

Oponentský posudek magisterské práce
Lineární ODR se singulárními členy

Davida Žárského

Práce je věnována soustavám dvou lineárních diferenciálních rovnic jejichž koeficienty nemusí být integrovatelné, mohou to být např. míry. Derivace se pak rozumí v podstatě v distributivním smyslu. Takové rovnice jsou známy též jako rovnice s mírou resp. v distribucích. Do značné míry jsou speciálním případem zobecněných diferenciálních rovnic v Kurzweilově smyslu. Blízkým pojmem jsou i rovnice se Stieltjesovými derivacemi.

Hlavním cílem bylo zobecnění Sturmovy-Liouvillovy teorie na takové rovnice. V odborné literatuře lze najít řadu prací, které se touto tematikou zabývají. O některých se ještě zmíním. Autor předložené práce pojednal tuto problematiku poněkud odlišným způsobem. Výrazně se opírá o pokročilou teorii míry. Jeho postup mi připadá jako docela originální.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol:

V úvodní kapitole jsou připomenuty základní definice, shromážděny základní fakta o absolutně spojitých funkcích, teorii míry a integrálu a funkcích s konečnou variací.

Ve druhé kapitole jsou formulovány a dokázány existenční výsledky pro soustavy dvou lineárních rovnic, ve kterých je třeba druhou rovnici interpretovat v zobecněném smyslu.

Ve třetí kapitole autor dokazuje Sturmova srovnávací větu pro systémy studované v předchozí kapitole.

Závěrečná, čtvrtá, kapitola je věnována zobecnění Sturmovy-Liouvilleovy teorie na úlohy zavedené ve druhé kapitole. Jak jsem již naznačil, hlavní výsledky předložené práce jsou soustředěny zejména v této kapitole, částečně též v předcházející třetí kapitole. Významná část kapitoly je věnována též zobecnění Floquetovy teorie.

K práci mám několik připomínek, z nichž ty podstatnější následují.

- Škoda, že autor nezapátral více v dostupné literatuře. Narazil by zejména na dvě práce Štefana Schwabika (jedna ve spolupráci s jeho tehdejší doktorandkou Danou Fraňkovou)

Schwabik Š.: Generalized Sturm-Liouville equations. Archivum Mathematicum 23 (1987) 95–108;

Fraňková D., Schwabik Š.: Generalized Sturm-Liouville equations II. Czechoslovak Math J 38 (1988), 531–553.

Také Floquetova teorie pro zobecněné rovnice byla (ovšem velmi stručně) pojednána v práci

Schwabik, Š.: Floquetova teorie pro zobecněné diferenciální rovnice. Časopis pro pěstování matematiky 98 (1973), 416–418.

Porovnání s výsledky z těchto prací by bylo zajisté zajímavé.

- V odstavci 1.2 (Teorie míry a integrálu) je uveden až poněkud marnotratně podrobný souhrn faktů z teorie míry. Nezdá se mi, že vše z toho je nutné pro další výklad. Pokud jde o integrál, objevuje se nejprve ve Větě 1. Tam je ještě zřejmé, že jde o integrál Lebesgueův. Zato pojem integrálu vzhledem k míře se objevuje v Lemmatu 9 bez řádné definice. Musím se přiznat, že nerozumím tomu, že se zde i v celé práci objevují výrazy typu $\mu(x)$ resp. $d\mu(x)$, kde μ je míra. Vzhledem k tomu, že míry či různě zobecněné derivace nejsou obecně bodové funkce, lze tomu bez přímého vysvětlení těžko rozumět. Jde snad o monotonní funkce či funkce s konečnou variací reprezentující danou míru?
- Systém, ve kterém jsou číslovány různá tvrzení zvláště (např. na str. 21 jdou po sobě Lemma 25, Definice 18 a Věta 3) není příliš vlídný ke čtenáři při vyhledání zdrojů pro odkazy.

Přidávám ještě výběr z dalších formálnějších připomínek. Výraz S^L odkazuje na stranu S a řádek L shora a S_L znamená, že jde o řádek L zdola.

- 7¹⁵ Zde by se hodilo doplnit řádek informací např. "kde integrálem se rozumí integrál Lebesgueův."
- 17⁴ Co zde znamená výraz " $dDf(x)$ "?
- 25₅ Když je f omezená, není snad nutné přidávat, že $f \in L^\infty \subseteq L^1$. Hnidopich by přidal ještě, že L^∞ je vlastní podmnožina L^1 .
- 29₉ Podle této řádky typuju, že v této kapitole jsou μ a ν znaménkové Radonoy míry. Bylo by ale žádoucí základní předpoklady nějak zdůraznit, včetně jejich zopakování ve znění hlavních tvrzení.
- 31_{8–11} Jak rozumět těmto rovnostem? Jak závisí $DF(t)$ na t ? Podobné otázky mě provází celým textem.
- 61^{16–17} Proč nejsou tyto okrajové podmínky na těchto řádkách normálně očíslovány?
- 61₅ Co se míní "reprezentantem" funkce z L^1 ?

Bez ohledu na tyto připomínky, mám za to, že předložená práce představuje velmi zajímavý příspěvek k teorii zobecněných diferenciálních rovnic. Je zřejmé, že autor pozoruhodně zvládl teorii míry. Zkoumaná problematika je podle mne dosti obtížná. Důkazy byly provedeny pečlivě a, kromě výše uvedených spíše formálních záležitostí, jsem nenašel podstatné věcné nedostatky. Předložená práce by se po jistém vycizelování mohla stát základem pro publikaci v odborném časopise.

Předložená práce podle mne plně vyhovuje požadavkům obvykle kladeným na magisterské diplomové práce a **doporučuji tudíž diplomovou práci Mgr. Davida Žárského k obhajobě.**

Při obhajobě bych rád slyšel od autora odpověď na tuto otázku:

- Co získal tím, že zapojil až tak obecné míry, oproti omezení se na míru generovanou funkcemi s konečnou variací?

V Praze 24. 8. 2022

doc. RNDr. Milan Tvrdý, CSc.
oponent