} y(t)\, dt + \frac{1}{p(t)}\, d\nu(t) \text{ na } \mathcal{B}([a,b)). \tag{3.10}$$

Jelikož $p \in AC([a,b])$, tak z rovnosti (3.10) díky Lemmatu 26 obdržíme

$$\begin{aligned} D(py)(s) &= p(s)Dy(s) + y(s)Dp(s) = p(s)\Big(- \frac{x(s)}{p(s)}\, dq(s) - \frac{p'(s)}{p(s)} y(s)\, ds + \\ &+ \frac{1}{p(s)}\, d\nu(s)\Big) + y(s)p'(s)\, ds = -x(s)\, dq(s) - p'(s)y(s)\, ds + d\nu(s) + \\ &+ y(s)p'(s)\, ds = -x(s)\, dq(s) + d\nu(s), \end{aligned}$$

speciálně $py \in BPV([a,b])$ je zleva spojitá. Dále $(x(a), p(a)y(a)) = (x_0, p(a)y_0)$, a tak dvojice $(x, \overline{y}) = (x, py)$ podle Lemmatu 29 řeší soustavu (3.5), (3.6) s počáteční podmínkou $(x_0, p(a)y_0)$, což díky Lemmatu 32 znamená, že (x,y) řeší (3.4) s počáteční podmínkou (x_0,y_0).

$\Longrightarrow$: Nechť (x,y) řeší (3.4) s počáteční podmínkou (x_0,y_0). Potom podle Lemmatu 32 dvojice $(x,\overline{y}) = (x,py)$ řeší soustavu (3.5), (3.6) s počáteční podmínkou $(x_0, p(a)y_0)$, a tedy $x \in AC([a,b])$, $py \in BPV([a,b])$ je zleva spojitá a

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{p(t)}\overline{y}(t) = \frac{1}{p(t)} p(t)y(t) = y(t) \text{ pro s.v. } t \in [a,b], \\ D\overline{y}(t) &= D(py)(t) = -x(t)\, dq(t) + d\nu(t) \text{ na } \mathcal{B}([a,b)). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Protože $1/p \in AC([a,b])$, tak $y = (1/p)py$ je zleva spojitá funkce patřící do $BPV([a,b])$ jakožto součin dvou funkcí s těmito vlastnostmi. Díky Lemmatu 26 a (3.11) tak

$$\begin{aligned} p(s)Dy(s) + y(s)p'(s)\, ds &= p(s)Dy(s) + y(s)Dp(s) = D(py)(s) = \\ &= -x(s)\, dq(s) + d\nu(s), \end{aligned}$$

a tedy

$$p(s)Dy(s) = -x(s)\, dq(s) - p'(s)y(s)\, ds + d\nu(s). \tag{3.12}$$

Povšimněme si, že pokud jsou ρ_1, ρ_2 dvě Radonovy znaménkové míry splňující $d\rho_1(s) = d\rho_2(s)$ na $\mathcal{B}([a,b))$, tak lze tuto rovnost „přenásobit“ libovolnou funkcí $f \in L^1([a,b), \mathcal{B}([a,b)), |q_1|)$ a půjde o rovnost míry s hustotou f vzhledem k ρ_1

a míry s touž hustotou vzhledem k ρ_2 na $\mathcal{B}([a,b))$. Přenásobením rovnosti (3.12) funkcí $1/p$ tak získáme

$$Dy(s) = -\frac{x(s)}{p(s)}\,dq(s) - \frac{p'(s)}{p(s)}y(s)\,ds + \frac{1}{p(s)}\,d\nu(s) \text{ na } \mathcal{B}([a,b)).$$

Z rovnosti $(x_0, p(a)y_0) = (x(a), \overline{y}(a)) = (x(a), p(a)y(a))$ pak díky $p(a) \neq 0$ plyne $(x(a), y(a)) = (x_0, y_0)$, a tak díky Lemmatu 29 dvojice (x,y) řeší (3.7), (3.8) s počáteční podmínkou (x_0, y_0).

$\square$

Z předchozího lemmatu speciálně vidíme, že rovnice (3.4) má pro danou počáteční podmínku právě jedno řešení, neboť stačí dokázat existenci a jednoznačnost řešení pro soustavu (3.7), (3.8), kterou jsme již ukázali ve druhé kapitole. Navíc řešení rovnice (3.4) díky Lemmatu 33 patří do stejných prostorů a má stejné vlastnosti jako řešení soustav ve druhé kapitole.

Dále je již poměrně dobře vidět, jak přecházet mezi soustavou (3.1), (3.2) a rovnicí (3.4). Pokud $P \in L^1([a,b])$; $([a,b), \mathcal{S}_Q, Q)$, $([a,b), \mathcal{S}_\rho, \rho)$ jsou prostory s Radonovou znaménkovou mírou a (x,y) řeší (3.1), (3.2), tak položíme

$$p(t) = e^{\left(\int_a^t P(s)\,ds\right)}, \quad dq(t) = p(t)\,dQ(t), \quad d\nu(t) = p(t)\,d\rho(t).$$

Potom p jakožto složení exponenciální funkce, která je lipschitzovská na $[a,b]$, a absolutně spojité funkce $t \mapsto \int_a^t P(s)\,ds$ na $[a,b]$ patří do $AC([a,b])$ a zřejmě $p > 0$ na $[a,b]$. Dále dle Věty 1 platí $p'(t) = p(t)P(t)$ skoro všude, díky čemuž $P(t) = p'(t)/p(t)$ skoro všude. Jelikož $p \in AC([a,b])$, tak q, ν jsou Radonovy znaménkové míry a

$$\begin{aligned} dQ(s) &= \frac{p(s)}{p(s)}\,dQ(s) = \frac{1}{p(s)}\,dq(s), \\ d\rho(s) &= \frac{p(s)}{p(s)}\,d\rho(s) = \frac{1}{p(s)}\,d\nu(s). \end{aligned}$$

Odsud už snadno dostaneme, že díky splnění rovnic (3.1), (3.2) dvojice (x,y) řeší soustavu (3.7), (3.8), což je dle předchozího lemmatu totéž jako splnění rovnice (3.4).

Nyní nechť naopak $p \in AC([a,b])$ je kladná, $([a,b), \mathcal{S}_q, q)$, $([a,b), \mathcal{S}_\nu, \nu)$ jsou prostory s Radonovou znaménkovou mírou a (x,y) řeší (3.4). Potom tato dvojice řeší (3.7), (3.8), což nás vede k

$$P(t) := \frac{p'(t)}{p(t)}, \quad dQ(t) := \frac{1}{p(t)}\,dq(t), \quad d\rho(t) := \frac{1}{p(t)}\,d\nu(t).$$

Dle předchozí diskuse je pak $P \in L^1([a,b])$, $1/p \in AC([a,b])$, Q a ρ jsou Radonovy znaménkové míry a snadno ověříme, že díky splnění rovnic (3.7), (3.8) dvojice (x,y) řeší i (3.1), (3.2).

Díky této vzájemné korespondenci se můžeme dále zabývat rovnicí (3.4) a prvním výsledkem, ke kterému směřujeme, je tzv. Sturmova srovnávací věta, pro jejíž důkaz budeme potřebovat jedno pomocné lemma. Zatímco v klasické teorii je funkce y všude spojitá, v námi studované rovnici jde pouze o zleva spojitou funkci. Ukazuje se ale, že pokud je hodnota funkce x v nějakém bodě $c \in [a, b]$ rovna nule, tak už z toho plyne spojitost y v tomto bodě. To je zcela klíčové nejen pro důkaz následujícího lemmatu (jehož celý závěr a myšlenky důkazu posledních dvou bodů jsou stejné jako v klasické teorii) a analogie Sturmovy srovnávací věty, ale i pro studium Sturm-Liouvilleovy teorie, jíž se věnujeme ve čtvrté kapitole. V následujícím budeme pod pojmem „netriviální řešení“ mít na mysli řešení, které není identicky nulové.

Lemma 34. *Pro netriviální řešení (x, y) rovnice*

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = 0 \tag{3.13}$$

platí, že

(i) pokud $x(c) = 0$ pro nějaké $c \in [a, b]$, tak $y(c) \neq 0$ a funkce y je spojitá v bodě c (pokud c je krajní bod, tak pouze spojitá z příslušné strany);

(ii) označíme-li $N = \{t \in [a, b] : x(t) = 0\}$, pak N nemá hromadný bod;

(iii) je-li $(\overline{x}, \overline{y})$ jiné řešení a platí-li $x(c) = \overline{x}(c) = 0$ pro nějaké $c \in [a, b]$, tak $(\overline{x}, \overline{y}) = \lambda(x, y)$, kde $\lambda = \dfrac{\overline{y}(c)}{y(c)}$.

Důkaz. **(i)** Pokud by platilo $x(c) = y(c) = 0$, tak z jednoznačnosti řešení (Věta 9) dostaneme, že (x, y) je identicky nulové řešení, což je ale spor s jeho netrivialitou.

Nechť $c \in (a, b)$ a $\tau \in (0, b - c)$. Potom

$$p(c+\tau)y(c+\tau) = p(c)y(c) - \int_{[c,c+\tau)} x(s)\, dq(s) = p(c)y(c) - \int_{(c,c+\tau)} x(s)\, dq(s) -$$
$$- x(c)q(\{c\}) = p(c)y(c) - \int_{(c,c+\tau)} x(s)\, dq(s),$$

přičemž poslední rovnost platí díky tomu, že $x(c) = 0$. Odsud máme

$$|p(c+\tau)y(c+\tau) - p(c)y(c)| \leq ||x||_{C([a,b])} \cdot |q|((c, c+\tau)). \tag{3.14}$$

Nechť $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, b - c)$ je posloupnost splňující $\tau_n \searrow 0$. Potom

$$(c, c+\tau_1) \supseteq (c, c+\tau_2) \supseteq \dots \quad \text{a} \quad |q|((c, c+\tau_1)) < \infty,$$

z čehož plyne

$$0 = |q|(\emptyset) = |q|\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(c, c+\tau_n)\right) = \lim_{n\to\infty} |q|\left((c, c+\tau_n)\right).$$

Díky tomuto faktu a (3.14) tak

$$\lim_{n\to\infty} |p(c+\tau_n)y(c+\tau_n) - p(c)y(c)| = 0,$$

a tedy py je zprava spojitá v bodě c. Spojitost funkce py zleva plyne z toho, že dvojice $(x, py) = (x, \overline{y})$ řeší soustavu (3.5), (3.6), a tak je $\overline{y} = py$ zleva spojitá díky Lemmatu 29.

Celkem jsme tak ukázali, že funkce py je spojitá v bodě c, a tak je v tomto bodě spojitá i funkce y jakožto součin funkcí $1/p$ a py spojitých v bodě c. Pokud c je krajní bod intervalu $[a, b]$, postup je zcela analogický.

(ii) Nechť pro spor N má hromadný bod, který označme c. Potom existuje posloupnost $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [a, b]$ taková, že $t_n \to c$, $x(t_n) = 0$ a $t_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Ze spojitosti funkce x plyne $x(c) = 0$. Podle předchozího bodu pak $y(c) \neq 0$ a y je spojitá v bodě c.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme $c \in (a, b)$ a $y(c) > 0$. Ze spojitosti potom plyne existence $r > 0$ takového, že

$$\forall t \in (c - r, c + r) : y(t) \geq \frac{y(c)}{2} > 0.$$

Potom však

$$\begin{aligned}
\forall t \in (c, c + r) : x(t) = x(c) + \int_c^t y(s)\, ds = \int_c^t y(s)\, ds > 0,\\
\forall t \in (c - r, c) : x(t) = x(c) - \int_t^c y(s)\, ds = -\int_t^c y(s)\, ds < 0,
\end{aligned}$$

což je spor s tím, že c je hromadný bod N.

(iii) Díky bodu (i) je $y(c) \neq 0$. Snadno ověříme, že pro $\lambda = \overline{y}(c)/y(c)$ je dvojice $(\lambda x, \lambda y)$ řešením rovnice (3.13), které v čase c nabývá hodnotu $(0, \overline{y}(c))$. Druhým takovým řešením je ale $(\overline{x}, \overline{y})$. Z jednoznačnosti tak $(\overline{x}, \overline{y}) = \lambda(x, y)$.

□

Nyní již slibovaná Sturmova věta.

Věta 11. (Sturmova srovnávací věta). *Nechť (x_1, y_1) je netriviální řešení rovnice*

$$(p(t)x'(t))' + q_1(t)x(t) = 0.$$

Nechť $a \leq c < d \leq b$ jsou dva sousední nulové body funkce x_1. Nechť (x_2, y_2) je řešení rovnice

$$(p(t)x'(t))' + q_2(t)x(t) = 0$$

a $q_2 - q_1$ je nezáporná míra na $\mathcal{B}(c, d)$. Potom nastane právě jedna z následujících možností.

(i) Funkce x_2 má v intervalu (c, d) nulový bod.

(ii) $q_1 = q_2$ na $\mathcal{B}(c, d)$ a $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ \forall t \in [c, d] : x_2(t) = \lambda x_1(t)$.

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že díky předchozímu lemmatu má smysl mluvit o sousedních nulových bodech funkce x_1, poněvadž množina nulových bodů této funkce nemá hromadný bod.

Jelikož spojitá funkce nenabývající hodnotu nula je buď všude kladná, nebo všude záporná, lze bez újmy na obecnosti předpokládat $x_1 > 0$ na (c, d). Podle Lemmatu 34 z faktu $x_1(c) = x_1(d) = 0$ plyne, že y_1 je spojitá v bodech c, d a $y_1(c) \neq 0$, $y_1(d) \neq 0$. Tvrdíme, že pak už nutně $y_1(c) > 0$ a $y_1(d) < 0$.

Kdyby totiž $y_1(c) < 0$, tak ze spojitosti existuje $r > 0$ takové, že $y_1 < 0$ na $[c, c+r] \subseteq [a, b]$. Pro každé $t \in (c, c+r]$ by pak ale platilo

$$x_1(t) = x_1(c) + \int_c^t y_1(s)\, ds = \int_c^t y_1(s)\, ds < 0,$$

což je spor s tím, že $x_1 > 0$ na (c, d). Obdobně odůvodníme i nerovnost $y_1(d) < 0$.

Ukážeme, že pokud neplatí (i), tak už nutně platí (ii). Nechť tedy x_2 nemá v (c, d) nulový bod a opět můžeme předpokládat $x_2 > 0$ na (c, d). Ze spojitosti této funkce plyne $x_2(c) \geq 0$, $x_2(d) \geq 0$.

Díky Lemmatu 32 a Lemmatu 29 pro $i = 1, 2$ platí

$$\begin{aligned} Dx_i(s) &= y_i(s)\, ds \text{ na } \mathcal{B}([c, d)), \\ D(py_i)(s) &= -x_i(s)\, dq_i(s) \text{ na } \mathcal{B}([c, d)). \end{aligned}$$

Pro $i = 1$, 2 označme jako $q_{i,\mathcal{B}}$ zúžení q_i na $\mathcal{B}(c, d)$. Podle Lemmatu 26 pro každé i, $j \in \{1; 2\}$ platí

$$\int_{[c,d)} x_i(s) D(py_j)(s) + \int_{[c,d)} p(s) y_j(s) Dx_i(s) = x_i(d)p(d)y_j(d) - x_i(c)p(c)y_j(c). \tag{3.15}$$

Dále díky Lemmatu 20 a faktu $x_1(c) = 0$

$$\begin{aligned} &\int_{[c,d)} x_2(s) D(py_1)(s) - \int_{[c,d)} x_1(s) D(py_2)(s) = -\int_{[c,d)} x_2(s) x_1(s)\, dq_1(s) + \\ &+ \int_{[c,d)} x_1(s) x_2(s)\, dq_2(s) = -\int_{(c,d)} x_2(s) x_1(s)\, dq_{1,\mathcal{B}}(s) + \\ &+ \int_{(c,d)} x_1(s) x_2(s)\, dq_{2,\mathcal{B}}(s) = \int_{(c,d)} x_1(s) x_2(s)\, d(q_{2,\mathcal{B}} - q_{1,\mathcal{B}})(s). \end{aligned}$$

Z (3.15) a rovnosti $x_1(c) = x_1(d) = 0$ ale zároveň

$$\begin{aligned} &\int_{[c,d)} x_2(s) D(py_1)(s) - \int_{[c,d)} x_1(s) D(py_2)(s) = -\int_{[c,d)} p(s) y_1(s) Dx_2(s) + \\ &+ x_2(d)p(d)y_1(d) - x_2(c)p(c)y_1(c) + \int_{[c,d)} p(s) y_2(s) Dx_1(s) - x_1(d)p(d)y_2(d) + \\ &+ x_1(c)p(c)y_2(c) = -\int_c^d p(s) y_1(s) y_2(s)\, ds + x_2(d)p(d)y_1(d) - x_2(c)p(c)y_1(c) + \\ &+ \int_c^d p(s) y_2(s) y_1(s)\, ds = x_2(d)p(d)y_1(d) - x_2(c)p(c)y_1(c). \end{aligned}$$

Tudíž

$$x_2(d)p(d)y_1(d) - x_2(c)p(c)y_1(c) = \int_{(c,d)} x_1(s) x_2(s)\, d(q_{2,\mathcal{B}} - q_{1,\mathcal{B}})(s). \tag{3.16}$$

Poněvadž z předchozího víme $x_2(d) \geq 0$, $x_2(c) \geq 0$, $y_1(d) < 0$, $y_1(c) > 0$ a $p > 0$ na $[a, b]$, tak $x_2(d)p(d)y_1(d) \leq 0$, $x_2(c)p(c)y_1(c) \geq 0$ a

$$x_2(d)p(d)y_1(d) - x_2(c)p(c)y_1(c) \leq 0, \tag{3.17}$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x_2(d) = x_2(c) = 0$.

Dále $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ na (c,d) a $q_{2,\mathcal{B}} - q_{1,\mathcal{B}}$ je nezáporná míra na $\mathcal{B}(c,d)$, takže

$$\int_{(c,d)} x_1(s)x_2(s)\, d(q_{2,\mathcal{B}} - q_{1,\mathcal{B}})(s) \geq 0. \tag{3.18}$$

Vzhledem k (3.16), (3.17) a (3.18) tak nutně

$$0 = x_2(d)p(d)y_1(d) - x_2(c)p(c)y_1(c) = \int_{(c,d)} x_1(s)x_2(s)\, d(q_{2,\mathcal{B}} - q_{1,\mathcal{B}})(s),$$

a tedy dle předchozí diskuse $x_2(c) = x_2(d) = 0$. Pokud by navíc existovala množina $A \in \mathcal{B}(c,d)$ taková, že $(q_{2,\mathcal{B}} - q_{1,\mathcal{B}})(A) > 0$, tak by díky tomu, že $x_1 > 0$ a $x_2 > 0$ na (c,d), platilo

$$\int_{(c,d)} x_1(s)x_2(s)\, d(q_{2,\mathcal{B}} - q_{1,\mathcal{B}})(s) \geq \int_A x_1(s)x_2(s)\, d(q_{2,\mathcal{B}} - q_{1,\mathcal{B}})(s) > 0,$$

což je spor. Tedy skutečně $q_1 = q_2$ na $\mathcal{B}(c,d)$.

Díky $q_{2,\mathcal{B}} = q_{1,\mathcal{B}}$ a faktu $x_2(c) = 0$ pak pro každé $t \in [c,d]$ platí

$$p(t)y_2(t) = p(c)y_2(c) - \int_{[c,t)} x_2(s)\, dq_2(s) = p(c)y_2(c) - \int_{(c,t)} x_2(s)\, dq_{2,\mathcal{B}}(s) =$$
$$= p(c)y_2(c) - \int_{(c,t)} x_2(s)\, dq_{1,\mathcal{B}}(s) = p(c)y_2(c) - \int_{[c,t)} x_2(s)\, dq_1(s),$$

a tedy (x_2, y_2) řeší na $[c,d]$ rovnici $(p(t)x'(t))' + q_1(t)x(t) = 0$. Z předchozího navíc víme, že $x_2(c) = 0$. Jiným řešením této rovnice na $[c,d]$ je ale (x_1, y_1), přičemž také $x_1(c) = 0$. Podle Lemmatu 34 použitého na interval $[c,d]$ tak pro $\lambda = \frac{y_2(c)}{y_1(c)}$ platí $(x_2, y_2) = \lambda(x_1, y_1)$ na $[c,d]$.

□

Poznamenejme, že v klasické teorii (q_1, $q_2 \in L^1([a,b])$) místo podmínek $q_2 - q_1$ *je nezáporná míra na* $\mathcal{B}(c,d)$ a $q_1 = q_2$ *na* $\mathcal{B}(c,d)$ vystupují po řadě podmínky $q_2 - q_1 \geq 0$ *skoro všude v* (c,d) a $q_2 = q_1$ *skoro všude v* (c,d). Uvedený důkaz až na nezbytné úpravy kopíruje myšlenky důkazu z klasické teorie.

4. Sturm-Liouvilleova teorie

4.1 Vlastní čísla

V této kapitole se budeme zabývat rovnicí

$$(p(t)x'(t))' + (\lambda r(t) + q(t))x(t) = 0, \tag{4.1$_\lambda$}$$

kde $p \in AC([a,b])$ je kladná funkce, $([a,b), \mathcal{S}_r, r)$ a $([a,b), \mathcal{S}_q, q)$ jsou prostory s Radonovou znaménkovou mírou, r není identicky nulová a $\lambda \in \mathbb{R}$ je parametr. Poněvadž $\lambda r + q$ je pak také Radonova znaménková míra, jde typově o rovnici studovanou v předchozí kapitole, a tak její řešení definujeme jako v Definici 20. Připomeňme, že ze třetí kapitoly víme o vzájemné korespondenci mezi rovnicemi typu (4.1$_\lambda$) a rovnicemi

$$x''(t) + P(t)x'(t) + (\lambda R(t) + Q(t))x(t) = 0,$$

kde $P \in L^1([a,b])$ a Q, R jsou Radonovy znaménkové míry.

