



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Libor Adámek

Matematické modely synchronizace

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Studijní program: Učitelství fyziky pro střední školy

Studijní obor: FMUPN

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Děkuji všem, kteří mě při psaní této práce trpělivě podporovali a poskytovali cennou zpětnou vazbu. Zvláště bych chtěl poděkovat svému vedoucímu diplomové práce doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D. za odborné vedení, věcné připomínky, trpělivost a ochotu, kterou mi v průběhu psaní práce věnoval.

Název práce: Matematické modely synchronizace

Autor: Bc. Libor Adámek

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Obsahem práce je popis fenoménu spontánní synchronizace v dynamických systémech ve světě kolem nás, jejich studium z pohledu matematiky a shrnutí zajímavých poznatků. Jedná se o široké téma, vybrány jsou proto části zajímavé, zasahující i mimo matematiku, modelující obecný systém schopný synchronizace, či dokonce využitelné v praxi při výuce. Cílem práce je synchronizační jevy popsat a představit jejich matematické modely. Ty jsou řešeny numericky, je zkoumán vliv vstupních parametrů, výsledky jsou graficky zpracovány a podrobeny kvantitativnímu a kvalitativnímu rozboru. Práce je doplněna o interaktivní aplikace/animace, vytvořené v programu Wolfram Mathematica, což usnadňuje nahlédnutí do řešené problematiky a napomáhá i pochopení diskutovaných řešení.

Klíčová slova: synchronizace, matematické modely, Kuramotův model, metronomy, světlušky

Title: Mathematical models of synchronization

Author: Bc. Libor Adámek

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The thesis aims to discuss spontaneous synchronization phenomenon in dynamic systems, which are noticeable all around us (beating heart, synchronization of clapping crowd, flashing of fireflies, synchronized ticking of metronomes). The goal is to describe different approaches in the construction of mathematical models of different systems. Concrete systems studied in the thesis are fireflies under the influence of stimuli and synchronization of two coupled metronomes. Representative of a general model, Kuramoto model, is analyzed and discussed as well. Several numerical solutions to all those models are presented, dependence on initial values is studied and analyzed both quantitatively and qualitatively. Additionally, interactive applications/animations were created in Wolfram Mathematica to provide visual support of solutions and even some insight into these solutions.

Keywords: synchronization, mathematical models, Kuramoto model, metronomes, fireflies

Obsah

1 Světlušky	4
1.1 Matematický model	5
1.2 Numerická řešení a analýza výsledků	7
1.3 Více zdrojů signálu	12
1.4 Simulace	22
1.4.1 Interaktivní aplikace	24
2 Kuramotův model	26
2.1 Dva vázané oscilátory	26
2.2 Inspirace	32
2.3 Model upravený Kuramotem	33
2.3.1 Kritická hodnota K_c	38
3 Metronomy	44
3.1 Pohybové rovnice	44
3.2 Numerická řešení	50
3.2.1 Závislost na síle vazby	53
3.2.2 Závislost na rozdílu frekvencí	55
3.2.3 Synchronizace v protifázi	57
Závěr	63
Seznam použité literatury	64

Úvod

Druhý termodynamický zákon zjednodušeně říká, že každá událost ve vesmíru, od výbuchu supernovy, přes pád meteoru, zemětřesení, vlny tsunami, až po otočení hodinových ručiček či mávnutí křidélek malé světlušky, nevyhnutelně přispívá k nárůstu chaosu. Z jeho tvrzení se může zdát, že neuspořádanost a chaotičnost je ve světě okolo nás nějakým způsobem zakódována. O to zajímavější se pak jeví situace, kde hlavní roli zastává nějaký systém, v němž spontánně vyvstane organizované chování, nějaký řád. Situace, kdy jednotlivé komponenty systému, ač do určité míry různé, jednají shodně, jednotným tempem, v jednotném rytmu. Říkáme, že jsou komponenty synchronizovány.

Pro některé nemusí být takové chování překvapivé. Například hráči orchestru musí být při hraní skladby synchronizováni, sportovní veslaři musí pro největší efektivitu udržovat shodné tempo apod. Hudebníci i sportovci, a nejen oni, se s tímto fenoménem mohou setkat poměrně často. Nutno ale říci, že taková synchronizace je méně spontánní, jako spíše naučená postupem času, odehráním stovek skladeb a provedením tisíců a tisíců veslařských temp. Jak lze ale vysvětlit synchronní blikání hejna světlušek, čítajícího stovky jedinců, sedících v korunách stromů, či na březích řeky? Tito nemyslící broučci se těžko mohou takové dovednosti přímo naučit. Lze si však představit (a to správně), že spolu instinktivně komunikují a vzájemně se řídí. Ovšem je možné zajít také naprosto mimo organický svět a ptát se, co stojí za tím, že sada podobně tikajících metronomů posazených na pohyblivé desce, nebo pouze dvojice stejných kyvadlových hodin, visících z jednoho trámu, po čase vždy přejde do tikání jednotného a synchronizovaného? Dokonce se může stát, že sjednocení není úplné, ale kyvadla metronomů/hodin kmitají přesně proti sobě. Takové situace, ač neobvyklé, skutečně nastávají a pro toho, kdo se s nimi setká, mohou představovat zajímavý fenomén.

Synchronizace se vyskytuje napříč různými vědeckými a přírodními odvětvími, jak ukazují i knihy Stevena Strogatze: SYNC (Strogatz [13]) a Nonlinear Dynamic and Chaos (Strogatz [14]). Mimo všechny zajímavé případy synchronizace v těchto knihách zmíněné se jejich autor zabývá hlavně otázkou, co by o synchronizační tendenci mohla říci matematika a v průběhu let zkoumané matematické modely, kterými se jejich autoři pokoušejí rozklíčovat jemné podmínky, vedoucí k jednotnému chování.

V zásadě lze modely pro synchronizaci nejsnáze vystavět v systémech vykazujících nějakou periodicitu, přičemž je častou podmínkou, že jednotlivé části systému, které se synchronizují, mají velmi podobné parametry (geometrii, působící pohonné a brzdící síly, živočišný druh, shodný typ buňky apod.). Aby byla synchronizace možná, musí nutně jednotlivé části „komunikovat“, tedy musí existovat nějaké vazby, pomocí nichž dochází ke vzájemnému ovlivňování. Tyto vazby nesmí být ani příliš silné, aby vzájemné ovlivňování nepřispělo k celkovému zastavení systému – součásti se pak brzdí – ani příliš slabé, neboť poté je vlastní chování jednotlivých částí systému dominantní proti vzájemným vlivům a k synchronizaci nedochází. Vazbou mohou být mechanické a elektrické síly, elektromagnetické vlnění, případně feromony, vizuální či jinak smyslový kontakt (je uvažován v modelech hejn ptáků, ryb a hmyzu) a jiné organické způsoby komunikace (systémy buněk v orgánech apod.).

V této práci jsou zvoleny některé vzájemně odlišné modely, jednak vhodné pro různé konkrétní situace (světlušky a metronomy), jednak jeden velmi úspěšný obecný model, Kuramotův. Předmětem práce je prozkoumání vlastností těchto modelů a vyvození důsledků pro jejich vstupní parametry a limitní chování za pomoci numerických řešení a naprogramovaných simulací v jazyce Wolfram Mathematica. Proto je svým obsahem práce cílena především pro absolventy alespoň bakalářského studia matematicky zaměřeného oboru, ale animace a některé výsledky (schopnost synchronizace metronomů) jsou použitelné i pro zpestření výuky matematiky a fyziky na střední škole.

1. Světlušky

V přírodě existuje fenomén, kdy se tisíce světlušek usadí v korunách stromů a společně vytvoří úžasnou podívanou ve formě jednotného, synchronizovaného blikání¹, jak popisuje Strogatz [13]. Tím nemusí být nutně synchronizace úplná, tj. všichni jedinci v daný okamžik probliknou, ale mohou vzájemně vůči sobě při jednotlivých bliknutích udržovat konstantní časový rozdíl. Jinak řečeno, v takový moment udržují konstantní rozdíl své vlastní fáze oproti fázi svých sousedů a výsledný efekt může nabývat formy vlny světla, nesoucí se napříč stromy.

Tento jev² je znám dokonce již několik století, ovšem historicky se jeho vysvětlení přisuzovalo spíše náhodě, či pomatenému smyslovému vnímání pozorovatele. Zdánlivě nepřekonatelnou potíží při hledání podstaty a potvrzení existence jevu vůbec totiž byla otázka, jak by mohl hmyz dosáhnout přirozeně takové míry uspořádání, když například člověk se musí něco podobného naučit (rytmus v hudbě, v tanci, pochodování apod.). Dvěře k prověřování otevřelo přijetí předpokladu, že spolu jedinci v synchronizovaném hejnu dokáží nějakým způsobem komunikovat, vzájemně se ovlivňovat a současně přizpůsobovat vlastní blikání svému okolí. To samo s sebou nese – potvrzený – předpoklad, totiž že každá světluška, izolovaná od ostatních, dokáže držet určitý (pro ni charakteristický) rytmus blikání³. Oba předpoklady lze zkombinovat a nahlížet na hejno světlušek jako na soubor vzájemně propojených oscilátorů, které komunikují mezi sebou⁴ a mají schopnost uzpůsobování vlastní frekvence – přizpůsobují se svému okolí. Každá světluška tak funguje jako „vysílač“ a „přijímač“ signálů a takovéto ovlivnění má za následek výslednou synchronizaci – hejno se organizuje samo, bez nějakého zjevného vůdce. Zde však vyvstává otázka, zdali tyto předpoklady k uskutečnění synchronizace stačí. Je-li možné, aby nějaká forma komunikace a schopnost se přizpůsobit sama o sobě vyvolala jednotné, rytmické chování v systému nemyslicích objektů? Tato otázka byla jedním z důvodů, který přivedl matematiky ke studiu synchronizačního fenoménu, aby se ukázalo, že při správných podmínkách je odpověď pozitivní. Současně se ukázalo, že výsledný typ synchronizace a mechanismus, jakého světlušky k dosažení jednotnosti využívají, závisí také na tom, o jaký druh se jedná. Existují druhy, které umí (skokově) upravovat, v jaké části (fázi) vlastního cyklu se zrovna nachází – takový model podle Mirolla a Strogatze (Mirollo a Strogatz [9]) uvažuje bliknutí jedné světlušky jako impuls, který ostatním okamžitě posune jejich fázi, o určitou hodnotu. A to vpřed, aby se samy přiblížily k vlastnímu bliknutí. Pokud impuls navýší fázi tak, že by světluška přeskočila moment bliknutí, namísto toho okamžitě blikne a její fáze je resetována. V takový moment však dochází ke sjednocení fáze s fází zdroje impulsu, a pokud jsou frekvence obou světlušek stejné (což je vhodný předpoklad v rámci jednoho druhu),

¹Odkaz na video s tímto fenoménem: <https://www.youtube.com/watch?v=ZGvtnE1Wy6U>.

²Předpokladem, proč se něco takového děje, může podle Kingsburryho a kol. (Kingsburry a kol. [6]) být například usnadnění pro samičky při namlouvacích rituálech rozpoznat jedince vlastního druhu, nebo za stejných okolností jde o výsledek vzájemného soutěžení mezi samečkami.

³Znamená to, že světluška musí mít tento rytmus nějak zakódovaný, což je opět vzhledem k určité obtížnosti, s jakou lze rytmus udržet, velice zajímavé.

⁴Jak ke komunikaci mezi světluškami dochází, nemusí být zcela jednoznačné. Existují však experimenty, které prokazují, že jedním ze způsobů jsou světelné signály, tedy že světluška přímo reaguje na světlo svých sousedů, viz práce Hansona (Hanson [4]) nebo Bucka (Buck [2]).

pak nutně budou nadále synchronizovány, více viz Strogatz [13].

Naproti tomu existují i druhy, které mohou přímo ovlivňovat vlastní frekvenci blikání, a dokáží zrychlit i zpomalit. Výsledné sjednocení (kde buď existují prodlevy mezi bliknutími, nebo se jedná o úplnou synchronizaci) závisí na nějaké přirozené schopnosti se přizpůsobit vnějším podnětům a odvíjí se druh od druhu. Jsou druhy s vysokou tolerancí, které vlastní frekvenci postupně upravují a nakonec vzájemně dokonale přizpůsobí, až blikají opravdu jednotně. Právě díky této rozličnosti se pro různé druhy vytvářely různé matematické modely, které k úkazu přistupují s odlišnými předpoklady a různými celkovými pohledy.

Dalším důvodem, proč se zabývat synchronizací světlušek, je podobnost se studiem jiných synchronizačních úkazů, ať už v biologickém světě – příkladem mohou být srdeční buňky, zajišťující rytmický tlukot⁵, neurony, buňky ve svalech, které zajistí pohyb ruky či dýchání. Nebo trochu blíže světluškám schopnost cikád a cvrčků sjednotit svůj cvrkot, případně i jednotné chování hejn ptáků a ryb při útoku predátora. Synchronizaci je možné ale nalézt i v dalších oblastech, například ve fyzice supravodičů je patrně synchronizace zodpovědná za průchod proudu látkou s nulovým odporem, nebo v oblasti elektromagnetického pole musí atomy uvnitř laseru „spolupracovat“, aby došlo k vyzáření koherentního paprsku. Ačkoliv se zdá, že veškeré uvedené příklady jsou ze značně odlišných oborů, všechny lze propojit přes matematický popis. A ke složitějšímu vedou nejprve jednodušší úvahy a matematické modely svítících světlušek, podložené experimenty.

1.1 Matematický model

V této sekci uvažujeme model převzatý od Strogatze (Strogatz [14]), jehož autory jsou Ermentrout a Rinzel (1984). Oproti kapitole 3, kde je uvažováno konstantní vzájemné působení dvou oscilátorů, které se ovlivňují, v modelu v této sekci je jeden oscilátor představující světlušku, který je vystaven působení vnějšího zdroje a má schopnost se tomuto zdroji přizpůsobovat. Zajímá nás, jak se frekvence světlušky přizpůsobuje frekvenci signálu. V tomto případě se tedy nejedná o princip skokové úpravy fáze.

Uvažujme funkci $\theta(t)$, popisující fázi periodického blikání, přičemž $\theta = 0$ představuje moment, kdy světluška blikne. Protože je blikání periodické, je vhodné klást takový požadavek i na tuto funkci, proto je moment bliknutí nikoliv pouze při $\theta = 0$, ale také při $\theta = 2\pi n$, kde $n \in \mathbb{Z}$. Pro světlušku, na kterou nepůsobí vnější zdroje, platí

$$\theta'(t) = \omega, \quad (1.1)$$

kde θ' představuje derivaci fáze podle času t a ω je vlastní (přirozená) frekvence rytmu světlušky bez vnějšího působení.

Přidejme nyní vnější zdroj signálu, jehož fáze bude popsána funkcí $\psi(t)$, přičemž také splňuje požadavek na periodicitu, tedy bliknutí zdroje probíhá vždy ve $\psi = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Vlastní frekvence Ω je dána vztahem

$$\psi'(t) = \Omega, \quad (1.2)$$

⁵Tzv. sinoatriální uzel jsou buňky, které mají samy v sobě „zakódován“ rytmus bijícího srdce, neboť i v případě odpojení od nervového systému lze v těchto buňkách naměřit nárůst a pokles elektrického napětí, kterým jsou další buňky srdce řízeny.

kde ψ' představuje derivaci fáze podle času t a Ω je právě vlastní frekvence vnějšího zdroje. Pro sestavení řídicí rovnice předpokládejme, že pokud vnější zdroj blikne v předstihu před světluškou, ta zvýší svoji frekvenci, je-li naopak zdroj pomalejší, sníží frekvenci i světluška. V matematické formě je tato úvaha zachycena například rovnicí

$$\theta'(t) = \omega + A \sin(\psi - \theta), \quad (1.3)$$

kde $A > 0$ je parametr, který určuje schopnost světlušky přizpůsobit svoji okamžitou frekvenci. Ve Strogatzově knize [14] se A nazývá *resetovací síla* světlušky. Tento název má však význam spíše v modelech, které uvažují skokové změny fáze světlušky (resetovací síla říká, jak velký fázový skok světluška po přijetí signálu dokáže provést – jak dobře dokáže „resetovat“ svůj cyklus, viz [13]).

Z rovnice (1.3) je patrné, že nastává jedna ze dvou následujících situací. Pokud

$$2k\pi < \psi - \theta < (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

pak zdroj předbíhá světlušku a platí $\theta'(t) > \omega$, tedy světluška zvyšuje svoji frekvenci. Pokud naopak

$$(2k - 1)\pi < \psi - \theta < 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

zdroj se opoždí a $\theta'(t) < \omega$, světluška zpomaluje svůj rytmus. Pro další rozbor je vhodné ještě zavést fázový rozdíl ϕ , definovaný jednoduchým vztahem

$$\phi = \psi - \theta. \quad (1.4)$$

Vývoj systému světluška-signál pak bude popsán právě tímto fázovým rozdílem. Pokud fázový rozdíl v čase konverguje k určité limitní hodnotě, dochází k jevu, který se nazývá *strhávání*⁶. V takové situaci je světluška schopna upravit vlastní frekvenci na frekvenci zdroje, ovšem tak, že se opoždí (nebo předbíhá) o nějaký konstantní čas⁷. V případě $\phi = k$, kde $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se limitní chování nazývá *fázové uzamknutí*. Speciální limitní situací je hodnota konvergence $k = i2\pi$, kde $i \in \mathbb{Z}$, v takový moment světluška bliká jednotně se zdrojem signálu.

Jestliže fázový rozdíl v čase diverguje, světluška se nedokáže přizpůsobit frekvenci zdroje, fázový rozdíl nebude mít konečnou limitu. Zajímavé je, že však neroste lineárně⁸, což potvrzuje výzkum Hansona (Hanson [4]). Světluška se totiž v určité části každého svého cyklu snaží o synchronizaci, což má za následek zpomalení vývoje fázového rozdílu a „schodovitý“ tvar graficky zobrazené závislosti – podrobnější rozbor viz níže. Tento jev je podobný tzv. rázům v oscilacích alespoň dvou nezávislých oscilátorů s podobnou frekvencí.

Zbývá uvést rovnici vývoje fázového rozdílu $\phi(t)$, tedy rovnici s $\phi'(t)$, kterou lze odvodit pomocí věty o derivaci součtu. S využitím (1.2) a (1.3) dostáváme

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \psi'(t) - \theta'(t) \\ \phi'(t) &= \Omega - \omega - A \sin(\phi(t)). \end{aligned} \quad (1.5)$$

⁶Anglický termín je „entrainment“.

⁷Podobně, jako se ne zcela pravidelně, ale v pevném rozdílu střídají některá varovná světla na železničních přejezdech.

⁸Oproti například metronomům v další kapitole.

Protože se zde přikláníme spíše ke kvalitativnímu rozboru vývoje systému popsaného rovnicí (1.5) a konkrétní přesné hodnoty frekvencí a parametru A v takovém případě nejsou zásadní, lze předchozí rovnici zjednodušit podle [14] na bezrozměrnou zavedením bezrozměrného času τ a parametru μ

$$\begin{aligned}\tau &= At, \\ \mu &= \frac{\Omega - \omega}{A}.\end{aligned}$$

S využitím věty o derivaci složené funkce pak lze (1.5) převést do tvaru

$$\dot{\phi}(\tau) = \mu - \sin(\phi(\tau)), \quad (1.6)$$

kde $\dot{\phi}$ vyjadřuje derivaci podle τ . Parametr μ je určen rozdílem frekvencí vztaženým vůči parametru A – pokud je μ malé, pak je buď rozdíl mezi frekvencemi malý, nebo je resetovací síla vůči němu velká. V takový moment by mohlo být opodstatněné očekávat synchronizační tendenci, ať již plnou, nebo formou fázového uzamknutí.

Následují numerická řešení a prozkoumání systému, daného rovnicí (1.6).

1.2 Numerická řešení a analýza výsledků

Rovnice (1.6) byla řešena numerickou metodou implementovanou v programu Wolfram Mathematica. Uvedené grafické interpretace výsledků byly zpracovány v tomtéž programu.

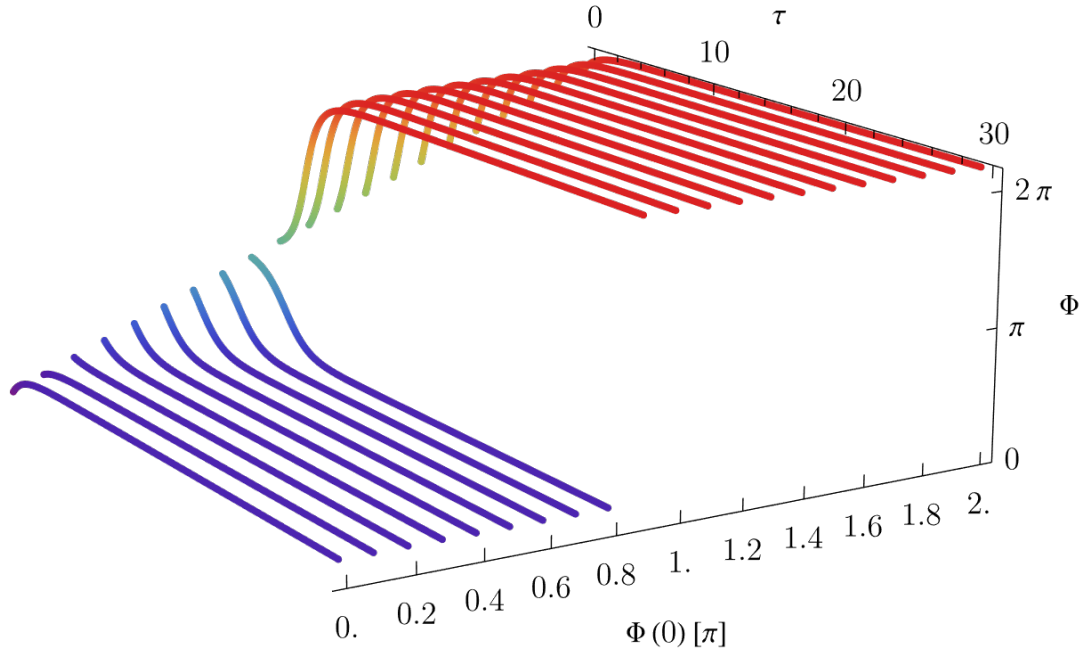
Díky bezrozměrnosti (1.6) lze vývoj systému proměřovat jen v závislosti na velikosti parametru μ a počáteční podmínce ve formě fázového rozdílu $\phi(0)$, přičemž díky periodicitě lze předpokládat, že pro počáteční podmínku platí

$$\phi(0) \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Při zvoleném $\mu = 0.5$ zachycuje závislost na počátečním fázovém rozdílu graf na obrázku 1.1.

Z grafu lze vyčíst, že pro fázové uzamknutí nehraje počáteční podmínka fázového rozdílu s užitým parametrem μ žádnou roli. V žádném případě nedochází sice k plné synchronizaci – všechny vývoje konvergují k určitým hodnotám, které nejsou násobky 2π – současně však ani žádná podmínka neodpovídá situaci, kdy fázový rozdíl diverguje. Pro křivky, jejichž limitní hodnota je blízká nule, platí, že světluška zrychlí a signál svou frekvencí dožene. Naopak křivky, které mají limitu blízkou hodnotě 2π , znamenají, že světluška v frekvenci zpomaluje tak, aby se nechala signálem předběhnout o jeden cyklus, než se jí podaří srovnat rytmus. Další proměřování souvisí s úpravou parametru μ . Počáteční podmínka pro fázový rozdíl byla stanovena na $\phi(0) = \pi/4$.

Obrázek 1.2 vizuálně i prakticky rozděluje grafy do dvou sekcí – je vidět, že určité hodnoty μ zajišťují fázové uzamknutí, naopak existují hodnoty tohoto parametru, pro které je synchronizace nedosažitelná. To se pak projevuje nekonečným, již dříve zmíněným, nelineárním růstem, nebo poklesem fázového rozdílu. Pro fázový rozdíl $(2k + 1)\pi > |\phi| > 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, je jeho změna malá, světluška se



Obrázek 1.1: Vývoje systému světluška-signal v závislosti na počátečním fázovém rozdílu

zde v každém cyklu snaží upravovat svoji frekvenci, ačkoliv jí stále zdroj uniká. Pro případ $(2k + 1)\pi < |\phi| < 2(k + 1)\pi$ je změna fázového rozdílu daleko větší, což odpovídá skutečnosti, že světluška dosáhla své limity z hlediska schopnosti přizpůsobení své frekvence, fázový rozdíl tak rychle přeskočí bod $2k\pi$ a proces se opakuje.

Zajímavá je situace pro $\phi(0) = \pi$. Tato počáteční podmínka má specifický výsledek pro $\mu = 0$, kdy jsou shodné frekvence světlušky i zdroje signálu a oba začínají v protifázi – pak vůči sobě blikají v protifázi i nadále. Toto pozorování podporuje prozkoumání stability stacionárních bodů této konfigurace, kde právě hodnota $\phi = \pi$ je tzv. nestabilním stacionárním bodem⁹.

Dalším krokem je hledání stacionárních bodů $\dot{\phi}(\tau)$, tedy

$$\dot{\phi}(\tau) = 0, \quad (1.7)$$

jinak řečeno: hledání bodů, kde je fázový rozdíl konstantní. Neboť platí rovnice (1.6), lze tak podle [14] graficky vyjádřit $\dot{\phi}$ v závislosti na ϕ , tedy využít tzv. *fázový prostor* – rovinu, která odpovídá všem možným konfiguracím ϕ a $\dot{\phi}$.