Objektem našeho zájmu budou čísla $\lambda \in \mathbb{R}$, pro která existuje netriviální řešení (x,y) rovnice (4.1$_\lambda$) splňující okrajové podmínky

$$c_1 x(a) + c_2 p(a) y(a) = 0, \tag{A}$$
$$c_3 x(b) + c_4 p(b) y(b) = 0, \tag{B}$$

kde $(c_1, c_2) \neq (0,0)$, $(c_3, c_4) \neq (0,0)$ jsou pevně dány. Každé $\lambda \in \mathbb{R}$, pro něž existuje netriviální řešení (x_λ, y_λ) rovnice (4.1$_\lambda$) splňující podmínky (A) a (B), nazveme **vlastním číslem SL úlohy** a funkci x_λ pak nazveme **vlastní funkcí** příslušnou tomuto číslu.

Všimněme si, že pokud (x,y) je netriviální řešení (4.1$_\lambda$), tak už nutně x není identicky nulová (opačná implikace je zřejmá). Pro každé $t \in [a,b]$ totiž podle Definice 20 platí

$$x(t) = x(a) + \int_a^t y(s)\,ds,$$
$$p(t)y(t) = p(a)y(a) - \int_{[a,t)} x(s)\,d(\lambda r + q)(s).$$

Pokud by x byla identicky nulová, tak je z druhé rovnice py konstantní funkce. Kdyby šlo o nenulovou konstantní funkci, tak $y = k/p$ pro nenulové $k \in \mathbb{R}$, speciálně y je všude nenulová a nemění znaménko. Pak ale x díky první rovnici nemůže být identicky nulová. Tudíž py je identicky nulová, z čehož díky $p > 0$ plyne, že y je identicky nulová. Dvojice (x,y) je však v tom případě identicky nulové řešení, což je spor s jeho netrivialitou.

Pokud r, $q \in L^1([a,b])$ a r má reprezentanta splňujícího $\inf_{t\in(a,b)} r(t) > 0$, tak je známo, že existuje rostoucí posloupnost $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastní číslo SL úlohy právě tehdy, když $\lambda \in \Lambda$. Dále pokud označíme Hilbertův prostor $L^2([a,b], r(s)\,ds)$ se skalárním součinem

$$\langle f_1, f_2 \rangle_r = \int_a^b f_1(s) f_2(s) r(s)\,ds$$

jako H, tak ke každému vlastnímu číslu λ_n existuje jednoznačně určená vlastní funkce x_{λ_n} splňující $||x_{\lambda_n}||_H = 1$ a množina $\{x_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tvoří ortonormální bázi H. Navíc platí, že x_{λ_n} má v (a, b) právě $n-1$ nulových bodů.

Cílem této kapitoly je zjistit, jak se uvedená tvrzení změní pro případ s obecnými Radonovými znaménkovými měrami a za jakých podmínek bude jejich platnost zachována. Uvidíme, že na q již nebudeme klást žádné omezující požadavky, zatímco požadavky na r bude postupně potřeba zesilovat.

V klasické teorii lze všechna uvedená tvrzení kromě ortonormality ukázat najednou pomocí tzv. Prüferovy transformace, která spočívá v zavedení polárních souřadnic

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho(t)\sin\phi(t), \\ p(t)y(t) &= \rho(t)\cos\phi(t), \end{aligned}$$

z nichž lze odvodit rovnici

$$\phi'(t) = \frac{1}{p}(\cos\phi(t))^2 + (\lambda r(t) + q(t))(\sin\phi(t))^2.$$

Okrajové podmínky (A) a (B) se následně ekvivalentně přeformulují v řeči funkce ϕ a celá úloha se zredukuje na vyšetření chování této funkce v závislosti na parametru λ.

My však zvolíme jiný přístup. Pokud bychom zavedli polární souřadnice, tak funkce ρ a ϕ obecně nejsou lepší kvality než zleva spojité BPV-funkce. Při odvození rovnice pro $D\phi$ je ale potřeba derivovat složenou funkci $\cos\phi(t)$ (respektive $\sin\phi(t)$) a také součin $\rho(t)\cos\phi(t)$ (respektive $\rho(t)\sin\phi(t)$). Pro měrové derivace však v této obecnosti nelze používat klasické vzorce jako

$$D(\sin\phi(t)) = \cos\phi(t)D\phi(t), \quad D(\rho(t)\sin\phi(t)) = \rho(t)D(\sin\phi(t)) + \sin\phi(t)D\rho(t),$$

což celou analýzu ztěžuje. Z toho důvodu použijeme jiný postup z klasické teorie, jenž je sice delší, ale používá prostředky, které se nám budou upravovat snáze. Tento postup spočívá ve vyšetření existence vlastních čísel pomocí tzv. Greenova operátoru (jenž se při použití Prüferovy transformace využije pouze k důkazu ortonormality vlastních funkcí, ale říká toho mnohem více) a následné analýzy nulových bodů vlastních funkcí pomocí elementárních metod sepsaných v kapitole X knihy [2]. V této analýze hraje zásadní roli podíl $y(b)/x(b)$, jenž odpovídá hodnotě $(\operatorname{cotan}\phi(b))/p(b)$ při použití Prüferovy transformace.

Před zavedením Greenova operátoru potřebujeme dokázat následující lemma.

Lemma 35. *Nechť $\mu \in \mathbb{R}$ není vlastní číslo SL úlohy a $h \in L^1([a, b), |r|)$. Nechť (x_1, y_1), (x_2, y_2) jsou netriviální řešení rovnice*

$$(p(t)x'(t))' + (\mu r(t) + q(t))x(t) = 0 \tag{4.1$_\mu$}$$

taková, že (x_1, y_1) splňuje okrajovou podmínku (A), *(x_2, y_2) splňuje okrajovou podmínku* (B) *a $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ jsou lineárně nezávislé dvojice funkcí. Označme*

$$c := \det\begin{pmatrix} x_1(a) & x_2(a) \\ p(a)y_1(a) & p(a)y_2(a) \end{pmatrix} = x_1(a)p(a)y_2(a) - x_2(a)p(a)y_1(a).$$

Definujme Radonovu znaménkovou míru r_h na $\mathcal{S}_r$ předpisem $dr_h(s) := h(s)\,dr(s)$.

Potom existuje právě jedno řešení (x_h, y_h) *rovnice*

$$(p(t)x'(t))' + (\mu r(t) + q(t))x(t) = r_h(t) \tag{4.2_μ}$$

splňující okrajové podmínky (A) *a* (B). *Toto řešení je navíc dáno předpisem*

$$\begin{aligned} x_h(t) &= \frac{1}{c}\left(x_1(t)\int_{[t,b)} x_2(s)\,dr_h(s) + x_2(t)\int_{[a,t)} x_1(s)\,dr_h(s)\right), \\ y_h(t) &= \frac{1}{c}\left(y_1(t)\int_{[t,b)} x_2(s)\,dr_h(s) + y_2(t)\int_{[a,t)} x_1(s)\,dr_h(s)\right). \end{aligned}$$

Důkaz. Jelikož $h \in L^1([a,b),|r|)$, je r_h dle Lemmatu 18 skutečně Radonova znaménková míra na $\mathcal{S}_r$.

Pokud by existovala dvě různá řešení rovnice (4.2_μ) splňující podmínky (A) a (B), tak jejich rozdíl je netriviální řešení rovnice (4.1_μ) splňující (A) a (B), což znamená, že $\mu \in \mathbb{R}$ je vlastní číslo SL úlohy, jenže to je spor s předpokladem věty. Existuje tak nejvýše jedno řešení (4.2_μ) splňující (A) a (B).

Připomeňme Lemma 32 z předchozí kapitoly, podle něhož při značení $py_1 = \overline{y}_1$, $py_2 = \overline{y}_2$ dvojice $(x_1, \overline{y}_1)$ a $(x_2, \overline{y}_2)$ řeší soustavu

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\overline{y}(t)}{p(t)}\,dt, \\ D\overline{y}(t) &= -x(t)\,d(\mu r + q)(t), \end{aligned}$$

což nám umožňuje aplikovat poznatky ze druhé kapitoly.

Díky tomu, že v této soustavě jsou „diagonální“ koeficienty c_1 a c_4 identicky nulové, platí podle Liouvilleovy formule (Věta 8) pro každé $t \in [a,b]$

$$w(t) := x_1(t)\overline{y}_2(t) - x_2(t)\overline{y}_1(t) = x_1(a)\overline{y}_2(a) - x_2(a)\overline{y}_1(a) = c.$$

Z toho, že dvojice (x_1, y_1), (x_2, y_2) jsou lineárně nezávislé, plyne díky $p > 0$ i lineární nezávislost dvojic $(x_1, \overline{y}_1)$, $(x_2, \overline{y}_2)$, a tudíž speciálně $c \neq 0$.

Označme

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(a) &:= \begin{pmatrix} x_1(a) & x_2(a) \\ \overline{y}_1(a) & \overline{y}_2(a) \end{pmatrix}, \\ \mathbb{F}^{-1}(a) &= \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \overline{y}_2(a) & -x_2(a) \\ -\overline{y}_1(a) & x_1(a) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Díky variaci konstant (Věta 10) pro řešení $(x, \overline{y}) = (x, py)$ soustavy

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\overline{y}(t)}{p(t)}\,dt, \\ D\overline{y}(t) &= -x(t)\,d(\mu r + q)(t) + dr_h(t), \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou

$$x_0 = x_1(a)\int_{[a,b)} \frac{x_2(s)}{c}\,dr_h(s), \quad p(a)y_0 = \overline{y}_0 = \overline{y}_1(a)\int_{[a,b)} \frac{x_2(s)}{c}\,dr_h(s)$$

platí (variaci konstant používáme s $g = 0$, $\nu = r_h$)

$$x(t) = k_1(t)x_1(t) + k_2(t)x_2(t),$$
$$\overline{y}(t) = k_1(t)\overline{y}_1(t) + k_2(t)\overline{y}_2(t),$$

kde

$$k_1(t) = \alpha_1 x_0 + \alpha_2 \overline{y}_0 - \int_{[a,t)} \frac{x_2(s)}{c}\, dr_h(s),$$
$$k_2(t) = \beta_1 x_0 + \beta_2 \overline{y}_0 + \int_{[a,t)} \frac{x_1(s)}{c}\, dr_h(s).$$

Podle Lemmatu 32 pak (x, y) řeší (4.2_μ). Je

$$k_1(t) = \frac{\overline{y}_2(a)}{c} x_1(a) \int_{[a,b)} \frac{x_2(s)}{c}\, dr_h(s) - \frac{x_2(a)}{c}\overline{y}_1(a) \int_{[a,b)} \frac{x_2(s)}{c}\, dr_h(s) -$$
$$- \int_{[a,t)} \frac{x_2(s)}{c}\, dr_h(s) = \frac{x_1(a)\overline{y}_2(a) - x_2(a)\overline{y}_1(a)}{c} \int_{[a,b)} \frac{x_2(s)}{c}\, dr_h(s) -$$
$$- \int_{[a,t)} \frac{x_2(s)}{c}\, dr_h(s) = \int_{[a,b)} \frac{x_2(s)}{c}\, dr_h(s) - \int_{[a,t)} \frac{x_2(s)}{c}\, dr_h(s) = \int_{[t,b)} \frac{x_2(s)}{c}\, dr_h(s)$$

a také

$$k_2(t) = -\frac{\overline{y}_1(a)}{c} x_1(a) \int_{[a,b)} \frac{x_2(s)}{c}\, dr_h(s) + \frac{x_1(a)}{c}\overline{y}_1(a) \int_{[a,b)} \frac{x_2(s)}{c}\, dr_h(s) +$$
$$+ \int_{[a,t)} \frac{x_1(s)}{c}\, dr_h(s) = \int_{[a,t)} \frac{x_1(s)}{c}\, dr_h(s).$$

Poněvadž vydělením vztahu $\overline{y}(t) = k_1(t)\overline{y}_1(t) + k_2(t)\overline{y}_2(t)$ výrazem $p(t) \neq 0$ dostaneme $y(t) = k_1(t)y_1(t) + k_2(t)y_2(t)$, platí

$$x(t) = k_1(t)x_1(t) + k_2(t)x_2(t) = x_1(t) \int_{[t,b)} \frac{x_2(s)}{c}\, dr_h(s) + x_2(t) \int_{[a,t)} \frac{x_1(s)}{c}\, dr_h(s),$$
$$y(t) = k_1(t)y_1(t) + k_2(t)y_2(t) = y_1(t) \int_{[t,b)} \frac{x_2(s)}{c}\, dr_h(s) + y_2(t) \int_{[a,t)} \frac{x_1(s)}{c}\, dr_h(s),$$

a tudíž funkce x_h, y_h definované ve znění věty skutečně řeší rovnici (4.2_μ).

Dále podle předpokladu $c_1 x_1(a) + c_2 \overline{y}_1(a) = 0$ a z předchozího zřejmě $k_2(a) = 0$, z čehož dostáváme

$$c_1 x(a) + c_2 \overline{y}(a) = k_1(a)\Big(c_1 x_1(a) + c_2 \overline{y}_1(a)\Big) + k_2(a)\Big(c_1 x_2(a) + c_2 \overline{y}_2(a)\Big) =$$
$$= k_1(a)\Big(c_1 x_1(a) + c_2 \overline{y}_1(a)\Big) = 0.$$

Analogicky díky $c_3 x_2(b) + c_4 \overline{y}_2(b) = 0$ a $k_1(b) = 0$ získáme

$$c_3 x(b) + c_4 \overline{y}(b) = k_1(b)\Big(c_3 x_1(b) + c_4 \overline{y}_1(b)\Big) + k_2(b)\Big(c_3 x_2(b) + c_4 \overline{y}_2(b)\Big) =$$
$$= k_2(b)\Big(c_3 x_2(b) + c_4 \overline{y}_2(b)\Big) = 0,$$

a tedy dvojice $(x, y) = (x_h, y_h)$ splňuje i okrajové podmínky (A), (B).

$\square$

Nechť $\mu \in \mathbb{R}$. Všimněme si, že ze vztahů $(c_1, c_2) \neq (0,0)$ a $p(a) \neq 0$ plyne, že prostor řešení rovnice $c_1 x(a) + c_2 p(a) y(a) = 0$ pro neznámou dvojici $(x(a), y(a))$ je jednodimenzionální. Existuje tak $(x_a, y_a) \in \mathbb{R}^2$ splňující $(x_a, y_a) \neq (0,0)$ a zároveň $c_1 x_a + c_2 p(a) y_a = 0$. Řešení (x_1, y_1) rovnice (4.1_μ) s počáteční podmínkou (x_a, y_a) je pak netriviální a splňuje okrajovou podmínku (A).

Analogicky odvodíme, že existuje dvojice $(x_b, y_b) \in \mathbb{R}^2$, pro niž $(x_b, y_b) \neq (0,0)$ a $c_3 x_b + c_4 p(b) y_b = 0$. Řešení (x_2, y_2) rovnice (4.1_μ) splňující

$$(x_2(b), y_2(b)) = (x_b, y_b)$$

je potom netriviální a zřejmě splňuje okrajovou podmínku (B).

Pokud $\mu \in \mathbb{R}$ není vlastní číslo SL úlohy, tak musí být řešení (x_1, y_1) a (x_2, y_2) lineárně nezávislá. V opačném případě by obě splňovala podmínky (A) i (B), což by ale díky jejich netrivialitě znamenalo, že μ je vlastní číslo SL úlohy.

Není-li tedy $\mu \in \mathbb{R}$ vlastní číslo SL úlohy a jsou-li (x_1, y_1), (x_2, y_2) pevně zvolená řešení jako výše, tak jsme díky předchozímu lemmatu ke každé funkci $h \in L^1([a,b), |r|)$ schopni pomocí předpisu

$$\begin{aligned}
x_h(t) &:= \frac{1}{c}\left(x_1(t) \int_{[t,b)} x_2(s) h(s)\, dr(s) + x_2(t) \int_{[a,t)} x_1(s) h(s)\, dr(s) \right),\\
y_h(t) &:= \frac{1}{c}\left(y_1(t) \int_{[t,b)} x_2(s) h(s)\, dr(s) + y_2(t) \int_{[a,t)} x_1(s) h(s)\, dr(s) \right)
\end{aligned}$$

najít jednoznačně určené řešení (x_h, y_h) rovnice (4.2_μ) splňující obě okrajové podmínky. Zobrazení $h \mapsto x_h$ nazveme **Greenův operátor** (příslušný číslu μ) a budeme ho značit jako $\mathcal{G}_\mu$. V následujícím lemmatu shrneme některé významné vlastnosti tohoto operátoru a také nahlédneme, jak souvisí s vlastními čísly SL úlohy.

Lemma 36. *Nechť $\mu \in \mathbb{R}$ není vlastní číslo SL úlohy a h_1, $h_2 \in L^1([a,b), |r|)$. Potom*

(i) $\displaystyle\int_{[a,b)} (\mathcal{G}_\mu h_1)(s) \cdot h_2(s)\, dr(s) = \int_{[a,b)} h_1(s) \cdot (\mathcal{G}_\mu h_2)(s)\, dr(s)$,

(ii) $\mathcal{G}_\mu : L^1([a,b), |r|) \to C([a,b])$ *je lineární, spojitý a kompaktní operátor,*

(iii) $\lambda \in \mathbb{R}$ *je vlastní číslo SL úlohy a* $x_\lambda \in C([a,b])$ *je jemu příslušná vlastní funkce právě tehdy, když* x_λ *není identicky nulová a* $\displaystyle\mathcal{G}_\mu(x_\lambda) = \frac{1}{\mu - \lambda} x_\lambda$.

Důkaz. **(i)** Při značení $dr_{h_i}(s) = h_i(s)\, dr(s)$ pro $i = 1, 2$ podle definice $\mathcal{G}_\mu$ platí

$$\begin{aligned}
c \int_{[a,b)} (\mathcal{G}_\mu h_2)(t)\, dr_{h_1}(t) = \int_{[a,b)} x_1(t) \left[\int_{[t,b)} x_2(s)\, dr_{h_2}(s) \right] dr_{h_1}(t) +\\
+ \int_{[a,b)} x_2(t) \left[\int_{[a,t)} x_1(s)\, dr_{h_2}(s) \right] dr_{h_1}(t).
\end{aligned}$$

Díky Fubiniho větě je

$$\begin{aligned}
&\int_{[a,b)} x_1(t) \left[\int_{[t,b)} x_2(s)\, dr_{h_2}(s) \right] dr_{h_1}(t) = \int_{[a,b)} x_2(s) \left[\int_{[a,s]} x_1(t)\, dr_{h_1}(t) \right] dr_{h_2}(s) =\\
&= \int_{[a,b)} x_2(s) \left[\int_{[a,s)} x_1(t)\, dr_{h_1}(t) \right] dr_{h_2}(s) + \int_{[a,b)} x_2(s) x_1(s) r_{h_1}(\{s\})\, dr_{h_2}(s)
\end{aligned}$$

a také

$$\int_{[a,b)} x_2(t) \left[\int_{[a,t)} x_1(s)\, dr_{h_2}(s) \right] dr_{h_1}(t) = \int_{[a,b)} x_1(s) \left[\int_{(s,b)} x_2(t)\, dr_{h_1}(t) \right] dr_{h_2}(s) =$$

$$= \int_{[a,b)} x_1(s) \left[\int_{[s,b)} x_2(t)\, dr_{h_1}(t) \right] dr_{h_2}(s) - \int_{[a,b)} x_1(s) x_2(s) r_{h_1}(\{s\})\, dr_{h_2}(s).$$

Tudíž

$$c \int_{[a,b)} (\mathcal{G}_\mu h_2)(t)\, dr_{h_1}(t) = \int_{[a,b)} x_1(s) \left[\int_{[s,b)} x_2(t)\, dr_{h_1}(t) \right] dr_{h_2}(s) +$$

$$+ \int_{[a,b)} x_2(s) \left[\int_{[a,s)} x_1(t)\, dr_{h_1}(t) \right] dr_{h_2}(s) = c \int_{[a,b)} (\mathcal{G}_\mu h_1)(s)\, dr_{h_2}(s).$$

(ii) Linearita snadno plyne z předpisu funkce x_h v definici Greenova operátoru.

Nechť $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1([a,b),|r|)$ a $\alpha := \sup_{n\in\mathbb{N}} ||h_n||_{L^1([a,b),|r|)} < \infty$. Potom pro každé $t \in [a,b]$ platí

$$|c \cdot (\mathcal{G}_\mu h_n)(t)| = \left| x_1(t) \int_{[t,b)} x_2(s) h_n(s)\, dr(s) + x_2(t) \int_{[a,t)} x_1(s) h_n(s)\, dr(s) \right| \leq$$

$$\leq 2 \cdot ||x_1||_{C([a,b])} \cdot ||x_2||_{C([a,b])} \cdot \alpha =: K < \infty,$$

a tedy $||\mathcal{G}_\mu h_n||_{C([a,b])} \leq K/|c|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboli $\mathcal{G}_\mu h_n$ jsou tzv. stejně omezené. Z odhadu $||c(\mathcal{G}_\mu h_n)||_{C([a,b])} \leq 2 \cdot ||x_1||_{C([a,b])} \cdot ||x_2||_{C([a,b])} \cdot ||h_n||_{L^1([a,b),|r|)}$ navíc plyne spojitost operátoru $\mathcal{G}_\mu$.