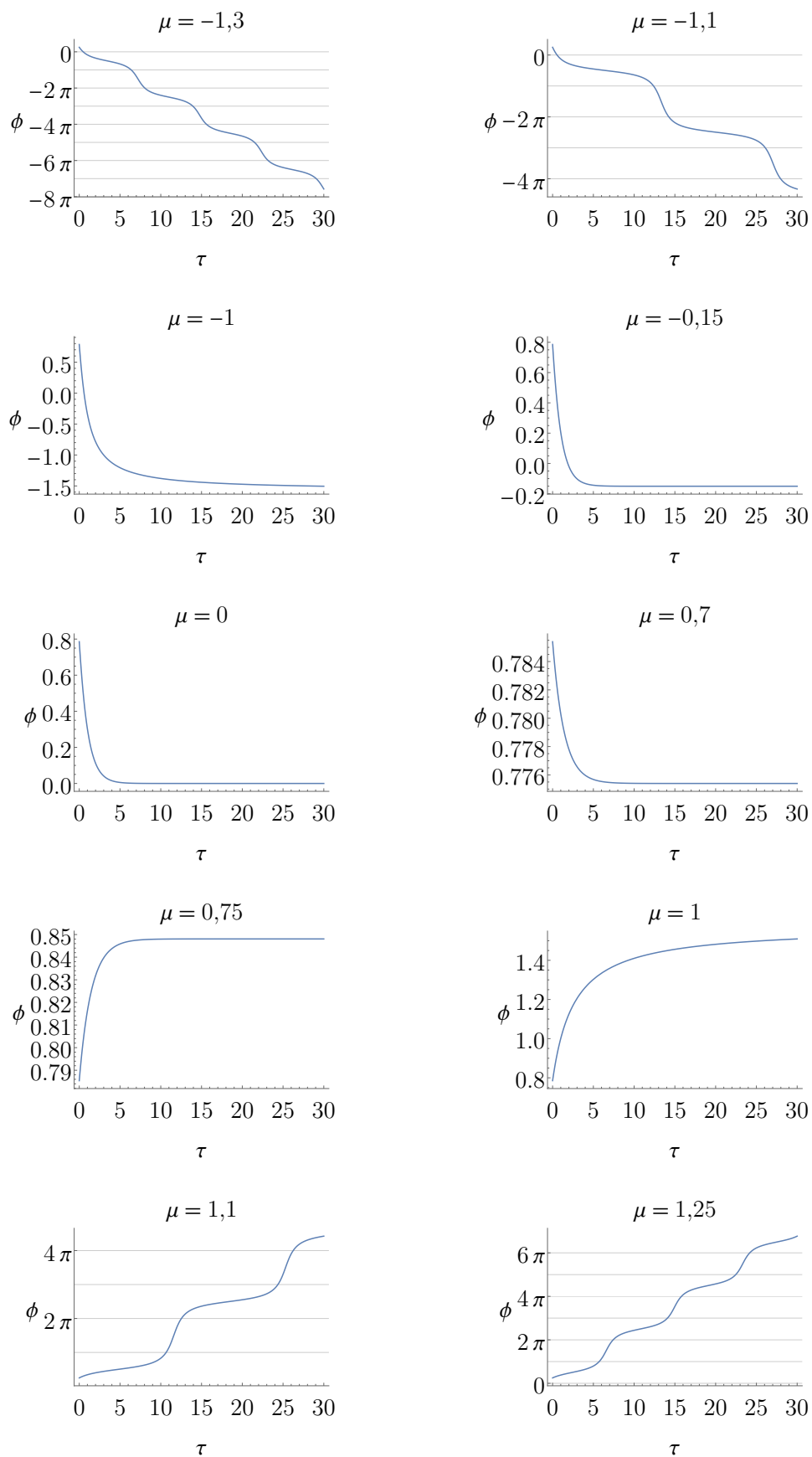
Pro $\mu = 0$ nabývá rovnice (1.6) tvaru

$$\dot{\phi} = -\sin \phi, \quad (1.8)$$

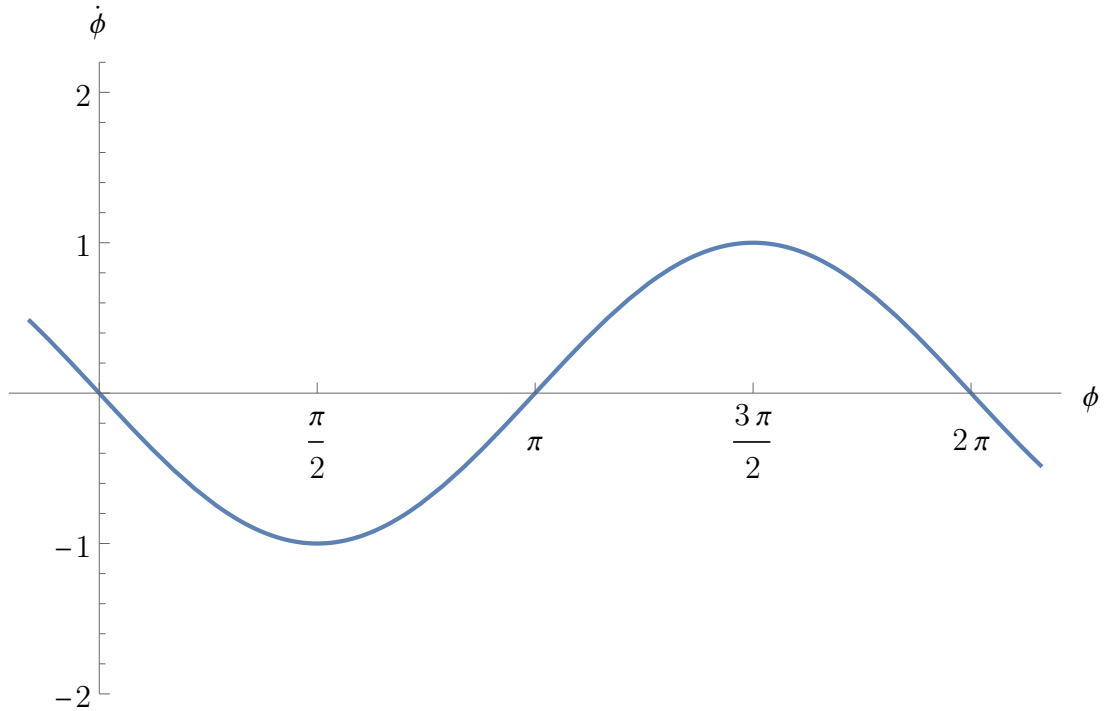
a tedy je křivka ve fázovém prostoru obrácená sinusoida, viz obrázek 1.3. Podle [14]¹⁰ je v bodě $\phi = 0$ stabilní stacionární bod, neboť derivace funkce na pravé

⁹Stacionárním bodem se rozumí konstantní řešení. Konkrétně stacionárním bodem rovnice $x'(t) = f(x(t))$ je bod x_0 splňující $f(x_0) = 0$. Pokud $f'(x_0) < 0$, jedná se o stabilní bod – řešení začínající v blízkosti x_0 se v limitě blíží k x_0 . Pokud $f'(x_0) > 0$, jedná se o nestabilní bod – řešení začínající v blízkosti x_0 se od x_0 vzdalují.

¹⁰Kapitola 2.4 Linear stability analysis



Obrázek 1.2: Vývoje fázového rozdílu systému světluška-signal v závislosti na μ



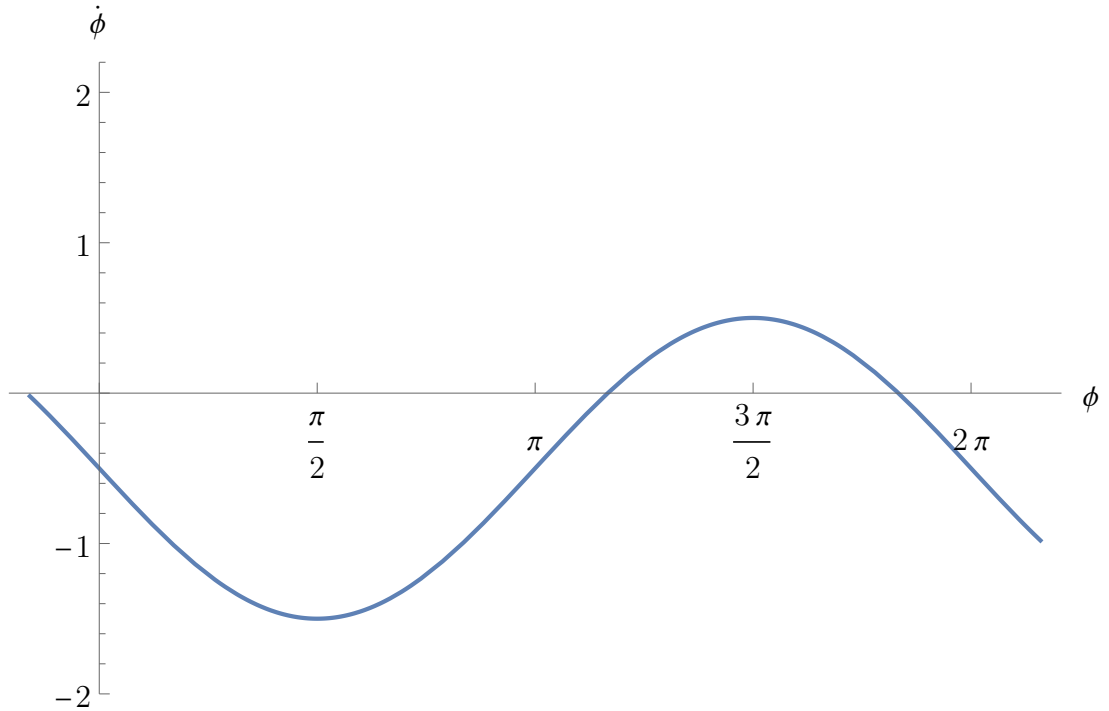
Obrázek 1.3: Stacionární body a jejich stabilita pro $\mu = 0$

straně rovnice je v tomto bodě záporná. Ze stejného důvodu je stabilním bodem i $\phi = 2\pi$ a další celočíselné násobky 2π . Znamená to, že systém má pro téměř libovolný počáteční fázový rozdíl tendenci spět k úplné synchronizaci. Výjimkou jsou body $\phi(0) = \pi$ a jeho celočíselné násobky, pro něž je splněna rovnice (1.7), ale derivace zobrazené funkce je v těchto bodech kladná, proto se jedná o nestabilní stacionární body a pokud není ničím narušena, pak o synchronizaci v protifázi. Změnou parametru μ pro fázový prostor dochází k posunu této sinusoidy po ose ϕ . Z toho vyplývá, že nestabilní stacionární bod existuje i pro jiná μ (ačkoliv se již nejedná o přímou protifázi). To ostatně dokazuje i obrázek 1.4, kde se nestacionární bod posunul od hodnoty π doprava. Zde je vidět i nemožnost dosažení úplné synchronizace, protože systém od jakékoliv počáteční podmínky, s výjimkou případu, kdy začíná v nestabilním stacionárním bodě, konverguje k některému stabilnímu stacionárnímu stavu, pro něhož platí $\phi \neq 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a dosažitelné je tak pouze fázové uzamknutí.

Z rovnic (1.6) a (1.7) plyne pro hledání stacionárních bodů následující vztah:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu - \sin \phi \\ \mu &= \sin \phi. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Protože platí $-1 \leq \sin \phi \leq 1$, platí tato podmínka i pro μ a s využitím vztahu, kterým je μ definován, lze získat podmínku pro synchronizační schopnost světlu-



Obrázek 1.4: Stacionární body a jejich stabilita pro $\mu = -0.5$

šky v závislosti na parametrech A, Ω a ω :

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq \mu \leq 1 \\
 -1 &\leq \frac{\Omega - \omega}{A} \leq 1 \\
 -A &\leq \Omega - \omega \leq A \\
 \omega - A &\leq \Omega \leq \omega + A.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

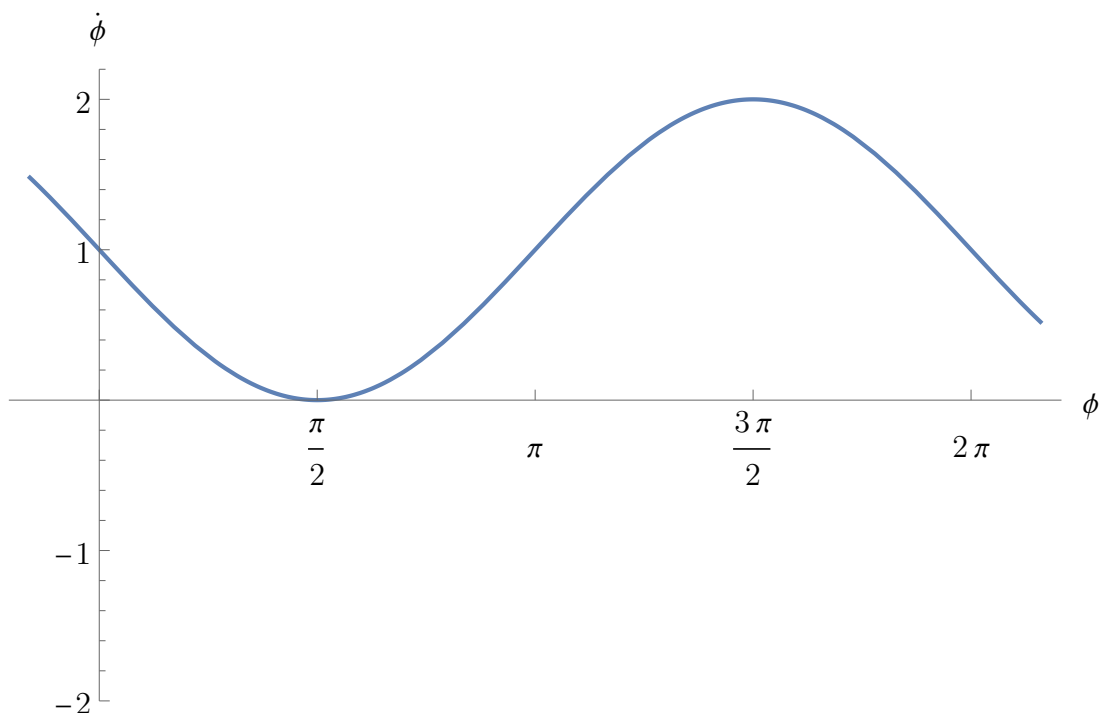
Interval pro Ω se podle [14] nazývá *rozsah strhávání* a v této formě klade podmínku na vnější zdroj signálu v souvislosti se schopnostmi světlušky, aby byla synchronizace možná¹¹. Z postupného odvození (1.10) je také patrná synchronizační podmínka přímo pro bezrozměrný parametr μ , což je potvrzeno právě i rozbohem stability stacionárních bodů.

Pokud je například $\mu = 1$, pak se křivka ve fázovém prostoru pouze dotýká osy ϕ . Stabilní a nestabilní stacionární body splynuly vždy v jeden *polostabilní* bod, který se chová jako přitažlivý pro počáteční stavy nalevo od něj a jako odpuzující pro počáteční podmínky fázového rozdílu, které se nachází napravo. Situaci zachycuje obrázek 1.5.

Překročí-li parametr μ hodnotu 1 (případně je nižší než -1), sinusoida již vodorovnou osu neprotíná a stacionární body zcela zaniknou. V takový moment se již frekvence světlušky a vnějšího stimulu příliš rozcházejí, ekvivalentně lze říci, že parametr A je nedostačující.

Díky grafu na obrázku 1.6 lze nyní vysvětlit schodovité vývoje pro určité hodnoty μ na obrázku 1.2, například $\mu = 1.1$ – při fázovém rozdílu blízkém $\phi = \pi/2$ je

¹¹Současně se lze na tuto podmínku podívat i z hlediska schopností světlušky, jak je uvedeno v práci Hopa (Hope [5]), tj. parametru A . Aby byla nějaká forma synchronizace možná, musí být A dostatečně velké. Větší, než je rozdíl příslušných frekvencí.



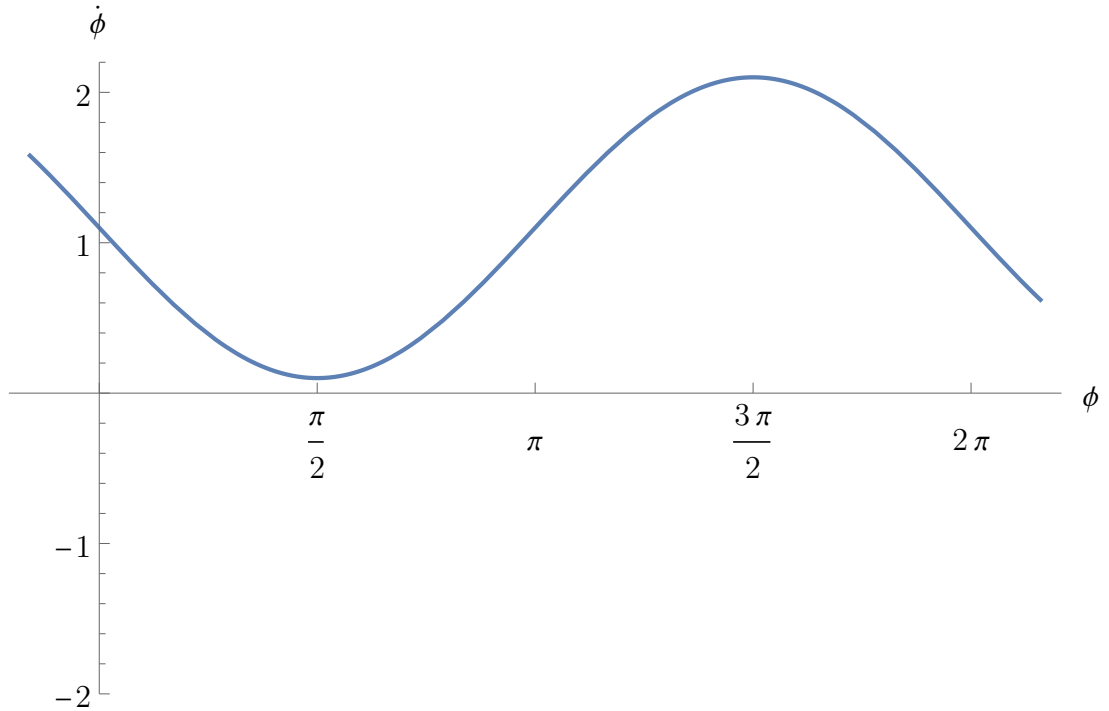
Obrázek 1.5: Stacionární body a jejich stabilita pro $\mu = 1$

hodnota $\dot{\phi}$ velmi malá, což značí pomalou změnu fázového rozdílu ϕ , a to odpovídá mírné změně ve zmíněném grafu. Naopak pro okolí $\phi = 3\pi/2$ je $\dot{\phi}$ v okolí svého maxima – rychlost změny fázového rozdílu je nejvyšší, což naopak odpovídá strmé části v daném vývoji fázového rozdílu. Díky periodicitě se tento děj neustále opakuje.

Rozbor stacionárních bodů v závislosti na μ také napovídá, že synchronizace, blížící se fázovým rozdílem ϕ k nule, dokáží pro různé frekvence vnějších zdrojů dosáhnout mnohem snáze druhy, které disponují velkou hodnotou parametru A , neboť pro $A \gg \Omega - \omega$ platí $\mu \rightarrow 0$. Mimo to obrázky 1.3 - 1.6 potvrzují dříve zkoumanou závislost na počátečním fázovém rozdílu – tedy že počáteční podmínka $\phi(0)$ v tomto modelu neovlivňuje, zdali systém dosáhne fázového uzamknutí, ale pouze určuje, ke kterému stacionárnímu bodu řešení konverguje.

1.3 Více zdrojů signálu

Matematický model by šlo použít i na situaci jednoho pevného zdroje a hejna shodných světlušek (stejně ω a A pro každou světlušku), které se vzájemně neovlivňují a každá začíná s nějakým fázovým rozdílem oproti zdroji – více v sekci 1.4. Mimo to však jednoduchost modelu užitého v předchozí sekci nenabízí další možnosti k prozkoumání, a navíc s sebou nese jisté nedostatky – reálně není světluška ovlivněna jediným zdrojem s pevnou frekvencí, ale celou řadou svých sousedů, které navíc sama ovlivňuje a které se ovlivňují vzájemně. Takový model by však oproti předchozímu skokově nabyl na složitosti a přesahoval by obsah této kapitoly. Přeci jen je však možné určitě zobecnění a rozšíření modelu přidat. Stále nebereme v potaz vzájemné ovlivňování zdroje a světlušky (potenciálně



Obrázek 1.6: Stacionární body a jejich stabilita pro $\mu = 1.1$

zdroje a mnoha světlušek). Lze však uvažovat rozšíření modelu pro případ, kdy na světlušku působí více vnějších zdrojů. V zachování jednoduchosti budeme uvažovat zdroje dva, každý s vlastní funkcí popisující jeho fázi $\psi_i(t)$, kde $i = 1, 2$ a příslušnými vlastními frekvencemi

$$\psi'_i(t) = \Omega_i.$$

Pak je možné, v souladu s modelem jednoho zdroje, zavést fázové rozdíly mezi světluškou a i -tým zdrojem

$$\phi_i(t) = \psi_i - \theta.$$

Nyní je třeba přistoupit k úpravě rovnice (1.3), aby zahrnovala oba zdroje. Jedním ze způsobů může být rozšíření v duchu tzv. Kuramotova modelu, jehož popis lze nalézt v článku Strogatze [12], který se v průběhu let prokázal jako spolehlivý model synchronizace v mnoha rozličných oblastech a který má se zde užitým modelem jistou podobnost (např. přizpůsobení fáze závisí na sinu fázového rozdílu). Podrobnějšímu rozboru se budeme věnovat v kapitole 2. Je však vhodné poznamenat, že standardně je tento model používán pro velké množství vzájemně vázaných oscilátorů, proto zde hovoříme pouze o modelu inspirovaném Kuramotovým.

Na základě tohoto modelu může být příslušná řídicí rovnice pro světlušku a dva zdroje následující:

$$\theta'(t) = \omega + \frac{A}{2} \sin(\phi_1) + \frac{A}{2} \sin(\phi_2), \quad (1.11)$$

kde podle vzoru Kuramotova modelu vystupuje nyní $A/2$, tedy dojde k rozdělení *resetovací síly* (síly vazby mezi světluškou a zdrojem) rovnoměrně mezi oba zdroje

signálu.

Hope ve svém článku [5] volí ještě dva jiné přístupy – předně lehce odlišnou verzi (1.11)

$$\theta'(t) = \omega + A \sin(\phi_1) + A \sin(\phi_2), \quad (1.12)$$

kde světluška na oba zdroje reaguje plnou resetovací silou. Další způsob užitý v [5] pak uvažuje průměrování fázových rozdílů:

$$\theta'(t) = \omega + A \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right). \quad (1.13)$$

Při těchto možnostech je první vhodnou otázkou, který z modelů by měl být použitý a dává přesvědčivější výsledky? Nesporným soudcem by byl experiment, zde pro kvalitativní rozbor vystačíme jen se zachováním konzistence vůči modelu jednoho zdroje. Proto je třeba, jako v případě jednoho zdroje, vývoj systému zkoumat pomocí rovnic pro fázové rozdíly. Pak pro model vycházející z Kuramotova platí

$$\phi_1'(t) = \Omega_1 - \omega - \frac{A}{2} (\sin(\phi_1) + \sin(\phi_2)), \quad (1.14a)$$

$$\phi_2'(t) = \Omega_2 - \omega - \frac{A}{2} (\sin(\phi_1) + \sin(\phi_2)), \quad (1.14b)$$

pro model uvažující plnou resetovací sílu u obou zdrojů

$$\phi_1'(t) = \Omega_1 - \omega - A (\sin(\phi_1) + \sin(\phi_2)), \quad (1.15a)$$

$$\phi_2'(t) = \Omega_2 - \omega - A (\sin(\phi_1) + \sin(\phi_2)), \quad (1.15b)$$

a pro průměrování fázových rozdílů dostaneme

$$\phi_1'(t) = \Omega_1 - \omega - A \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right), \quad (1.16a)$$

$$\phi_2'(t) = \Omega_2 - \omega - A \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right). \quad (1.16b)$$

Jak je podotknuto v [5], uvažujme nyní, že jsou oba zdroje shodné. Platí tedy $\psi_1(t) = \psi_2(t) = \psi(t)$ pro všechna t a současně $\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi(t)$ ¹². Rozšířená rovnice pro fázi světlušky by měla přejít do tvaru rovnice pro model jednoho zdroje. To je splněno pro modely (1.14) a (1.16), neboť s uvážením zmíněných podmínek v obou případech po úpravách platí

$$\phi'(t) = \Omega - \omega - A \sin(\phi),$$

zatímco v modelu uvažujícím plnou resetovací sílu u obou zdrojů dostáváme po úpravách

$$\phi'(t) = \Omega - \omega - 2A \sin(\phi),$$

¹²Z těchto podmínek vyplývají i další podmínky, například soustavy rovnic pro ϕ_i přejdou pouze na jednu rovnici, pro vlastní frekvence zdrojů bude platit $\Omega_i = \Omega$.

což s modelem jednoho typu zdroje nekoresponduje. Proto se tímto modelem nadále zabývat nebudeme. Ke zkoumání situace využijeme ostatní dva modely. Soustavy rovnic (1.14) a (1.16) byly numericky řešeny v programu Wolfram Mathematica. Pro oba modely byly klíčové parametry zvoleny při prvním výpočtu takto: $\omega = 6$, $\Omega_1 = 6,5$, $\Omega_2 = 6,2$, $A = 3$. Pokud by každý zdroj působil na světlušku samostatně, tyto parametry zaručují, že by synchronizace byla dosažena. Počáteční fázové rozdíly byly ve všech případech shodné, platí $\phi_1(0) = \phi_2(0) = \pi/4$. Výsledky zachycují v grafech obrázky 1.7 a 1.8.

Model průměrování fázových rozdílů má vcelku přímočaře interpretovatelné řešení. Zřejmě oba fázové rozdíly divergují. To znamená, že se světluška není schopna držet svým rytmem ani jednoho zdroje, ale její frekvence se ustálí na hodnotě, která odpovídá průměru Ω_1 a Ω_2 . Ukázalo se, že při dané konfiguraci parametrů nemají změny počátečního fázového rozdílu vliv na limitní chování. Nadále bylo prostudováno, že změny parametrů ovlivňují jednak strmost, s jakou se oba fázové rozdíly mění, ale mají také vliv na to, zdali se světluška ustálí na jedné frekvenci, či zdali její frekvence diverguje, přesněji osciluje. To je zachyceno v obrázku 1.9, kde byly parametry zvoleny následovně: $\omega = 6$, $\Omega_1 = 10$, $\Omega_2 = 9,7$ a $A = 3$.