Nechť $\epsilon > 0$. Jelikož každá spojitá funkce na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá, tak existuje $\delta > 0$ takové, že pro $i = 1,\, 2$ platí

$$[d,e] \subseteq [a,b],\ e - d \leq \delta \implies |x_i(e) - x_i(d)| < \min \left\{ \frac{|c|\epsilon}{4(\alpha+1)||x_l||_{C([a,b])}} : l = 1,2 \right\}.$$

Nechť $[d,e] \subseteq [a,b]$ splňuje $e - d \leq \delta$ a $V := c\Big((\mathcal{G}_\mu h_n)(e) - (\mathcal{G}_\mu h_n)(d) \Big)$. Potom

$$V = x_1(e) \int_{[e,b)} x_2(s) h_n(s)\, dr(s) - x_1(d) \int_{[d,b)} x_2(s) h_n(s)\, dr(s) +$$

$$+ x_2(e) \int_{[a,e)} x_1(s) h_n(s)\, dr(s) - x_2(d) \int_{[a,d)} x_1(s) h_n(s)\, dr(s) =$$

$$= \Big[x_1(e) - x_1(d) \Big] \int_{[e,b)} x_2(s) h_n(s)\, dr(s) - x_1(d) \int_{[d,e)} x_2(s) h_n(s)\, dr(s) +$$

$$+ \Big[x_2(e) - x_2(d) \Big] \int_{[a,e)} x_1(s) h_n(s)\, dr(s) + x_2(d) \int_{[d,e)} x_1(s) h_n(s)\, dr(s) =$$

$$= \Big[x_1(e) - x_1(d) \Big] \int_{[e,b)} x_2(s) h_n(s)\, dr(s) - x_1(d) \int_{[d,e)} \Big[x_2(s) - x_2(d) \Big] h_n(s)\, dr(s) +$$

$$+ \Big[x_2(e) - x_2(d) \Big] \int_{[a,e)} x_1(s) h_n(s)\, dr(s) + x_2(d) \int_{[d,e)} \Big[x_1(s) - x_1(d) \Big] h_n(s)\, dr(s).$$

Odsud dostáváme, že

$$|V| \leq \alpha |x_1(e) - x_1(d)| \cdot ||x_2||_{C([a,b])} + \alpha ||x_1||_{C([a,b])} \cdot \sup_{s\in[d,e)} |x_2(s) - x_2(d)| +$$

$$+ \alpha |x_2(e) - x_2(d)| \cdot ||x_1||_{C([a,b])} + \alpha ||x_2||_{C([a,b])} \cdot \sup_{s\in[d,e)} |x_1(s) - x_1(d)| \leq$$

$$\leq \frac{|c|\epsilon}{4} + \frac{|c|\epsilon}{4} + \frac{|c|\epsilon}{4} + \frac{|c|\epsilon}{4} = |c|\epsilon.$$

Vidíme tedy, že pro každý podinterval $[d, e] \subseteq [a, b]$ délky nejvýše δ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|(\mathcal{G}_\mu h_n)(e) - (\mathcal{G}_\mu h_n)(d)| \leq \epsilon$, neboli funkce $\mathcal{G}_\mu h_n$ jsou tzv. stejně stejnoměrně spojité.

Podle Arzelà–Ascoliho věty je množina $\{\mathcal{G}_\mu h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ relativně kompaktní v prostoru $C([a, b])$, a tudíž $\mathcal{G}_\mu$ je kompaktní operátor z $L^1([a, b), |r|)$ do $C([a, b])$.

(iii) $\Longrightarrow$: Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastní číslo SL úlohy a (x_λ, y_λ) je netriviální řešení (4.1_λ) splňující okrajové podmínky (A), (B). Potom x_λ není identicky nulová (vizte začátek této kapitoly). Pro každé $t \in [a, b]$ podle Definice 20 platí

$$\begin{aligned} x_\lambda(t) &= x_\lambda(a) + \int_a^t y_\lambda(s)\, ds, \\ p(t)y_\lambda(t) &= p(a)y_\lambda(a) - \int_{[a,t)} x_\lambda(s)\, d(\lambda r + q)(s). \end{aligned}$$

Položme $\hat{x} := x_\lambda/(\mu - \lambda)$, $\hat{y} := y_\lambda/(\mu - \lambda)$. Vynásobením druhé rovnosti výrazem $1/(\mu - \lambda)$ získáme

$$\begin{aligned} p(t)\hat{y}(t) &= p(a)\hat{y}(a) - \lambda \int_{[a,t)} \hat{x}(s)\, dr(s) - \int_{[a,t)} \hat{x}(s)\, dq(s) = \\ &= p(a)\hat{y}(a) - \mu \int_{[a,t)} \hat{x}(s)\, dr(s) + (\mu - \lambda) \int_{[a,t)} \hat{x}(s)\, dr(s) - \int_{[a,t)} \hat{x}(s)\, dq(s) = \\ &= p(a)\hat{y}(a) - \int_{[a,t)} \hat{x}(s)\, d(\mu r + q)(s) + \int_{[a,t)} x_\lambda(s)\, dr(s). \end{aligned}$$

Poněvadž vynásobením první rovnosti týmž výrazem obdržíme

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(a) + \int_a^t \hat{y}(s)\, ds,$$

tak vidíme, že $(\hat{x}, \hat{y})$ řeší (4.2_μ) pro $h = x_\lambda$. Jelikož navíc (x_λ, y_λ) splňují okrajové podmínky (A) a (B), tak je splňuje i jejich skalární násobek $(\hat{x}, \hat{y})$.

Dvojice $(\hat{x}, \hat{y})$ je tedy jednoznačně určené řešení rovnice (4.2_μ) pro $h = x_\lambda$ splňující (A) a (B), a tudíž

$$\mathcal{G}_\mu x_\lambda = \hat{x} = \frac{x_\lambda}{\mu - \lambda}.$$

$\Longleftarrow$: Označíme-li jednoznačně určené řešení rovnice (4.2_μ) pro $h = x_\lambda$ splňující okrajové podmínky (A) a (B) jako $(\hat{x}, \hat{y})$, tak $\mathcal{G}_\mu x_\lambda = \hat{x}$ a pro každé $t \in [a, b]$ platí

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{x}(a) + \int_a^t \hat{y}(s)\, ds, \\ p(t)\hat{y}(t) &= p(a)\hat{y}(a) - \int_{[a,t)} \hat{x}(s)\, dq(s) - \mu \int_{[a,t)} \hat{x}(s)\, dr(s) + \int_{[a,t)} x_\lambda(s)\, dr(s). \end{aligned}$$

Položme $y_\lambda := (\mu - \lambda)\hat{y}$. Díky vztahu $(\mu - \lambda)\hat{x} = (\mu - \lambda)\mathcal{G}_\mu x_\lambda = x_\lambda$ po vynásobení druhé rovnosti výrazem $\mu - \lambda$ obdržíme

$$\begin{aligned} p(t)y_\lambda(t) = p(a)y_\lambda(a) &- \int_{[a,t)} x_\lambda(s)\, dq(s) - \mu \int_{[a,t)} x_\lambda(s)\, dr(s) + \\ &+ (\mu - \lambda) \int_{[a,t)} x_\lambda(s)\, dr(s) = p(a)y_\lambda(a) - \int_{[a,t)} x_\lambda(s)\, d(\lambda r + q)(s). \end{aligned}$$

Poněvadž vynásobením první rovnosti výrazem $(\mu - \lambda)$ získáme

$$x_\lambda(t) = x_\lambda(a) + \int_a^t y_\lambda(s)\, ds,$$

tak vidíme, že dvojice (x_λ, y_λ) řeší (4.1_λ). Jakožto skalární násobek dvojice $(\hat{x}, \hat{y})$ navíc funkce (x_λ, y_λ) splňují i podmínky (A) a (B). Jelikož podle předpokladu x_λ není identicky nulová, tak dvojice (x_λ, y_λ) je netriviální, a tedy λ je vlastní číslo SL úlohy a x_λ je jemu příslušná vlastní funkce.

□

Snadno nahlédneme, že $L^2([a, b), |r|)$ se díky Hölderově nerovnosti a konečnosti $|r|$ spojitě vnořuje do $L^1([a, b), |r|)$ a $C([a, b])$ se spojitě vnořuje do $L^2([a, b), |r|)$. Podle předchozího lemmatu je tak $\mathcal{G}_\mu$ spojitý a kompaktní i jako operátor z $L^2([a, b), |r|)$ do $L^2([a, b), |r|)$ a v dalším na něj takto budeme nahlížet.

Jelikož každé nenulové číslo lze zapsat jako $1/(\mu - \lambda)$ pro vhodné λ, tak nás bod (iii) Lemmatu 36 vede ke „skoro-ekvivalenci“ mezi nenulovými vlastními čísly Greenova operátoru $\mathcal{G}_\mu$ a vlastními čísly SL úlohy. Je-li $\rho = 1/(\mu - \lambda)$ nenulové vlastní číslo $\mathcal{G}_\mu$, tak existuje nenulová funkce x_λ v prostoru $L^2([a, b), |r|)$ taková, že $\mathcal{G}_\mu x_\lambda = \rho x_\lambda$ (z čehož dle předchozího plyne $x_\lambda \in AC([a, b])$). Nenulovost v prostoru $L^2([a, b), |r|)$ implikuje, že x_λ není identicky nulová, a tedy λ je vlastní číslo SL úlohy.

Opačná implikace však obecně platit nemusí. Na příkladu později ukážeme, že může existovat vlastní funkce x_λ SL úlohy, která sice není identicky nulová, ale je nulová jakožto prvek prostoru $L^2([a, b), |r|)$. Např. pokud je r rovno Diracově míře v nějakém bodě $c \in [a, b]$, kterou označme δ_c, tak stačí, aby $x_\lambda(c) = 0$, a už jde o nulovou funkci v $L^2([a, b), \delta_c)$. Pro užitečnou charakterizaci těchto případů se nám bude hodit uvažovat r pouze jako nezápornou Radonovu znaménkovou míru (neboli Radonovu míru).

Přechod k nezáporné r má i další značnou výhodu. O vlastních číslech kompaktního operátoru na Hilbertově prostoru jsme sice schopni něco říci (vizte např. [9, str. 69, Důsledek 4.28]), ale pokud jde dokonce o samoadjungovaný operátor, tak je informace silnější a máme k dispozici jeho spektrální rozklad, o kterém hovoří následující věta.

Věta 12. (Hilbert-Schmidtova věta). *Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T : H \to H$ je spojitý lineární operátor, který je samoadjungovaný a kompaktní. Pro každé vlastní číslo ρ operátoru T vyberme ortonormální bázi B_ρ prostoru všech vlastních vektorů příslušných tomuto číslu, tj. prostoru* $\operatorname{Ker}(\rho I - T)$. *Nechť*

$$B := \bigcup \{B_\rho : \rho \text{ je vlastní číslo } T\}.$$

Potom B je ortonormální báze H. Vektorů v B příslušných nenulovým vlastním číslům T je navíc nejvýše spočetně mnoho, a pokud je seřadíme do libovolné prosté posloupnosti $P = \{e_n\}_{n=1}^N$, $N \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, tak P je ortonormální báze $\overline{T(H)}$ a pro každé $x \in H$ platí

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \rho_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin uvažovaný na H, ρ_n je vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru e_n a $\overline{T(H)}$ značí uzávěr množiny $T(H)$.

Důkaz. Plyne z [9, str. 205, Věta 11.30]. Věta je v uvedeném zdroji vyslovena lehce jinak, ale z prvních dvou řádků jejího důkazu plyne znění uvedené zde. □

Připomeňme, že podle [9, str. 201, Věta 11.18] je spojitý lineární operátor T na Hilbertově prostoru H samoadjungovaný právě tehdy, když je tzv. symetrický, tj. pro všechna x, $y \in H$ platí $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.

Je-li r nezáporná, tak je dle bodu (i) Lemmatu 36 operátor $\mathcal{G}_\mu$ samoadjungovaný v $L^2([a,b),r)$. Pokud uvažujeme r znaménkovou, tak bohužel

$$\langle f_1, f_2\rangle_r := \int_{[a,b)} f_1(s) f_2(s)\, dr(s)$$

není skalární součin, poněvadž například nemusí platit $\langle f, f\rangle_r \geq 0$. Mohli bychom však použít prostor $L^2([a,b),|r|)$, který již Hilbertův je. Problém je ovšem v tom, že aby $\mathcal{G}_\mu$ byl samoadjungovaný v $L^2([a,b),|r|)$ (což je dle předchozí poznámky totéž co symetrický), potřebovali bychom v bodu (i) Lemmatu 36 nahradit r mírou $|r|$, jenže to obecně nemusí platit. Z toho důvodu je dobré omezit se na nezápornou r.

Nyní již můžeme dokázat hlavní větu této sekce o vlastních číslech SL úlohy.

Věta 13. *Nechť r je Radonova znaménková míra. Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ vlastní číslo SL úlohy, tak je jemu příslušná vlastní funkce x_λ určena jednoznačně až na přenásobení nenulovou konstantou. Jsou-li x_{λ_1}, x_{λ_2} vlastní funkce příslušné po řadě různým vlastním číslům λ_1, λ_2, tak*

$$\int_{[a,b)} x_{\lambda_1}(s) x_{\lambda_2}(s)\, dr(s) = 0.$$

Pokud je r Radonova míra (neboli nezáporná Radonova znaménková míra), tak nastane právě jedna z následujících možností.

(i) Každé reálné číslo je vlastním číslem SL úlohy. Toto nastane právě tehdy, když existuje vlastní číslo λ takové, že jemu příslušná vlastní funkce x_λ je nulová r-skoro všude. Funkce x_λ je pak navíc vlastní funkcí pro všechna reálná čísla.

(ii) Existuje $\mu \in \mathbb{R}$, které není vlastním číslem SL úlohy. Potom je množina všech vlastních čísel SL úlohy rovna $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$, kde $N \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Při značení $H = L^2([a,b),r)$ navíc platí

- $\dim H < \infty \implies N \leq \dim H$,
- $N = \infty \implies \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$,
- *pokud pro každé $n = 1,\dots,N$ je x_n jednoznačně určená vlastní funkce příslušná číslu λ_n splňující $||x_n||_H = 1$, tak $\{x_n\}_{n=1}^N$ tvoří ortonormální bázi prostoru H právě tehdy, když $\mathcal{G}_\mu$ je prostý.*

Důkaz. Nejprve nechť r je znaménková. Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastní číslo SL úlohy a (x_λ, y_λ), $(\hat{x}_\lambda, \hat{y}_\lambda)$ jsou dvě netriviální řešení rovnice (4.1$_\lambda$) splňující podmínky (A) a (B). Protože podmínku (A) lze až na přenásobení nenulovou konstantou splnit právě jedním nenulovým způsobem a máme netriviální řešení, tak existuje

$k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takové, že $(x_\lambda(a), y_\lambda(a)) = k(\hat{x}_\lambda(a), \hat{y}_\lambda(a))$. Jelikož $k(\hat{x}_\lambda, \hat{y}_\lambda)$ je také řešení (4.1_λ), tak z jednoznačnosti řešení nutně

$$(x_\lambda(t), y_\lambda(t)) = k(\hat{x}_\lambda(t), \hat{y}_\lambda(t)), \ \ t \in [a, b],$$

speciálně $x_\lambda = k\hat{x}_\lambda$, a tak je vlastní funkce skutečně určena jednoznačně až na přenásobení nenulovou konstantou.

Dále nechť λ_1 a λ_2 jsou různá vlastní čísla SL úlohy a x_{λ_1}, x_{λ_2} jsou po řadě jim příslušné vlastní funkce. Víme, že pro $i = 1, 2$ při značení $\overline{y}_{\lambda_i} = py_{\lambda_i}$ platí

$$D\overline{y}_{\lambda_i}(s) = -\lambda_i x_{\lambda_i}(s)\, dr(s) - x_{\lambda_i}(s)\, dq(s).$$

Tudíž

$$\begin{aligned} &\int_{[a,b)} x_{\lambda_1}(s) D\overline{y}_{\lambda_2}(s) - \int_{[a,b)} x_{\lambda_2}(s) D\overline{y}_{\lambda_1}(s) = -\lambda_2 \int_{[a,b)} x_{\lambda_1}(s) x_{\lambda_2}(s)\, dr(s) - \\ &- \int_{[a,b)} x_{\lambda_1}(s) x_{\lambda_2}(s)\, dq(s) + \lambda_1 \int_{[a,b)} x_{\lambda_2}(s) x_{\lambda_1}(s)\, dr(s) + \\ &+ \int_{[a,b)} x_{\lambda_2}(s) x_{\lambda_1}(s)\, dq(s) = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{[a,b)} x_{\lambda_1}(s) x_{\lambda_2}(s)\, dr(s). \end{aligned}$$

Jelikož $(x_{\lambda_1}, y_{\lambda_1})$, $(x_{\lambda_2}, y_{\lambda_2})$ jsou netriviální dvojice funkcí splňující (A) a (B), tak existují k, $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ taková, že platí $(x_{\lambda_1}(a), \overline{y}_{\lambda_1}(a)) = k(x_{\lambda_2}(a), \overline{y}_{\lambda_2}(a))$ a $(x_{\lambda_1}(b), \overline{y}_{\lambda_1}(b)) = l(x_{\lambda_2}(b), \overline{y}_{\lambda_2}(b))$. Díky vztahu $Dx_i(s) = y_i(s)\, ds$, $i = 1, 2$ tak podle integrace per partes (Lemma 26) platí

$$\begin{aligned} &\int_{[a,b)} x_{\lambda_1}(s) D\overline{y}_{\lambda_2}(s) - \int_{[a,b)} x_{\lambda_2}(s) D\overline{y}_{\lambda_1}(s) = - \int_{[a,b)} \overline{y}_{\lambda_2}(s) D x_{\lambda_1}(s) + \\ &+ x_{\lambda_1}(b)\overline{y}_{\lambda_2}(b) - x_{\lambda_1}(a)\overline{y}_{\lambda_2}(a) + \int_{[a,b)} \overline{y}_{\lambda_1}(s) D x_{\lambda_2}(s) - x_{\lambda_2}(b)\overline{y}_{\lambda_1}(b) + \\ &+ x_{\lambda_2}(a)\overline{y}_{\lambda_1}(a) = - \int_a^b p(s) y_{\lambda_2}(s) y_{\lambda_1}(s)\, ds + l\left(x_{\lambda_2}(b)\overline{y}_{\lambda_2}(b) - x_{\lambda_2}(b)\overline{y}_{\lambda_2}(b)\right) - \\ &- k\left(x_{\lambda_2}(a)\overline{y}_{\lambda_2}(a) - x_{\lambda_2}(a)\overline{y}_{\lambda_2}(a)\right) + \int_a^b p(s) y_{\lambda_1}(s) y_{\lambda_2}(s)\, ds = 0. \end{aligned}$$

Celkem tak

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_{[a,b)} x_{\lambda_1}(s) x_{\lambda_2}(s)\, dr(s) = 0,$$

což díky tomu, že λ_1 a λ_2 jsou různá, implikuje

$$\int_{[a,b)} x_{\lambda_1}(s) x_{\lambda_2}(s)\, dr(s) = 0.$$

Nyní nechť r je nezáporná a dokažme ekvivalenci v bodě (i).

$\Longrightarrow$: Nechť každé $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastní číslo SL úlohy a x_λ je jemu příslušná vlastní funkce. Přenásobení nenulovou konstantou nemění „r-nulovost“ těchto funkcí, a tak je jedno, který násobek zvolíme. Předpokládejme pro spor, že pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ je x_λ nenulový prvek $L^2([a, b), r)$. Bez újmy na obecnosti lze pak předpokládat $||x_\lambda||_{L^2([a,b),r)} = 1$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$. Podle první části této věty je potom $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ nespočetná ortonormální množina v separabilním (plyne z Lemmatu 13) Hilbertově prostoru $L^2([a, b), r)$ se skalárním součinem

$$\langle f_1, f_2 \rangle_r = \int_{[a,b)} f_1(s) f_2(s)\, dr(s),$$

což je spor. Existuje tudíž λ takové, že x_λ je nulová r-skoro všude. Je-li pak $\mu \neq \lambda$, tak

$$\lambda \int_{[a,b)} x_\lambda(s)\, dr(s) = 0 = \mu \int_{[a,b)} x_\lambda(s)\, dr(s).$$

Jelikož (x_λ, y_λ) je netriviální řešení (4.1_λ) splňující (A) a (B), tak je to díky předchozí rovnosti také netriviální řešení (4.1_μ) splňující obě okrajové podmínky, tj. x_λ je vlastní funkce pro všechna reálná čísla.

$\Longleftarrow$: Právě jsme si rozmysleli, že x_λ je vlastní funkce pro všechna reálná čísla, a tak je každé reálné číslo vlastním číslem SL úlohy.

Nyní předpokládejme případ (ii), tedy že existuje $\mu \in \mathbb{R}$, které není vlastním číslem SL úlohy. Potom je $\mathcal{G}_\mu$ dle předchozí diskuse spojitý lineární operátor na Hilbertově prostoru $H = L^2([a,b), r)$, který je samoadjungovaný a kompaktní. Díky bodu (i) víme, že nemůže existovat vlastní číslo SL úlohy s r-skoro všude nulovou vlastní funkcí, a tak už skutečně máme vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi vlastními čísly SL úlohy a nenulovými vlastními čísly operátoru $\mathcal{G}_\mu$, konkrétně λ je vlastní číslo SL úlohy právě tehdy, když $\rho = 1/(\mu - \lambda)$ je vlastní číslo $\mathcal{G}_\mu$, přičemž příslušná vlastní funkce je potom pro SL úlohu i $\mathcal{G}_\mu$ stejná, a tudíž až na přenásobení nenulovou konstantou jednoznačně určená (plyne z první části důkazu). Každé nenulové vlastní číslo $\mathcal{G}_\mu$ má tedy jednoznačně určenou vlastní funkci s normou rovnou 1 (díky r-nenulovosti vlastních funkcí).

Pokud je $\mathcal{G}_\mu$ identicky nulový, tak nemá ani jedno nenulové vlastní číslo, a tedy $N = 0$ (což se může stát, jak uvidíme na příkladu později). Není-li identicky nulový, tak díky netrivialitě H, Hilbert-Schmidtově větě a předchozí diskusi jsou všechna nenulová vlastní čísla $\mathcal{G}_\mu$ rovna

$$\rho_n = \frac{1}{\mu - \lambda_n}; \quad n = 1, \dots, N; \quad N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \tag{4.3}$$

a pro jim příslušné jednoznačně určené vlastní funkce x_n splňující $||x_n||_H = 1$ platí, že $\{x_n\}_{n=1}^N$ tvoří ortonormální bázi $\overline{\mathcal{G}_\mu(H)} \subseteq H$.

Je-li $\dim H < \infty$, tak odsud a z [9, str. 32, Tvrzení 1.119] zřejmě plyne $N \leq \dim H$. Jelikož každý samoadjungovaný operátor je normální, tak podle věty [9, str. 200, Věta 11.17] platí $\overline{\mathcal{G}_\mu(H)} = H$ právě tehdy, když je $\mathcal{G}_\mu$ prostý, a tedy $\{x_n\}_{n=1}^N$ tvoří ortonormální bázi H právě tehdy, když je $\mathcal{G}_\mu$ prostý.

Pokud je $N = \infty$, tak z [9, str. 69, Důsledek 4.28] plyne, že $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$, což díky (4.3) implikuje $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$.

$\square$

Nyní bude následovat několik příkladů. Nejprve ukážeme, že tvrzení o počtu vlastních čísel v případu (ii) předchozí věty nelze nijak zpřesnit.

Příklad 3. Na intervalu $[0,3]$ řešme úlohu s $r = \delta_1 + \delta_2$, $q = 0$, $p \equiv 1$ a prozatím nespecifikovanými okrajovými podmínkami (A) a (B), tj.

$$x(t) = x_0 + \int_0^t y(s)\, ds,$$
$$y(t) = y_0 - \lambda \int_{[0,t)} x(s)\, d(\delta_1 + \delta_2)(s).$$

Pro každé $t \in [0,1]$ je zřejmě $y(t) = y_0$, z čehož plyne $x(t) = x_0 + ty_0$.

Je-li $t \in (1,2]$, tak

$$y(t) = y(1) - \lambda \int_{[1,t)} x(s)\, d(\delta_1 + \delta_2)(s) = y_0 - \lambda x(1) = y_0 - \lambda(x_0 + y_0) = \\ = -\lambda x_0 + (1-\lambda) y_0,$$

a tedy

$$x(t) = x(1) + \int_1^t y(s)\, ds = x_0 + y_0 + (t-1)\Big(-\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0\Big) = \\ = x_0\Big(1 - \lambda(t-1)\Big) + y_0\Big(t - \lambda(t-1)\Big).$$

Pro $t \in (2,3]$ pak

$$y(t) = y(2) - \lambda \int_{[2,t)} x(s)\, d(\delta_1 + \delta_2)(s) = -\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0 - \lambda x(2) = \\ = -\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0 - \lambda\Big((1-\lambda)x_0 + (2-\lambda)y_0\Big) = \\ = x_0\Big(\lambda^2 - 2\lambda\Big) + y_0\Big(\lambda^2 - 3\lambda + 1\Big),$$

a tudíž

$$x(t) = x(2) + \int_2^t y(s)\, ds = x_0(1-\lambda) + y_0(2-\lambda) + \\ + (t-2)\Big(x_0(\lambda^2 - 2\lambda) + y_0(\lambda^2 - 3\lambda + 1)\Big) = \\ = x_0\Big(1 - \lambda + (t-2)(\lambda^2 - 2\lambda)\Big) + y_0\Big(2 - \lambda + (t-2)(\lambda^2 - 3\lambda + 1)\Big).$$

Pro řešení s počáteční podmínkou (x_0, y_0) tak platí

$$x(3) = x_0(\lambda^2 - 3\lambda + 1) + y_0(\lambda^2 - 4\lambda + 3), \\ y(3) = x_0(\lambda^2 - 2\lambda) + y_0(\lambda^2 - 3\lambda + 1),$$

z čehož dostáváme okrajové podmínky

$$c_1 x_0 + c_2 y_0 = 0, \\ c_3\Big(x_0(\lambda^2 - 3\lambda + 1) + y_0(\lambda^2 - 4\lambda + 3)\Big) + c_4\Big(x_0(\lambda^2 - 2\lambda) + y_0(\lambda^2 - 3\lambda + 1)\Big) = 0.$$

(i) Pokud $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ a $c_4 = -1$, tak se z první okrajové podmínky stane $x_0 = -y_0$, díky čemuž má druhá podmínka tvar

$$0 = y_0(-\lambda + 2) - y_0(-\lambda + 1) = y_0,$$

z čehož spolu s první podmínkou plyne $x_0 = 0$. Soustava s těmito okrajovými podmínkami (A) a (B) má tudíž pro každé λ pouze triviální řešení, tj. neexistuje vlastní číslo SL úlohy.

(ii) Je-li $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ a $c_4 = 0$, tak má první podmínka tvar $x_0 = -y_0$ a z druhé podmínky se díky tomuto vztahu stane $0 = y_0(-\lambda + 2)$. Kromě $y_0 = 0$ vedoucího na identicky nulové řešení má druhá podmínka řešení $\lambda = 2$. Existuje tak právě jedno vlastní číslo SL úlohy.

(iii) Jestliže $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = 3$ a $c_4 = 0$, z první podmínky se stane $x_0 = -3y_0$ a druhá podmínka má pak s využitím té první tvar $0 = y_0(-2\lambda^2 + 5\lambda)$, z čehož vidíme, že SL úloha má vlastní čísla $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 5/2$.

Celkem tak $\dim L^2([0,3), \delta_1 + \delta_2) = 2$ a počet vlastních čísel SL úlohy může být skutečně kdekoliv mezi 0 a $\dim L^2([0,3), \delta_1 + \delta_2)$.

Nyní se podívejme na to, že může nastat i případ (i) z Věty 13.

Příklad 4. Na intervalu $[0,3]$ řešme úlohu s $r = \delta_1$, $q = \delta_2$, $p \equiv 1$ a prozatím nespecifikovanými okrajovými podmínkami (A) a (B), tj.

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \int_0^t y(s)\,ds, \\
y(t) &= y_0 - \lambda \int_{[0,t)} x(s)\,d\delta_1(s) - \int_{[0,t)} x(s)\,d\delta_2(s).
\end{aligned}$$

Postupným výpočtem na intervalech $[0,1]$, $(1,2]$ a $(2,3]$ jako v předchozím příkladu zjistíme, že řešení těchto rovnic má tvar

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + t y_0, & t \in [0,1], \\ x_0\big(1 - \lambda(t-1)\big) + y_0\big(t - \lambda(t-1)\big), & t \in (1,2], \\ x_0(3 - \lambda - t) + y_0(4 - \lambda - t), & t \in (2,3], \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} y_0, & t \in [0,1], \\ -\lambda x_0 + (1-\lambda) y_0, & t \in (1,2], \\ -x_0 - y_0, & t \in (2,3]. \end{cases}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
x(3) &= -\lambda x_0 + (1-\lambda) y_0, \\
y(3) &= -x_0 - y_0.
\end{aligned}$$

Pokud $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = 0$ a $c_4 = -1$, tak se z okrajových podmínek

$$\begin{aligned}
c_1 x(0) + c_2 y(0) &= 0, \\
c_3 x(3) + c_4 y(3) &= 0
\end{aligned}$$

pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ stává

$$\begin{aligned}
x_0 + y_0 &= 0, \\
x_0 + y_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Tato soustava má zřejmě netriviální řešení, např. $(x_0, y_0) = (1, -1)$, a tak je každé $\lambda \in \mathbb{R}$ vlastním číslem SL úlohy. Dosadíme-li do předpisu funkce x počáteční podmínku $(x_0, y_0) = (1, -1)$, dostaneme

$$x(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0,1], \\ 1 - t, & t \in (1,2], \\ -1, & t \in (2,3]. \end{cases}$$

Vidíme, že vlastní funkce je pro každé λ stejná. Navíc $x(1) = 0$, a tak je tato funkce nulová jakožto prvek prostoru $L^2([0,3), \delta_1)$, přesně jak praví Věta 13.

Všimněme si, že Věta 13 neříká nic o nulových bodech vlastních funkcí. Následující příklad ilustruje, jak lze zařídit, aby úloha měla právě jednu vlastní funkci s libovolným konečným počtem nulových bodů, a tedy že o nulových bodech toho v této obecnosti nelze mnoho říci. Myšlenkou je ještě předtím, než do hry vstoupí míra r, zařídit pomocí q (např. ve tvaru konečné lineární kombinace Diracových měr), aby řešení střídavě rostlo a klesalo a během toho opakovaně nabývalo hodnotu 0.

Příklad 5. Na intervalu $[0,4]$ řešme úlohu s $r = \delta_3$, $q = \delta_1 + 3\delta_2$, $p \equiv 1$ a prozatím nespecifikovanými okrajovými podmínkami (A) a (B), tj.

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \int_0^t y(s)\, ds, \\
y(t) &= y_0 - \lambda \int_{[0,t)} x(s)\, d\delta_3(s) - \int_{[0,t)} x(s)\, d(\delta_1 + 3\delta_2)(s).
\end{aligned}$$

Postupným výpočtem na intervalech $[0,1]$, $(1,2]$, $(2,3]$ a $(3,4]$ dostaneme, že

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + t y_0, & t \in [0,1], \\ x_0(2-t) + y_0, & t \in (1,2], \\ x_0(2-t) + y_0(7-3t), & t \in (2,3], \\ x_0\Big(-1 + (t-3)(\lambda-1)\Big) + y_0\Big(-2 + (t-3)(2\lambda-3)\Big), & t \in (3,4], \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} y_0, & t \in [0,1], \\ -x_0, & t \in (1,2], \\ -x_0 - 3y_0, & t \in (2,3], \\ x_0(\lambda-1) + y_0(2\lambda-3), & t \in (3,4]. \end{cases}$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
x(4) &= x_0(\lambda-2) + y_0(2\lambda-5), \\
y(4) &= x_0(\lambda-1) + y_0(2\lambda-3).
\end{aligned}$$

Pokud $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ a $c_4 = -2$, tak se z okrajových podmínek

$$\begin{aligned}
c_1 x(0) + c_2 y(0) &= 0, \\
c_3 x(4) + c_4 y(4) &= 0
\end{aligned}$$

po krátkém výpočtu stane

$$\begin{aligned}
x_0 + y_0 &= 0, \\
y_0(1-\lambda) &= 0,
\end{aligned}$$

a tak existuje právě jedno vlastní číslo SL úlohy, a to $\lambda = 1$. Zvolíme-li počáteční podmínku $(x_0, y_0) = (1, -1)$, dostaneme vlastní funkci

$$x(t) = \begin{cases} 1-t, & t \in [0,1], \\ 1-t, & t \in (1,2], \\ 2t-5, & t \in (2,3], \\ t-2, & t \in (3,4]. \end{cases}$$

Vidíme, že $x(1) = x(2{,}5) = 0$.

Větou 13 a předchozími příklady jsme splnili první cíl této kapitoly, kterým bylo zjištění toho, jak se změní tvrzení z klasické Sturm-Liouvilleovy teorie, když budeme uvažovat obecné Radonovy znaménkové míry (o r jsme nakonec potřebovali předpokládat, že je nezáporná). Abychom splnili i druhý cíl této kapitoly, jímž je vyšetření toho, za jakých podmínek platí stejná tvrzení jako v klasické teorii, omezíme se na případ, kdy je r kladná integrovatelná funkce, která je navíc „odražená od nuly“, tj. má reprezentanta splňujícího $m := \inf_{t\in(a,b)} r(t) > 0$. Z Věty 13 pak plyne následující.

Věta 14. *Nechť $r \in L^1([a, b])$ je skoro všude kladná. Potom je množina vlastních čísel SL úlohy rovna prosté nekonečné posloupnosti $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pro kterou platí $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$. Označme $H = L^2([a, b), r(s)\,ds)$. Je-li x_n jednoznačně určená vlastní funkce příslušná číslu λ_n splňující $||x_n||_H = 1$, tak $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ortonormální báze H.*

Má-li navíc r reprezentanta splňujícího $m := \inf_{t\in(a,b)} r(t) > 0$, tak jsou vlastní čísla SL úlohy zdola omezená, a tudíž $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Důkaz. Nechť r je skoro všude kladná. Každá vlastní funkce x, která je nulová v prostoru H, je pak rovna nule skoro všude, což díky spojitosti vlastních funkcí znamená, že x je identicky nulová, jenže pak to není vlastní funkce. Z toho plyne, že nemůže dojít k případu (i) z Věty 13. Nutně tak existuje $\mu \in \mathbb{R}$, které není vlastním číslem SL úlohy. Příslušný Greenův operátor $\mathcal{G}_\mu$ je potom prostý.

Pokud by totiž existovaly různé h_1, $h_2 \in H$ takové, že $\mathcal{G}_\mu(h_1) = \mathcal{G}_\mu(h_2)$, tak z linearity $\mathcal{G}_\mu(h_2 - h_1) = 0$. Označme $h = h_2 - h_1$. Potom $h \neq 0$ v H. Nechť dále (x_h, y_h) je jednoznačně určené řešení rovnice (4.2_μ) splňující okrajové podmínky (A) a (B) (vizte Lemma 35). Potom $x_h = \mathcal{G}_\mu(h)$ je spojitá a nulová v H, z čehož plyne nulovost skoro všude, a tedy díky spojitosti nulovost všude. Podle Definice 20 tak pro každé $t \in [a, b]$ platí

$$
\begin{aligned}
p(t)y_h(t) &= p(a)y_h(a) - \int_{[a,t)} x_h(s)\,d(\mu r + q)(s) + \int_a^t h(s)r(s)\,ds = \\
&= p(a)y_h(a) + \int_a^t h(s)r(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Z faktu $h \in H \subseteq L^1([a, b), r(s)\,ds)$ plyne $hr \in L^1(a, b)$, a tak je funkce py_h absolutně spojitá, což implikuje absolutní spojitost y_h. Pokud by y_h byla v nějakém bodě $c \in [a, b]$ (bez újmy na obecnosti $c \in (a, b)$) nenulová, řekněme kladná, tak je ze spojitosti kladná i na $(c, c + \epsilon) \subseteq [a, b]$ pro nějaké $\epsilon > 0$, jenže pak

$$
0 = x_h(c + \epsilon) = x_h(c) + \int_c^{c+\epsilon} y_h(s)\,ds = \int_c^{c+\epsilon} y_h(s)\,ds > 0,
$$

což je spor. Tudíž y_h je také identicky nulová.

Celkem tak (x_h, y_h) je identicky nulová dvojice řešící (4.2_μ), a tak pro každý podinterval $[c, d] \subseteq [a, b]$ platí

$$
\begin{aligned}
0 = p(d)y_h(d) &= p(c)y_h(c) - \int_{[c,d)} x_h(s)\,d(\mu r + q)(s) + \int_{[c,d)} h(s)r(s)\,ds = \\
&= \int_c^d h(s)r(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Díky Lemmatu 14 pak $h = 0$ $(r(s)\,ds)$-skoro všude, z čehož plyne $h = 0$ v H, ale to je spor.

Tedy $\mathcal{G}_\mu$ je prostý, a tak dle Věty 13 tvoří $\{x_n\}_{n=1}^N$ ortonormální bázi H, kde $N \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Zřejmě však H je nekonečnědimenzionální a separabilní (separabilita plyne z Lemmatu 13), tudíž má podle [9, str. 32, Tvrzení 1.119] každá ortonormální báze H nekonečně mnoho prvků. Množina vlastních čísel je tedy skutečně rovna prosté nekonečné posloupnosti $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$. Navíc $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ortonormální báze prostoru H.

Nyní nechť navíc $m := \inf_{t\in(a,b)} r(t) > 0$. Jelikož

$$D(py_n)(s) = -\lambda_n x_n(s) r(s)\,ds - x_n(s)\,dq(s)$$

a $Dx_n(s) = y_n(s)\,ds$, tak díky integraci per partes (Lemma 26) a $||x_n||_H = 1$ platí

$$x_n(b)p(b)y_n(b) - x_n(a)p(a)y_n(a) - \int_a^b p(s)y_n^2(s)\,ds = \int_{[a,b)} x_n(s)D(py_n)(s) =$$
$$= -\lambda_n \int_a^b x_n^2(s)r(s)\,ds - \int_{[a,b)} x_n^2(s)\,dq(s) = -\lambda_n - \int_{[a,b)} x_n^2(s)\,dq(s).$$

Odsud

$$\lambda_n = x_n(a)p(a)y_n(a) - x_n(b)p(b)y_n(b) + \int_a^b p(s)y_n^2(s)\,ds - \int_{[a,b)} x_n^2(s)\,dq(s). \quad (4.4)$$

Připomeňme, že vlastní funkce splňují okrajové podmínky (A) a (B). Pokud je $c_2 = 0$, tak $c_1 \neq 0$ a $c_1 x_n(a) = 0$, a tedy nutně $x_n(a) = 0$. Jinak z rovnosti $c_1 x_n(a) + c_2 p(a) y_n(a) = 0$ plyne $p(a)y_n(a) = -(c_1/c_2)x_n(a)$. Obdobně dostaneme, že platí $x_n(b) = 0$, nebo (pokud $c_4 \neq 0$) $p(b)y_n(b) = -(c_3/c_4)x_n(b)$.

Je-li $c_2 \neq 0$ a $c_4 \neq 0$, tak díky předchozímu

$$x_n(a)p(a)y_n(a) - x_n(b)p(b)y_n(b) = -\frac{c_1}{c_2}x_n^2(a) + \frac{c_3}{c_4}x_n^2(b) \geq$$
$$\geq -\left|\frac{c_1}{c_2}\right| x_n^2(a) - \left|\frac{c_3}{c_4}\right| x_n^2(b) \geq 2\min\left\{ -\left|\frac{c_1}{c_2}\right|, -\left|\frac{c_3}{c_4}\right|\right\} ||x_n^2||_{C([a,b])} =: -C||x_n^2||_{C([a,b])}.$$

Analogicky odvodíme, že i v případech $c_2 = 0$ nebo $c_4 = 0$ existuje $C > 0$ takové, že

$$x_n(a)p(a)y_n(a) - x_n(b)p(b)y_n(b) \geq -C||x_n^2||_{C([a,b])},$$

kde C nezávisí na n. Jelikož

$$-\int_{[a,b)} x_n^2(s)\,dq(s) \geq -||x_n^2||_{C([a,b])} \cdot ||q||_{\mathcal{M}([a,b))},$$

tak podle (4.4)

$$\lambda_n \geq \int_a^b p(s)y_n^2(s)\,ds - ||x_n^2||_{C([a,b])} \cdot \left(C + ||q||_{\mathcal{M}([a,b))}\right). \quad (4.5)$$

Připomeňme, že pokud je $\epsilon > 0$ a $k \geq 0$, $l \geq 0$, tak

$$kl = \frac{k}{\sqrt{2\epsilon}}(l\sqrt{2\epsilon}) \leq \frac{k^2}{2\cdot 2\epsilon} + \frac{2\epsilon l^2}{2} = \frac{k^2}{4\epsilon} + \epsilon l^2 = c(\epsilon)k^2 + \epsilon l^2.$$

Dále připomeňme, že podle Lemmatu 1 je $x_n^2 \in AC([a,b])$ a

$$(x_n^2(t))' = 2x_n(t)x_n'(t) = 2x_n(t)y_n(t) \text{ pro s.v. } t \in [a,b].$$

Pokud by platilo, že $\min_{t\in[a,b]} x_n^2(t) > 1/(m(b-a))$, tak potom

$$||x_n||_H^2 = \int_a^b x_n^2(s)r(s)\,ds \geq m(b-a) \min_{t\in[a,b]} x_n^2(t) > 1,$$

což je ale spor s $||x_n||_H = 1$. Tedy $\min_{t\in[a,b]} x_n^2(t) \leq c(r)$, kde $c(r) \geq 0$ je konstanta nezávislá na n.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné a x_n^2 nabývá v čase $c \in [a,b]$ svého minima na $[a,b]$. Pomocí předchozích pozorování a Hölderovy nerovnosti použité na míru $r(s)\,ds$ pak pro každé $\epsilon > 0$ a každé $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_c^t (x_n^2(s))'\,ds\Big| = 2\Big|\int_c^t x_n(s)y_n(s)\,ds\Big| \leq 2\int_a^b \frac{|y_n(s)|}{r(s)}|x_n(s)|r(s)\,ds \leq \\
&\leq 2\left(\int_a^b x_n^2(s)r(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b \frac{y_n^2(s)}{r(s)}\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq c(\epsilon)\left(\int_a^b x_n^2(s)r(s)\,ds\right) + \\
&+ \epsilon\left(\int_a^b \frac{y_n^2(s)}{r(s)}\,ds\right) = c(\epsilon) + \epsilon\int_a^b \frac{y_n^2(s)}{r(s)}\,ds.
\end{aligned}$$

Tudíž pro každé $\epsilon > 0$ a každé $t \in [a,b]$

$$x_n^2(t) = x_n^2(c) + \int_c^t (x_n^2(s))'\,ds \leq c(r) + c(\epsilon) + \epsilon\int_a^b \frac{y_n^2(s)}{r(s)}\,ds,$$

což při značení $c(\epsilon,r) = c(\epsilon) + c(r)$ implikuje

$$||x_n^2||_{C([a,b])} \leq c(\epsilon,r) + \epsilon\int_a^b \frac{y_n^2(s)}{r(s)}\,ds,$$

kde $c(\epsilon,r)$ je konstanta nezávislá na n.

Podle (4.5) tak

$$\lambda_n \geq \int_a^b y_n^2(s)\left(p(s) - \epsilon\frac{C + ||q||_{\mathcal{M}([a,b))}}{r(s)}\right)ds - c(\epsilon,r,C,q),$$

kde $c(\epsilon,r,C,q) = c(\epsilon,r)\cdot\Big(C + ||q||_{\mathcal{M}([a,b))}\Big)$ je konstanta nezávislá na n. Zvolíme-li nyní $\epsilon > 0$ takové, aby

$$\min_{s\in[a,b]} p(s) \geq \epsilon\frac{C + ||q||_{\mathcal{M}([a,b))}}{m},$$

což díky $p > 0$ na $[a,b]$ a $m > 0$ lze, tak $\lambda_n \geq -c(\epsilon,r,C,q)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tj. vlastní čísla SL úlohy jsou zdola omezená. Odsud díky $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = \infty$ plyne $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$.