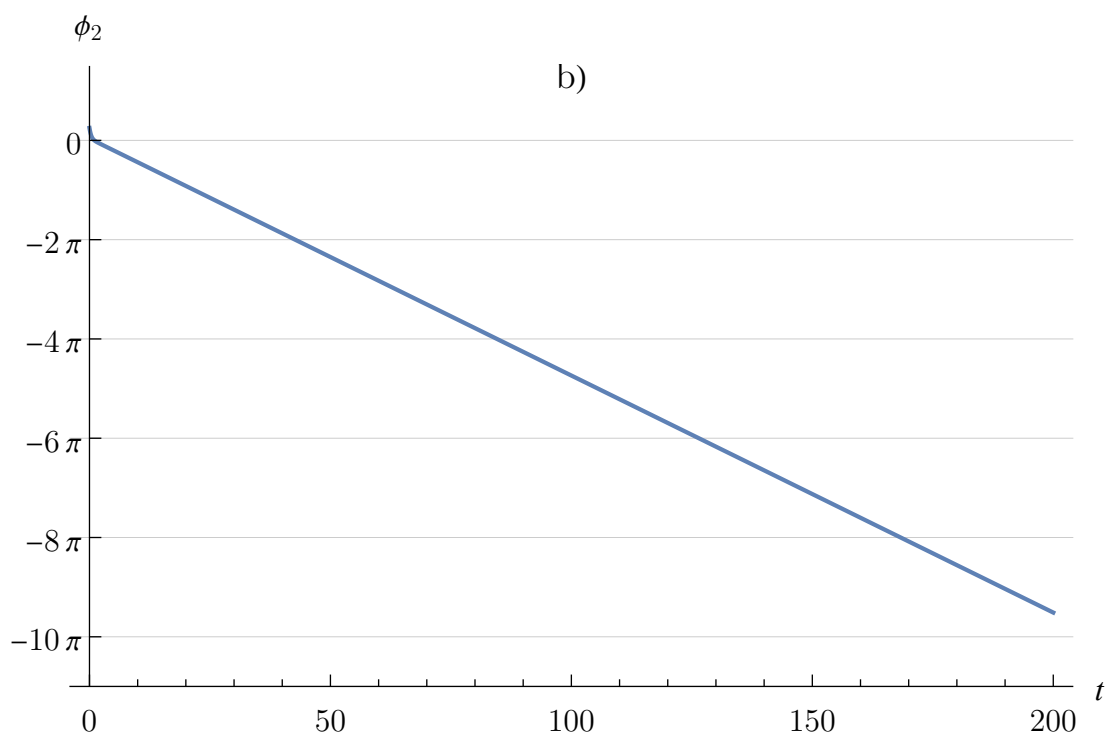
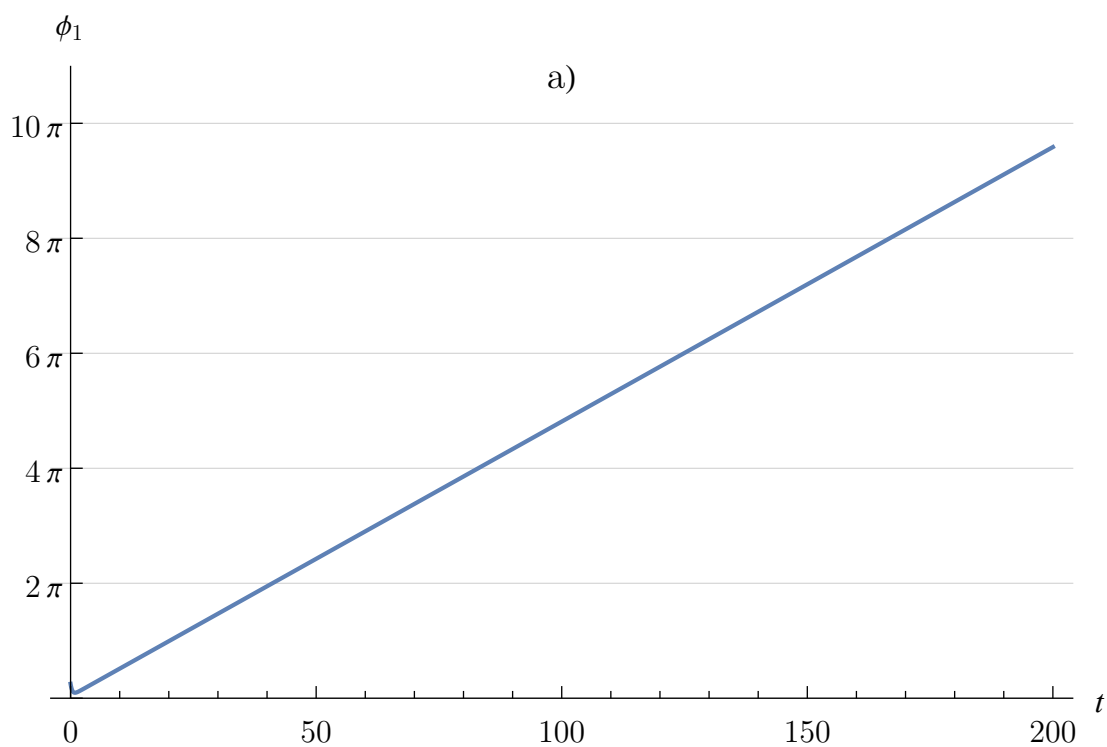
Z uvedených poznatků je možné vyvozovat, že tento model předpovídá nemožnost synchronizace světlušky se zdroji, je-li pod vlivem několika rozdílných signálů. Samozřejmě je třeba si uvědomit, že vyvozený výsledek je za předpokladu, kdy není bráno v potaz vzájemné ovlivňování mezi jednotlivými částmi systému.

Jak se však dívat na situaci s ustálenou frekvencí je otázka – nedochází sice k synchronizaci se zdroji, ale pokud by bylo pod vlivem těchto zdrojů několik shodných světlušek, které by se nanejvýše lišily v počátečních fázových rozdílech oproti zdrojům, pak by všechny dospěly ke shodnému limitnímu chování a vlastně by byly synchronizovány mezi sebou¹³. Protože však tato synchronizace nevyvstává na základě vzájemného ovlivňování mezi světluškami, naráží na smysl, pod kterým je v této práci chápána a je pouhým důsledkem zjednodušujících úvah.

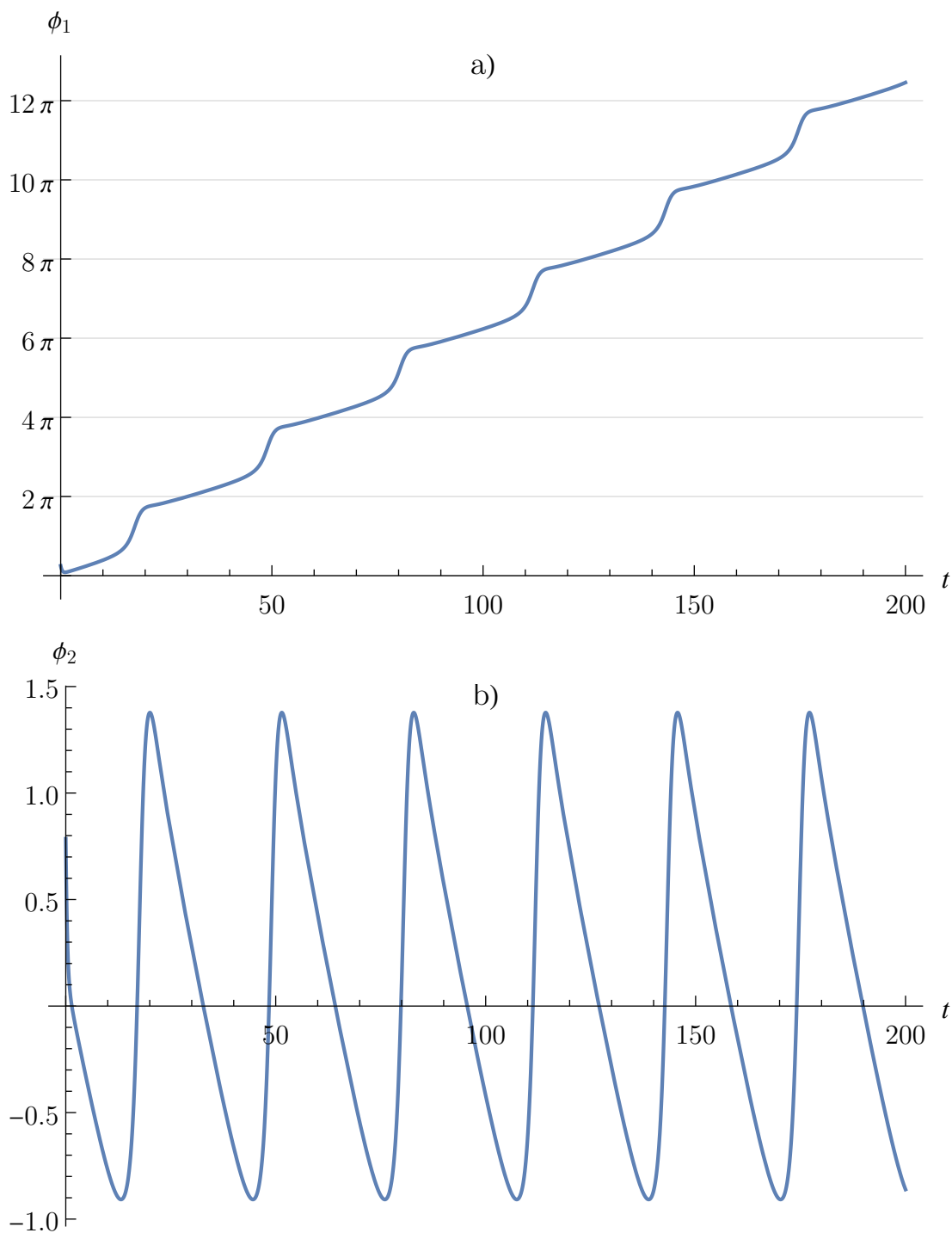
Model podle Kuramota vykazuje na obrázku 1.8 v mnoha ohledech také zajímavé chování, ačkoliv na první pohled je patrné, že při zadaných parametrech ani zde k synchronizaci nedojde. Hlavním rozdílem je oscilační chování v případě ϕ_2 . Pro fázový rozdíl ϕ_1 je vývoj obdobný jako v modelu jednoho zdroje, když byly brány hodnoty $\mu > 1$ – schodovitý tvar napovídá, že se světluška snaží s tímto zdrojem držet rytmus, v určitých fázích se jí to daří lépe, ale synchronizace nikdy nedosáhne. Lze říci, že světluška je tímto zdrojem *neúplně strhávána*, což by mělo mít za následek oscilační tendenci pro druhý fázový rozdíl. V situaci, když se světluška snaží udržet rytmus s rychlejším zdrojem 1 dokonce na krátký čas předběhne pomalejší zdroj 2, který ji ale zpětně brzdí, takže jí zdroj 1 stále uniká. Ve strmé části schodu světluška zpomaluje, zdroj 2 ji opět prudce předbíhá, než se světluška v dalším cyklu pokusí chytit zdroje 1, což se neustále opakuje. Při úpravách parametrů dochází k zajímavým změnám vývoju. Asi nepřekvapí, že při symetrické záměně frekvencí Ω_1 a Ω_2 , dojde pouze k symetrickému záměně grafů a) a b) v obrázku 1.8.

Ve specifitější situaci, kdy se vlastní frekvence světlušky rovná průměru frek-

¹³Lepší vhléd do problematiky vnáší přiložená simulace *Fireflies-simulation-Interactive-TwoStimuli-BothModels*



Obrázek 1.7: Vývoj fázových rozdílů ϕ_1 a ϕ_2 pro model průměrování



Obrázek 1.8: Vývoj fázových rozdílů ϕ_1 a ϕ_2 pro model inspirovaný Kuramotovým

vencí obou zdrojů, každý z fázových rozdílů roste či klesá neomezeně, jak ukazuje obrázek 1.10, kde byly parametry zvoleny následovně: $\omega = 6$, $\Omega_1 = 6,6$, $\Omega_2 = 5,4$ a $A = 3$. Ačkoliv platí, že bez přítomnosti druhého zdroje by se světluška s každým z nich byla schopna synchronizovat (vůči oběma zdrojům splňuje podmínku na parametr $|\mu| < 1$), výsledek zachycený na obrázku 1.10 potvrzuje skutečnost, že oba zdroje současně působí proti sobě. V intervalech, kde je sklon funkce mírnější pro oba vývoje, se snaží světluška nalézt nějaký kompromis, což se však nedaří a jeden ze zdrojů vždy se svojí fází *uteče* (ať už předbíhá, či se zpomaluje). Toho využije druhý zdroj, jehož fázový rozdíl se v tomto okamžiku rychle zmenší, než opět vzroste vliv zdroje, který odskočil o jeden cyklus. Tento proces se střídavě pro oba zdroje opakuje. V reálné situaci by to mohlo vizuálně znamenat, že pokud by interval, kdy dojde ke snížení fázového rozdílu mezi jedním, nebo druhým zdrojem, vyšel časově na okamžik bliknutí, mohl by tento prudký posun fáze donutit světlušku bliknout v rychlém sledu ještě jednou.

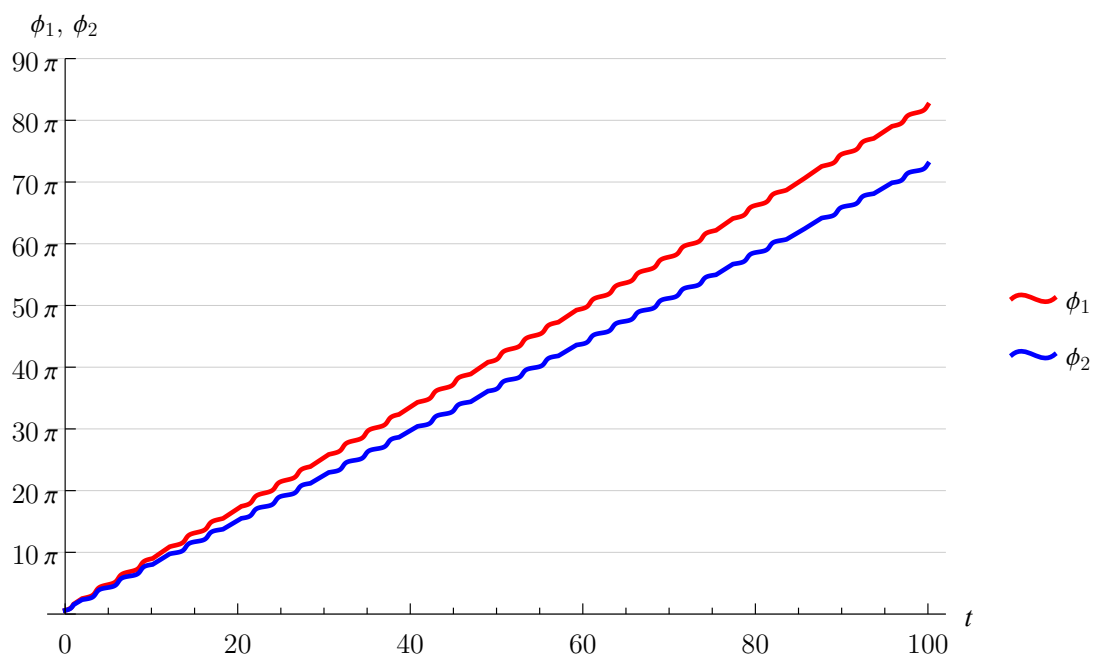
Pro porovnání s modelem průměrovaných fázových rozdílů je přiložen obrázek 1.11. Ten ukazuje, že v žádném čase není žádný ze zdrojů pro světlušku prioritní. Díky podmínce, že ω je rovna průměru frekvencí zdrojů, je jasné, že se ustálí na $\omega = 6$ ¹⁴.

Při zachování frekvencí Ω_i , $i = 1, 2$ jako v předchozím proměření a snížení hodnoty parametru A dojde, již díky roli, kterou A má, v modelu podle Kuramotova, ke snížení vlivu každého zdroje, což se ve vývoji fázových rozdílů promítne oproti 1.10 jako pozvolněji se měnící křivka zachycená na obrázku 1.12. Pro tyto funkce platí $A = 0,5$, z čehož plyne že zdroje jsou mimo synchronizační schopnost světlušky, i kdyby každý působil sám. Schodovitý tvar pro $|\mu| < 1$ z obrázku 1.2 však není tolik znatelný. „Ostré“ schody jsou totiž vyhlazeny působením druhého zdroje. Tento vývoj se více blíží k vývoji podle modelu průměrovaných fázových rozdílů.

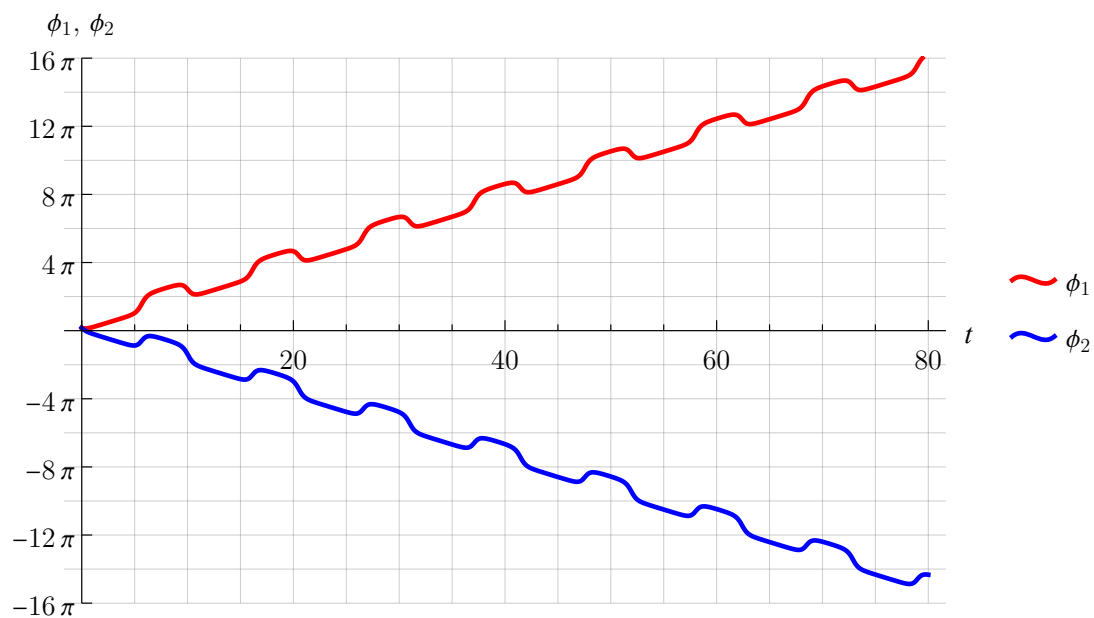
Pokud je vlastní frekvence světlušky ω pouze velmi blízká průměru frekvencí Ω_1 a Ω_2 , symetrie vývoje obou fázových rozdílů je narušena, ale strhávání světlušky oběma zdroji je stále patrné, možná i lépe čitelné, jak naznačuje graf na obrázku 1.13, kde byly parametry nastaveny následovně: $\omega = 6$, $\Omega_1 = 6,3$, $\Omega_2 = 5,6999$ a $A = 3$. Ještě komplikovanější průběh těchto funkcí má za následek chaotičtější blikání světlušky.

I v modelu podle Kuramota by mohla vzniknout kontroverzní otázka, kdy by bylo dvěma zdrojům vystaveno hejno shodných světlušek a v limitní situaci by se všechny chovaly stejně, zdali se jedná o hledanou synchronizaci. Odpověď na takovou otázku je v tomto případě trochu složitější, než pro model průměrování. Určité nastavení parametrů totiž může vyvolat jednotné chování všech takových světlušek, aniž by byly synchronizovány s kterýmkoliv zdrojem – pak je odpověď taková, že tento stav neodpovídá hledané synchronizaci, neboť do něj světlušky nedospěly vzájemným vlivem a synchronizace je v modelu brána jen jako výsledný stav mezi světluškou a zdrojem. Při řešení následující úvahy se však ukazuje, že pro jisté konfigurace parametrů v tomto modelu světluška (a tedy potenciálně i hejno shodných světlušek) dosáhne stavu, který se blíží jednotnému chování se zdrojem. V takovém případě by bylo možné o synchronizaci hovořit, neboť jde o vztah mezi světluškami a zdrojem.

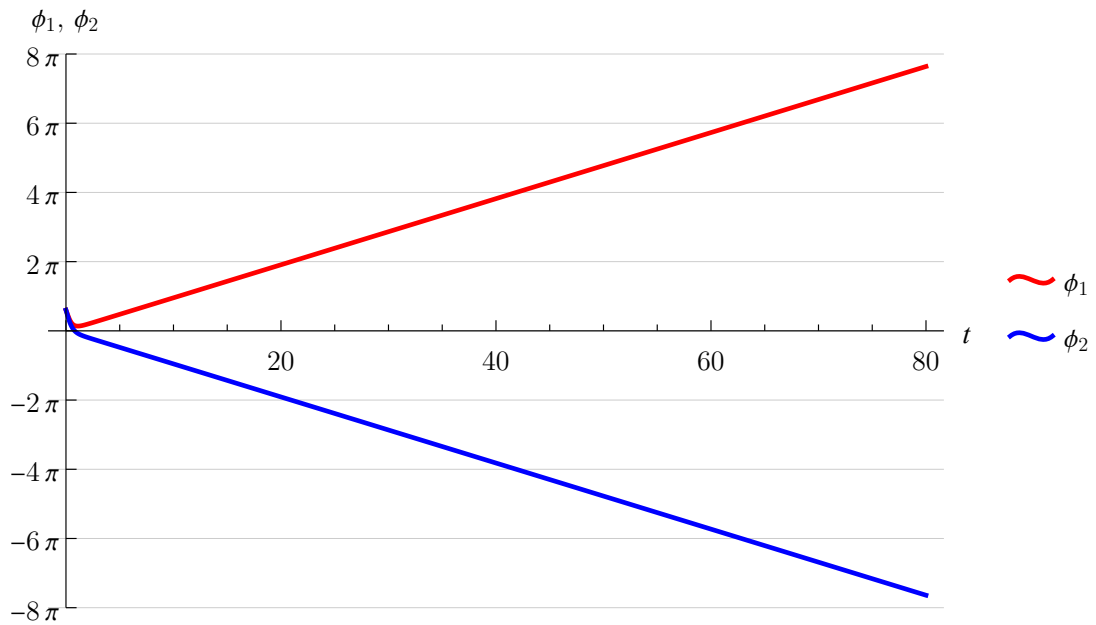
¹⁴Tato skutečnost však neznamená, že světluška neprojde určitým vývojem. Pokud $\phi_1 = \phi_2 \neq 0$, pak je rytmus světlušky v určitý moment narušený, než se opět ustálí na počáteční frekvenci.



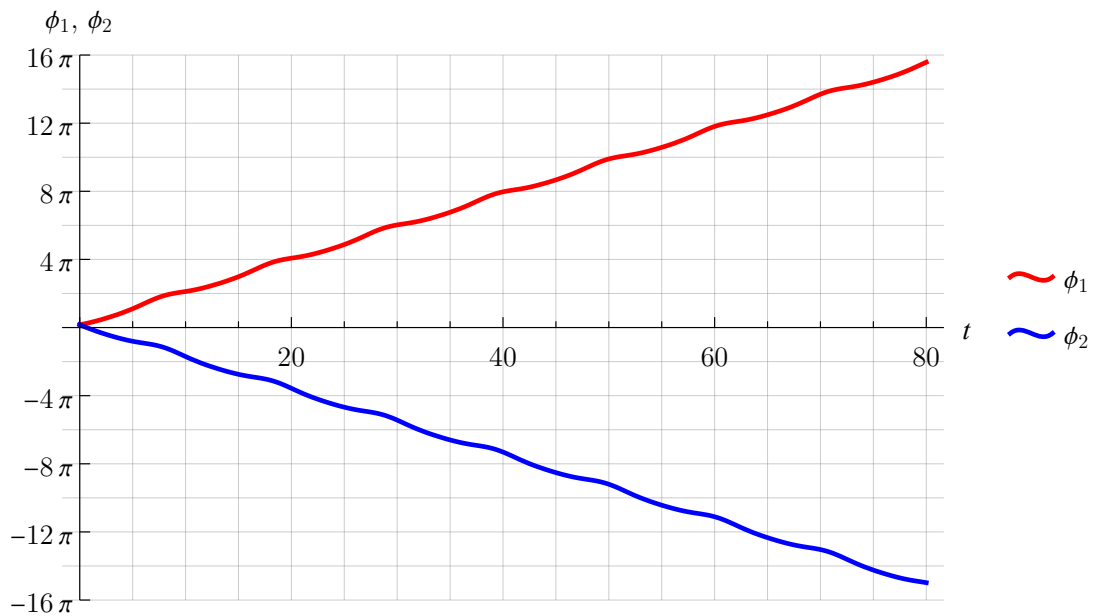
Obrázek 1.9: Vývoj fázových rozdílů ϕ_1 a ϕ_2 pro model průměrovaných fázových rozdílů – divergující frekvence světlušky



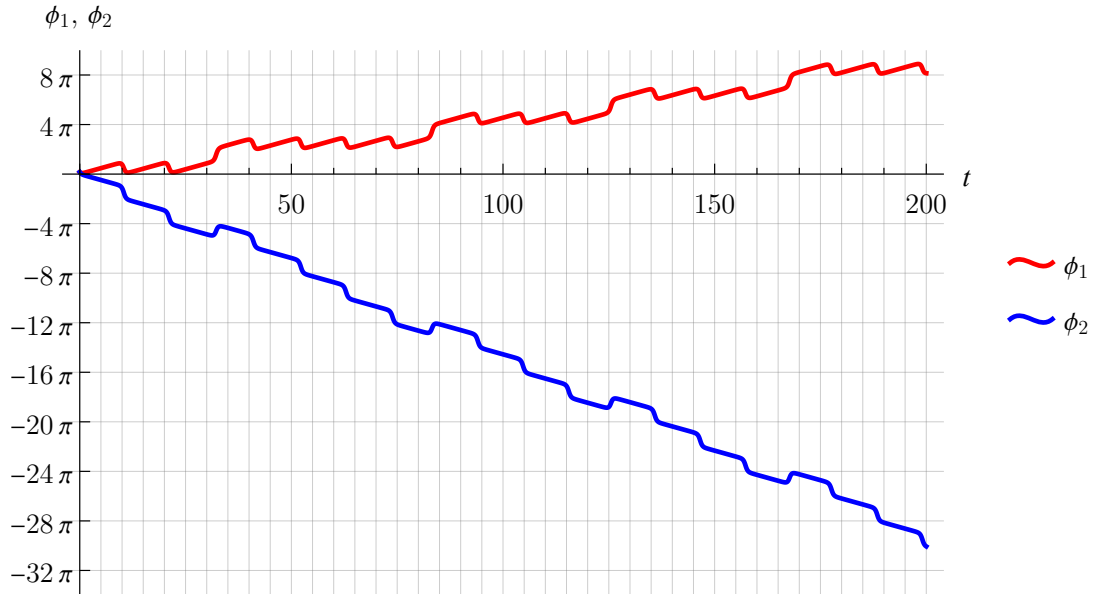
Obrázek 1.10: Vývoj fázových rozdílů ϕ_1 a ϕ_2 pro $\omega = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$ – model podle Kuramota



Obrázek 1.11: Vývoj fázových rozdílů ϕ_1 a ϕ_2 pro $\omega = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$ – model průměrovaných fázových rozdílů



Obrázek 1.12: Vývoj fázových rozdílů ϕ_1 a ϕ_2 pro $\omega = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$ a menší hodnotu A – model podle Kuramota



Obrázek 1.13: Vývoj fázových rozdílů ϕ_1 a ϕ_2 pro $\omega \approx \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$ – model podle Kuramota

Uvažujme ještě následující: jak by se chovala světluška, pokud by jeden ze zdrojů blikal se znatelně vyšší frekvencí, než je její vlastní frekvence, zatímco druhý zdroj by měl frekvenci podobnou? Jinak řečeno, pro parametr μ světlušky vůči rychlému zdroji by platilo $\mu \gg 1$. Pak by se světluška prakticky ani o synchronizaci neměla výrazněji pokoušet. Bylo by možné tvrdit, že tento zdroj signálu ignoruje. To potvrzuje i chování v modelu jednoho zdroje.