$\square$

4.2 Nulové body vlastních funkcí

V celé této sekci budeme předpokládat, že $r \in L^1([a,b])$ má reprezentanta splňujícího $m := \inf_{t\in(a,b)} r(t) > 0$. Dále q, G_1 a G_2 budou obecné Radonovy znaménkové míry na nějaké σ-algebře podmnožin intervalu $[a,b)$ a p, p_1, p_2 kladné absolutně spojité funkce na $[a,b]$. Také budeme značit $H = L^2([a,b), r(s)\,ds)$ a $[f]_a^b = f(b) - f(a)$ pro každou $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Z Věty 14 víme, že vlastní čísla SL úlohy lze uspořádat do rostoucí posloupnosti $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pro kterou platí $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, a že ke každému vlastnímu číslu λ_n existuje jednoznačně určená vlastní funkce x_n splňující $||x_n||_H = 1$, přičemž navíc $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ortonormální báze H. Nyní ukážeme, že x_n má v intervalu (a,b) právě $n-1$ nulových bodů, čímž dokončíme druhý cíl této kapitoly. Za tím účelem nejprve dokážeme několik pomocných tvrzení, konkrétně tzv. Piconeho identitu, verzi L'Hôpitalova pravidla a dvě srovnávací věty.

Lemma 37. (Piconeho identita). *Nechť pro $i = 1, 2$ je (x_i, y_i) řešení rovnice*

$$(p_i(t)x'(t))' - G_i(t)x(t) = 0$$

na intervalu $[a,b]$ ve smyslu Definice 20. Nechť funkce x_2 nemá v intervalu $[a,b]$ nulový bod. Potom

$$\left[\frac{x_1}{x_2}(p_1y_1x_2 - p_2x_1y_2)\right]_a^b = \int_{[a,b)} x_1^2(s)\,d(G_1-G_2)(s) + \int_a^b (p_1(s)-p_2(s))y_1^2(s)\,ds + \\ + \int_a^b p_2(s)\frac{(y_1(s)x_2(s)-x_1(s)y_2(s))^2}{x_2^2(s)}\,ds.$$

Důkaz. Víme, že pro $i = 1, 2$ je

$$Dx_i(s) = y_i(s)\,ds,$$
$$D(p_iy_i)(s) = x_i(s)\,dG_i(s).$$

Díky integraci per partes (Lemma 26) platí

$$\int_{[a,b)} x_1^2(s)\,dG_1(s) = \int_{[a,b)} x_1(s)D(p_1y_1)(s) = -\int_{[a,b)} p_1(s)y_1(s)Dx_1(s) + \\ + [p_1x_1y_1]_a^b = -\int_a^b p_1(s)y_1^2(s)\,ds + \left[\frac{x_1}{x_2}p_1y_1x_2\right]_a^b.$$

S pomocí tohoto faktu a rovnosti

$$\frac{(y_1(s)x_2(s)-x_1(s)y_2(s))^2}{x_2^2(s)} = y_1^2(s) + \frac{-2x_1(s)x_2(s)y_1(s)y_2(s) + x_1^2(s)y_2^2(s)}{x_2^2(s)}$$

získáme, že pravá strana dokazované rovnosti je rovna

$$P := \left[\frac{x_1}{x_2}p_1y_1x_2\right]_a^b - \int_{[a,b)} x_1^2(s)\,dG_2(s) - \int_a^b p_2(s)y_1^2(s)\,ds + \int_a^b p_2(s)y_1^2(s)\,ds - \\ - 2\int_a^b p_2(s)\frac{x_1(s)x_2(s)y_1(s)y_2(s)}{x_2^2(s)}\,ds + \int_a^b p_2(s)\frac{x_1^2(s)y_2^2(s)}{x_2^2(s)}\,ds = \left[\frac{x_1}{x_2}p_1y_1x_2\right]_a^b - \\ - \int_{[a,b)} x_1^2(s)\,dG_2(s) - 2\int_a^b p_2(s)\frac{x_1(s)x_2(s)y_1(s)y_2(s)}{x_2^2(s)}\,ds + \int_a^b p_2(s)\frac{x_1^2(s)y_2^2(s)}{x_2^2(s)}\,ds.$$

Jelikož x_1, $x_2 \in AC([a,b])$ a $x_2 \neq 0$ na $[a,b]$, tak je podle Lemmatu 1 funkce x_1^2/x_2 absolutně spojitá a pro skoro všechna $s \in [a,b]$ platí

$$\left(\frac{x_1^2(s)}{x_2(s)}\right)' = \frac{2x_1(s)x_1'(s)x_2(s) - x_1^2(s)x_2'(s)}{x_2^2(s)} = \frac{2x_1(s)y_1(s)x_2(s) - x_1^2(s)y_2(s)}{x_2^2(s)}.$$

Odsud a z Lemmatu 27 plyne, že

$$D\Big(\frac{x_1^2}{x_2}\Big)(s) = \frac{2x_1(s)y_1(s)x_2(s) - x_1^2(s)y_2(s)}{x_2^2(s)}\,ds.$$

Díky vztahu $D(p_2y_2)(s) = x_2(s)\,dG_2(s)$ a integraci per partes (Lemma 26) tak

$$\begin{aligned}
&-\int_{[a,b)} x_1^2(s)\,dG_2(s) = -\int_{[a,b)} \frac{x_1^2(s)}{x_2(s)}x_2(s)\,dG_2(s) = -\int_{[a,b)} \frac{x_1^2(s)}{x_2(s)}D(p_2y_2)(s) = \\
&= \int_{[a,b)} p_2(s)y_2(s)D\Big(\frac{x_1^2}{x_2}\Big)(s) - \Big[p_2y_2\frac{x_1^2}{x_2}\Big]_a^b = 2\int_a^b p_2(s)\frac{x_1(s)x_2(s)y_1(s)y_2(s)}{x_2^2(s)}\,ds - \\
&- \int_a^b p_2(s)\frac{x_1^2(s)y_2^2(s)}{x_2^2(s)}\,ds - \Big[\frac{x_1}{x_2}p_2x_1y_2\Big]_a^b.
\end{aligned}$$

Tudíž

$$P = \Big[\frac{x_1}{x_2}p_1y_1x_2\Big]_a^b - \Big[\frac{x_1}{x_2}p_2x_1y_2\Big]_a^b = \Big[\frac{x_1}{x_2}(p_1y_1x_2 - p_2x_1y_2)\Big]_a^b,$$

což jsme chtěli ukázat.

□

Lemma 38. (L'Hôpitalovo pravidlo). *Nechť pro $i = 1, 2$ je (x_i, y_i) netriviální řešení rovnice*

$$(p_i(t)x'(t))' - G_i(t)x(t) = 0$$

na intervalu $[a,b]$ ve smyslu Definice 20. Nechť $x_1(c) = x_2(c) = 0$, kde $c \in [a,b]$.

Potom

$$\lim_{t\to c}\left(\frac{x_1(t)}{x_2(t)}\right) = \frac{y_1(c)}{y_2(c)}$$

pro $c \in (a,b)$, zatímco pro $c = a$ $(c = b)$ půjde o limitu zprava (zleva).

Důkaz. Nechť $c \in (a,b)$. Z bodu (ii) Lemmatu 34 víme, že existuje $\eta > 0$ takové, že funkce x_2 nemá v $(c-\eta, c) \cup (c, c+\eta)$ nulový bod. Z bodu (i) téhož lemmatu dále platí, že funkce y_1 a y_2 jsou spojité v bodě c a $y_1(c) \neq 0$, $y_2(c) \neq 0$. Tudíž

$$\lim_{t\to c}\left(\frac{y_1(t)}{y_2(t)}\right) = \frac{y_1(c)}{y_2(c)} =: L$$

a η lze navíc díky spojitosti y_2 zvolit tak malé, že y_2 nezmění na $(c-\eta, c+\eta)$ znaménko (speciálně je všude nenulová).

Víme, že pro každé $t \in (c-\eta, c+\eta)$ platí

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_1(c) + \int_c^t y_1(s)\,ds = \int_c^t y_1(s)\,ds,\\
x_2(t) &= x_2(c) + \int_c^t y_2(s)\,ds = \int_c^t y_2(s)\,ds,\\
x_1(t) - Lx_2(t) &= \int_c^t \big(y_1(s) - Ly_2(s)\big)\,ds.
\end{aligned}$$

Jelikož funkce y_2 nezmění na $(c-\eta, c+\eta)$ znaménko, tak lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že je na tomto intervalu kladná. Z předchozí rovnosti pro x_2 pak dostáváme, že $x_2 > 0$ na $(c, c+\eta)$ a $x_2 < 0$ na $(c-\eta, c)$.

Z faktu

$$0 = \lim_{t\to c}\left(\frac{y_1(t)}{y_2(t)} - L\right) = \lim_{t\to c}\left(\frac{y_1(t) - Ly_2(t)}{y_2(t)}\right)$$

plyne, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje $0 < \delta < \eta$ takové, že pro všechna $t \in P(c,\delta)$ platí $|y_1(t) - Ly_2(t)| \leq \epsilon |y_2(t)|$, kde $P(c,\delta) = (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$.

Pro $t \in (c, c+\delta)$ tak vzhledem k předchozímu máme

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_1(t)}{x_2(t)} - L\right| &= \frac{1}{|x_2(t)|}\cdot |x_1(t) - Lx_2(t)| = \frac{1}{|x_2(t)|}\cdot\left|\int_c^t \big(y_1(s) - Ly_2(s)\big)\,ds\right| \leq \\
&\leq \frac{1}{|x_2(t)|}\int_c^t |y_1(s) - Ly_2(s)|\,ds \leq \frac{\epsilon}{|x_2(t)|}\int_c^t |y_2(s)|\,ds = \frac{\epsilon}{x_2(t)}\int_c^t y_2(s)\,ds = \\
&= \frac{\epsilon}{x_2(t)}\left(x_2(t) - x_2(c)\right) = \frac{\epsilon}{x_2(t)} x_2(t) = \epsilon.
\end{aligned}$$

Je-li $t \in (c-\delta, c)$, tak analogicky platí

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_1(t)}{x_2(t)} - L\right| &= \frac{1}{|x_2(t)|}\cdot\left|\int_t^c \big(y_1(s) - Ly_2(s)\big)\,ds\right| \leq \frac{\epsilon}{|x_2(t)|}\int_t^c |y_2(s)|\,ds = \\
&= \frac{\epsilon}{-x_2(t)}\int_t^c y_2(s)\,ds = \frac{\epsilon}{-x_2(t)}\left(x_2(c) - x_2(t)\right) = \frac{\epsilon}{-x_2(t)}(-x_2(t)) = \epsilon.
\end{aligned}$$

Tudíž

$$\lim_{t\to c-}\left(\frac{x_1(t)}{x_2(t)}\right) = L = \frac{y_1(c)}{y_2(c)}, \quad \lim_{t\to c+}\left(\frac{x_1(t)}{x_2(t)}\right) = L = \frac{y_1(c)}{y_2(c)}.$$

Pokud $c = a$ nebo $c = b$, tak stejným postupem spočítáme pouze příslušnou jednostrannou limitu.

□

Věta 15. (První srovnávací věta, PSV). *Nechť pro $i = 1, 2$ je (x_i, y_i) netriviální řešení rovnice*

$$(p(t)x'(t))' + (\mu_i r(t) + q(t))\,x(t) = 0$$

na intervalu $[a,b]$ ve smyslu Definice 20 splňující okrajovou podmínku (A), *kde μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ a $\mu_2 > \mu_1$.*

Potom pokud x_1 má v intervalu $(a,b]$ právě $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nulových bodů, tak x_2 má v tomtéž intervalu alespoň M nulových bodů. Navíc pro $j = 1,\dots,M$ platí, že j-tý nulový bod x_2 v $(a,b]$ je menší než j-tý nulový bod x_1 v $(a,b]$.

Důkaz. Předně si uvědomme, že podle bodu (ii) Lemmatu 34 nemá množina nulových bodů funkce x_1 v intervalu $[a,b]$ hromadný bod, a tak jde o konečnou množinu. Pokud by totiž nulových bodů bylo nekonečně mnoho, tak jsme pomocí kompaktnosti $[a,b]$ schopni najít konvergentní posloupnost nulových bodů, jejíž limitou je díky spojitosti x_1 opět nulový bod, jenže pak by šlo o hromadný bod. Analogicky pro nulové body funkce x_2.

Pro $M = 0$ dokazované tvrzení zřejmě platí. Dále tedy nechť $M \geq 1$.

Již dříve jsme nahlédli (vizte poznámku ihned za důkazem Lemmatu 35), že okrajovou podmínku (A) lze až na přenásobení nenulovou konstantou splnit právě jedním netriviálním způsobem, a tak existuje $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takové, že $(x_2(a), y_2(a)) = k(x_1(a), y_1(a))$.

Označme nulové body funkce x_1 v intervalu $(a, b]$ jako

$$a < t_1 < t_2 < \ldots < t_M \leq b.$$

Jelikož

$$(\mu_2 r(s)\, ds + \, dq(s)) - (\mu_1 r(s)\, ds + \, dq(s)) = (\mu_2 - \mu_1) r(s)\, ds$$

je nezáporná míra na $\mathcal{B}(a, b)$ a její zúžení na $\mathcal{B}(t_j, t_{j+1})$ je pro každý interval (t_j, t_{j+1}), $j = 1, \ldots, M-1$ nenulová míra (plyne z $\mu_2 - \mu_1 > 0$ a $m > 0$), tak ze Sturmovy srovnávací věty (Věta 11) použité na $dq_i(s) = \mu_i r(s)\, ds + dq(s)$ plyne, že x_2 má pro každé $j = 1, \ldots, M-1$ v intervalu (t_j, t_{j+1}) aspoň jeden nulový bod. Tedy x_2 má v $(a, b]$ aspoň $M - 1$ nulových bodů.

Ukážeme, že i v intervalu (a, t_1) leží aspoň jeden nulový bod funkce x_2. Pokud $x_1(a) = 0$, tak jde opět o důsledek Věty 11. Lze tedy předpokládat, že $x_1(a) \neq 0$, z čehož plyne $x_2(a) = kx_1(a) \neq 0$.

Nechť x_2 pro spor nemá v (a, t_1) nulový bod a nechť dokonce $x_2(t_1) \neq 0$. Potom x_2 nemá nulový bod v $[a, t_1]$, a tak díky Piconeho identitě (Lemma 37) použité na interval $[a, t_1]$ a

$$dG_1(s) = -\mu_1 r(s)\, ds - dq(s), \;\; dG_2(s) = -\mu_2 r(s)\, ds - dq(s), \;\; p_1 \equiv p_2 \equiv p$$

získáme

$$\begin{aligned} &\left[p \frac{x_1}{x_2} (y_1 x_2 - x_1 y_2) \right]_a^{t_1} = (\mu_2 - \mu_1) \int_a^{t_1} x_1^2(s) r(s)\, ds + \\ &+ \int_a^{t_1} p(s) \frac{(y_1(s) x_2(s) - x_1(s) y_2(s))^2}{x_2^2(s)}\, ds \geq (\mu_2 - \mu_1) \int_a^{t_1} x_1^2(s) r(s)\, ds > 0, \end{aligned}$$

přičemž poslední nerovnost platí díky tomu, že x_1 nemá v (a, t_1) nulový bod, a tak je x_1^2 na (a, t_1) kladná, $\mu_2 - \mu_1 > 0$ a $m > 0$. Ze vztahu $x_1(t_1) = 0$ však máme

$$\begin{aligned} &\left[p \frac{x_1}{x_2} \big(y_1 x_2 - x_1 y_2 \big) \right]_a^{t_1} = p(t_1) \frac{x_1(t_1)}{x_2(t_1)} \big(y_1(t_1) x_2(t_1) - x_1(t_1) y_2(t_1) \big) - \\ &- p(a) \frac{x_1(a)}{x_2(a)} \big(y_1(a) x_2(a) - x_1(a) y_2(a) \big) = -p(a) x_1^2(a) \left(\frac{y_1(a)}{x_1(a)} - \frac{y_2(a)}{x_2(a)} \right) = \\ &= -p(a) x_1^2(a) \left(\frac{y_1(a)}{x_1(a)} - \frac{k y_1(a)}{k x_1(a)} \right) = -p(a) x_1^2(a) \left(\frac{y_1(a)}{x_1(a)} - \frac{y_1(a)}{x_1(a)} \right) = 0, \end{aligned}$$

což je spor.

Pokud je $x_2(t_1) = 0$, tak si všimněme, že x_1 a x_2 jsou vlastní funkce SL úlohy uvažované na intervalu $[a, t_1]$ s okrajovými podmínkami (A) a $x(t_1) = 0$ (tj. $b = t_1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 0$) příslušné po řadě různým vlastním číslům μ_1 a μ_2. Z Věty 13 tak dostáváme, že

$$\int_a^{t_1} x_1(s) x_2(s) r(s)\, ds = 0.$$

Jelikož však ani jedna z funkcí x_1, x_2 nemá v intervalu (a, t_1) nulový bod, tak funkce $x_1 x_2$ nemá v (a, t_1) nulový bod a navíc na tomto intervalu díky spojitosti nemění znaménko. Poněvadž $m > 0$, tak

$$\int_a^{t_1} x_1(s)x_2(s)r(s)\,ds \neq 0,$$

což je spor.

Tedy skutečně x_2 má v (a, t_1) nulový bod (a v intervalu $(a, b]$ tudíž alespoň M nulových bodů). Z toho navíc plyne, že první nulový bod x_2 v $(a, b]$ je menší než první nulový bod x_1 v tomtéž intervalu (kterým je bod t_1). Nechť pro spor druhý nulový bod x_2 v $(a, b]$ je větší nebo roven druhému nulovému bodu x_1 v $(a, b]$. Potom ale $x_1(t_1) = x_1(t_2) = 0$ a x_2 nemá v (t_1, t_2) nulový bod, což je spor s Větou 11, protože zúžení míry $(\mu_2 - \mu_1)r(s)\,ds$ na $\mathcal{B}(t_1, t_2)$ je nenulová míra. Nutně tak i druhý nulový bod x_2 v $(a, b]$ je menší než druhý nulový bod x_1 v tomtéž intervalu. Analogicky pro další nulové body.

□

Věta 16. (Druhá srovnávací věta, DSV). *Nechť pro $i = 1, 2$ je (x_i, y_i) netriviální řešení rovnice*

$$(p(t)x'(t))' + (\mu_i r(t) + q(t))\,x(t) = 0$$

na intervalu $[a, b]$ ve smyslu Definice 20 splňující okrajovou podmínku (A)*, kde μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ a $\mu_2 > \mu_1$. Nechť $c \in (a, b]$ není nulový bod ani jedné z funkcí x_1, x_2 a nechť navíc tyto funkce mají v intervalu $(a, c]$ stejný počet nulových bodů, který označme $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom*

$$\frac{y_1(c)}{x_1(c)} > \frac{y_2(c)}{x_2(c)}.$$

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že $M \geq 1$.

Označme všechny nulové body funkce x_1 v intervalu $(a, c]$ jako

$$a < t_1 < \ldots < t_M < c$$

a všechny nulové body funkce x_2 v tomtéž intervalu jako

$$a < s_1 < \ldots < s_M < c.$$

Podle PSV (Věta 15) použité na interval $[a, c]$ platí $s_M < t_M$, a tedy x_2 nemá v $[t_M, c]$ nulový bod. Díky Piconeho identitě použité na interval $[t_M, c]$ tak

$$\begin{aligned}\left[p\frac{x_1}{x_2}\,(y_1 x_2 - x_1 y_2)\right]_{t_M}^{c} &= (\mu_2 - \mu_1)\int_{t_M}^{c} x_1^2(s)r(s)\,ds + \\ + \int_{t_M}^{c} p(s)\frac{(y_1(s)x_2(s) - x_1(s)y_2(s))^2}{x_2^2(s)}\,ds &\geq (\mu_2 - \mu_1)\int_{t_M}^{c} x_1^2(s)r(s)\,ds > 0,\end{aligned}$$

přičemž poslední nerovnost platí díky tomu, že x_1 nemá v $(t_M, c]$ nulový bod, a tedy x_1^2 je na tomto intervalu kladná. S využitím rovnosti $x_1(t_M) = 0$ však také

$$\left[p\frac{x_1}{x_2}\left(y_1x_2 - x_1y_2\right)\right]_{t_M}^{c} = p(c)\frac{x_1(c)}{x_2(c)}\Big(y_1(c)x_2(c) - x_1(c)y_2(c)\Big) =$$
$$= p(c)x_1^2(c)\left(\frac{y_1(c)}{x_1(c)} - \frac{y_2(c)}{x_2(c)}\right).$$

Poněvadž $p(c)x_1^2(c) > 0$ (c není nulovým bodem funkce x_1 a $p > 0$ na $[a, b]$), tak nutně

$$\frac{y_1(c)}{x_1(c)} - \frac{y_2(c)}{x_2(c)} > 0,$$

což jsme chtěli ukázat.

Nyní nechť $M = 0$. Podobně jako v důkazu PSV víme, že existuje $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ splňující $(x_2(a), y_2(a)) = k(x_1(a), y_1(a))$. Pokud $c_2 \neq 0$, tak nutně $x_1(a) \neq 0$, jinak by totiž z $c_1x_1(a) + c_2p(a)y_1(a) = 0$ plynulo $y_1(a) = 0$, což je spor s netrivialitou řešení. Jelikož $x_2(a) = kx_1(a)$, tak také $x_2(a) \neq 0$ a x_2 tudíž nemá v $[a, c]$ nulový bod. Na intervalu $[a, c]$ lze tedy opět použít Piconeho identitu. Platí

$$\left[p\frac{x_1}{x_2}\left(y_1x_2 - x_1y_2\right)\right]_{a}^{c} = p(c)x_1^2(c)\left(\frac{y_1(c)}{x_1(c)} - \frac{y_2(c)}{x_2(c)}\right) -$$
$$- p(a)x_1^2(a)\left(\frac{y_1(a)}{x_1(a)} - \frac{y_2(a)}{x_2(a)}\right) = p(c)x_1^2(c)\left(\frac{y_1(c)}{x_1(c)} - \frac{y_2(c)}{x_2(c)}\right) -$$
$$- p(a)x_1^2(a)\left(\frac{y_1(a)}{x_1(a)} - \frac{ky_1(a)}{kx_1(a)}\right) = p(c)x_1^2(c)\left(\frac{y_1(c)}{x_1(c)} - \frac{y_2(c)}{x_2(c)}\right).$$

Podle Piconeho identity se toto rovná

$$(\mu_2 - \mu_1)\int_a^c x_1^2(s)r(s)\,ds + \int_a^c p(s)\frac{(y_1(s)x_2(s) - x_1(s)y_2(s))^2}{x_2^2(s)}\,ds \geq$$
$$\geq (\mu_2 - \mu_1)\int_a^c x_1^2(s)r(s)\,ds > 0.$$

Podobně jako výše tak platí

$$\frac{y_1(c)}{x_1(c)} - \frac{y_2(c)}{x_2(c)} > 0.$$

Jestliže $c_2 = 0$, tak z $c_1 \neq 0$ a $c_1x_1(a) + c_2p(a)y_1(a) = 0$ plyne $x_1(a) = 0$, a tudíž také $x_2(a) = kx_1(a) = 0$. Podle L'Hôpitalova pravidla (Lemma 38) tak

$$\lim_{t\to a+}\left(\frac{x_1(t)}{x_2(t)}\right) = \frac{y_1(a)}{y_2(a)}.$$

Dále pro každé $t \in (a, c)$ je díky nenulovosti funkcí x_1 a x_2 na $(a, c]$

$$\left[p\frac{x_1}{x_2}\left(y_1x_2 - x_1y_2\right)\right]_{t}^{c} = p(c)x_1^2(c)\left(\frac{y_1(c)}{x_1(c)} - \frac{y_2(c)}{x_2(c)}\right) -$$
$$- p(t)\frac{x_1(t)}{x_2(t)}\Big(y_1(t)x_2(t) - y_2(t)x_1(t)\Big).$$

Poněvadž funkce y_1 a y_2 jsou v bodě a zprava spojité a nenulové (plyne z části (i) Lemmatu 34) a funkce x_1, x_2, p jsou spojité všude na $[a,b]$, tak přechodem k $\lim_{t\to a+}$ obdržíme

$$\lim_{t\to a+}\left[p\frac{x_1}{x_2}\left(y_1x_2-x_1y_2\right)\right]_t^c = p(c)x_1^2(c)\left(\frac{y_1(c)}{x_1(c)}-\frac{y_2(c)}{x_2(c)}\right)-$$
$$-\,p(a)\frac{y_1(a)}{y_2(a)}\Big(y_1(a)x_2(a)-y_2(a)x_1(a)\Big) = p(c)x_1^2(c)\left(\frac{y_1(c)}{x_1(c)}-\frac{y_2(c)}{x_2(c)}\right)-$$
$$-p(a)\frac{y_1(a)}{y_2(a)}\Big(ky_1(a)x_1(a)-ky_1(a)x_1(a)\Big) = p(c)x_1^2(c)\left(\frac{y_1(c)}{x_1(c)}-\frac{y_2(c)}{x_2(c)}\right).$$

Podle Piconeho identity pro každé $t\in(a,c)$ platí (x_2 je nenulová na $[t,c]$)

$$\left[p\frac{x_1}{x_2}\left(y_1x_2-x_1y_2\right)\right]_t^c = (\mu_2-\mu_1)\int_t^c x_1^2(s)r(s)\,ds+$$
$$+\int_t^c p(s)\frac{(y_1(s)x_2(s)-x_1(s)y_2(s))^2}{x_2^2(s)}\,ds \geq (\mu_2-\mu_1)\int_t^c x_1^2(s)r(s)\,ds.$$

Pomocí Leviho věty (vizte [5, str. 11, Důsledek 4.14]) dostáváme

$$\lim_{t\to a+}\left((\mu_2-\mu_1)\int_t^c x_1^2(s)r(s)\,ds+\int_t^c p(s)\frac{(y_1(s)x_2(s)-x_1(s)y_2(s))^2}{x_2^2(s)}\,ds\right)\geq$$
$$\geq \lim_{t\to a+}\left((\mu_2-\mu_1)\int_t^c x_1^2(s)r(s)\,ds\right) = (\mu_2-\mu_1)\int_a^c x_1^2(s)r(s)\,ds>0,$$

kde poslední nerovnost opět platí díky tomu, že x_1^2 je kladná na $(a,c]$.

Celkem tak

$$p(c)x_1^2(c)\left(\frac{y_1(c)}{x_1(c)}-\frac{y_2(c)}{x_2(c)}\right)\geq(\mu_2-\mu_1)\int_a^c x_1^2(s)r(s)\,ds>0,$$

a tedy

$$\frac{y_1(c)}{x_1(c)}-\frac{y_2(c)}{x_2(c)}>0.$$

□

Víme, že okrajovou podmínku (A) lze až na přenásobení nenulovou konstantou splnit právě jedním netriviálním způsobem, a tak pevně zvolme $(\alpha,\alpha')\neq(0,0)$ splňující $c_1\alpha+c_2p(a)\alpha'=0$. Pro každé $\lambda\in\mathbb{R}$ označme jako (x_λ,y_λ) jednoznačně určené řešení rovnice (4.1_λ) s počáteční podmínkou $(x_\lambda(a),y_\lambda(a))=(\alpha,\alpha')$. Dále položme $z_\lambda:=y_\lambda(b)/x_\lambda(b)$, má-li tento výraz pro dané λ smysl.

Všimněme si, že pokud $c_4=0$, tak x_λ je vlastní funkce SL úlohy právě tehdy, když $x_\lambda(b)=0$. Je-li naopak $c_4\neq0$, tak x_λ je vlastní funkce SL úlohy právě tehdy, když $x_\lambda(b)\neq0$ a $c_3x_\lambda(b)+c_4p(b)y_\lambda(b)=0$, což nastane právě tehdy, když

$$z_\lambda=-\frac{c_3}{c_4p(b)}=:K.$$

S tímto značením a učiněným pozorováním můžeme přikročit k následujícímu lemmatu, které již říká skoro to, co chceme v této sekci dokázat.

Lemma 39. *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je x_n jednoznačně určená vlastní funkce SL úlohy příslušná číslu λ_n splňující $(x_n(a), y_n(a)) = (\alpha, \alpha')$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že x_{n+1} má v intervalu (a, b) o právě jeden nulový bod více než x_n.*

Důkaz. Z PSV (Věta 15) plyne, že počet nulových bodů funkce x_λ v intervalu $(a, b]$ je neklesající funkce proměnné λ. Nechť $n \in \mathbb{N}$.

Krok 1. Předpokládejme, že $x_{\lambda_n} = x_n$ má právě M nulových bodů v $(a, b]$ a označme jako Λ_M první λ, pro které bude počet nulových bodů funkce x_λ v $(a, b]$ větší než M (díky neklesajícnosti počtu nulových bodů nutně $\Lambda_M > \lambda_n$), pokud takové existuje. Nechť počet nulových bodů funkce x_{Λ_M} v $(a, b]$ je $M + k$. Potom tvrdíme, že $k = 1$ a $(M + 1)$-tým nulovým bodem x_{Λ_M} v $(a, b]$ je bod b.

Nechť pro spor $k \geq 2$. Potom má x_{Λ_M} aspoň $M + 1$ nulových bodů v (a, b), přičemž prvních $M + 1$ z nich označme jako $c_1, \ldots, c_{M+1}$. Pro $i = 1, \ldots, M + 1$ pak platí $x_{\Lambda_M}(c_i) = 0$, a tedy díky bodu (i) Lemmatu 34 máme $y_{\Lambda_M}(c_i) \neq 0$ a y_{Λ_M} je v bodě c_i spojitá. Existuje tak $\epsilon > 0$ takové, že pro $i = 1, \ldots, M + 1$ je $[c_i - \epsilon, c_i + \epsilon] \subseteq (a, b)$, hodnoty $x_{\Lambda_M}(c_i + \epsilon)$ a $x_{\Lambda_M}(c_i - \epsilon)$ jsou nenulové a mají opačné znaménko a intervaly $[c_i - \epsilon, c_i + \epsilon]$ jsou po dvou disjunktní. (Vizte např. důkaz Lemmatu 38, ve kterém je toto odůvodněno pro jeden nulový bod. Není těžké nahlédnout, že ϵ lze vybrat tak, aby $[c_i - \epsilon, c_i + \epsilon]$ byly disjunktní.)

Z Věty 6 (pro její použití zde i později v tomto důkazu je klíčové, že všechny dvojice (x_λ, y_λ) nabývají v bodě a tutéž hodnotu) plyne existence $\delta > 0$ takového, že pokud $\lambda \in (\Lambda_M - \delta, \Lambda_M)$, tak

$$||x_\lambda - x_{\Lambda_M}||_{C([a,b])} < \min \left\{ \left| \frac{x_{\Lambda_M}(c_i - \epsilon)}{2} \right|, \left| \frac{x_{\Lambda_M}(c_i + \epsilon)}{2} \right| : i = 1, \ldots, M + 1 \right\}.$$

Potom pro každé $\lambda \in (\Lambda_M - \delta, \Lambda_M)$ platí, že hodnoty $x_\lambda(c_i - \epsilon)$ a $x_\lambda(c_i + \epsilon)$ jsou nenulové a mají opačné znaménko. Díky spojitosti x_λ pak z věty o nabývání mezihodnot (vizte [7, str. 218, Věta 4.3.4]) existují $d_i \in (c_i - \epsilon, c_i + \epsilon)$ takové, že $x_\lambda(d_i) = 0$, a to pro každé $i = 1, \ldots, M + 1$. To je ale spor s tím, že tyto funkce mají v $(a, b]$ nejvýše M nulových bodů.

Tudíž $k = 1$ a $(M + 1)$-tý nulový bod funkce x_{Λ_M} v $(a, b]$ se navíc nemůže nacházet uvnitř (a, b), a tak to nutně musí být bod b. Všimněme si, že tím už je důkaz hotov pro případ $c_4 = 0$, poněvadž v takovém případě se z okrajové podmínky (B) stává podmínka $x_\lambda(b) = 0$. Funkce x_n má právě M nulových bodů v $(a, b]$ a díky okrajové podmínce (B) je posledním z nich bod b. Podle PSV počet nulových bodů v $(a, b]$ s rostoucím λ neklesá a nulové body se navíc „posunují k bodu a“, speciálně M-tý nulový bod funkce x_λ v $(a, b]$ je pro $\lambda > \lambda_n$ menší než b. Jelikož víme, že existuje nekonečně mnoho vlastních čísel SL úlohy, tak někdy musí v $(a, b]$ přibýt další nulový bod, jinak by podmínka $x_\lambda(b) = 0$ nebyla splněna pro žádné $\lambda > \lambda_n$. Tedy existuje Λ_M, tj. první λ, pro které je počet nulových bodů v $(a, b]$ větší než M, a to dle předchozího $M + 1$, přičemž navíc $x_{\Lambda_M}(b) = 0$. Tedy $x_{\Lambda_M} = x_{n+1}$ a x_{n+1} má v (a, b) o právě jeden nulový bod více než x_n.

Krok 2. Jelikož případ $c_4 = 0$ už jsme vyřešili, můžeme v dalším předpokládat $c_4 \neq 0$. Z předchozích úvah pak víme, že $z_{\lambda_n} = K$. Tvrdíme, že nutně existuje $\Lambda_M \in \mathbb{R}$. V opačném případě by totiž už nepřibyl žádný nulový bod v $(a, b]$, speciálně $x_\lambda(b) \neq 0$ pro všechna $\lambda \geq \lambda_n$ (plyne z PSV, vizte Krok 1), a tak by výraz z_λ byl definován pro všechna $\lambda \geq \lambda_n$. Podle DSV by pak ale z_λ byla klesající funkce proměnné λ na intervalu $[\lambda_n, \infty)$, což by znamenalo, že pro žádné $\lambda > \lambda_n$ už z_λ nenabyde hodnotu K, a tedy že neexistuje vlastní číslo SL úlohy větší než λ_n, což je spor, protože takových čísel je dokonce nekonečně mnoho.

Nyní ukážeme, že

$$L_1 := \lim_{\lambda \to (\Lambda_M)-} z_\lambda = -\infty, \quad L_2 := \lim_{\lambda \to (\Lambda_M)+} z_\lambda = \infty.$$

Dokážeme $L_2 = \infty$ s tím, že druhá rovnost se ukáže analogicky. Z Kroku 1 víme, že $\Lambda_{M+1} > \Lambda_M$. ($\Lambda_{M+1}$ je první λ, pro které má x_λ více než $M+1$ nulových bodů v $(a, b]$. Prozatím nemusí být definováno, přičemž v takovém případě uvažujeme $\Lambda_{M+1} := \infty$. Jak ale uvidíme později, toto číslo je konečné.) Funkce z_λ je tak definovaná na $(\Lambda_M, \Lambda_{M+1})$ a dle DSV je na tomto intervalu klesající. Díky klesajícnosti a faktu, že limita monotónní funkce vždy existuje, je buď $L_2 = \infty$, nebo $L_2 < \infty$.

Nechť pro spor $L_2 < \infty$. Potom existují $\gamma > 0$ a $\delta > 0$ takové, že

$$\lambda \in (\Lambda_M, \Lambda_M + \delta) \implies \left|\frac{y_\lambda(b)}{x_\lambda(b)}\right| \leq \gamma.$$

Z Kroku 1 víme, že $x_{\Lambda_M}(b) = 0$, a tak díky netrivialitě platí $y_{\Lambda_M}(b) \neq 0$. Podle Věty 6 jsou $x_\lambda(b)$, $y_\lambda(b)$ spojité funkce proměnné λ. Existuje tudíž $0 < \overline{\delta} < \delta$ takové, že

$$\lambda \in (\Lambda_M, \Lambda_M + \overline{\delta}) \implies |y_\lambda(b)| > \frac{1}{2}|y_{\Lambda_M}(b)| \quad \text{a} \quad |x_\lambda(b)| < \frac{1}{2\gamma}|y_{\Lambda_M}(b)|.$$

Pro $\lambda \in (\Lambda_M, \Lambda_M + \overline{\delta})$ pak ale

$$\left|\frac{y_\lambda(b)}{x_\lambda(b)}\right| > \frac{1}{2}|y_{\Lambda_M}(b)| \cdot \frac{2\gamma}{|y_{\Lambda_M}(b)|} = \gamma,$$

což je spor. Tudíž $L_2 = \infty$.

Celkem tak víme, že $z_{\lambda_n} = K$, poté hodnota z_λ pro $\lambda \to (\Lambda_M)-$ klesá k $-\infty$ a následně na $(\Lambda_M, \Lambda_{M+1})$ hodnota z_λ klesá od ∞. Všimněme si, že $z_\lambda = y_\lambda(b)/x_\lambda(b)$ je jakožto funkce λ díky Větě 6 spojitá všude, kde je definovaná. Podobně jako výše odůvodníme, že nutně existuje $\Lambda_{M+1} \in \mathbb{R}$, jinak by totiž funkce z_λ mohla na (Λ_M, ∞) díky klesajícnosti nabýt hodnotu K nejvýše jednou, ale vlastních čísel je nekonečně mnoho. Analogickým postupem jako v důkazu rovnosti $L_2 = \infty$ pak ukážeme, že $\lim_{\lambda \to (\Lambda_{M+1})-} = -\infty$.

Tedy z_λ je spojitá klesající funkce na $(\Lambda_M, \Lambda_{M+1})$, pro kterou platí

$$\lim_{\lambda \to (\Lambda_M)+} z_\lambda = \infty, \quad \lim_{\lambda \to (\Lambda_{M+1})-} z_\lambda = -\infty,$$

a tak díky větě o nabývání mezihodnot a klesajícnosti existuje právě jedno $\Lambda \in (\Lambda_M, \Lambda_{M+1})$ takové, že $z_\Lambda = K$. Odsud plyne $\Lambda = \lambda_{n+1}$, a tedy $x_{n+1} = x_\Lambda$ má uvnitř (a, b) právě $M + 1$ nulových bodů, což je o jeden více než x_n.

$\square$

Věta 17. *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je x_n jednoznačně určená vlastní funkce SL úlohy příslušná číslu λ_n splňující $(x_n(a), y_n(a)) = (\alpha, \alpha')$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že x_n má v intervalu (a, b) právě $n - 1$ nulových bodů.*

Důkaz. Díky předchozímu lemmatu stačí ukázat, že x_1 nemá v (a, b) ani jeden nulový bod. V dalším budeme používat značení zavedené před a v průběhu Lemmatu 39.

Krok 1. Nechť λ je takové, že x_λ má v $(a, b]$ aspoň jeden nulový bod, a označme první nulový bod této funkce v $(a, b]$ jako t_λ. Vynásobme dvojici (x_λ, y_λ) nenulovou konstantou tak, aby $||x_\lambda||_{L^2((a,t_\lambda),r(s)\,ds)} = 1$ (kdyby byla x_λ nulová skoro všude v (a, t_λ), tak by díky spojitosti byla nulová všude v $[a, t_\lambda]$, ale pak množina jejích nulových bodů v $[a, b]$ má hromadný bod, což je spor s bodem (ii) Lemmatu 34, takže taková konstanta existuje). Tím sice ztratíme platnost rovnosti $(x_\lambda(a), y_\lambda(a)) = (\alpha, \alpha')$, ale důležité je, že přenásobení nenulovým číslem nemění nulové body.

Podobně jako při důkazu omezenosti vlastních čísel SL úlohy zdola ve Větě 14 nyní ukážeme, že λ je větší než pevná konstanta. Hlavní rozdíl spočívá v tom, že místo bodu b použijeme t_λ (tedy bod závislý na λ). Podrobněji okomentujeme pouze ty kroky, které se výrazněji změnily.

Díky faktu $||x_\lambda||_{L^2((a,t_\lambda),r(s)\,ds)} = 1$ dostaneme

$$\begin{aligned}\lambda &= x_\lambda(a)p(a)y_\lambda(a) - x_\lambda(t_\lambda)p(t_\lambda)y_\lambda(t_\lambda) + \int_a^{t_\lambda} p(s)y_\lambda^2(s)\,ds - \int_{[a,t_\lambda)} x_\lambda^2(s)\,dq(s) = \\ &= x_\lambda(a)p(a)y_\lambda(a) + \int_a^{t_\lambda} p(s)y_\lambda^2(s)\,ds - \int_{[a,t_\lambda)} x_\lambda^2(s)\,dq(s),\end{aligned}$$

přičemž poslední rovnost platí díky $x_\lambda(t_\lambda) = 0$. Jelikož existuje $C > 0$ závislé pouze na c_1 a c_2 takové, že

$$x_\lambda(a)p(a)y_\lambda(a) \geq -C||x_\lambda^2||_{C([a,t_\lambda])},$$

a

$$-\int_{[a,t_\lambda)} x_\lambda^2(s)\,dq(s) \geq -||x_\lambda^2||_{C([a,t_\lambda])} \cdot ||q||_{\mathcal{M}([a,b))},$$

tak

$$\lambda \geq \int_a^{t_\lambda} p(s)y_\lambda^2(s)\,ds - ||x_\lambda^2||_{C([a,t_\lambda])} \cdot \Big(C + ||q||_{\mathcal{M}([a,b))}\Big).$$

Pro každé $\epsilon > 0$ a každé $t \in [a, t_\lambda]$ je

$$\begin{aligned}\left|\int_t^{t_\lambda} (x_\lambda^2(s))'\,ds\right| &\leq c(\epsilon)\left(\int_a^{t_\lambda} x_\lambda^2(s)r(s)\,ds\right) + \epsilon\left(\int_a^{t_\lambda} \frac{y_\lambda^2(s)}{r(s)}\,ds\right) = \\ &= c(\epsilon) + \epsilon\left(\int_a^{t_\lambda} \frac{y_\lambda^2(s)}{r(s)}\,ds\right),\end{aligned}$$

a tedy pro všechna $t \in [a, t_\lambda]$ a každé $\epsilon > 0$ díky $x_\lambda(t_\lambda) = 0$

$$|x_\lambda^2(t)| = |x_\lambda^2(t_\lambda) - x_\lambda^2(t)| = \left|\int_t^{t_\lambda} (x_\lambda^2(s))'\,ds\right| \leq c(\epsilon) + \epsilon\left(\int_a^{t_\lambda} \frac{y_\lambda^2(s)}{r(s)}\,ds\right).$$

Tudíž

$$||x_\lambda^2||_{C([a,t_\lambda])} \leq c(\epsilon) + \epsilon \left(\int_a^{t_\lambda} \frac{y_\lambda^2(s)}{r(s)}\, ds \right),$$

z čehož díky předchozímu plyne

$$\lambda \geq \int_a^{t_\lambda} y_\lambda^2(s) \left(p(s) - \epsilon \frac{C + ||q||_{\mathcal{M}([a,b))}}{r(s)} \right) ds - c(\epsilon, C, q).$$

Zvolíme-li nyní $\epsilon > 0$ takové, aby

$$\min_{s\in[a,b]} p(s) \geq \epsilon \frac{C + ||q||_{\mathcal{M}([a,b))}}{m},$$

obdržíme $\lambda \geq -c(\epsilon, C, q)$.

Krok 2. Nyní nechť opět pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí $(x_\lambda(a), y_\lambda(a)) = (\alpha, \alpha')$. Podle Kroku 1 je množina $\{\lambda \in \mathbb{R} : x_\lambda$ má v $(a, b]$ nulový bod$\}$ zdola omezená. Díky neklesajícnosti počtu nulových bodů v $(a, b]$ a Lemmatu 39 tak existuje $\Lambda_0 \in \mathbb{R}$, tj. první λ, pro které má x_λ v $(a, b]$ nulový bod. Z důkazu Lemmatu 39 navíc víme, že x_{Λ_0} má v $(a, b]$ právě jeden nulový bod a je jím bod b. Pokud je podmínka (B) rovna $x(b) = 0$ (ekvivalentně $c_4 = 0$), tak už je hotovo. Pro $\lambda \in (-\infty, \Lambda_0)$ totiž funkce x_λ nemá z definice Λ_0 v $(a, b]$ žádný nulový bod, takže ani jedna z těchto funkcí nemůže splnit $x_\lambda(b) = 0$, tudíž to není vlastní funkce SL úlohy. Dále víme, že x_{Λ_0} má v $(a, b]$ právě jeden nulový bod a je to bod b, tj. $x_{\Lambda_0} = x_1$ a x_1 nemá v (a, b) nulový bod. V dalším tak můžeme předpokládat $c_4 \neq 0$.