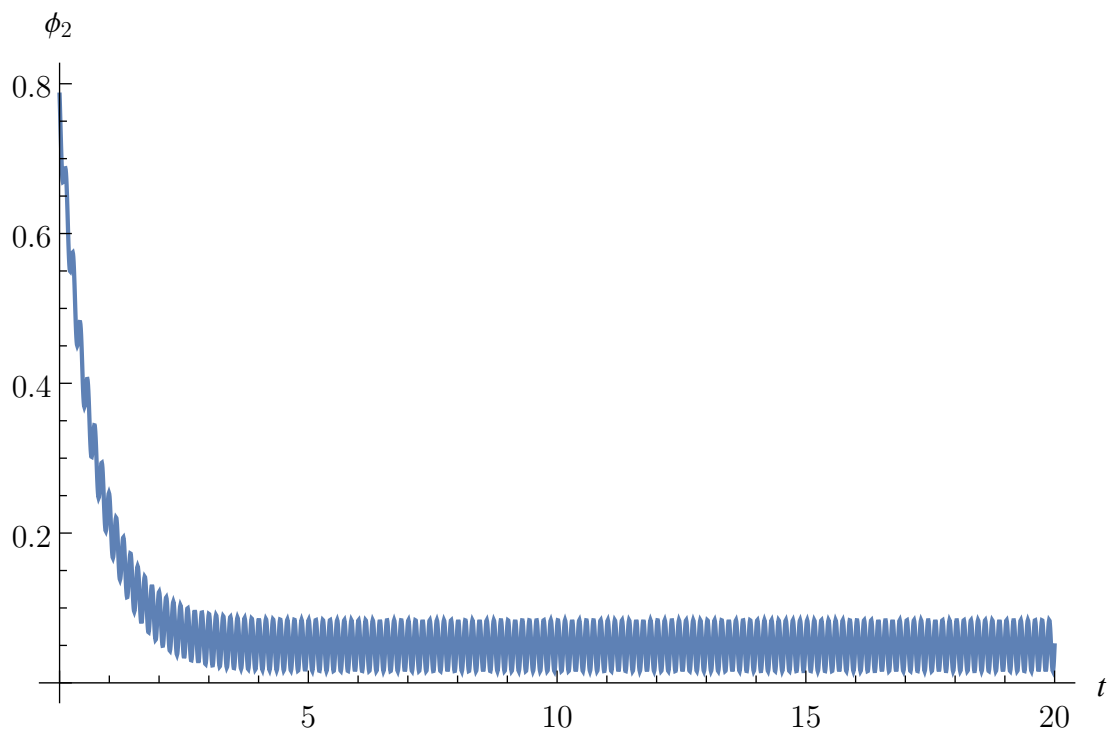
Nechť je tedy $\Omega_1 \gg \omega$ a současně $\Omega_2 \approx \omega$, pak by se (při rozumném A vzhledem k podmínce (1.10), kde by $\Omega_2 = \Omega$) měla světluška se zdrojem o frekvenci Ω_2 synchronizovat a rychlejší zdroj prakticky ignorovat.

Zadáme-li tyto parametry do modelu podle Kuramotova, výsledek zachycuje obrázek 1.14, kde $\Omega_1 = 50$, $\Omega_2 = 6,1$, $\omega = 6$ a $A = 3$. Ačkoliv je pro vývoj ϕ_2 patrná oscilace okolo určité limitní hodnoty, je zřejmé, že výše uvedený předpoklad, kdy světluška bude směřovat prakticky pouze ke zdroji, který je jí parametricky blízký, tento model potvrzuje.¹⁵

Naproti tomu, model průměrovaného fázového rozdílu podle [5] po zadání identických hodnot dává výsledek zachycený v grafu na obrázku 1.15. I zde se projevuje oscilace, avšak nikoliv okolo limitní hodnoty, ale okolo klesající přímky. Šlo by říci, že toto chování také naznačuje nekonzistentnost s modelem jednoho zdroje.

Jeden shodný poznatek však lze vyvodit z obou modelů. Pokud existují dva vnější zdroje neochotné přizpůsobit svoji frekvenci světlušce, ta se není schopna synchronizovat ani s jedním z nich. Není pro ni dokonce možné ani najít nějaký vhodný kompromis – fázové uzamknutí vyhovující oběma zdrojům, kdy by vůči oběma držela konstantní fázový rozdíl. V reálné situaci by to podle [5] mohlo znamenat, že pokud se v hejnu světlušek vyskytne jedna, která by blikala vlastní

¹⁵Tendence ignorovat zdroj byla zjištěna i při velkém μ v modelu jednoho zdroje.



Obrázek 1.14: Vývoj fázového rozdílu ϕ_2 pro $\Omega_1 \gg \omega$ a $\Omega_2 \approx \omega$ – model podle Kuramota

frekvencí nezávisle na ostatních, zbytek hejna by se za vhodných podmínek byl schopen této jedné řídicí světlušce přizpůsobit. Pokud se ale v hejnu vyskytnou dvě takovéto *nepřizpůsobivé* světlušky, hejno nemá šanci dospět do nějakého stabilního bodu vývoje. Tato úvaha v sobě také nese myšlenku, proč je dosažení synchronizace vcelku obtížné – stačí jeden prvek navíc, který zajistí neexistenci stacionárních bodů ve vývoji systému hejna.

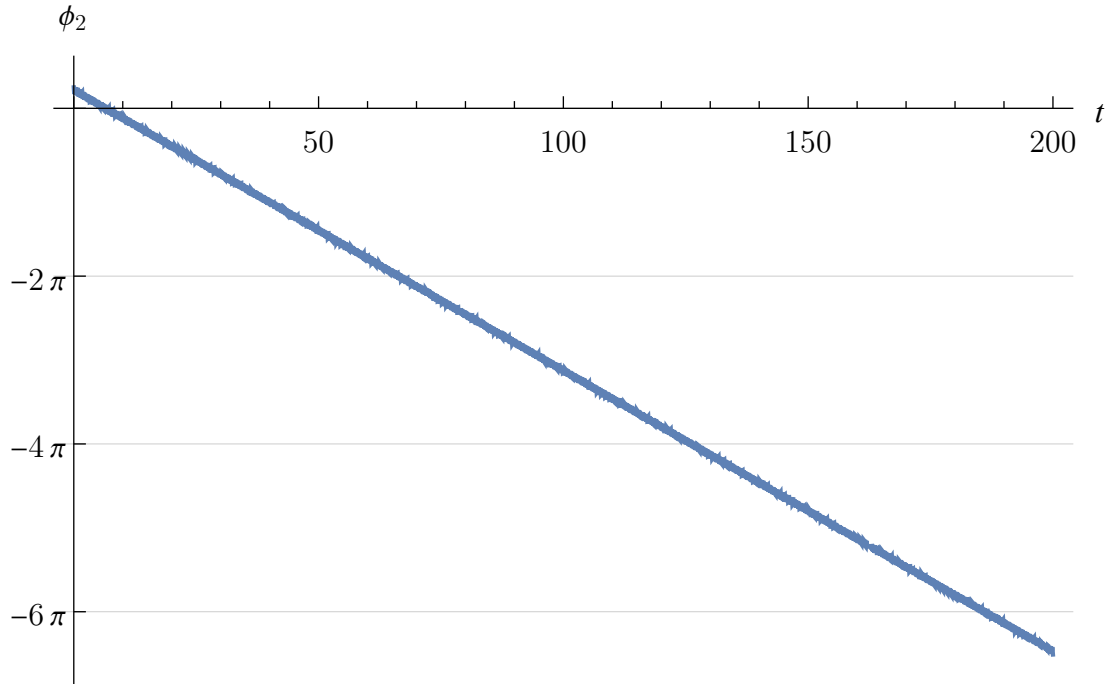
Jak však bylo naznačeno dříve, jednotné blikání všech světlušek by bylo dosažitelné i pro dva zdroje, pokud by se jim za správných podmínek všechny světlušky podřídily, avšak nebyly by synchronizovány s těmito zdroji.

Oproti modelu jednoho zdroje zde není možné jednoduše zobrazit fázový prostor a hledat stacionární body jako průsečíky s vodorovnou osou – viz obrázky 1.3 - 1.6. Divergentní tendence funkcí ϕ_1 a ϕ_2 pro libovolné parametry (ať se jedná o oscilace, či růst a klesání nade všechny meze) však dávají dobrý důvod domnívat se, že úplné synchronizace pro dva vnější zdroje nelze v použitých modelech dosáhnout.

1.4 Simulace

V práci Hopa [5] je, kromě samotného řešení a studia matematického modelu (1.3), navržen model simulace, který by čtenáři pomohl snáze nahlédnout vývoj systému světluška-signal, respektive, simulace je vytvořena pro sadu světlušek. Důsledkem je efektnější zobrazení.

Vzhledem k tomu, že v článku je vytvoření simulace pouze popsáno, a to navíc pro programovací prostředí MATLAB a žádná příloha ve formě animace není



Obrázek 1.15: Vývoj fázového rozdílu ϕ_2 pro $\Omega_1 \gg \omega$ a $\Omega_2 \approx \omega$ – model průměrování fázových rozdílů

k dispozici, sloužila tato část jako inspirace pro sestavení vlastní simulace, jakožto přílohy k této práci.

Simulace byla vytvořena v prostředí Wolfram Mathematica. Základní princip je náhodné rozmístění náhodného počtu světlušek na mřížce 11×11 , přičemž prostřední bod o souřadnicích $[5,5]$ je vyhrazen vnějšímu zdroji a každá světluška obsadí právě jeden bod. Náhodný výběr bodu mřížky spočívá v jejím pokrytí vygenerovanými hodnotami v rozsahu $(0, 1)$ a následném vyfiltrování míst s hodnotou větší než jistá zvolená mezní hodnota¹⁶. Tento proces je v simulaci implementován prakticky čistě z estetického hlediska, neboť každé světlušce je v dalších krocích přiřazena jistá počáteční fáze a tímto postupem je dosaženo zdánlivě větší nahodilosti a nejednotnosti blikání v úvodu simulace. Počáteční fáze před synchronizací je totiž jediným rozdílem mezi světluškami, všechny mají jinak stejnou frekvenci ω a každá je vůči vnějšímu zdroji řízena příslušnou rovnicí (1.3). V simulaci tedy není uvažováno, že by se světlušky ovlivňovaly navzájem.

V modelu je na funkci odpovídající fázi $\theta(t)$ kladen předpoklad 2π -periodicity a moment bliknutí je stanoven na okamžik $\theta = 2\pi n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Tento požadavek však nelze plně v simulaci uplatnit, tedy reprezentovat bliknutí jedním jediným okamžikem, neboť by nebylo možné jej zobrazit. Každý bod reprezentující komponentu systému je tak viditelný po většinu své periody (ne po celou), mění se však jeho průhlednost, která je závislá právě na jeho fázi a konkrétně moment bliknutí odpovídá situaci, kdy je daný bod zcela neprůhledný. Pokud je tedy některý bod viditelný, ale částečně průhledný, reálně by v takový moment nemusel svítit. Při správné konfiguraci parametrů je díky tomuto principu blikání lépe patrný vývoj fáze některých světlušek, které například v určitém časovém úseku

¹⁶Zvolená hodnota závisí na požadovaném průměrném počtu světlušek, pro větší počet je třeba volit filtrační hodnotu nižší, například 0.85.

vůbec „nepohasnou“, neboť v takový moment výrazně upravují svoji fázi, aby se lépe přiblížily zdroji¹⁷. Zvolený přístup dobře vizuálně odpovídá blikání.

Aby byl kontrast mezi neovlivněným a poté jednotně blikajícím hejnem viditelnější, je nejdříve vnější zdroj vypnutý a každá světluška uvažována jako nezávislá a svítící jen podle vlastní frekvence, ovšem s rozdílnou počáteční fází – to je první část simulace, která trvá do určitého času t_0 . V tento moment dojde ke spuštění zdroje a řídicí rovnicí pro světlušky se stává rovnice (1.3). Souhrnně lze obě části simulace popsat pomocí funkcí

$$\theta'_j(t) = \begin{cases} \omega, & t < 0, \\ \omega + A \sin(\psi - \theta_j(t)), & t \geq 0, \end{cases}$$

pro j -tou světlušku a

$$\psi'(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \Omega, & t \geq 0, \end{cases}$$

pro zdroj signálu.

Simulace napomáhá pochopení vlivu parametru μ v rovnici (1.6). K posouzení jeho vlivu jsou brány přílohy *FirefliesMu002* (kde $\mu = 0,02$) a *FirefliesMu08* (kde $\mu = 0,8$). Při porovnání zobrazeného vývoje dojde v případě $\mu = 0,02$ k synchronizaci prakticky ihned, jakmile se přidá určující signál – rozdíl frekvencí je dostatečně malý, nebo světlušky mají velkou schopnost přizpůsobení frekvence. Sekundárním účinkem je, že zdroj-světlušky blikají s téměř nezatelným fázovým posunem.

Naproti tomu v případě $\mu = 0,8$ je velice dobře pozorovatelná dlouhá prodleva mezi prvním sepnutím zdroje a výslednou synchronizací, u níž je navíc ve výsledku patrná větší fázová prodleva.

Vzhledem k náhodnému přiřazení počátečních fází jednotlivým světluškám obě simulace dobře ukazují, že limitní chování na těchto podmínkách nezáleží, neboť se veškeré body (samozřejmě za vhodného parametru μ) buď zcela zjevně s dostatečným časem sjednotí, nebo zůstávají prakticky neovlivněny.

Může vyvstat otázka, jak se v simulaci projeví konfigurace, pro níž platí fázový vývoj na obrázku 1.2, kdy $\mu = 1,1$, tedy jak se systém vizuálně chová v případě těchto „schodů“. Větší množství světlušek v animaci může být v tomto případě spíše na škodu, neboť nelze fázový vývoj jednoduše sledovat. Proto byla simulace upravena jen pro jednu světlušku – příloha *FirefliesMu103*. Simulace ukazuje, jak se při sepnutí zdroje světluška pokouší udržet s ním rytmus, což se nedaří a v určité chvíli (asi okolo 16 sekundy) dojde k naprostému rozpadu soudržnosti – to odpovídá strmější části schodu v příslušném grafu. Ihned poté se však cyklus opakuje a světlušce se určitý čas opět daří udržovat svoji fázi blízko fáze zdroje (asi do 28 sekundy), než se projeví rychlejší skok atd.

1.4.1 Interaktivní aplikace

Součástí příloh je také soubor *Fireflies-simulation-Interactive.nb*, což je přímo kód naprogramované simulace v jazyce Mathematica. Pomocí příkazu *Manipulate* je pro uživatele připravena interaktivní verze, kde je možné v reálném čase

¹⁷Například pro velmi malé frekvence $\omega = 1/40, \Omega = 1/8, A = 1/8$.

sledovat závislost vývoje systému na uživatelem nastavených parametrech, které lze přímo v průběhu animace upravovat¹⁸, a to pomocí posuvníků. Mimo posuvníky lze přímo v kódu upravovat také parametry *mag* – určuje rozměry mřížky, na níž světlušky sedí, *tOffset* – čas, po který je signál vypnutý, *filtr* – kritérium, určující usazení světlušky na daném místě mřížky. Parametr času má animační roli, tj. přes připravené tlačítko *Play* se animace spustí, ale samozřejmě je možné jej upravovat i přímo vlastním posuvníkem. Nadále je možné u tohoto parametru upravovat tlačítka *Slower* a *Faster* rychlost průběhu animace (to se hodí v případě příliš velkých či malých frekvencí).

Jednotlivé posuvníky jsou označeny okamžitými hodnotami parametrů. Současně lze místo posuvníku využít možnosti přímého zadání hodnot, a to po kliknutí na symbol + u kteréhokoliv parametru. Stejně tak se v pravé části animace nachází údaje o čase a hodnotě parametru μ , který je definován v sekci 1.1 v rovnici (1.6) a jehož hodnota vypovídá o schopnosti synchronizace. To při nastavování parametrů usnadňuje udržet přehled o tom, jak se systém má vyvíjet, což je tedy hlavním cílem celé simulace.

Soubor *Fireflies-simulation-Interactive-TwoStimuli-BothModels.nb* je modifikací aplikace, ukazující simulaci pro dva zdroje o různých frekvencích. Pro snadné porovnání chování světlušek v některém ze dvou použitých modelů (podle Kuramotova modelu a model průměrování fázových rozdílů) je rozhraní aplikace rozvrženo do dvou shodných grafických částí, přičemž každá z nich obsahuje i shodné rozmístění světlušek a zdrojů. I ty jsou pro oba modely v aplikaci shodné.

Parametry systému lze upravovat pomocí posuvníků. Ty jsou společné pro oba modely a jejich hodnoty jsou mezi nimi sdílené, což opět usnadňuje přímé porovnání vývoje každého modelu. Chod simulace je zajištěn tak, že každá světluška v části *Kuramoto* je řízena vlastní rovnicí (1.11) (každá má jinou počáteční fázi) a rovnicí (1.13) v části *Average*, která se zabývá vývojem podle modelu průměrování fázových rozdílů. Stejně jako v interaktivní aplikaci (animaci) s jedním zdrojem jsou nejprve vnější signály vypnuty a každá světluška bliká vlastní frekvencí, nezávisle na ostatních, až do nějakého času t_0 . Tento čas je určený parametrem *tOffset*.

Vhodným nastavením parametrů, které prokazuje rozdílnost modelů je například $\omega = 6$, $\Omega_1 = 6,3$, $\Omega_2 = 12$ a $A = 10$, kde se světlušky v modelu podle Kuramota přiblíží svým rytmem ke zdroji Ω_1 , zatímco v modelu průměrovaných fází jsou sice ve výsledku také jednotné, ale blikají rozdílně od obou zdrojů, jak odpovídá obrázkům 1.14 a 1.15.

Aby si mohl simulace vyzkoušet i uživatel bez Mathematiky či Wolfram Playeru, jsou obě k dispozici na Wolfram Cloud a to na následujících adresách: Simulace s jedním zdrojem: https://www.wolframcloud.com/obj/adlibor/Published/Fireflies_simulation_Interactive.nb

Simulace se dvěma zdroji: https://www.wolframcloud.com/obj/adlibor/Published/Fireflies_simulation_Interactive_TwoStimuli_BothModels.nb

¹⁸Vzhledem ke stavbě kódu znamená každá změna některého parametru ω , Ω nebo A přepočítání řídicích funkcí. Nepochází tedy přímo k dynamické a navazující úpravě systému – dospěje-li systém do času t_1 s parametry ω_1, Ω_1, A_1 a dojde ke změně parametrů na ω_2, Ω_2, A_2 , bude nyní systém v čase $t_2 < t_1$ odpovídat novým parametrům. Vývoj nezávisí na historii parametrů.

2. Kuramotův model

Oproti předchozí a následující kapitole, kde jsou užívány specifické příklady synchronizačních jevů, abstrahujeme nyní pojem oscilátor od konkrétní představy a v této kapitole se zaměříme na obecný model, dostatečně osvětlující princip synchronizace v mnoha různých oborech – Kuramotův model.

2.1 Dva vázané oscilátory

Myšlenkový postup započneme nejjednodušším příkladem. Uvažujme volný oscilátor, který se bude (obdobně jako v sekci 1.1) řídit rovnicí

$$\theta' \equiv \frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad (2.1)$$

kde θ je fáze periodického děje a ω je vlastní úhlová frekvence.

Nyní uvažujme dva takové oscilátory spojené určitou vazbou (mechanickou, elektromagnetickou, biologickou apod.). V knize S. Strogatze [14] v kapitole 8.6 lze nalézt soustavu diferenciálních rovnic popisující právě takové chování dvou oscilátorů:

$$\theta_1' = \omega_1 + K_1 \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (2.2a)$$

$$\theta_2' = \omega_2 + K_2 \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (2.2b)$$

Číselný index vyjadřuje příslušnost parametrů k danému oscilátoru a $K_i, i = 1, 2$ jsou tzv. *vazebné konstanty* vyjadřující, jak velký vliv na sebe oscilátory mají. V [14] je také popsán intuitivní náhled na situaci, který však přesahuje i do Kuramotova modelu.

Díky popisu přes fáze si lze představit oba oscilátory jako dva body pohybující se po kružnici. Analogicky lze uvažovat dva běžce po kruhové trati. Přitom $\theta_1(t), \theta_2(t)$ určují jejich pozici na trati a ω_1, ω_2 jsou veličiny úměrné jejich preferovaným rychlostem (ale v této analogii je lze přímo i jako tempo běhu uvažovat). Pokud by se jednalo o dva cizí lidi, pak by každý z nich běhal svým tempem bez vlivu toho druhého a rychlejší by pravidelně pomalejšího předbíhal – situace volných oscilátorů. Pokud by se však jednalo o dva přátele, kteří by chtěli běžet spolu, pak by museli nalézt kompromis mezi svými rychlostmi, což odpovídá situaci vázaných oscilátorů, které se synchronizují. Pokud by jejich „přirozené rychlosti“ byly však příliš rozdílné, nemuselo by se podařit žádný kompromis najít a jejich tempa by se opět rozcházel – k synchronizaci nedošlo.

Kvalitativně lze tedy výsledné chování systému popsaném rovnicemi (2.2) rozdělit na tři možnosti: oscilátory se neovlivňují (platí $K_1 = K_2 = 0$), oscilátory se synchronizují (i s určitým fázovým rozdílem), oscilátory se nesynchronizují (a to i pro $K_1, K_2 > 0$).

I první ze zmíněných možností stojí za krátké prozkoumání. Řídící rovnice se při podmínce $K_1 = K_2 = 0$ zredukuje na (2.1) pro každý z oscilátorů. K synchronizaci sice dojít nemůže (pokud platí $\omega_1 \neq \omega_2$), nicméně i tento vývoj systému dvou oscilátorů vykazuje zajímavý výsledek. K jeho prozkoumání je však nutné využít

fázovou rovinu, souřadný systém, jehož osy odpovídají θ_i , ke kterému je přidána hraniční podmínka *periodicity*. Protože fáze jsou 2π -periodické, tato podmínka zajišťuje, že ve fázové rovině dostáváme čtverec o délce hrany 2π , a navíc ztotožňujeme jeho protilehlé strany. Jinak řečeno, dosáhne-li fázová trajektorie horní či pravé strany tohoto čtverce (právě hodnoty 2π), pokračuje na opačné straně. Tuto fázovou rovinu i s konkrétní fázovou trajektorií ukazující vývoj systému zachycuje obrázek 2.1. Hrot šipky v bodě $[0; 0]$ označuje počáteční bod v čase $t = 0$. Následováním směru dalších šipek pak sledujeme průběh vývoje v čase. Tečkované čáry nejsou reálné části vývoje, odpovídají pouze skokům při dosažení hraniční podmínky a vedou čtenáře správně po trajektorii.

Při následování fázové trajektorie na obrázku 2.1¹ vidíme, že se jedná o trajektorii uzavřenou, tj. po určitém čase dospějeme do počátečního bodu. Vývoj se poté opakuje. Tím pádem oba oscilátory, ačkoliv nezávislé, tvoří nějaký společný periodický děj. Aby tohoto výsledku bylo dosaženo, musí platit, že ω_1/ω_2 je racionální číslo.

Pokud však platí, že podíl frekvencí ω_i je *iracionální*, dochází k jevu tzv. *kvazi-periodicity*. Takový systém či děj vykazuje určitý vzor opakování, který ale nelze charakterizovat pevnou periodou. Obrázek 2.2² ukazuje, jak se ve fázové rovině utváří jistý vzor, oproti situaci na obrázku 2.1 zde však fázová trajektorie není uzavřená. A nikdy se neuzavře ani při dalším vývoji³.

Nadále uvažujme situaci, kdy již platí $K_1, K_2 > 0$ a oscilátory na sebe působí. Místo zkoumání jednotlivých fází přejdeme ke zkoumání fázového rozdílu, definovaného vztahem

$$\Phi = \theta_1 - \theta_2. \quad (2.3)$$

Derivováním (2.3) a využitím (2.2) dostaneme vztah:

$$\Phi' = \theta_1' - \theta_2' = \omega_1 - \omega_2 - (K_1 + K_2) \sin(\Phi). \quad (2.4)$$

Funkce na pravé straně je vlastně pouze transformovanou funkcí sinus s amplitudou $(K_1 + K_2)$, přičemž výsledek $\omega_1 - \omega_2$ určuje její posunutí po svislé ose. Jedná se tak o identický vztah jako ten, jehož rozboru, hledání a analýze stacionárních je věnována část sekce 1.2.

Pokud v tomto případě platí $|\omega_1 - \omega_2| > K_1 + K_2$, pak funkce na pravé straně (2.4) nemá žádné nulové body a tudíž systém nemá žádné stacionární body – k synchronizaci nikdy dojít nemůže. V opačném případě, tedy $|\omega_1 - \omega_2| < K_1 + K_2$, existují dva stacionární body (kladná derivace v tomto bodě vyjadřuje jeho stabilitu, záporná nestabilitu) a v situaci, kdy je nerovnost nahrazena rovností má systém jeden stacionární bod.

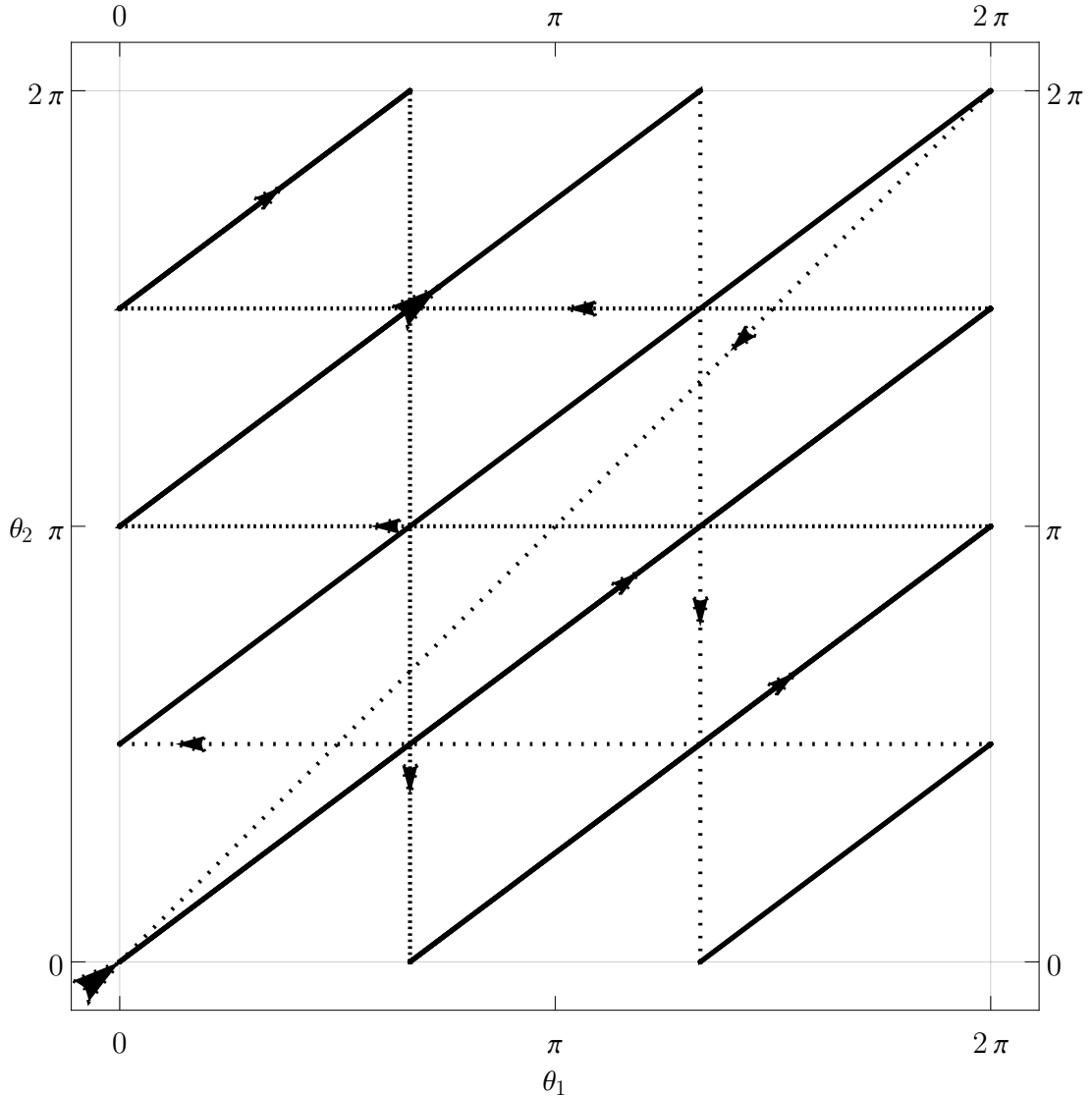
Uvažujme, že je splněna podmínka stacionárních bodů, přičemž budeme uvažovat pouze stabilní stacionární bod (viz sekci 1.2), který označíme Φ_0 . Takový bod splní rovnici:

$$0 = \omega_1 - \omega_2 - (K_1 + K_2) \sin(\Phi_0). \quad (2.5)$$

¹Pro parametry oscilátorů na obrázku platí $\omega_1 = 4, \omega_2 = 3$ a počáteční podmínky $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$.

²Pro obrázek byly parametry oscilátoru nastaveny následovně: $\omega_1 = \sqrt{17}, \omega_2 = 3$ a počáteční podmínky $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$.

³Pro uzavřenou trajektorii platí, že při návratu do počátku musela projít celočíselným počtem otočení jak pro θ_1 , tak pro θ_2 . A toho dosáhne právě tehdy, když je poměr ω_1/ω_2 racionální.



Obrázek 2.1: Periodicky „uzavřený“ průběh mezi fázemi pro dva volné oscilátory

Po úpravě dostaneme pro Φ_0 vztah:

$$\sin \Phi_0 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_1 + K_2}. \quad (2.6)$$

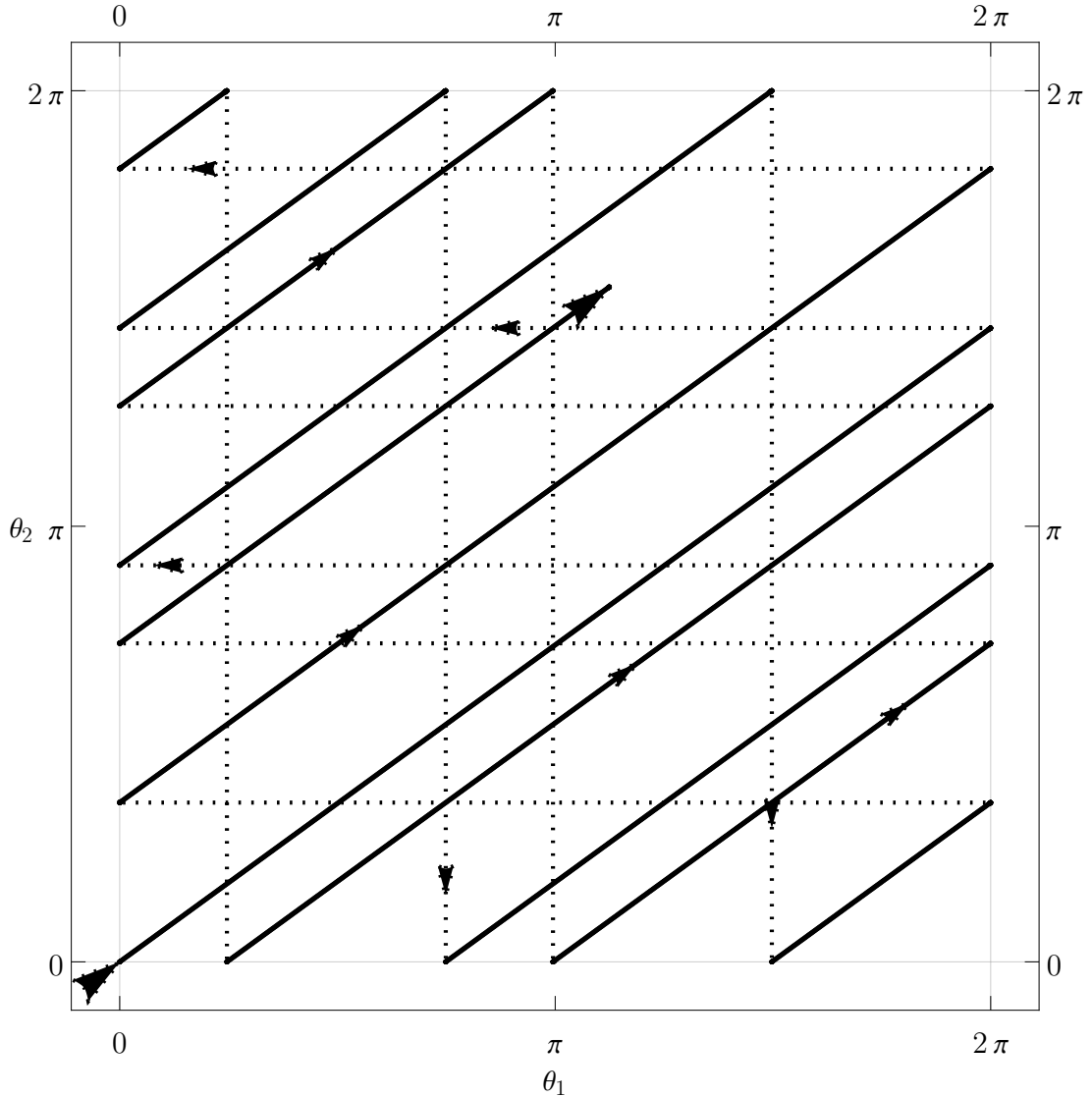
Vývoj fázového rozdílu spěje tedy do tohoto stabilního stacionárního bodu. Pro fáze oscilátorů to znamená, že se vyvíjí shodně, posunuty vůči sobě o Φ_0 – došlo k fázovému uzamknutí. Shodný vývoj znamená, že se oba oscilátory sdílejí stejnou úhlovou frekvenci Ω , pro níž platí vztah:

$$\Omega = \theta'_1 = \theta'_2 = \omega_2 + K_2 \sin \Phi_0. \quad (2.7)$$

Dosazením (2.6) do (2.7) dostaneme vztah

$$\Omega = \frac{K_1 \omega_2 + K_2 \omega_1}{K_1 + K_2}. \quad (2.8)$$

Z rovnice (2.8) je vidět, že Ω je váženým průměrem vlastních frekvencí oscilátorů, kde vahami jsou vazebné konstanty.

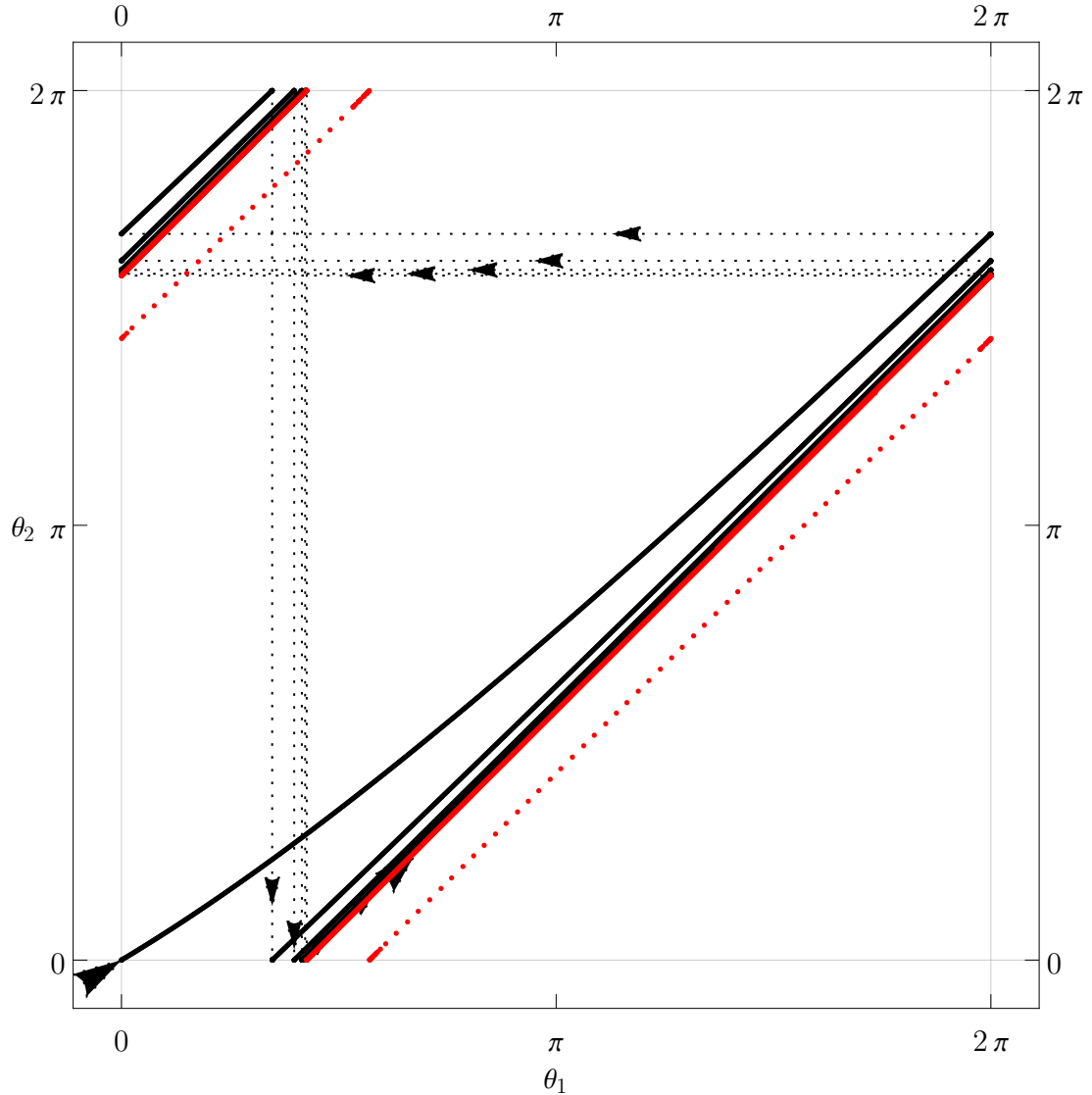


Obrázek 2.2: Kvaziperiodický průběh mezi fázemi pro dva volné oscilátory

Může vyvstat otázka, jak se veškeré uvedené postupy projeví na průběhu trajektorie ve fázové rovině diskutované dříve oproti situaci, kdy se jedná o volné oscilátory. Jeden konkrétní vývoj ukazuje obrázek 2.3⁴ – plná červená čára odpovídá stabilnímu stacionárnímu bodu vývoje, přerušovaná nestabilnímu. Oproti volným oscilátorům je vidět, že trajektorie již není složena z úseček, ale křivek, které se v průběhu vývoje přibližují stabilnímu řešení. Pohybujeme-li se právě po trajektoriích odpovídajících stacionárním řešením, jsou tyto trajektorie uzavřené (a tudíž periodické) jako při racionálním poměru vlastních frekvencí u volných oscilátorů. Případy různých fázových trajektorií odpovídajících různým počátečním nastavením systému jsou zachyceny na obrázku 2.4. V případě (a)⁵ jsou počáteční podmínky voleny tak, že se fázový rozdíl nachází blíže nestabilnímu řešení, od kterého se v prvních časových úsecích rychle oddaluje a blíží se stabilnímu řešení.

⁴Parametry byly zvoleny následovně: $\omega_1 = 5, \omega_2 = 3, K_1 = 0,9, K_2 = 1,15, \theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$

⁵Parametry: $\omega_1 = 5, \omega_2 = 3, K_1 = 0,9, K_2 = 1,15, \theta_1(0) = 5/6\pi, \theta_2(0) = 0$



Obrázek 2.3: Fázová trajektorie ve fázové rovině pro vázané oscilátory

Případ (b)⁶ ukazuje, jak systém setrvává v nestabilním stacionárním bodě, pokud není jeho vývoj narušen.

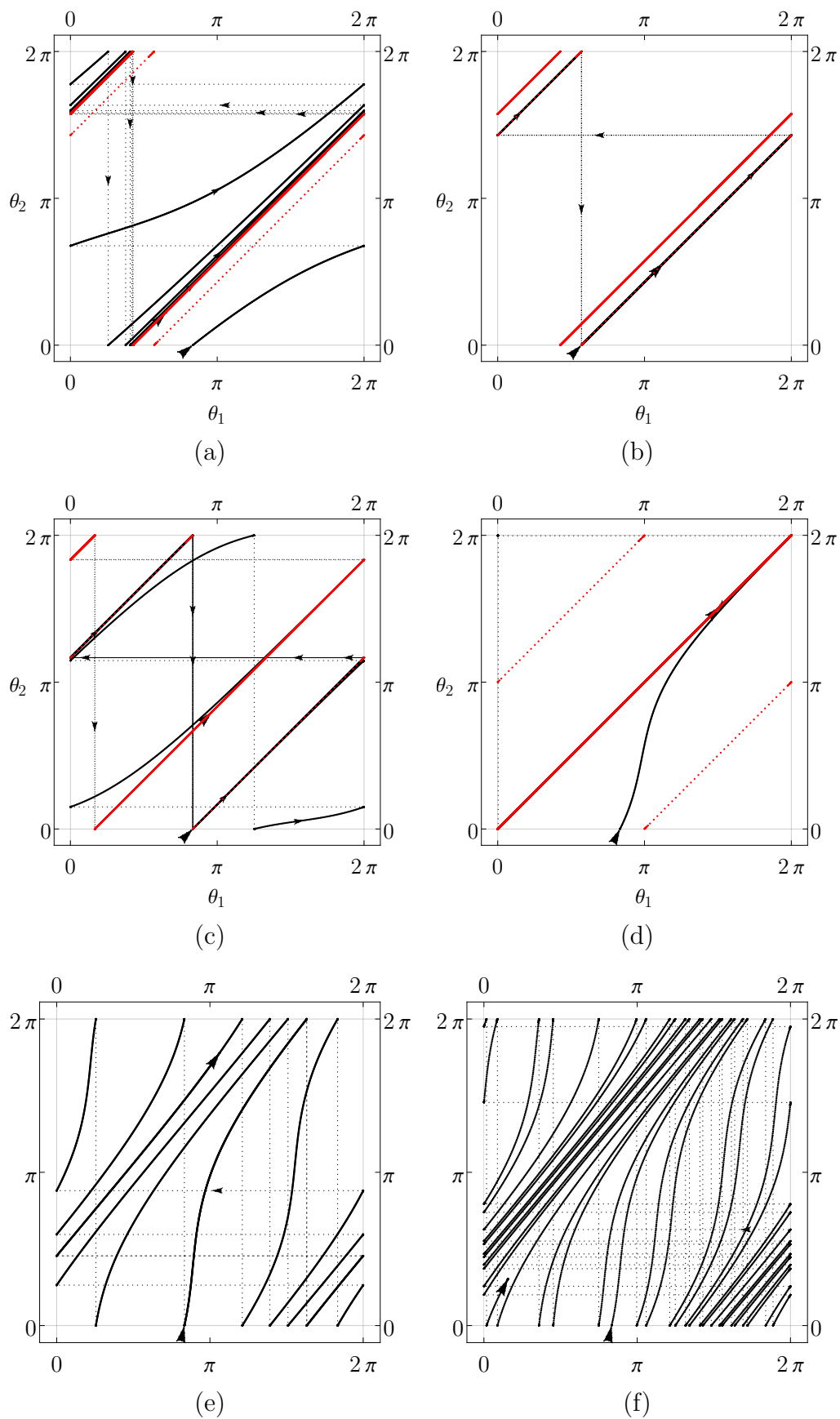
Případ (c)⁷ doplňuje právě situaci (b), kdy se systém nejprve drží blízko nestabilního stacionárního bodu (že zde setrvává lze poznat i díky tomu, že vodící čárkované linky vyznačující skoky nespojitosti na hranicích zde splývají v plnou čáru), ovšem drobné odchylky jej z něho nakonec „vypudí“ a systém rychle přejde do stabilního bodu.

V případě (d)⁸ je zachycena situace, kdy stabilní řešení odpovídá nulovému fázovému rozdílu, a tedy úplné synchronizaci. Fázová trajektorie zde splývá s červenou úsečkou stabilního řešení.

⁶Parametry: $\omega_1 = 5, \omega_2 = 3, K_1 = 0,9, K_2 = 1,15, \theta_1(0) = \pi - \arcsin((\omega_1 - \omega_2)/(K_1 + K_2)), \theta_2(0) = 0$. Volba $\theta_1(0)$ vyplývá z rovnice (2.6).

⁷Parametry: $\omega_1 = 5, \omega_2 = 3, K_1 = 2, K_2 = 2, \theta_1(0) = 5/6\pi, \theta_2(0) = 0$.

⁸Parametry: $\omega_1 = 3, \omega_2 = 3, K_1 = 2, K_2 = 2, \theta_1(0) = 5/6\pi, \theta_2(0) = 0$.



Obrázek 2.4: Fázové trajektorie a stacionární řešení:(a) – vývoj se stabilnímu bodu; (b) – stacionární nestabilní řešení; (c) – narušení stacionárního nestabilního řešení; (d) – synchronizace; (e) a (f) – neexistující stacionární body (periodický a kvaziperiodický vývoj)

Obrázky (e)⁹ a (f)¹⁰ ukazují situace, kdy jsou vlastní frekvence oscilátorů natolik vzdálené, že již žádné stacionární body neexistují. Oscilátory se pak chovají podobně jako v případě nevázaných, tedy průběh mezi fázemi je buď periodický – případ (e) – nebo kvaziperiodický – případ (f). I zde je rozdíl ve tvaru (křivosti) trajektorií oproti případu volných oscilátorů.

2.2 Inspirace

V konferenčním sborníku mezinárodního matematického symposia v Japonsku z roku 1975 byl představen matematický model synchronizace vytvořený matematikem Yoshiki Kuramotoem, viz Kuramoto [7].

Základní myšlenky modelu vycházejí z o pár let starší práce A. Winfreeho, který ve svém článku k tématu (Winfree [16]) uvažuje velkou skupinu vzájemně vázaných oscilátorů. Snaha o naprostou obecnost popisu vývoje takového systému by však vedla k enormní složitosti a praktické neřešitelnosti. Proto Winfree na základě provedených experimentů a pozorování zavedl do svých úvah zjednodušující předpoklady: v první řadě, při nezávislých oscilacích každý oscilátor dospěje do nějakého izolovaného periodického řešení své řídicí rovnice¹¹, všechny uvažované oscilátory jsou značně podobné, co se frekvencí týče a vzájemné vazby mezi oscilátory jsou slabé¹². Dodržením předpokladů je poté zajištěno, že při vývoji systému se každý oscilátor nachází poblíž svého limitního cyklu, že se od něho příliš neliší. To pak umožňuje zavést právě pojem *fáze*, jakožto skalární veličiny příslušné vývoji každého z oscilátorů na jeho limitním cyklu (a chování poblíž tohoto cyklu). Provázanost oscilátorů se projeví právě v úpravách jejich fází vlivem slabých vazeb a rozdílnosti v jejich vlastních frekvencích. Winfree dále uvažoval existenci jistého společného rytmu, k němuž každý oscilátor v populaci přispívá. Současně je také každý z oscilátorů vybaven „citlivostní“ funkcí, která určuje, jak dobře na tento společný rytmus odpovídá.

Model, který Winfree ke zkoumání synchronizace používal, lze přepsat (podle Strogatz [12]) do tvaru

$$\theta'_i = \omega_i + \left(\sum_{j=1}^N X(\theta_j) \right) Z(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

kde θ_i je fáze i -tého oscilátoru, θ'_i vyjadřuje její derivaci podle času, ω_i jeho vlastní frekvence. Navíc j -tý oscilátor působí na i -tý přes vazbu, což popisuje funkce $X(\theta_j)$. Na toto působení naopak reaguje i -tý oscilátor s citlivostí $Z(\theta_i)$. Velice zajímavým výsledkem bylo nalezení podmínek pro synchronizaci oscilátorů. Pokud je rozsah vlastních frekvencí příliš velký a jejich zastoupení více či

⁹Parametry: $\omega_1 = 3, \omega_2 = 8, K_1 = 2, K_2 = 2, \theta_1(0) = 5/6\pi, \theta_2(0) = 0$.

¹⁰Parametry: $\omega_1 = 3, \omega_2 = \sqrt{63}, K_1 = 2, K_2 = 2, \theta_1(0) = 5/6\pi, \theta_2(0) = 0$.

¹¹Izolované periodické řešení je případ limitního chování systému, obdobně jako stacionární bod. Ten však reprezentuje místo ve fázovém prostoru, kdy se systém bez vnějších zásahů dále nevyvíjí, zatímco periodické řešení je reprezentací periodického chování. A podobně jako stacionární bod může být stabilní i nestabilní. *Izolované* pak znamená, že v okolí tohoto řešení ve fázovém prostoru žádná další periodická řešení nejsou.

¹²Důvodem tohoto předpokladu je, že při příliš silných vazbách by i pojem fáze, s nímž se v rozborech pracuje, ztrácel smysl. Respektive, pokud je okamžitá fáze v každém okamžiku „strhávána“ příliš silně, pak není vhodným popisujícím atributem.

méně rovnoměrné, pak k synchronizaci nedochází. Pokud se však rozsah frekvencí začne zmenšovat, může dojít k překročení určité hranice, za níž se náhle skupina oscilátorů s frekvencemi blízkými té nejvíce zastoupené synchronizuje. Winfree tuto skutečnost připodobňoval k fázovému přechodu při tuhnutí ve fyzice pevných látek¹³.

2.3 Model upravený Kuramotem

Konstrukce modelu

Kuramoto společně se svým žákem Nishikawou navázal na práci Winfreeho a jak bylo zmíněno, své myšlenky představil v roce 1975 (Kuramoto [7]). Zkoumáním svého modelu, analyzováním stability limitních chování a dalšími úpravami se Kuramoto nadále zabýval po řadu let.

V případě jím odvozeného modelu se jedná o soustavu N diferenciálních rovnic pro N vázaných oscilátorů, které lze zapsat v obecnějším tvaru:

$$\theta'_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.9)$$

kde θ_i a ω_i jsou stejné jako v předchozím případě a Γ_{ij} jsou 2π -periodické funkce popisující interakci mezi i -tým a j -tým oscilátorem v závislosti na rozdílu jejich fází¹⁴.

Ačkoliv je popis každého oscilátoru odvozený pouze od fáze periodického děje, kterým prochází (což je značné zjednodušení problému), bylo třeba i tento tvar pro studium ještě zjednodušit, neboť interakční funkce Γ_{ij} mohou být složité díky vzájemnému rozestavení a provázání oscilátorů, ale i díky jejich odlišnostem. Proto se celkové působení všech oscilátorů na každý z nich vezme jako průměr a 2π -periodicita bude zajištěna nejjednodušší takovou funkcí – *sinus*. Díky tomu lze psát

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2.10)$$

kde K je vazebná konstanta, která je brána jako nezáporná. Dosazením do (2.9) dostaneme model, s nímž se lze nejčastěji setkat v literatuře:

$$\theta'_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.11)$$

Uvedený postup využívá tedy myšlenky, že oscilátory jsou všechny vázány rovnoměrně, a to každý s každým nehledě na jejich vzájemné rozestavení.