Krok 3. Z definice Λ_0, Věty 6 a DSV plyne, že z_λ je spojitá klesající funkce proměnné λ na $(-\infty, \Lambda_0)$. Analogicky jako v důkazu Lemmatu 39 získáme rovnost $\lim_{\lambda\to(\Lambda_0)-} z_\lambda = -\infty$. Chceme ukázat, že $\lim_{\lambda\to-\infty} z_\lambda = \infty$.

Jelikož pro $\lambda \in (-\infty, \Lambda_0)$ platí $x_\lambda(b) \neq 0$, přenásobme dvojici (x_λ, y_λ) nenulovou konstantou tak, aby

$$\int_a^b \frac{x_\lambda^2(s)}{x_\lambda^2(b)} r(s)\, ds = 1.$$

Přenásobení dvojice (x_λ, y_λ) nenulovou konstantou nezmění hodnotu funkce $z_\lambda = y_\lambda(b)/x_\lambda(b)$, jejíž chování nás zajímá, takže toto můžeme učinit.

Nechť $\lambda < \mu < \Lambda_0$. Použitím té části důkazu DSV (Věta 16), v níž jsme se zabývali případem $M = 0$, na $c = b$, $\mu_1 = \lambda$, $\mu_2 = \mu$ získáme

$$p(b)x_\lambda^2(b)\,(z_\lambda - z_\mu) \geq (\mu - \lambda) \int_a^b x_\lambda^2(s) r(s)\, ds.$$

Tudíž

$$p(b)\,(z_\lambda - z_\mu) \geq (\mu - \lambda) \int_a^b \frac{x_\lambda^2(s)}{x_\lambda^2(b)} r(s)\, ds = \mu - \lambda.$$

Je-li $\mu < \Lambda_0$ pevné a $\lambda \to -\infty$, tak díky $p(b) > 0$ vidíme, že $z_\lambda - z_\mu \to \infty$, a tudíž $\lim_{\lambda\to-\infty} z_\lambda = \infty$.

Celkem tak z_λ je spojitá klesající funkce proměnné λ na intervalu $(-\infty, \Lambda_0)$ splňující $\lim_{\lambda\to(\Lambda_0)-} z_\lambda = -\infty$ a $\lim_{\lambda\to-\infty} z_\lambda = \infty$. Z věty o nabývání mezihodnot a klesajícnosti tudíž existuje právě jedno $\Lambda \in (-\infty, \Lambda_0)$ takové, že $z_\Lambda = K$. Potom $x_\Lambda = x_1$ a x_1 nemá v (a, b) nulový bod.

□

5. Floquetova teorie

V poslední kapitole tohoto textu se budeme věnovat soustavám s periodickými koeficienty a naším cílem bude ukázat, že platí analogická tvrzení jako v klasické teorii. Abychom o takových soustavách mohli mluvit, tak nejprve ukážeme, jak periodicky rozšířit míru definovanou na $\mathcal{B}([0,T))$ pro dané $T > 0$, což bude ve zbytku textu pevné číslo.

Nechť μ je Radonova znaménková míra na $\mathcal{B}([0,T))$. Nechť $k \in \mathbb{Z}$ a označme $I_k = [kT,(k+1)T)$, $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}(I_k)$. Definujme funkci $f_k : I_0 \to I_k$ předpisem $f_k(t) = t + kT$. Zřejmě f_k je spojitá, a tak pro každou otevřenou $G \subseteq I_k$ platí $f_k^{-1}(G) \in \mathcal{B}_0$. Funkce f_k je tak $\mathcal{B}_0 - \mathcal{B}_k$ měřitelná (vizte Lemma 7). Zobrazení μ_k definované předpisem

$$\begin{aligned}\mu_k(A) : &= f_k(\mu^+)(A) - f_k(\mu^-)(A) = \mu^+(f_k^{-1}(A)) - \mu^-(f_k^{-1}(A)) = \\ &= \mu^+(A - kT) - \mu^-(A - kT) = \mu(A - kT), \ \ A \in \mathcal{B}_k,\end{aligned}$$

kde $A - kT = \{a - kT : a \in A\}$, je díky Lemmatu 8 znaménková míra na $\mathcal{B}_k$, o které snadno ověříme, že je Radonova. Všimněme si, že $\mu_{k+1} = f_1(\mu_k)$.

Je-li $[a,b) \subseteq \mathbb{R}$ omezený interval, tak existují nejmenší $M \in \mathbb{Z}$ a největší $m \in \mathbb{Z}$ taková, že $[a,b) \subseteq [mT, MT)$. Míru μ nyní rozšiřme předpisem

$$\mu(A) := \sum_{k=m}^{M-1} \mu_k\Big(A \cap I_k\Big), \ \ A \in \mathcal{B}([a,b)).$$

Potom jde o Radonovu znaménkovou míru na $\mathcal{B}([a,b))$. Navíc zřejmě platí, že pokud $[c,d) \subseteq [a,b) \subseteq \mathbb{R}$ jsou omezené intervaly, tak rozšířením μ na $\mathcal{B}([a,b))$ a následným zúžením tohoto rozšíření na $\mathcal{B}([c,d))$ dostaneme totéž, jako kdybychom μ rovnou rozšířili na $\mathcal{B}([c,d))$.

Zobrazení μ je tak nyní definováno pro každou omezenou borelovskou podmnožinu $\mathbb{R}$ a jeho zúžení na $\mathcal{B}([a,b))$ pro libovolný omezený interval $[a,b) \subseteq \mathbb{R}$ je Radonova znaménková míra. Tuto konstrukci budeme považovat za periodické rozšíření μ.

Nechť nyní μ a ν jsou dvě Radonovy znaménkové míry na $\mathcal{B}([0,T))$ a uvažme jejich periodické rozšíření. Potom jde o Radonovy znaménkové míry na $\mathcal{B}([a,b))$ pro každý omezený interval $[a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Dále mějme T-periodické funkce c_1, c_2, c_4, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ patřící do $L^1([0,T])$. Díky periodičnosti pak tyto funkce patří do $L^1([a,b])$ pro každý omezený interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Následující definice je tudíž smysluplná.

Definice 21. *Řekneme, že dvojice funkcí x, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je řešení soustavy*

$$x'(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t), \tag{5.1}$$

$$Dy(t) = x(t)\,d\mu(t) + c_4(t)y(t)\,dt + d\nu(t) \tag{5.2}$$

na $\mathbb{R}$, pokud pro každé $-\infty < a < b < \infty$ je $x \in AC([a,b])$, $y \in BV(a,b)$ a pro každé $t \in [a,b]$ platí

$$\begin{aligned} x(t) &= x(a) + \int_a^t c_1(s)x(s) + c_2(s)y(s) + g(s)\,ds, \\ y(t) &= y(a) + \int_{[a,t)} x(s)\,d\mu(s) + \int_a^t c_4(s)y(s)\,ds + \int_{[a,t)} d\nu(s),\end{aligned}$$

tj. (x,y) je řešení soustavy (5.1), (5.2) *na intervalu $[a,b]$.*

Poznamenejme, že funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je absolutně spojitá na každém omezeném uzavřeném intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, se říká *lokálně absolutně spojitá funkce* na $\mathbb{R}$ a prostor všech takových funkcí se značí $AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Obdobně pokud je f na každém omezeném uzavřeném intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ funkce s konečnou bodovou variací, tak řekneme, že jde o *funkci s lokálně konečnou bodovou variací* na $\mathbb{R}$ a prostor všech takových funkcí značíme $BPV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Předchozí definici lze tedy díky Lemmatu 29 přeformulovat tak, že dvojice x, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ řeší (5.1), (5.2) na $\mathbb{R}$ právě tehdy, když $x \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $y \in BPV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ je zleva spojitá a pro každý omezený uzavřený interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ platí

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t) + g(t) \text{ pro s.v. } t \in [a, b],\\
Dy(t) &= x(t)\, d\mu(t) + c_4(t)y(t)\, dt + \, d\nu(t) \text{ na } \mathcal{B}([a, b)).
\end{aligned}
$$

Díky Větě 9 vidíme, že pokud jsou $c \in \mathbb{R}$ a $(x_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$ libovolné, tak existuje právě jedno řešení (x, y) soustavy (5.1), (5.2) na $\mathbb{R}$ splňující podmínku $(x(c), y(c)) = (x_c, y_c)$. Existenci dostaneme tak, že vezmeme řešení na intervalu $[c-1, c+1]$ splňující $(x(c), y(c)) = (x_c, y_c)$ a poté ho jako v Lemmatu 30 postupným lepením rozšíříme na intervaly $[c-n, c+n]$ pro $n \in \mathbb{N}$. Jednoznačnost pak plyne z jednoznačnosti řešení na intervalech $[c-n, c+n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Jako první nás budou zajímat T-periodická řešení soustavy (5.1), (5.2), k jejichž zkoumání nám pomůže následující lemma.

Lemma 40. *Nechť (x, y) je řešení soustavy* (5.1), (5.2) *na $\mathbb{R}$. Potom*

(i) dvojice $(\overline{x}(t), \overline{y}(t)) := (x(t+T), y(t+T))$, $t \in \mathbb{R}$ řeší (5.1), (5.2) *na $\mathbb{R}$,*

(ii) řešení (x, y) je T-periodické právě tehdy, když $(x(0), y(0)) = (x(T), y(T))$.

Důkaz. **(i)** Nechť $N \in \mathbb{N}$. Označme $I = (-NT, NT)$ a $J = ((-N+1)T, (N+1)T)$. Jelikož (x, y) řeší (5.1), (5.2) na $\mathbb{R}$, tak jde speciálně o řešení na $\overline{J}$ (uzávěr J). Z toho plyne, že $x \in AC(\overline{J})$, $y \in BV(J)$, a tedy zřejmě $\overline{x} \in AC(\overline{I})$ a $\overline{y} \in BV(I)$.

Nechť $t \in \overline{I}$. Díky T-periodičnosti funkcí c_1, c_2, g a větě o substituci platí

$$
\begin{aligned}
\overline{x}(t) = x(t+T) &= \int_{-NT+T}^{t+T} \Big[c_1(s)x(s) + c_2(s)y(s) + g(s)\Big]\, ds =\\
&= \int_{-NT+T}^{t+T} \Big[c_1(s-T)x(s) + c_2(s-T)y(s) + g(s-T)\Big]\, ds =\\
&= \int_{-NT}^{t} \Big[c_1(r)x(r+T) + c_2(r)y(r+T) + g(r)\Big]\, dr =\\
&= \int_{-NT}^{t} \Big[c_1(r)\overline{x}(r) + c_2(r)\overline{y}(r) + g(r)\Big]\, dr. \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

Položme $A = [-NT, t)$, $B = [(-N+1)T, t+T)$ a $I_k = [kT, (k+1)T)$ pro každé $k \in \{-N, -N+1, \dots, N\}$. Potom díky Lemmatu 9 a vztahu $f_1(\mu_k) = \mu_{k+1}$ platí

$$
\begin{aligned}
\int_B x(s)\, d\mu(s) &= \sum_{k=-N}^{N-1} \int_{I_{k+1}} x(s)\chi_B(s)\, df_1(\mu_k)(s) =\\
&= \sum_{k=-N}^{N-1} \int_{I_k} x(f_1(r))\chi_B(f_1(r))\, d\mu_k(r) =\\
&= \sum_{k=-N}^{N-1} \int_{I_k} x(r+T)\chi_A(r)\, d\mu_k(r) = \int_A \overline{x}(r)\, d\mu(r).
\end{aligned}
$$

Analogicky jako výše ověříme, že

$$\int_B d\nu(s) = \int_A d\nu(r), \qquad \int_{-NT+T}^{t+T} c_4(s)y(s)\,ds = \int_{-NT}^{t} c_4(r)\overline{y}(r)\,dr,$$

a tedy

$$\begin{aligned}\overline{y}(t) = y(t+T) &= \int_B x(s)\,d\mu(s) + \int_{-NT+T}^{t+T} c_4(s)y(s)\,ds + \int_B d\nu(s) = \\ &= \int_{[-NT,t)} \overline{x}(r)\,d\mu(r) + \int_{-NT}^{t} c_4(r)\overline{y}(r)\,dr + \int_{[-NT,t)} d\nu(r).\end{aligned} \tag{5.4}$$

Díky platnosti (5.3), (5.4) vidíme, že $(\overline{x},\overline{y})$ řeší (5.1), (5.2) na $[-NT,NT]$ pro každé $N\in\mathbb{N}$, a tedy i pro každý omezený interval $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$.

(ii) $\Longrightarrow$: Zřejmé.

$\Longleftarrow$: Položme $(\overline{x}(t),\overline{y}(t)) = (x(t+T), y(t+T))$, $t\in\mathbb{R}$. Dle bodu (i) dvojice $(\overline{x},\overline{y})$ řeší (5.1), (5.2) na $\mathbb{R}$ a navíc $(\overline{x}(0),\overline{y}(0)) = (x(T),y(T)) = (x(0),y(0))$. Z jednoznačnosti řešení tak pro každé $t\in\mathbb{R}$ platí

$$(x(t),y(t)) = (\overline{x}(t),\overline{y}(t)) = (x(t+T),y(t+T)),$$

což jsme chtěli ukázat.

□

Není příliš těžké si rozmyslet, že i pro řešení na celém $\mathbb{R}$ platí analogická tvrzení ze sekce 2.2, což budeme dále využívat. Následující věta říká, za kterých podmínek existuje právě jedno T-periodické řešení.

Věta 18. *Nechť $\mathbb{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ je fundamentální matice homogenní soustavy*

$$x'(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t), \tag{5.5}$$

$$Dy(t) = x(t)\,d\mu(t) + c_4(t)y(t)\,dt \tag{5.6}$$

na $\mathbb{R}$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) Existuje právě jedno T-periodické řešení soustavy (5.1), (5.2).

(ii) 1 *není vlastním číslem matice* $\mathbb{F}(T)\mathbb{F}^{-1}(0)$.

(iii) Jediným T-periodickým řešením homogenní soustavy (5.5), (5.6) *je identicky nulové řešení.*

Důkaz. *(i)* $\Longleftrightarrow$ *(ii)* : Podle bodu (ii) Lemmatu 40 je $\vec{x} = (x,y)$ T-periodické řešení soustavy (5.1), (5.2) na $\mathbb{R}$ právě tehdy, když $\vec{x}(T) = \vec{x}(0)$. Díky variaci konstant (Věta 10) toto nastane právě tehdy, když

$$\vec{x}(0) = \vec{x}(T) = \mathbb{F}(T)\mathbb{F}^{-1}(0)\vec{x}(0) + \mathbb{F}(T)\vec{l}(T),$$

kde $\vec{l}(T) = (l_1(T), l_2(T))$ a

$$l_1(T) = \int_0^T \mathbb{F}^{-1}_{11}(s)g(s)\,ds + \int_{[0,T)} \mathbb{F}^{-1}_{12}(s)\,d\nu(s),$$

$$l_2(T) = \int_0^T \mathbb{F}^{-1}_{21}(s)g(s)\,ds + \int_{[0,T)} \mathbb{F}^{-1}_{22}(s)\,d\nu(s),$$

přičemž $\mathbb{F}^{-1}_{ij}(s)$ značí prvek na místě (i,j) v matici $\mathbb{F}^{-1}(s)$. Ekvivalentně

$$\Big(\mathbb{I} - \mathbb{F}(T)\mathbb{F}^{-1}(0)\Big)\vec{x}(0) = \mathbb{F}(T)\vec{l}(T).$$

Tato soustava pro neznámý vektor $\vec{x}(0)$ má právě jedno řešení právě tehdy, když je $\mathbb{I} - \mathbb{F}(T)\mathbb{F}^{-1}(0)$ regulární, což nastane právě tehdy, když 1 není vlastním číslem matice $\mathbb{F}(T)\mathbb{F}^{-1}(0)$.

$(ii) \iff (iii)$: Jelikož pro homogenní soustavu platí $\vec{l}(T) = \vec{0}$, tak si podobně jako v předchozím rozmyslíme, že homogenní soustava má T-periodické řešení $\vec{x}$ právě tehdy, když

$$\Big(\mathbb{I} - \mathbb{F}(T)\mathbb{F}^{-1}(0)\Big)\vec{x}(0) = \vec{0}.$$

Tato soustava má jako jediné řešení nulový vektor právě tehdy, když je matice $\mathbb{I} - \mathbb{F}(T)\mathbb{F}^{-1}(0)$ regulární, tj. právě tehdy, když 1 není vlastním číslem matice $\mathbb{F}(T)\mathbb{F}^{-1}(0)$.

□

Poslední věta a její důkaz dobře ilustrují techniky používané ve Floquetově teorii. Často jde o kombinaci variace konstant, Lemmatu 40 a znalostí z lineární algebry. Pokud máme k dispozici tato fakta, můžeme mnohdy doslova opsat či jen lehce pozměnit důkazy z klasické teorie, a tak se u následujících tvrzení pouze odkážeme na anglicky psaný zdroj [1] a případně řekneme, co je v důkazu potřeba změnit. Nejprve však okomentujme značení a pojmy používané v uvedené knize.

Rovnicí (2.27), resp. (2.35), se v knize myslí naše soustavy (5.5), (5.6), resp. (5.1), (5.2). Jelikož fundamentální matice se značí Φ, tak se toho nadále budeme držet i my. Místo našeho značení $\vec{x}$ se pro řešení používá x bez šipky. *Maticovým řešením* se míní to, že jednotlivé sloupce příslušné matice jsou řešením. Vektorová funkce $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ je *komplexní řešení*, pokud po rozepsání $\vec{x} = \mathrm{Re}(\vec{x}) + i\ \mathrm{Im}(\vec{x})$ platí, že $\mathrm{Re}(\vec{x})$ a $\mathrm{Im}(\vec{x})$ jsou řešení.

Následující tzv. Floquetova věta se zabývá vlastnostmi fundamentálních matic, což je klíčový nástroj pro studium řešení homogenní soustavy. Nebude-li hrozit nedorozumění, tak místo „fundamentální matice soustavy (5.5), (5.6)“ budeme dále zkráceně říkat jen „fundamentální matice“.

Věta 19. (Floquetova věta). *Nechť $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je fundamentální matice. Potom pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí*

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T).$$

Dále existují komplexní matice $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ taková, že

$$e^{TB} = \Phi^{-1}(0)\Phi(T),$$

a T-periodická funkce $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ splňující $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. Navíc existují reálná matice $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ a $2T$-periodická funkce $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ splňující $\Phi(t) = Q(t)e^{tR}$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Plyne z [1, str. 189, Theorem 2.83] s tím, že v první části důkazu až do definice matice C je potřeba argumentovat lehce jinak. Existenci řešení soustavy (5.5), (5.6) na $\mathbb{R}$ jsme si rozmysleli již dříve v tomto textu. Funkci Ψ definovanou v důkazu sice nyní nelze takto jednoduše zderivovat, ale skutečnost, že jde o maticové řešení, plyne z bodu (i) Lemmatu 40. Ve zbytku důkazu se používají pouze znalosti z lineární algebry, jednoznačnost řešení a Věta 7, a tak ho lze provést zcela stejně.

□

Definice 22. *Nechť* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ *je fundamentální matice.*

- *Každý rozpis* $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$*, kde* P *a* B *jsou jako ve Floquetově větě, se nazývá* ***Floquetova normální forma****.*
- *Matice* $\Phi(T)\Phi^{-1}(0)$ *se nazývá* ***operátor monodromie*** *a její vlastní čísla se nazývají* ***charakteristické multiplikátory*** *soustavy* (5.5)*,* (5.6)*.*
- *Pokud* $\Phi(0) = \mathbb{I}$*, tak* Φ *nazveme* ***hlavní fundamentální maticí v čase*** $\boldsymbol{t = 0}$ *(anglicky principal fundamental matrix).*

Definice 22 ihned vybízí k otázce, zda charakteristické multiplikátory soustavy (5.5), (5.6) závisí na volbě fundamentální matice. Odpovědí je, že nikoliv.

Lemma 41. *Všechny operátory monodromie jsou si podobné (ve smyslu podobnosti matic), tudíž mají stejná vlastní čísla se stejnou algebraickou i geometrickou násobností. Včetně násobnosti tak existují právě dva komplexní charakteristické multiplikátory a číslo* 0 *není ani jedním z nich.*

Je-li navíc Φ *fundamentální matice, tak*

- $\Phi(T)\Phi^{-1}(0)$ *a* $\Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ *jsou si podobné,*
- *pokud* $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ *je Floquetova normální forma, tak* e^{TB} *a* $\Phi(T)\Phi^{-1}(0)$ *jsou si podobné.*

Důkaz. Plyne z důkazu [1, str. 191, Proposition 2.84] (ačkoliv samotné tvrzení je zformulováno lehce jinak) a diskuse ihned za tímto důkazem až do začátku Example 2.85. Důkaz lze provést zcela stejně, jelikož se v něm použije jednoznačnost řešení, Věta 7 a Floquetova věta.

□

Všimněme si, že podmínku (ii) z Věty 18 lze nyní zformulovat tak, že 1 není charakteristický multiplikátor soustavy (5.5), (5.6).

Definice 23. *Komplexní číslo* $\mu \in \mathbb{C}$ *se nazývá* ***charakteristický exponent*** *(někdy také* ***Floquetův exponent****) soustavy* (5.5)*,* (5.6)*, pokud existuje charakteristický multiplikátor* $\rho \in \mathbb{C}$ *takový, že* $e^{\mu T} = \rho$*.*

Snadno nahlédneme, že pokud μ je charakteristický exponent, tak je pro každé $k \in \mathbb{Z}$ také $\mu + (2\pi i k)/T$ charakteristický exponent. Tedy zatímco charakteristické multiplikátory jsou dva, charakteristických exponentů je nekonečně mnoho.