Ve všech předešlých případech bylo výhodné studovat systém sledováním nějakého jednotného parametru, konkrétně fázového rozdílu, namísto úplného řešení soustavy diferenciálních rovnic. Už v případě tří oscilátorů však začíná být fázový rozdíl nedostačující. Proto se zavádí tzv. *parametr uspořádání*.

¹³Při přechodu z kapalné do pevné fáze neztuhne rázem celá látka, ale krystalizuje postupně. Navíc se krystalické zárodky vytváří v okolí tzv. krystalizačních jader – v prezentovaném případě frekvencí by krystalizačnímu jádru odpovídala ta nejvíce zastoupená v populaci oscilátorů.

¹⁴Kuramoto tento model odvodil z obecného systému vázaných diferenciálních rovnic s využitím poruchové teorie – viz Kuramoto a Nishikawa [8].

Parametr uspořádání

K zavedení parametru je vhodné vrátit se k myšlence zmíněné v sekci 2.1 o oscilátorech jakožto běžících na kružnici. Tuto myšlenku zde zobecníme pro všech N oscilátorů a zpřesníme tak, že se body reprezentující oscilátory pohybují po jednotkové kružnici v komplexní rovině. Pak lze podle [8] (ale s využitím symboliky z [12]) definovat parametr uspořádání jako komplexní číslo

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}. \quad (2.12)$$

I parametr si můžeme představit jako bod v komplexní rovině, který se bude pohybovat někde uvnitř jednotkového kruhu, a to v okamžité vzdálenosti $r(t)$ od středu (příčemž $0 \leq r(t) \leq 1$) a s úhlem $\psi(t)$.

Parametr uspořádání je makroskopickým reprezentantem systému oscilátorů a vypovídá o počtu oscilátorů, které jsou vůči sobě koherentní. Tuto vlastnost ukazuje velikost $r(t)$, zatímco $\psi(t)$ lze chápat jako průměrnou fázi v daném čase t . Na obrázku 2.5 jsou oscilátory reprezentovány černými body na kružnici a parametr uspořádání je červený bod, který určuje spojnicí se středem kružnice, jejíž délka je $r(t)$. Jinak lze také říci, že ukazuje, jak oscilátory přispívají k nějakému společnému rytmu, jak si představoval Winfree ([16]).

V dalším kroku k analýze modelu Kuramoto ([8]) zakomponoval parametr uspořádání do modelu (2.11). Pokud nejdříve vynásobíme obě strany rovnice (2.12) členem $e^{-i\theta_i}$, dostaneme vztah

$$r(t)e^{i(\psi-\theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j-\theta_i)},$$

a porovnáme-li pouze imaginární složky z tohoto vztahu, dostaneme rovnost

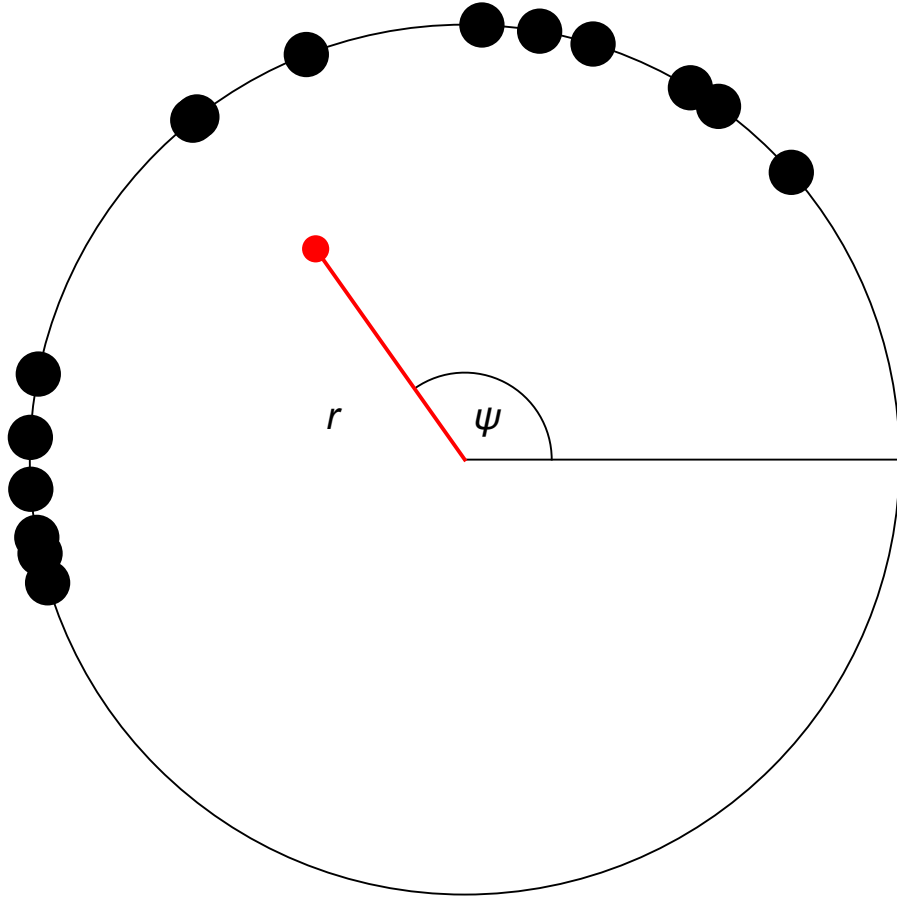
$$r(t) \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i),$$

a díky ní lze pak (2.11) přepsat do tvaru

$$\theta'_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.13)$$

Důležitost (2.13) spočívá v tom, že takto zapsaná rovnice představuje každý oscilátor jako nezávislý na ostatních, jeho fáze je upravována pouze vůči parametru uspořádání (v něm je samozřejmě interakce mezi oscilátory ukryta). Přesněji řečeno rovnice popisuje, jak každý oscilátor interaguje s makroskopickým rytmem. Součin Kr zde hraje roli jakési *efektivní vazby*. Pokud se alespoň pár oscilátorů synchronizuje (fázově uzamkne), pak vzroste r a tím i Kr , které může narůst tak, že jsou další oscilátory zachyceny v synchronizaci, přičemž opět vzroste r atd.

Kuramoto si díky rovnici (2.13) všiml, že oscilátory se rozdělí na dvě skupiny (viz [8]). Ty, které splňují podmínku $|\omega_i/Kr| \leq 1$, jsou vzájemně synchronizovány, zatímco oscilátory s podmínkou $|\omega_i/Kr| > 1$ sice jsou vzájemnými vazbami ovlivňovány, ale ne natolik, aby se synchronizovaly. Toto rozdělení na dvě skupiny oscilátorů je v Kuramotově analýze velice podstatné – v některých ohledech lze totiž příspěvky nesynchronizované skupiny zanedbat a usnadnit tak celkovou



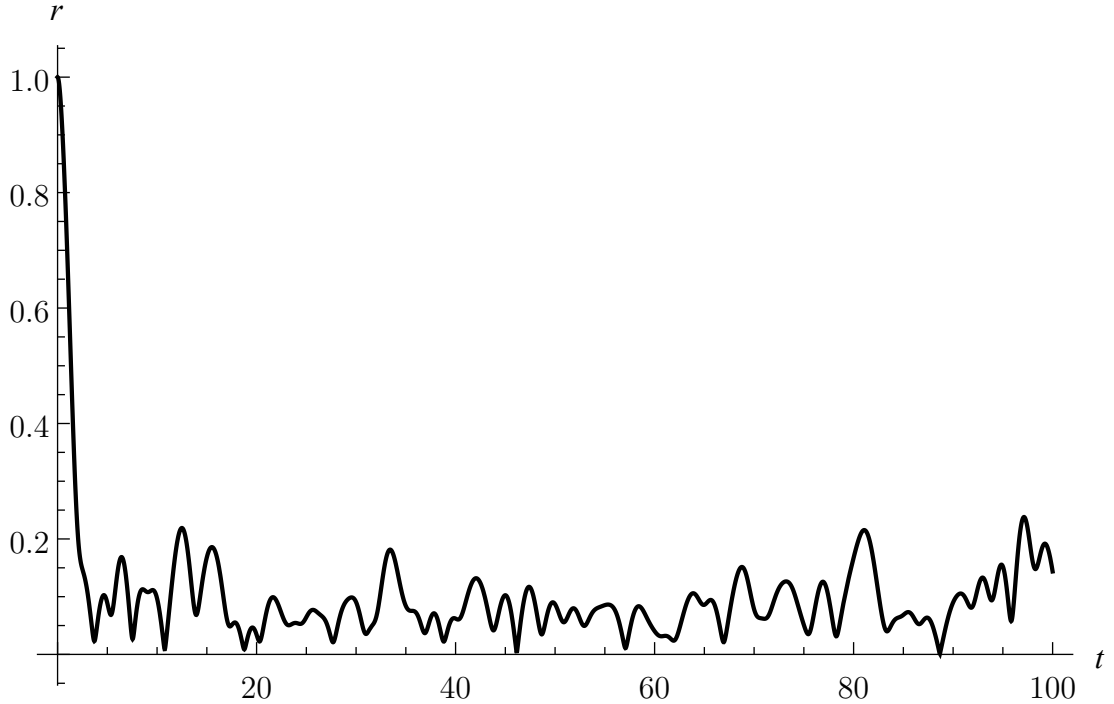
Obrázek 2.5: Parametr uspořádání v kontextu oscilátorů reprezentovaných body na kružnici

analýzu.

Vývoj parametru uspořádání může napovědět, zdali k synchronizaci dojde, či nikoliv. Proto byly řídicí rovnice (2.11) numericky řešeny v programu Wolfram Mathematica. Bez větších složitostí a obtíží bylo možné najít řešení pro 200 oscilátorů, což v uvedených grafech dává dostatečně přesvědčivé výsledky.

Na obrázku 2.6 je zachycen časový průběh parametru uspořádání, kdy je K menší než jistá kritická hodnota K_c (o které uvažoval již Winfree [16]), od níž již dojde k synchronizaci. Je vidět, že v tomto případě velikost r velice rychle klesne na hodnotu blízkou nule, což odpovídá nemožnosti synchronizace. Poté očividně parametr prochází fluktuacemi, ale ty mají pouze statistický charakter a s větším počtem oscilátorů se zmenšují.

Dojde-li ke zvětšení vazby a překročení kritické hodnoty K_c , část oscilátorů, jejichž vlastní frekvence je dostatečně blízko nějaké střední frekvenci mezi všemi oscilátory, se fázově uzamkne. Na obrázku 2.7 tomu odpovídá nárůst $r(t)$ na hodnotu blízkou 0,6, okolo níž poté opět dochází k fluktuacím díky působení ne-



Obrázek 2.6: Vývoj velikosti parametru uspořádání v čase, je-li vazba mezi oscilátory menší než kritická K_c

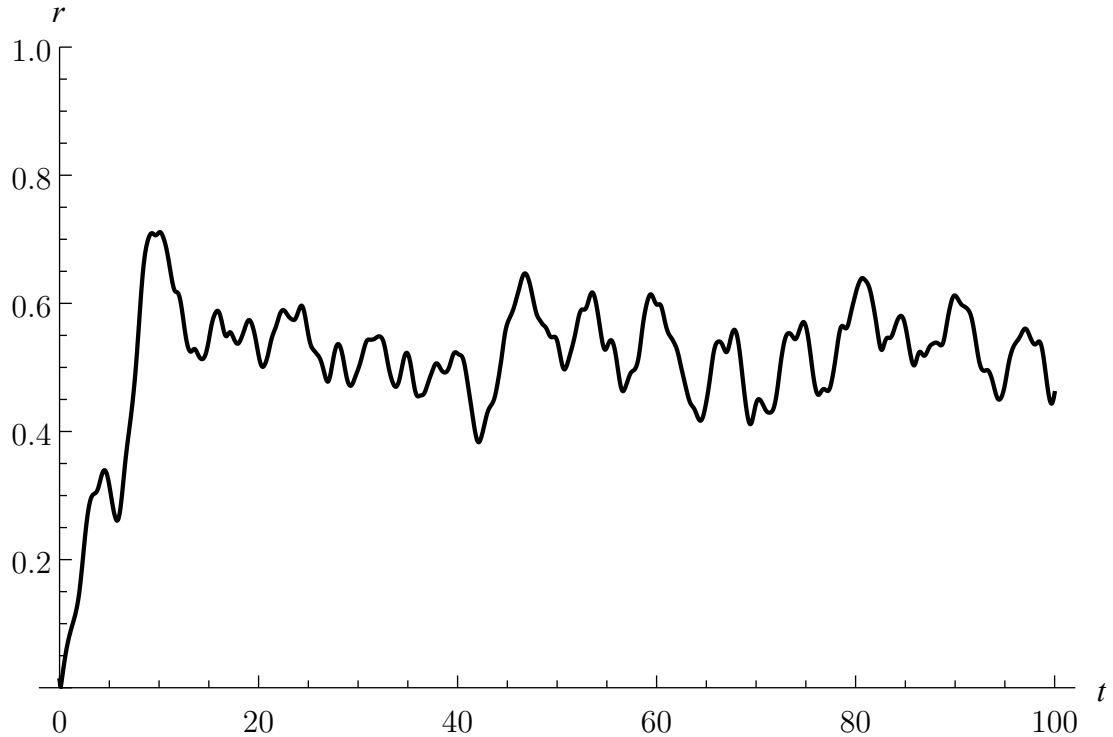
synchronizovaného zbytku¹⁵. Pokud je uvažovaná vazba ještě silnější, je možné obdržet fázový vývoj jako na obrázku 2.8, kdy jsou prakticky všechny oscilátory fázově uzamknuty. Velikost $r(t)$ nedosahuje hodnoty 1, neboť mezi oscilátory existují fázové rozdíly, které na parametr uspořádání mají vliv, jak je vidět v (2.12). Vzhledem k tomu, že vlastní frekvence byly v numerických řešeních určeny normálním rozdělením a počáteční fáze každého oscilátoru byla pro každý výpočet náhodná, je možné z tohoto vyvodit, že limitní chování parametru uspořádání by na těchto počátečních podmínkách nemuselo záležet a jediná závislost $r(t)$ pro $t \rightarrow \infty$ by byla na síle vazby K , jak naznačuje graf na obrázku 2.9¹⁶. Velikosti r na svislé ose jsou zde pro každé K brány jako střední hodnota, aby se odstranily fluktuace¹⁷. V grafu je vidět, že pro menší hodnoty vazebného koeficientu je změna velikosti r poměrně malá. Náhlé fluktuace okolo hodnot $K = 1$ naznačují, že se vývoj blíží ke kritické hodnotě K_c , při níž r skokově roste, než dojde k jeho „nasyčení“ a velikosti změn se opět zmenší. Při dalším nárůstu K se r prakticky již nemění.

Je ale nutné brát v potaz, že předchozí uvedené myšlenky a grafy jsou vyvozené pouze na základě numerických výsledků. Díky tomu zde nelze jednoznačně rozhodnout, zdali jsou nalezené vývoje jedinými možnými limitními případy při dané konfiguraci, jestli platí, že pod kritickou hodnotu vazebného koeficientu K_c se nesynchronizovanost jeví jako stabilní stav, nebo naopak nad kritickou hodno-

¹⁵V příložených animacích je tento stav zřetelný, pokud část bodů na kružnici udržuje konstantní fázové posuny vůči sobě, zatímco některé body, ačkoliv v určitých fázích pod zřejmým vlivem ostatních, se pohybují nezávisle na synchronizovaném hloučku.

¹⁶Počet oscilátorů pro každý bod byl 100, počáteční fáze byly náhodné.

¹⁷Z tohoto důvodu bylo numerické řešení hledáno pro $80 \leq t \leq 100$.



Obrázek 2.7: Vývoj velikosti parametru uspořádání v čase, je-li vazba mezi oscilátory větší než kritická K_c – velká část stále nesynchronizovaná

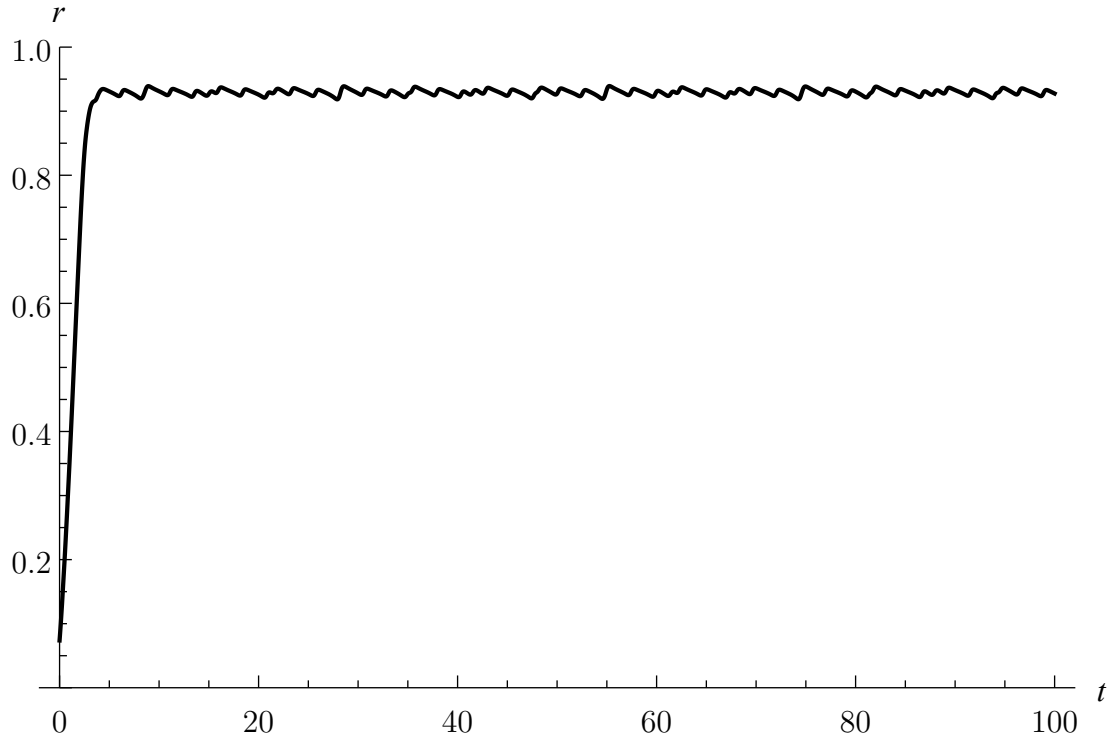
tou se stabilním stavem zdá částečná synchronizace. Otázkou pak může být, jestli lze nalézt vztah pro K_c (viz následující sekce) a vývojovou křivku $r(K)$, či jestli lze vůbec dosáhnout nějakého stabilního řešení v případě, že $N \rightarrow \infty$. A ačkoliv teoretická východiska pro některé zmíněné problémy existují a jsou rozebrána v článku Strogatze [12], jejich analýza značně přesahuje úroveň této práce.

Interaktivní animace

Obdobně jako v kapitole Světlušky v sekci 1.4.1 je i pro Kuramotův model naprogramovaná aplikace, či spíše interaktivní animace, v programu Mathematica. V přílohách je to soubor *KuramotoAnimation.nb*.

Jedná se spíš o kvalitativní představení matematického modelu (2.11). Jak již bylo uvedeno dříve, oscilátory jsou reprezentovány body na jednotkové kružnici. Uživatel má možnost měnit sílu vazby a počet oscilátorů přímo za běhu aplikace. Vývoj všech oscilátorů je určen paramtrem *Čas*, který má i animační roli.

Bodům na kružnici je přiřazeno zbarvení na základě jejich vlastní frekvence ω . Červenější barva vyjadřuje vyšší rychlost oproti modré. Bylo by možné upravovat „teplotu barvy“ na základě okamžité rychlosti, nicméně takto zvolený způsob dává nahlédnout tomu, jak se oscilátory při synchronizaci na kružnici seřadí – rychlejší oscilátory (červené) jsou při synchronizovaném stavu fázově posunuté vpřed, oproti pomalejším (modrým). To lze jednoduše zdůvodnit tím, že rychlejší oscilátory jsou jednak brzděny pomalejšími, jednak se je vlivem vazby snaží urychlit. Dalším důležitým úkazem, který lze v animaci díky takto zvoleným zbarvením nahlédnout je, že při dostatečném K dojde k částečné synchronizaci



Obrázek 2.8: Vývoj velikosti parametru uspořádání v čase, je-li vazba mezi oscilátory větší než kritická K_c – všechny oscilátory jsou fázově uzamknuty

těch oscilátorů, které mají podobnou barvu.

K tomu je v animaci přímo vidět i průběh parametru uspořádání, který je reprezentován červeným bodem a spojnice se středem kružnice vyjadřuje jeho velikost r . Při vhodném nastavení parametrů (počet oscilátorů, vazba) lze pozorovat částečné fázové uzamknutí skupiny oscilátorů, zatímco ostatní se pohybují volně. Tím je dosaženo fluktuací velikosti r zobrazených v grafech na obrázcích 2.6 - 2.8.

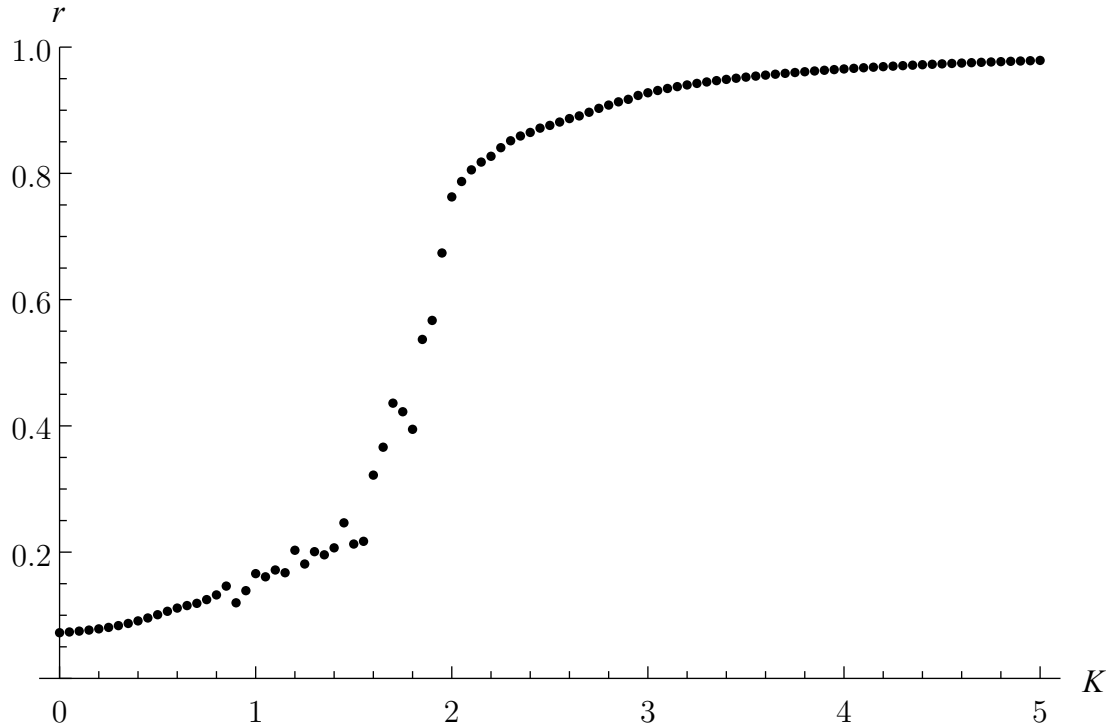
Aby si mohl animaci vyzkoušet i uživatel bez Mathematiky či Wolfram Playeru, je k dispozici na Wolfram Cloud a to na následující adrese: <https://www.wolframcloud.com/obj/adlibor/Published/KuramotoAnimation.nb>

2.3.1 Kritická hodnota K_c

V práci Kuramota [8] je uveden vztah 2.34b

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}, \quad (2.14)$$

který explicitně vyjadřuje kritickou hodnotu K_c pro počet oscilátorů $N \rightarrow \infty$. Funkce $g(\omega)$ je hustotou pravděpodobnosti rozložení vlastních frekvencí mezi oscilátory. Tato hustota pravděpodobnosti může být obecná, ale v případě Kuramotova modelu je uvažována unimodální a symetrická okolo nějaké střední hodnoty Ω , což splňuje například i normální rozdělení. V odvozeních Kuramota je celý systém oscilátorů nastavený tak, že $\Omega = 0$, a proto $g(0)$ značí hustotu pravděpodobnosti právě v této střední hodnotě.



Obrázek 2.9: Vývoj velikosti řádového parametru v závislosti na koeficientu vazby K

Zajímavou otázkou je, jestli by vzorec (2.14) bylo možné použít pro uvedená numerická řešení, přesněji pro vývoj $r(K)$ na obrázku 2.9, kde byla každá hodnota r spočtena pro 100 oscilátorů. V první řadě je však nutné určit, jakou hodnotu K uvažovat jako kritickou. Pro $K \approx 0,9$ dochází totiž zřetelně k narušení jednoznačného trendu, kterého se r od počátku drží. Ovšem zdá se, že jde pouze o fluktuace okolo tohoto trendu. Pro $K > 1,7$ však již dochází k prudkému nárůstu r , což více odpovídá definici kritické hodnoty. Proto budeme při dalších úvahách považovat právě hodnotu 1,7 za kritickou.

Jako hustota pravděpodobnosti $g(\omega)$ bylo v řešení na obrázku 2.9 použito normální rozdělení se střední hodnotou $\Omega = 1,5$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 1,2$. Předpis rozdělení s těmito parametry byl nalezen pomocí Wolfram Matematiky. S tímto se (2.14) upraví na

$$K_c = \frac{2}{\pi g(1,5)}. \quad (2.15)$$

Hodnota $g(1,5)$ vychází přibližně 0,3325. Po dosazení do (2.15) vychází

$$K_c = 1,92.$$

Srovnáme-li tento výsledek s dříve diskutovanou kritickou hodnotou v grafu na obrázku 2.9, liší se o přibližně 0,22. Připomeňme, že vzorec (2.15) platí přesně jen pro limitní případ nekonečně mnoha oscilátorů a k rozdílům tak patrně může přispívat skutečnost, že četnost frekvencí v konečném (a nepříliš velkém) počtu oscilátorů neodpovídá zcela přesně normálnímu rozložení. Patrně také k chybě mezi vypočtenou hodnotou a hodnotou určenou z grafů přispívá nepřesnost numerických řešení.

K ověření této domněnky byla nalezena numerická řešení pro vyšší počty oscilátorů. Shrnutí jsou v sadě obrázků 2.10. Na nich je možné pozorovat, jak s narůstajícím počtem oscilátorů roste hodnota K_c , od níž už zřetelně dochází k narušení úvodního trendu nesynchronizovanosti. Ten je ve všech případech zatížen fluktuacemi, které ale za synchronizační tendenci, která nastává při překročení K_c , nelze považovat. Hodnoty K_c jsou tedy určeny v oblasti, kde jednoznačně dochází ke skokovému nárůstu r . Že v určení K_c hraje roli rozložení konečného počtu frekvencí lze pozorovat například při porovnání případu (a) s obrázkem 2.9, kde je sice v obou případech počet oscilátorů roven 100, ale hodnoty K_c jsou rozdílné. Co tedy grafy 2.10 naznačují, je statisticky přesnější určení kritické hodnoty s nárůstem oscilátorů.

Vliv na hodnotu K_c ve vzorci (2.15) má pouze směrodatná odchylka¹⁸. Proto byl ještě proces porovnání numericky získaných kritických hodnot a spočítané (2.15) proveden pro normální rozdělení s parametry: $\Omega = 1,5$, $\sigma = 0,5$. Menší odchylka v hustotě pravděpodobnosti zajišťuje větší $g(\Omega)$ a tedy by K_c měla být nižší¹⁹.

Hodnota K_c podle (2.15) pro uvedené hodnoty dává:

$$K_c = 0,79.$$

Numerické řešení je na obrázku 2.11. Zřejmě je kritická hodnota v okolí $K = 1$. Nedostatečné rozlišení celého vývoje je kompenzováno detailnějším propočítáním na tomto okolí. Výsledek je zachycen na obrázku 2.12, kde $N = 200$ a vývoj vykazuje jasný skok v hodnotě $K \approx 0,8$, což velmi dobře odpovídá spočtené hodnotě.

V posledním proměřeném případě byla směrodatná odchylka σ rovna 3,5. Střední hodnota zůstala zachována. Spočtená kritická hodnota K_c podle (2.15) vychází

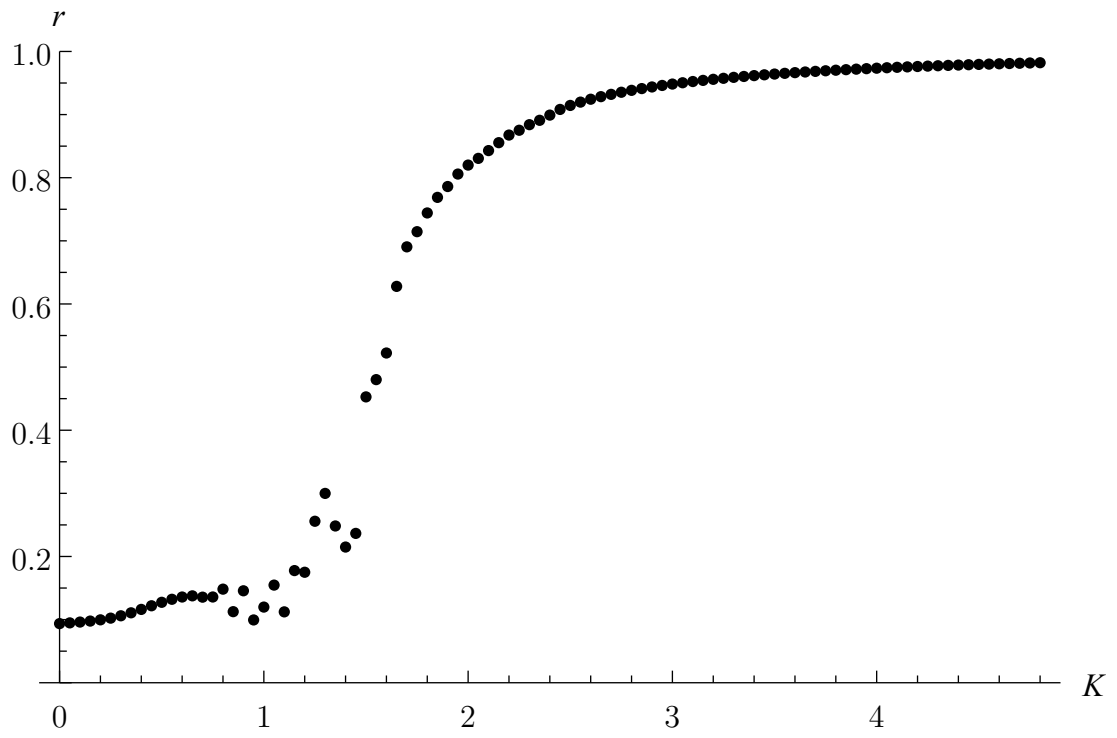
$$K_c = 5,58,$$

a výsledek numerického řešení je na obrázku 2.13, kde nastupuje trend rychlého růstu od hodnoty $K \approx 5,6$. Ukazuje se tak, že i pro vyšší rozptyl může být K_c určena pomocí (2.15) spolehlivě.

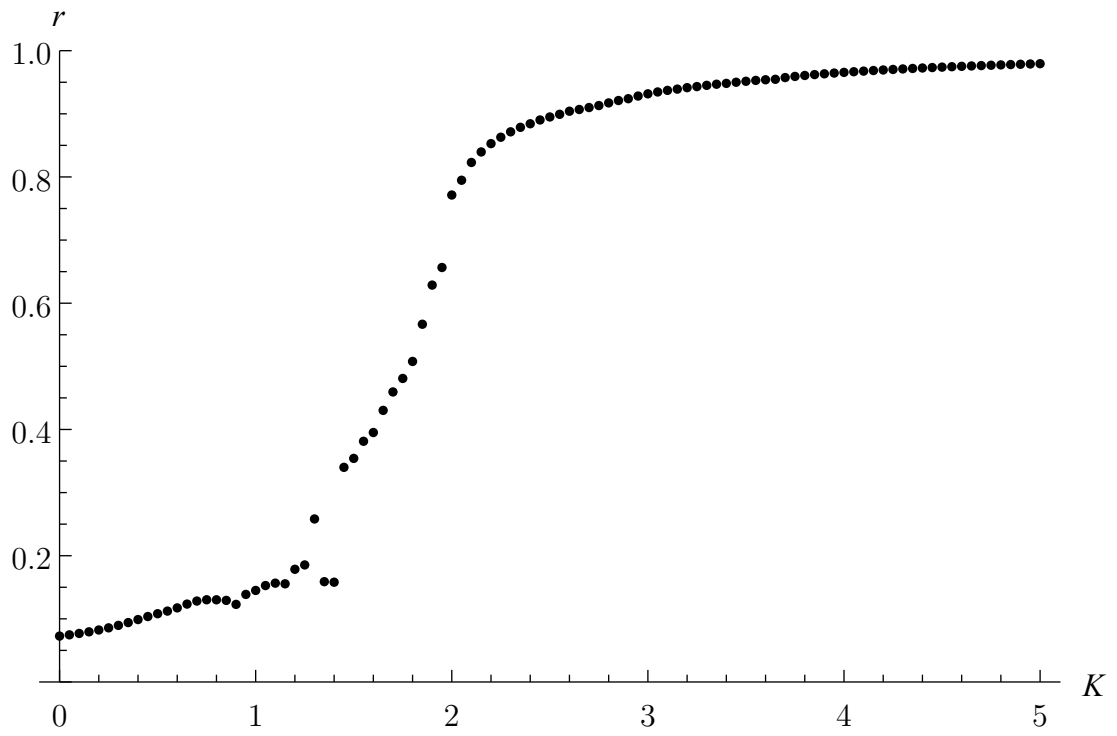
V souhrnu se tedy zdá, že hlavní vliv na rozdíl mezi numericky nalezenými hodnotami a hodnotou spočítanou pro danou hustotu pravděpodobnosti má konečnost počtu oscilátorů a navíc nemožnost s technikou dostupnou při psaní této práce spočítat alespoň hodnoty $N > 200$. Do určování kritických hodnot se také podepisují fluktuace, které znesnadňují její přesnější odečet. Celkově je ale nepřesnost v proměřovaných konfiguracích poměrně malá, pro nižší σ dokonce vzájemně velice blízká.

¹⁸Díky tomu mohl Kuramoto uvažovat střední hodnotu nulovou.

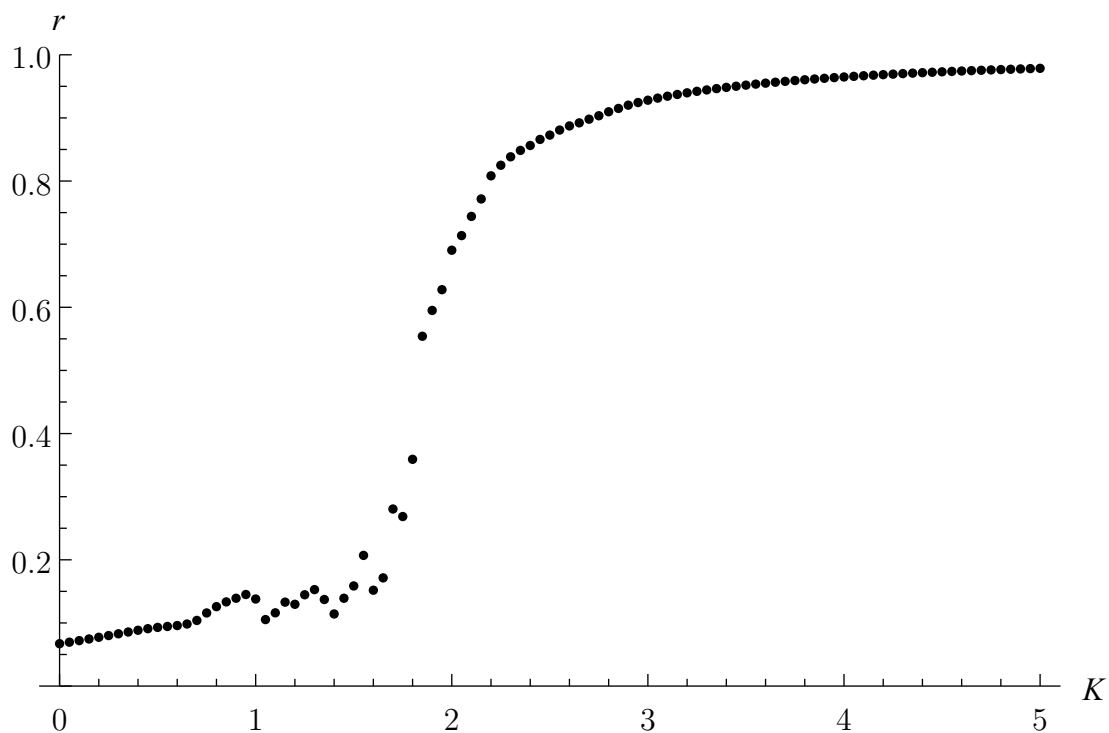
¹⁹K tomu lze dojít i s myšlenkou, že se snáze synchronizuje větší počet hodně podobných oscilátorů, neboť snadno narůstá jejich efektivní vazba Kr diskutovaná pro (2.13).



(a) $N = 100$ a $K_c \approx 1,2$

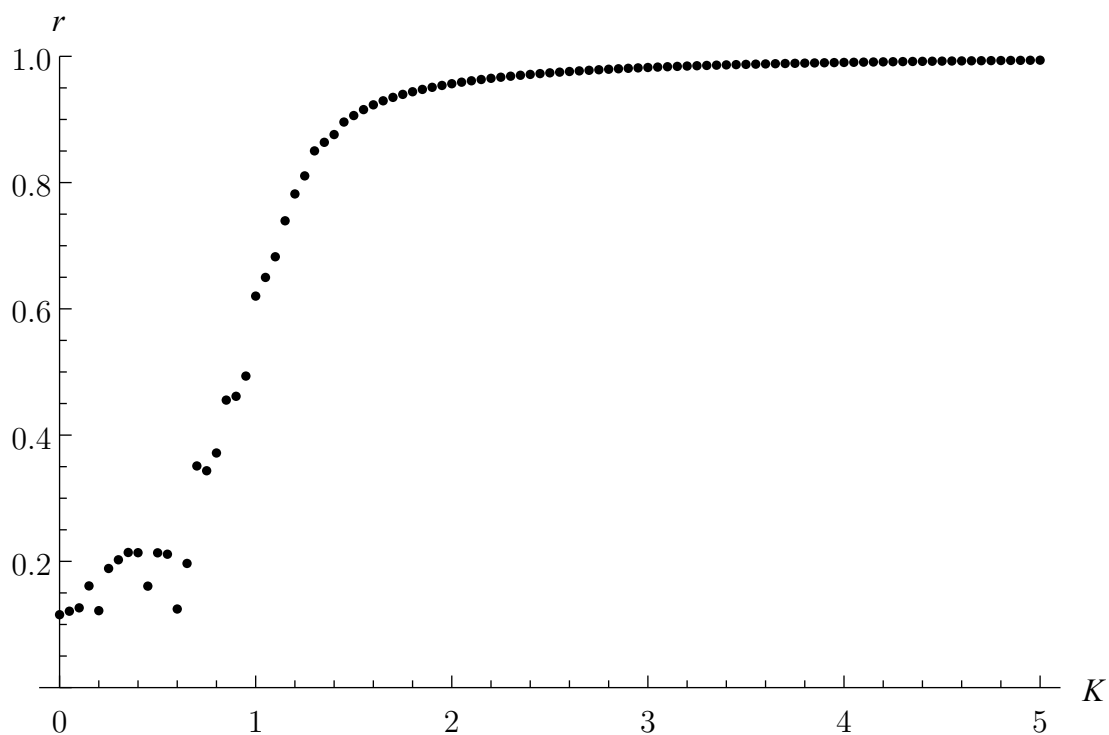


(b) $N = 130$ a $K_c \approx 1,4$

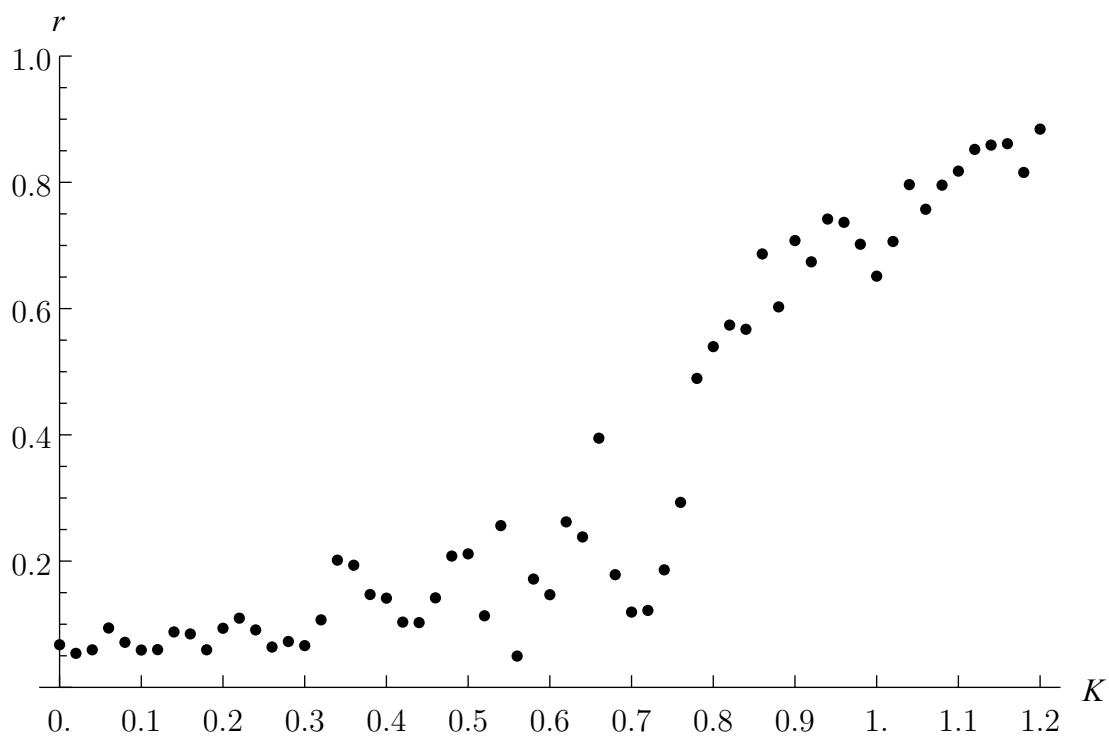


(c) $N = 140$ a $K_c \approx 1,7$

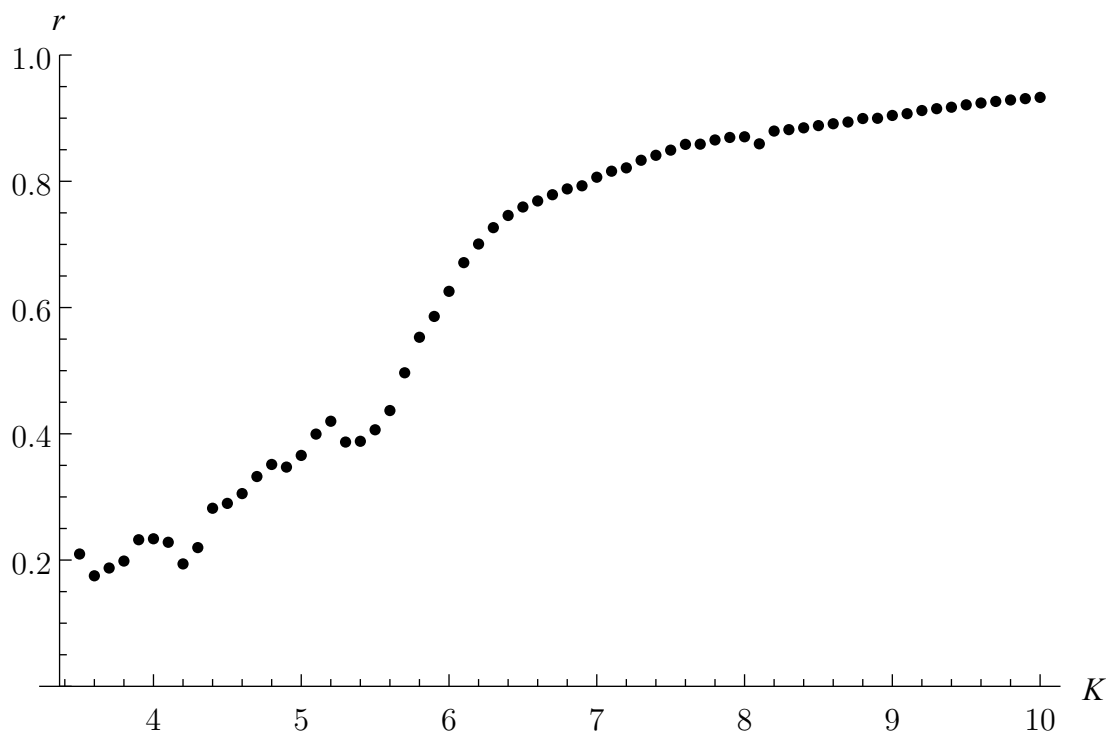
Obrázek 2.10: Vývojové křivky $r(K)$ podle počtu oscilátorů pro porovnání kritických hodnot K_c



Obrázek 2.11: Vývoj velikosti řádového parametru v závislosti na koeficientu vazby K pro směrodatnou odchylku $\sigma = 0,5$, $N = 100$



Obrázek 2.12: Vývojová křivka $r(K)$ poblíž $K = 0,79$, platí $N = 200$ a $K_c \approx 0,8$



Obrázek 2.13: Vývoj velikosti řádového parametru v závislosti na koeficientu vazby K pro směrodatnou odchylku $\sigma = 3,5$, $N = 140$

3. Metronomy

Příkladem synchronizace, se kterým by bylo možné se setkat i v rámci vyučovací hodiny fyziky na střední škole, je synchronizace dvou metronomů. Takový experiment s cílem přiblížit a demonstrovat tento fenomén žákům by byl výhodný, podle Pantaleona v jeho práci (Pantaleone [10]) jednak v jednoduchosti jeho stavby, jednak v relativně vysoké rychlosti, s jakou se systém při vhodné volbě komponent ustálí.

Nejjednodušší taková soustava se skládá ze dvou metronomů, s minimálními parametrickými rozdíly (primárně hmotnost závaží na kyvadélku a vlastní frekvence), které jsou umístěny na lehké pohyblivé desce. Ta zajišťuje nutnou vazbu, bez které by k synchronizaci dojít nemohlo. Je vhodné pro snížení odporu jejího pohybu využít například valivého tření, či zavěšení do prostoru.

Je ovšem důležité zdůraznit, že pravděpodobně právě díky rozdílným parametrům nedojde k dokonalé synchronizaci, ale k tzv. „fázovému uzamknutí“, kdy je systém ustálený, ale kyvadla metronomů se vůči sobě pohybují s určitým rozdílem mezi jejich fázemi. Úplná synchronizace nastává právě ve chvíli, kdy je fázový posun v ustáleném stavu nulový. Pro zjednodušení popisu bude však v této kapitole synchronizace chápána ať už jako úplná, či jako forma fázového uzamknutí.

Studium problému poté spočívá ve zkoumání, za jakých vstupních podmínek lze synchronizaci očekávat a jaké faktory ovlivní její dosažení (zdali vůbec, či jak dlouho trvá, než se takový stav ustálí). Tyto faktory, potažmo přímo vstupní parametry, jsou rozebrány v následující části. Metronomy lze totiž (opět ve jménu zjednodušení) považovat v dobrém přiblížení za fyzikální kyvadla a použít tak pro popis jejich chování rovnice s touto problematikou spojené.

3.1 Pohybové rovnice

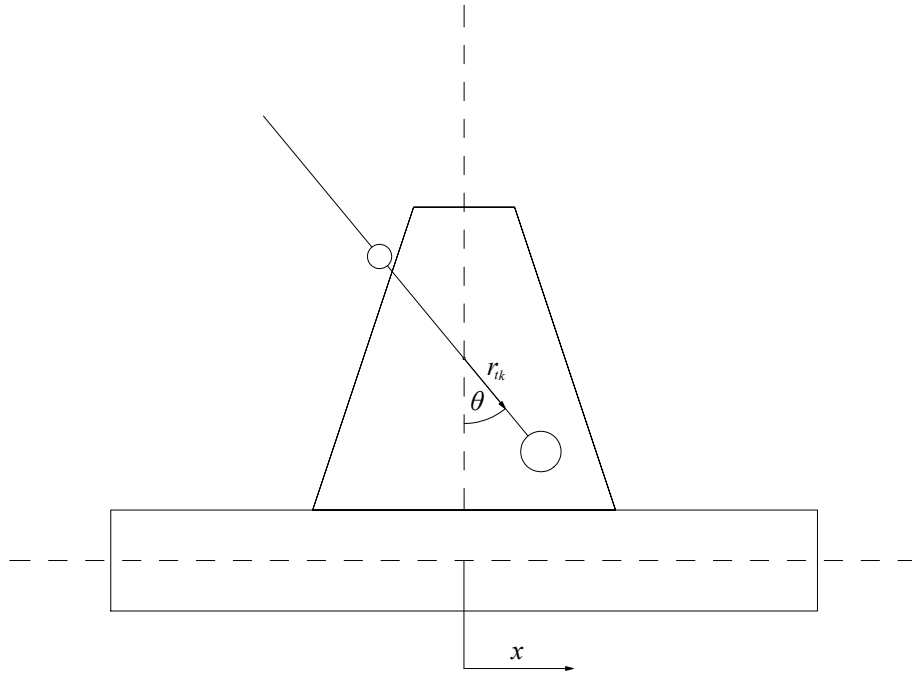
Pohybová rovnice pro jeden metronom a následně i z ní plynoucí soustava na sebe působících metronomů je odvozena ze základní rovnice pro pohyb matematického kyvadla (například [3])

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

kde l je délka závěsu kyvadla, g je gravitační zrychlení a θ je úhlová odchylka kyvadla od svislého směru, viz obrázek 3.1. První člen součtu na levé straně rovnice je úhlové zrychlení a druhý člen zachycuje působení gravitační síly na kyvadlo a vytvoření příslušného silového momentu.

Protože se však jedná o matematické kyvadlo, u něž se činí několik předpokladů, je třeba rovnici trochu poupravit. U metronomu lze uvažovat „závěs“ tuhý, ovšem ne nehmotný. Kmitající závaží navíc není bodové – proto je nutné uvažovat fyzikální kyvadlo (viz [15]). Tento přístup je do rovnice zahrnut jako rotační pohyb závěsu s kyvadlem

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m r_{tk} g}{J} \sin \theta = 0,$$



Obrázek 3.1: Schéma modelované situace s metronomy na pohyblivé podložce

přičemž m je hmotnost kyvadla uvažovaná v jeho těžišti, r_{tk} je poloměr otáčení těžiště kyvadla (vzdálenost těžiště od osy otáčení) a J je moment setrvačnosti celého kyvadla. Tyto dva členy samy popisují chování kyvadla v tíhovém poli bez dalšího silového působení. Z fyzikálního hlediska se hodí následující zápis

$$\omega = \sqrt{\frac{m r_{tk} g}{J}},$$

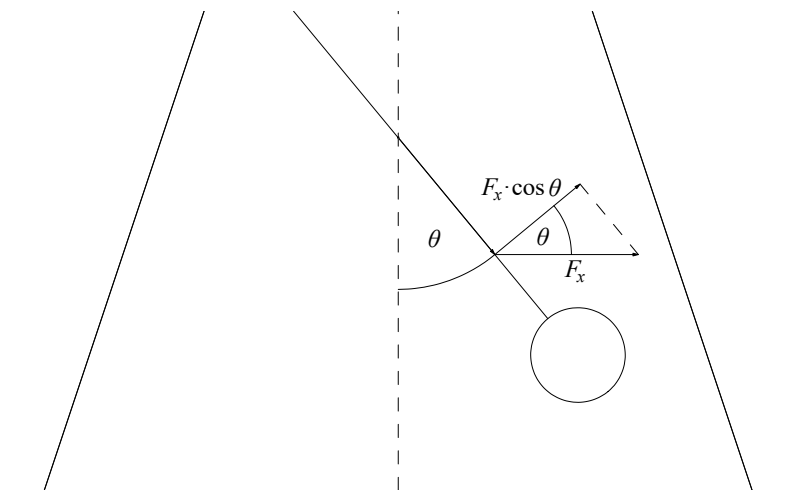
přičemž ω je tzv. vlastní frekvence oscilátoru – úhlová frekvence, s níž oscilátor kmitá při malých výchylkách (kdy platí $\sin \theta \sim \theta$).