Nyní ukážeme, jak lze z absolutní hodnoty charakteristických multiplikátorů odvodit (ne)stabilitu identicky nulového řešení homogenní soustavy. Za tím účelem však nejprve vyslovíme jedno pomocné lemma z lineární algebry. Připomeňme, že vlastní číslo matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$ se nazývá *polojednoduché*, pokud je jeho algebraická násobnost rovna geometrické násobnosti. Všimněme si, že A je diagonalizovatelná právě tehdy, když jsou všechna její vlastní čísla polojednoduchá.

Lemma 42. *Nechť $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Potom*

$$\text{(a) } A \text{ je diagonalizovatelná} \implies A^2 \text{ je diagonalizovatelná,}$$
$$\text{(b) } e^A \text{ je diagonalizovatelná} \implies A \text{ je diagonalizovatelná.}$$

Důkaz. **(a)** Nechť λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla matice A včetně násobnosti. Jelikož A je diagonalizovatelná, existuje regulární matice $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ taková, že

$$A = J \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} J^{-1} =: JDJ^{-1}.$$

Potom ale

$$A^2 = JDJ^{-1}JDJ^{-1} = JD^2J^{-1} = J \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} J^{-1},$$

a tedy A^2 je diagonalizovatelná.

(b) Dokážeme obměněnou implikaci. Nechť A není diagonalizovatelná. Potom má A nutně právě jedno vlastní číslo λ, algebraická násobnost λ je 2 a jeho geometrická násobnost je 1. Existuje tak regulární matice $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ taková, že

$$A = J \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} J^{-1} =: JEJ^{-1}.$$

Podle vlastností maticové exponenciály pak platí

$$e^A = e^{JEJ^{-1}} = Je^EJ^{-1} = J \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} J^{-1}.$$

Protože podobnost matic zachovává vlastní čísla i oba typy jejich násobnosti, tak odsud plyne, že e^A má jediné vlastní číslo e^λ, jeho algebraická násobnost je 2 a jeho geometrická násobnosti je 1, a tedy e^A není diagonalizovatelná.

□

Právě dokázané lemma sice platí ve větší obecnosti, ale pro naše účely stačí uvažovat dimenzi 2 a uvedené implikace. Užitečnost tohoto lemmatu nahlédneme v následující větě.

Věta 20. *Nechť Φ je hlavní fundamentální matice v čase $t = 0$ a pro každé $t \in \mathbb{R}$ je $\Phi(t) = Q(t)e^{tR}$, kde Q a R jsou jako ve Větě 19. Nechť $\vec{x}$ je řešení soustavy* (5.5), (5.6) *a položme $\vec{u}(t) = e^{tR}\vec{x}(0)$. Potom $\vec{u} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ a pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí $\vec{x}(t) = Q(t)\vec{u}(t)$ a $(\vec{u}(t))' = R\vec{u}(t)$. Navíc*

- *je-li absolutní hodnota obou charakteristických multiplikátorů menší než* 1*, tak je nulové řešení soustavy* (5.5), (5.6) *asymptoticky stabilní,*
- *pokud je absolutní hodnota obou charakteristických multiplikátorů menší nebo rovna* 1 *a ty multiplikátory, které mají absolutní hodnotu rovnou* 1*, jsou polojednoduché, tak je nulové řešení soustavy* (5.5), (5.6) *stabilní,*
- *má-li nějaký z charakteristických multiplikátorů absolutní hodnotu větší než* 1*, tak je nulové řešení soustavy* (5.5), (5.6) *nestabilní.*

Důkaz. Jedná se o [1, str. 194, Theorem 2.89]), ale uvedený důkaz je místy dosti stručný, a tak větu dokážeme podrobněji a z důkazu v knize si jen vypůjčíme některé poznatky. Poznamenejme, že místo $\vec{u}$ se v knize používá značení y.

Pro každé $t \in \mathbb{R}$ zřejmě $\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{x}(0) = Q(t)e^{tR}\vec{x}(0)$, a tudíž skutečně $\vec{x}(t) = Q(t)\vec{u}(t)$. Ze vztahu $\vec{u}(t) = e^{tR}\vec{x}(0)$ potom plyne $\vec{u} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ a také $(\vec{u}(t))' = R\vec{u}(t)$, a tudíž $\vec{u} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Nyní ukážeme, že $t \mapsto ||Q(t)||$ je omezená funkce na $\mathbb{R}$, kde

$$||A|| := \sup\{|A\vec{v}| : \vec{v} \in \mathbb{R}^2, |\vec{v}| \leq 1\}, \ \ A \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Díky $2T$-periodičnosti stačí ukázat, že $t \mapsto ||Q(t)||$ je omezená na $[0, 2T]$. Ze vztahu $\Phi(t) = Q(t)e^{tR}$ snadno plyne $Q(t) = \Phi(t)e^{-tR}$. Jelikož složky maticové funkce Φ jsou buď třídy $AC([0, 2T])$, nebo $BPV([0, 2T])$, tak jsou na $[0, 2T]$ omezené. Díky ekvivalenci norem na prostorech konečné dimenze pak

$$\sup_{t\in[0,2T]} ||\Phi(t)|| \leq K,$$

kde $K > 0$ je pevná konstanta. Dále pro $t \in [0, 2T]$ máme

$$||e^{-tR}|| \leq e^{||-tR||} = e^{|t|\cdot||R||} \leq e^{2T||R||},$$

a tak je skutečně $t \mapsto ||Q(t)||$ omezená na $[0, 2T]$, tudíž i na $\mathbb{R}$.

Všimněme si, že díky vztahu $Q(t) = \Phi(t)e^{-tR}$ je $Q(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$ invertibilní jakožto součin dvou regulárních matic. Z omezenosti funkce $t \mapsto ||Q(t)||$, vztahu $\vec{x}(t) = Q(t)\vec{u}(t)$ a invertibility $Q(t)$ tak plyne, že pokud je nulové řešení soustavy $(\vec{u}(t))' = R\vec{u}(t)$ asymptoticky stabilní či stabilní, tak má tutéž vlastnost i nulové řešení soustavy (5.5), (5.6).

Stejně jako v knize odvodíme, že existuje $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ taková, že charakteristické multiplikátory jsou přesně vlastní čísla matice $\Phi(T) = e^{TB}$ a platí $e^{2TB} = e^{2TR}$. V dalším budeme soubor všech vlastních čísel dané matice A včetně násobnosti značit jako $\sigma(A)$.

Označíme-li $\sigma(e^{TB}) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ a $\sigma(R) = \{\mu_1, \mu_2\}$, tak podle Theorem 2.88 z knihy je

$$\{\lambda_1^2, \lambda_2^2\} = \sigma(e^{2TB}) = \sigma(e^{2TR}) = \{e^{2T\mu_1}, e^{2T\mu_2}\}.$$

Přechodem k absolutním hodnotám pak získáme

$$\{|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2\} = \{e^{2T\cdot\mathrm{Re}(\mu_1)}, e^{2T\cdot\mathrm{Re}(\mu_2)}\}. \tag{5.7}$$

Mají-li oba charakteristické multiplikátory (tj. λ_1 a λ_2) absolutní hodnotu menší než 1, tak díky rovnosti (5.7) zřejmě $\mathrm{Re}(\mu_1) < 0$ a $\mathrm{Re}(\mu_2) < 0$. Podle klasické teorie je pak nulové řešení soustavy $(\vec{u}(t))' = R\vec{u}(t)$ asymptoticky stabilní, což dle předchozího pozorování implikuje asymptotickou stabilitu nulového řešení soustavy (5.5), (5.6).

Existuje-li charakteristický multiplikátor s absolutní hodnotou větší než 1 (bez újmy na obecnosti nechť je to λ_1), tak existuje nenulový vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^2$ takový, že $\Phi(T)\vec{v} = \lambda_1\vec{v}$. Z Věty 19 plyne $\Phi(nT) = \Phi(T)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tak když uvážíme komplexní řešení $\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{v}$ soustavy (5.5), (5.6), platí $\vec{x}(nT) = \lambda_1^n\vec{v}$. Tedy $\lim_{n\to\infty} |\vec{x}(nT)| = \infty$, tudíž totéž platí i pro alespoň jedno z $\mathrm{Re}(\vec{x})$, $\mathrm{Im}(\vec{x})$, což znamená, že nulové řešení (5.5), (5.6) je nestabilní.

Nyní nechť oba charakteristické multiplikátory mají absolutní hodnotu nejvýše 1 a navíc platí, že pokud je absolutní hodnota nějakého multiplikátoru 1, tak je to polojednoduché vlastní číslo matice e^{TB}. Je-li absolutní hodnota obou multiplikátorů menší než 1, tak už z předchozího víme, že nulové řešení soustavy (5.5), (5.6) je dokonce asymptoticky stabilní. Můžeme tedy předpokládat, že existuje alespoň jeden multiplikátor s absolutní hodnotou rovnou 1 (nechť je to λ_1), jenž je pak dle předpokladu polojednoduchý. Potom už ale snadno nahlédneme, že e^{TB} je diagonalizovatelná (jediná možnost, která by mohla diagonalizovatelnost „pokazit“, je $\sigma(e^{TB}) = \{\lambda\}$, kde λ má algebraickou násobnost 2 a geometrickou násobnost 1, jenže pak nutně $\lambda = \lambda_1$, což je spor s polojednoduchostí λ_1).

Podle bodu (a) Lemmatu 42 je pak $e^{2TB} = e^{2TR}$ diagonalizovatelná, z čehož díky bodu (b) téhož lemmatu plyne diagonalizovatelnost matice $2TR$, tedy i R. Odsud dostáváme, že každé vlastní číslo matice R je polojednoduché, speciálně ta vlastní čísla, jejichž reálná část je 0. Díky $|\lambda_1| \leq 1$, $|\lambda_2| \leq 1$ a (5.7) navíc platí $\mathrm{Re}(\mu_1) \leq 0$ a $\mathrm{Re}(\mu_2) \leq 0$, a tedy nulové řešení soustavy $(\vec{u}(t))' = R\vec{u}(t)$ je dle klasické teorie stabilní, což implikuje stabilitu nulového řešení (5.5), (5.6).

□

Nyní bude následovat série tří užitečných tvrzení.

Lemma 43. *Nechť Φ je hlavní fundamentální matice v čase $t = 0$ a μ je charakteristický exponent soustavy* (5.5), (5.6). *Potom existuje Floquetova normální forma $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ taková, že μ je vlastní číslo matice B.*

Důkaz. Důkaz je zcela stejný jako v [1, str. 197, Lemma 2.94], protože je potřeba použít pouze Floquetovu větu a znalosti o maticích.

□

Následující věta mj. ukazuje, proč se používá zrovna pojem „multiplikátor“.

Věta 21. *Nechť λ je charakteristický multiplikátor soustavy* (5.5), (5.6) *a μ je charakteristický exponent takový, že $e^{T\mu} = \lambda$. Potom existuje netriviální komplexní řešení $\vec{x}$ soustavy* (5.5), (5.6) *ve tvaru*

$$\vec{x}(t) = e^{\mu t}\vec{p}(t),$$

kde $\vec{p}$ je komplexní T-periodická funkce. Navíc $\vec{x}(t+T) = \lambda\vec{x}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Důkaz je zcela stejný jako v [1, str. 198, Theorem 2.95], poněvadž využívá pouze předchozí lemma a práci s maticemi.

□

Věta 22. *Nechť λ_1, λ_2 jsou charakteristické multiplikátory soustavy* (5.5), (5.6) *a μ_1, μ_2 jsou charakteristické exponenty takové, že $e^{T\mu_1} = \lambda_1$ a $e^{T\mu_2} = \lambda_2$. Pokud $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tak existují komplexní T-periodické funkce $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ takové, že*

$$\vec{x}_1(t) := e^{\mu_1 t}\vec{p}_1(t) \quad a \quad \vec{x}_2(t) := e^{\mu_2 t}\vec{p}_2(t)$$

jsou lineárně nezávislá komplexní řešení soustavy (5.5), (5.6).

Důkaz. Důkaz je zcela stejný jako v [1, str. 198, Theorem 2.96], jelikož k němu stačí použít předchozí dvě tvrzení a znalosti z lineární algebry.

□

V poslední větě této kapitoly se vrátíme k soustavě (5.1), (5.2) a dokážeme postačující podmínku pro existenci T-periodického řešení.

Věta 23. *Pokud má soustava* (5.1), (5.2) *na* $\mathbb{R}$ *omezené řešení, tak má také* T*-periodické řešení.*

Důkaz. Jde o [1, str. 211, Theorem 2.121], ale první část důkazu je potřeba upravit a druhou část uděláme podrobněji.

Nechť Φ je hlavní fundamentální matice soustavy (5.5), (5.6) v čase $t = 0$. Potom $\Phi^{-1}(0) = \mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$, a tak pro řešení $\vec{x}$ soustavy (5.1), (5.2) splňující podmínku $\vec{x}(0) = \vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$ dle variace konstant (Věta 10) platí

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{\xi} + \Phi(t)\vec{l}(t), \;\; t \in [0, \infty),$$

kde $\vec{l}(t) = (l_1(t), l_2(t))$ a pro každé $t \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} l_1(t) &= \int_0^t \Phi_{11}^{-1}(s)g(s)\,ds + \int_{[0,t)} \Phi_{12}^{-1}(s)\,d\nu(s), \\ l_2(t) &= \int_0^t \Phi_{21}^{-1}(s)g(s)\,ds + \int_{[0,t)} \Phi_{22}^{-1}(s)\,d\nu(s). \end{aligned}$$

Definujme (tzv. Poincarého) zobrazení $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$P(\vec{\xi}) := \Phi(T)\vec{\xi} + \Phi(T)\vec{l}(T).$$

Chceme ukázat, že $P^2(\vec{\xi}) := P(P(\vec{\xi})) = \Phi(2T)\vec{\xi} + \Phi(2T)\vec{l}(2T)$. Povšimněme si, že z Věty 19 platí $\Phi(2T) = \Phi(T)\Phi(T)$ a také pro každé $r \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \Phi(r+T) &= \Phi(r)\Phi(T) \\ \Phi^{-1}(r+T) &= \Phi^{-1}(T)\Phi^{-1}(r) \\ \Phi^{-1}(r) &= \Phi(T)\Phi^{-1}(r+T). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Tudíž

$$P^2(\vec{\xi}) = \Phi(T)\Big(\Phi(T)\vec{\xi} + \Phi(T)\vec{l}(T)\Big) + \Phi(T)\vec{l}(T) = \Phi(2T)\vec{\xi} + \Phi(2T)\vec{l}(T) + \Phi(T)\vec{l}(T).$$

Stačí tak ukázat, že $\Phi(2T)\vec{l}(T) + \Phi(T)\vec{l}(T) = \Phi(2T)\vec{l}(2T)$, neboli ekvivalentně $\Phi(2T)(\vec{l}(2T) - \vec{l}(T)) = \Phi(T)\vec{l}(T)$. Nechť $i \in \{1; 2\}$. Potom díky periodičnosti g a Lemmatu 9 platí

$$\begin{aligned} l_i(2T) - l_i(T) &= \int_T^{2T} \Phi_{i1}^{-1}(s)g(s)\,ds + \int_{[T,2T)} \Phi_{i2}^{-1}(s)\,d\nu(s) = \\ &= \int_0^T \Phi_{i1}^{-1}(r+T)g(r)\,dr + \int_{[0,T)} \Phi_{i2}^{-1}(r+T)\,d\nu(r). \end{aligned}$$

S pomocí vztahu (5.8) vidíme, že pro $j = 1, 2$ je

$$[\Phi(T)(\vec{l}(2T) - \vec{l}(T))]_j = \int_0^T \Phi_{j1}^{-1}(r)g(r)\,dr + \int_{[0,T)} \Phi_{j2}^{-1}(r)\,d\nu(r) = l_j(T).$$

Odsud

$$\Phi(2T)\Big(\vec{l}(2T) - \vec{l}(T)\Big) = \Phi(T)\Phi(T)\Big(\vec{l}(2T) - \vec{l}(T)\Big) = \Phi(T)\vec{l}(T),$$

a tedy skutečně $P^2(\vec{\xi}) = \Phi(2T)\vec{\xi} + \Phi(2T)\vec{l}(2T)$. Indukcí nyní snadno odvodíme, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$P^j(\vec{\xi}) = \Phi(jT)\vec{\xi} + \Phi(jT)\vec{l}(jT) = \vec{x}(jT), \tag{5.9}$$

kde $\vec{x}$ je řešení (5.1), (5.2) splňující $\vec{x}(0) = \vec{\xi}$.

Nechť $\vec{x}$ je omezené řešení soustavy (5.1), (5.2), které existuje díky předpokladu věty, a označme $\vec{x}(0) = \vec{\xi}_0$. Díky (5.9) je $P^j(\vec{\xi}_0) = \vec{x}(jT)$ pro každé $j \in \mathbb{N}$, a tak je posloupnost $\{P^j(\vec{\xi}_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ omezená.

Dále pro každé $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$ pišme $P(\vec{\xi}) = L\vec{\xi} + \vec{u}$, kde $L = \Phi(T)$ a $\vec{u} = \Phi(T)\vec{l}(T)$. Nechť pro spor neexistuje T-periodické řešení soustavy (5.1), (5.2). Potom díky bodu (ii) Lemmatu 40 a (5.9) platí, že neexistuje $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$ takové, že

$$L\vec{\xi} + \vec{u} = P(\vec{\xi}) = \vec{\xi}.$$

Jinými slovy, soustava $(\mathbb{I} - L)\vec{\xi} = \vec{u}$ pro neznámý vektor $\vec{\xi}$ nemá řešení.

Označme $\mathcal{R} := \{(\mathbb{I} - L)\vec{\xi} : \vec{\xi} \in \mathbb{R}^2\}$ a H nechť je Hilbertův prostor $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem, který budeme značit $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Jelikož $\mathcal{R}$ je podprostor H a má konečnou dimenzi, tak je uzavřený ([9, str. 6, Důsledek 1.25]). Podle věty [9, str. 28, Věta 1.100] lze pak každé $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ rozepsat právě jedním způsobem jako $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, kde $\vec{w}_1 \in \mathcal{R}$ a $\vec{w}_2 \in \mathcal{R}^\perp$ (ortogonální doplněk).

Tudíž $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, kde $\vec{u}_1 \in \mathcal{R}$ a $\vec{u}_2 \in \mathcal{R}^\perp$. Jelikož $\vec{u}$ je vektor nepatřící do $\mathcal{R}$, tak zřejmě $\vec{v} := \vec{u}_2 \neq \vec{0}$ a navíc

$$\langle\vec{v}, \vec{u}\rangle = \langle\vec{u}_2, \vec{u}_1\rangle + \langle\vec{u}_2, \vec{u}_2\rangle = \langle\vec{u}_2, \vec{u}_2\rangle = |\vec{u}_2|^2 \neq 0.$$

Z definice ortogonálního doplňku pro každé $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$ platí $\langle(\mathbb{I} - L)\vec{\xi}, \vec{v}\rangle = 0$, neboli

$$\langle\vec{\xi}, \vec{v}\rangle = \langle L\vec{\xi}, \vec{v}\rangle. \tag{5.10}$$

Díky vztahu $P(\vec{\xi}) = L\vec{\xi} + \vec{u}$ snadno nahlédneme, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ je $P^j(\vec{\xi}) = L^j\vec{\xi} + \sum_{k=0}^{j-1} L^k\vec{u}$ při konvenci $L^0 = \mathbb{I}$. S pomocí této skutečnosti a rovnosti (5.10) tak pro každé $j \in \mathbb{N}$

$$\langle P^j(\vec{\xi}_0), \vec{v}\rangle = \langle\vec{\xi}_0, \vec{v}\rangle + j\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle.$$

Vzhledem k omezenosti posloupnosti $\{P^j(\vec{\xi}_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ je levá strana předchozí rovnosti omezená, jenže absolutní hodnota pravé strany jde díky faktu $\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle \neq 0$ pro $j \to \infty$ do nekonečna, což je spor.

$\square$

Seznam použité literatury

[1] C. Chicone. *Ordinary differential equations with applications*, volume 34 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006. ISBN 978-0387-30769-5; 0-387-30769-9.

[2] E. L. Ince. *Ordinary differential equations*. Courier Corporation, 1956. URL `https://archive.org/details/ordinarydifferen029666mbp/mode/2up`. Odkaz aktivní 7/2022.

[3] V. Jarník. *Integrální počet II*. Academia, 1984. Elektronicky dostupné na http://eudml.org/doc/202316. Odkaz aktivní 7/2022.

[4] J. Lukeš and J. Malý. *Míra a integrál*. Karolinum, 1993.

[5] J. Malý. Teorie míry a integrálu, 2016. URL `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~maly/files/tmi16.pdf`. Učební text k předmětu NMMA 203 na MFF UK. Odkaz aktivní 7/2022.

[6] J. Malý. Advanced differentiation 1, 2019. Interní učební text MFF UK.[1]

[7] L. Pick, S. Hencl, J. Spurný, and M. Zelený. Matematická analýza 1, 2020. URL `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~hencl/analyza.pdf`. Učební text naposledy aktualizovaný 13.6.2020. Odkaz aktivní 7/2022.

[8] D Pražák, V. Průša, and K. Tůma. A note on parametric resonance induced by a singular parameter modulation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 139:103893, 2022. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746221002122`. Odkaz aktivní 7/2022.

[9] J. Spurný and M. Johanis. Funkcionální analýza, 2021. URL `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/fa2/funkcionalka.pdf`. Učební text naposledy aktualizovaný 1.4.2021. Odkaz aktivní 7/2022.

[10] M. Tvrdý. Stieltjesův integrál (Kurzweilova teorie). URL `https://users.math.cas.cz/~tvrdy/s.pdf`. Odkaz aktivní 7/2022.

[1] Pro ty, kteří mají přístup do Studijního informačního systému Univerzity Karlovy, je tento text ke stažení pod názvem dipp19-en.pdf jako přiložený soubor u předmětu NMMA 437 Derivace a integrál pro pokročilé 1.