Kromě výše uvedených členů je však nutné do pohybové rovnice zahrnout volný pohyb podložky s nenulovým zrychlením ve vodorovném směru. Díky této skutečnosti se metronom nachází v neinerciální vztažné soustavě – na kyvadlo v jeho vlastní soustavě působí síla F_x ve vodorovném směru a proti směru pohybu podložky (jedná se o setrvačnou sílu), jak naznačuje Obrázek 3.2, přičemž

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Pro kyvadlo je důležitá její složka tečná k trajektorii pohybu kyvadla. Ta vytváří moment síly působící na těžiště kyvadla

$$M_x = F_x \cos \theta \cdot r_{tk}.$$



Obrázek 3.2: Moment setrvačné síly od podložky

Tento moment síly je též zahrnut do pohybové rovnice

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mr_{tk}g}{J} \sin \theta = - \left(\frac{mr_{tk} \cos \theta}{J} \right) \frac{d^2x}{dt^2},$$

zde x je vodorovná výchylka podstavy. Znaménko mínus pak vyjadřuje, že síla na kyvadlo působí v opačném smyslu, než je pohyb podložky. Člen na pravé straně lze pro přehlednost převést na levou stranu

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mr_{tk}g}{J} \sin \theta + \left(\frac{mr_{tk} \cos \theta}{J} \right) \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Finální podoba rovnice, která popisuje pohyb jednoho metronomu na pohyblivé desce pak může nabývat tvaru

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mr_{tk}g}{J} \sin \theta + \epsilon \left[\left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{mr_{tk} \cos \theta}{J} \right) \frac{d^2x}{dt^2} = 0. \quad (3.1)$$

V rovnici přibyl velmi zajímavý člen, výraz s úhlovou rychlostí $\frac{d\theta}{dt}$ a parametr θ_0 , který specifikuje maximální výchylku kyvadla (viz níže). Hranatá závorka obsahuje tzv. van der Polův člen (viz Strogatz [14])¹, který v rovnici současně modeluje brzdící síly okolí (vzduch, třecí síly v ose otáčení) a současně i síly, které kmitavému pohybu dodávají energii (v situaci s metronomy se může jednat například o stlačenou pružinu uvnitř strojku, která skrze ozubené soukolí dodává konstantní „dávky“ energie). Pokud je $\theta > \theta_0$, pak je výraz uvnitř hranaté závorky v rovnici (3.1) záporný a kyvadlo tak brzdí. Je-li naopak $\theta < \theta_0$, závorka je kladná a v takový moment dodává kmitavému pohybu energii. Jinak řečeno funguje jako brzdící síla pro úhlové výchylky větší než θ_0 a naopak rozhýbává kyvadlo pro výchylky menší. Lze dokázat, že pro $\epsilon \ll 1$ amplituda kmitů metronomu s parametrem θ_0 odpovídá přibližně úhlu $2\theta_0$ (podle [14])². Užití tohoto

¹Kapitola 7.1 Examples, příklad 7.6.1

²Kapitola 7.6 Weakly Nonlinear Oscillators, příklad 7.6.2.

zjednodušujícího členu, který shrnuje oba druhy sil dohromady, však může mít za následek nedosažitelnost některých reálných řešení – úvaha je více rozvedena v sekci 3.2.3.

Pro další popis je nyní třeba určit vhodnou souřadnou soustavu. Kandidátem je souřadnicová soustava vztažená k těžišti celého systému (podložky a obou metronomů). Souřadnice x_t , která popisuje x -ovou souřadnici tohoto těžiště, by v blíže nespecifikované soustavě měla tvar

$$x_t = \frac{Mx_0 + mx_1 + mx_2}{M + 2m}, \quad (3.2)$$

kde M je hmotnost podložky a x_0 je její x -ová souřadnice. Jedná se tedy o vážený průměr x -ových souřadnic všech komponent systému, kde vahami jsou hmotnosti komponent. Pro souřadnici těžiště kyvadla i -tého metronomu, kde $i \in \{1, 2\}$, platí

$$x_i = x + l_i + r_{tk} \sin \theta_i, \quad (3.3)$$

zde l_i , θ_i jsou po řadě vzdálenost metronomu vůči podložce a úhlová výchylka daného kyvadla. Při úvaze, že na systém nepůsobí žádné vnější síly³, pak pro zrychlení těžiště systému platí

$$\frac{d^2 x_t}{dt^2} = 0.$$

Pokud se k této podmínce dodá také podmínka, že počáteční rychlost těžiště je nulová, pak nutně x_t je nezávislá na čase.

Při dosazení (3.3) do (3.2) a úpravě lze dospět ke tvaru

$$x_t - \frac{m(l_1 + l_2)}{M + 2m} = x + \frac{m}{M + 2m} r_{tk} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2). \quad (3.4)$$

Výraz na levé straně (3.4) je konstantou a lze zvolit systém souřadnic tak, aby se rovnal nule, přesněji

$$x_t = \frac{m(l_1 + l_2)}{M + 2m}.$$

Díky tomu lze výchylku podložky určit ve tvaru

$$x = -\frac{m}{M + 2m} r_{tk} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2). \quad (3.5)$$

Protože je podložka ovlivněna oběma metronomy, její výchylka je jednak na pohybu obou závislá, jednak se vyskytuje v rovnicích každého z metronomů. V důsledku je vazebným členem v následující soustavě rovnic.

³Kmity kyvadel metronomů, která rozhýbávají desku, nejsou vnějšími silami. Platí-li k tomu $M \geq 2m$ je pohyb podložky a jeho změna oproti pohybu kyvadel pomalejší, odpor vzduchu lze pak pro pohyb desky zanedbat. Tření také, jedná-li se o valivé, nebo tření v závěsu (pokud je podložka zavěšena).

Vztah (3.5) lze nyní dosadit do (3.1) a pomocí příslušných indexů získat soustavu pro dva metronomy

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \frac{mr_{tk}g}{J} \sin \theta_1 + \epsilon \left[\left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta_1}{dt} \\ - \left(\frac{mr_{tk} \cos \theta_1}{J} \right) \left(\frac{mr_{tk}}{M+2m} \right) \frac{d^2}{dt^2} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{mr_{tk}g}{J} \sin \theta_2 + \epsilon \left[\left(\frac{\theta_2}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta_2}{dt} \\ - \left(\frac{mr_{tk} \cos \theta_2}{J} \right) \left(\frac{mr_{tk}}{M+2m} \right) \frac{d^2}{dt^2} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.6b)$$

Výše uvedená soustava rovnic uvažuje oba metronomy zcela identické. Pak se shodují i jejich frekvence, což není ve skutečnosti plně dosažitelné. K tomu navíc může být vhodnou otázkou, jak úspěch synchronizace závisí na rozdílnosti těchto frekvencí – hledání odpovědi je začleněno v sekci 3.2. Přesto jsou pro usnadnění popisu některé parametry ponechány pro oba metronomy bez rozdílu – hmotnost m , koeficient ϵ . Množství ostatních parametrů, které se v rovnicích vyskytuje, však komplikuje analýzu celé soustavy.

Problém s identickými frekvencemi lze odstranit prostým zavedením parametrů

$$\omega_i = \sqrt{\frac{mr_{tk,i}g}{J_i}}, \quad i = 1, 2,$$

což jsou modifikované vlastní frekvence jednotlivých metromů, které se od sebe vzájemně mohou lišit. V případě skutečných metromů jsou tyto vlastní frekvence upravovány posunutím menšího závažíčka po horním rameni kyvadla metromu, tedy dochází ke změně jak J_i , tak i $r_{tk,i}$, což je po řadě moment setrvačnosti a poloměr otáčení těžiště kyvadla i -tého metromu. Předpokladem však je, že se ω_1 a ω_2 (a tedy i $r_{tk,1}$, $r_{tk,2}$) od sebe liší jen velmi málo⁴. Díky tomu lze nadále uvažovat pro oba metronomy shodný moment setrvačnosti J a v posledních členech obou rovnic (3.6) jeden shodný parametr r_{tk} , který zde kvůli zmíněným předpokladům má roli průměru mezi oběma metronomy. Výše uvedené podmínky se do rovnic (3.6) promítnou následovně:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega_1^2 \sin \theta_1 + \epsilon \left[\left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta_1}{dt} \\ - \left(\frac{mr_{tk} \cos \theta_1}{J} \right) \left(\frac{mr_{tk}}{M+2m} \right) \frac{d^2}{dt^2} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.7a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \omega_2^2 \sin \theta_2 + \epsilon \left[\left(\frac{\theta_2}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta_2}{dt} \\ - \left(\frac{mr_{tk} \cos \theta_2}{J} \right) \left(\frac{mr_{tk}}{M+2m} \right) \frac{d^2}{dt^2} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.7b)$$

⁴ $|r_{tk,1} - r_{tk,2}| \approx 10^{-5}$

Problém s množstvím parametrů lze poté vyřešit zavedením bezrozměrného (viz [14]) času $\tau = \omega t$, přičemž je vhodné, aby platilo

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (3.8)$$

Zde je tedy ω průměrem obou frekvencí, což má opodstatnění v úvahách o malých rozdílech ω_i , rozebíraných výše. Z toho ale také plyne řádový odhad pro ω :

$$\omega^2 \approx \frac{mr_{tk}g}{J},$$

neboť r_{tk} a J na pravé straně této aproximace mají též roli průměru.

Rovnice (3.7) pak lze použitím věty o derivaci složené funkce⁵

$$\frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau} \quad (3.9)$$

a parametrů ω_i převést na tvar

$$\frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \sin\theta_1 + \mu \left[\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta_1}{d\tau} \quad (3.10a)$$

$$- \beta \cos\theta_1 \frac{d^2}{d\tau^2} (\sin\theta_1 + \sin\theta_2) = 0,$$

$$\frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} + \left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2 \sin\theta_2 + \mu \left[\left(\frac{\theta_2}{\theta_0}\right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta_2}{d\tau} \quad (3.10b)$$

$$- \beta \cos\theta_2 \frac{d^2}{d\tau^2} (\sin\theta_1 + \sin\theta_2) = 0.$$

Zápis se ještě zjednodušil zavedením bezrozměrného parametru β , pro který platí

$$\beta = \frac{mr_{tk}}{J} \cdot \frac{mr_{tk}}{M + 2m}.$$

Tento parametr v modelu představuje citlivost vzájemného působení metronomů, resp. se podle Pantaleona (Pantaleone [10]) jedná o *vazbový parametr*. Reálně jej lze pro nastavené metronomy upravovat pomocí M . Je-li podložka kupříkladu příliš hmotná, pak ji metronomy nejsou schopny příliš rozhýbat a vazba tak může zaniknout.

Podíl úhlových frekvencí, kterým násobíme člen $\sin\theta_i$ v příslušné rovnici, lze také převést na další bezrozměrný parametr. Díky předpokladu, že se vlastní frekvence ω_i každého metronomu liší od ω jen málo, tento rozdíl lze napsat jako

$$\Delta\omega_i = \omega_i - \omega$$

a pomocí něj přepsat poměr frekvencí následovně:

$$\left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\omega + \Delta\omega_i}{\omega}\right)^2 = \left(1 + \frac{\Delta\omega_i}{\omega}\right)^2 \approx \left(1 + 2\frac{\Delta\omega_i}{\omega}\right) = 1 + \Delta_i,$$

⁵Analogicky pro derivaci druhého řádu $\frac{d^2}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}$

kde bezrozměrné je právě Δ_i . V situaci, kdy se jedná o dva metronomy a ω je aritmetickým průměrem úhlových frekvencí platí, že

$$\Delta\omega_1 = -\Delta\omega_2$$

a poté

$$\Delta = \Delta_1 = -\Delta_2.$$

S poslední úvahou lze již rovnice (3.10) finalizovat do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + (1 + \Delta) \sin \theta_1 + \mu \left[\left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta_1}{d\tau} \\ - \beta \cos \theta_1 \frac{d^2}{d\tau^2} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.11a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} + (1 - \Delta) \sin \theta_2 + \mu \left[\left(\frac{\theta_2}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta_2}{d\tau} \\ - \beta \cos \theta_2 \frac{d^2}{d\tau^2} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.11b)$$

jejichž řešením jsou funkce $\theta_i(\tau)$, $i = 1, 2$.

3.2 Numerická řešení

Řešení rovnic (3.11) byla numericky spočítána pomocí programu Wolfram Mathematica. Pro úvodní výpočty byly hodnoty parametrů $\Delta \approx 10^{-3}$, $\beta = 0,011$, $\mu = 0,010$, $\omega = 10,9 \text{ s}^{-1}$, $\theta_0 = 0,39 \text{ rad}$ přebrány z [10]. Parametry metronomů byly odhadnuty na základě skutečného metronomu tak, aby splňovaly podmínky v předchozí větě: $m = 43 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, $r_{tk} = 2,72 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $J = 9,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Pro zkoumání synchronizační tendence je výhodnější přejít od úhlových výchylek $\theta_i(\tau)$, které mohou být z definice kladné i záporné, k funkcím popisujícím, v jaké fázi se daný periodický děj nachází. Co je pod pojmem fáze myšleno naznačuje obrázek 3.3, kde fáze odpovídá číslu $\Phi_i \in \mathbb{R}$. Díky tomu lze zavést vztah

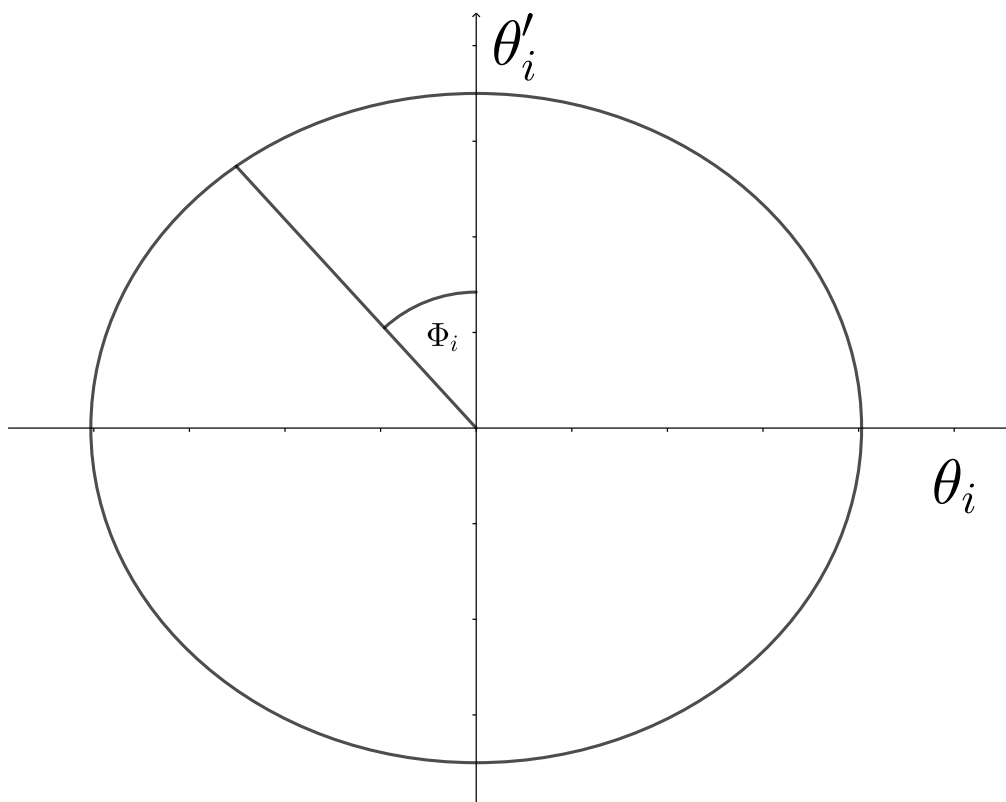
$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2, \quad (3.12)$$

který vyjadřuje fázový rozdíl metronomů. Je-li $\Phi' = 0$, tj. je-li fázový rozdíl nulový, nebo konstantní, pak lze říci, že jsou metronomy synchronizovány. Pro rozpoznání synchronizační tendence by bylo výhodné zobrazit graf $\Phi(t)$, tj. závislost fázového rozdílu přímo na čase. Vzhledem k implicitní definici fáze jej však nelze nalézt pro každý čas t . Tuto komplikaci lze obejít tak, že nebude zkoumán celý časový průběh fázového rozdílu (3.12), ale pouze průchody nulovou fází. Přesněji řečeno, místo fázového rozdílu v konkrétním čase se měří časový rozdíl průchodu konkrétní fází

$$\Delta T_j = T_{1j} - T_{2j}, \quad (3.13)$$

kde pro T_{ij} platí $\Phi_i(T_{ij}) = 0$ a ΔT_j lze nazvat *časový rozdíl* nulové fáze.

Prakticky je rozdíl (3.13) určen tak, že při numerickém výpočtu odchylek θ_i z rovnic (3.11) jsou pro oba metronomy hlídány situace, kdy se kyvadla nachází v nulové fázi. Proto je nutné sledovat jak $\theta_i = 0$, tak $\theta'_i > 0$, přičemž jsou zaznamenány



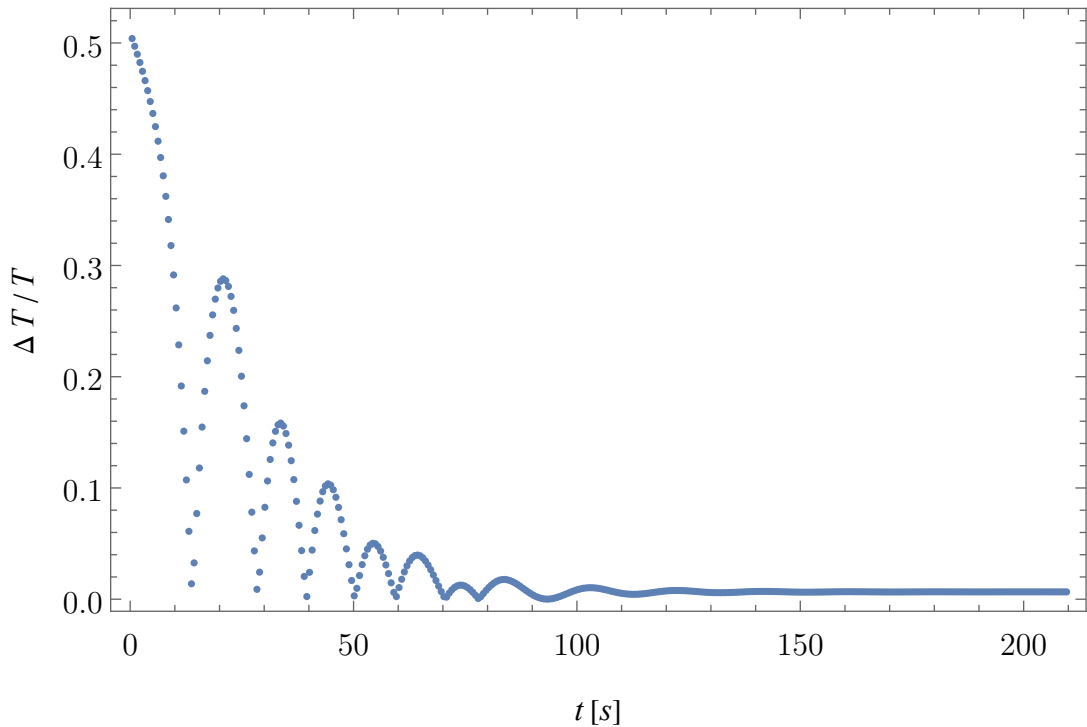
Obrázek 3.3: Fáze metronomu ve fázovém prostoru

příslušné časy T_{ij} . Do grafů je pak vynášena závislost $\Delta T/T$ na čase t , přičemž T je průměrná perioda jednoho kmitu, určená pomocí průměrné frekvence ω dané vztahem (3.8).

Podle modelu (3.11) mohou v principu nastat dvě situace synchronizace ve fázi, zachycené v grafech na obrázcích 3.4 a 3.5.

Pro výsledek zachycený v grafu na obr. 3.4 byly stanoveny následující počáteční podmínky: $\theta_1 = \pi/7$, $\theta'_1 = 0$, $\theta_2 = -\pi/6$, $\theta'_2 = 0$. Vývoji na obrázku 3.5 odpovídají počáteční podmínky: $\theta_1 = -\pi/6$, $\theta'_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/6$, $\theta'_2 = 0$. Z obou grafů lze vyčíst, že časový rozdíl ΔT je pro $t = 0$ asi 0,5 průměrné periody, což odpovídá skutečnosti, že počáteční úhlové výchylky kyvadel jsou vzájemně opačně orientované – stejné velikosti jsou však jen na obrázku 3.5.

Při porovnání obou případů je patrný hlavní rozdíl v limitním chování metronomů. Zdá se, že na obr. 3.4 posloupnost konverguje k nule, zatímco na obrázku 3.5 k hodnotě 1. První situace naznačuje, že pomalejší metronom nakonec „dožene“ druhý, rychlejší a nadále jejich kyvadla kmitají shodně, zatímco v druhém případě uteče rychlejší metronom o celou jednu periodu, než jej pomalejší zbrzdí, takže se jejich fázový rozdíl bude konstantně rovnat jednomu cyklu (tedy vlastně 2π), což ovšem díky periodicitě dějů stále znamená synchronizaci ve fázi. Ve skutečnosti nejsou limitní hodnoty přesně 0 a 1. Situace zachycené v grafech ukazují, že se fáze metronomů budou po ustálení drobně lišit o nějakou konstantní hodnotu. To by měl být důsledek hlavně rozdílných vlastních frekvencí, neboť jsou-li do rovnic vloženy identické parametry pro oba metronomy, synchronizace odpovídá přesně hodnotám $\Delta T/T = 0$, resp. $\Delta T/T = 1$.



Obrázek 3.4: Synchronizace metronomů ve fázi - fázový rozdíl ≈ 0

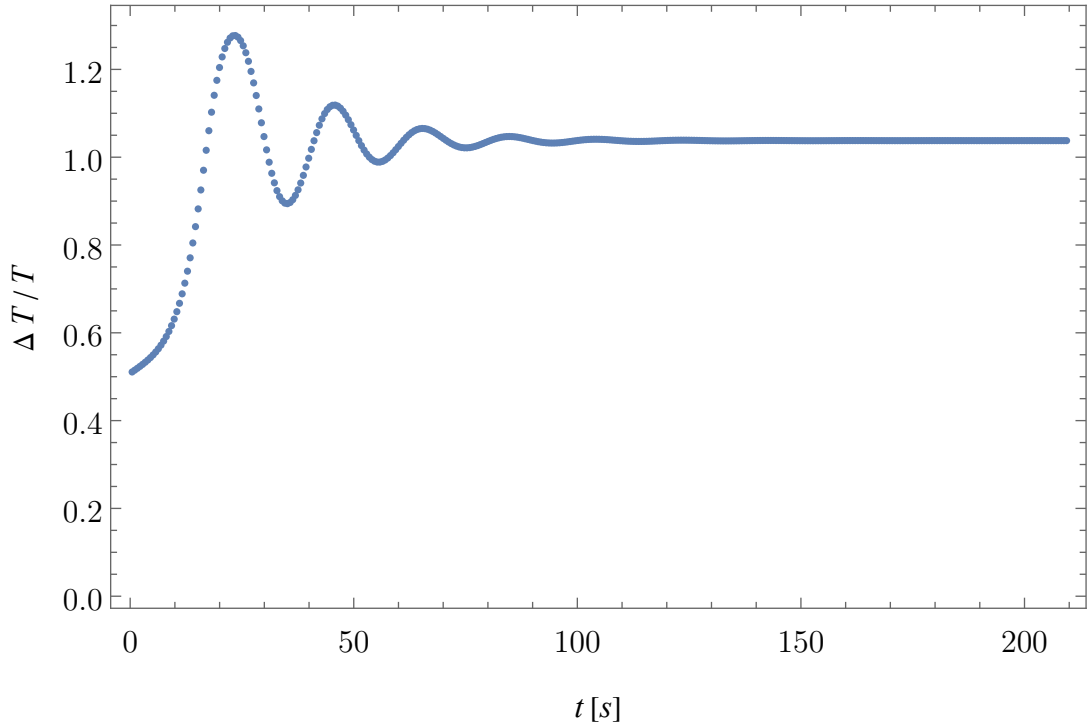
Počátek posloupnosti $\Delta T/T$ umístěný v hodnotě blízké 0,5 může vyvolat otázku, zdali by výsledný fázový posun při synchronizaci mohl dosáhnout právě speciální hodnoty $\Phi = \pi$ – ekvivalentně vyjádřeno, jestli může $\Delta T/T \rightarrow 0,5$ pro $t \rightarrow \infty$? To by znamenalo, že kyvadla kývají přesně proti sobě. Že by se mohlo jednat o realizovatelný výsledek, či dokonce v určitých podmínkách o stabilní stav, do kterého systém dospěje vždy, napovídá hned několik zdrojů⁶, o kterých je více pojednáno v části 3.2.3. V obou grafech 3.4 a 3.5 metronomy totiž začínají téměř v protifázi, časový vývoj však ukazuje, že se nakonec situace převrátí do synchronizace ve fázi.

Tuto skutečnost lze vysvětlit v zásadě dvěma způsoby. Jednak může platit, že ustálená protifáze, ačkoliv označitelná jako synchronizované chování, by neměla být ani udržitelná, ani dosažitelná. Při vývoji systému by neexistovaly podmínky, které by zajistily kmitání kyvadel přesně proti sobě. V terminologii zkoumání nelineárních dynamických systémů se tudíž nejedná o tzv. stacionární bod vývoje systému, do kterého by bylo možno stabilně dospět a v němž by se systém usadil a dalšími změnami neprocházel.

Naopak se sice může jednat o stacionární stav, který je ale nestabilní. Pokud v takovém stacionárním bodě systém začne a není narušován vnějšími vlivy, pak v tomto stavu setrvává navždy. Jakákoliv drobná odchylka, která systém „postrčí“ z tohoto stavu pryč, zajistí jeho změnu, která může spět k nějakému stabilnímu stacionárnímu stavu, nebo se vývoj nikdy nezastaví (žádný stacionární bod neexistuje)⁷. Do nestabilního stacionárního stavu se systém nikdy sám nevrátí.

⁶Demonstrační video: <https://www.youtube.com/watch?v=5JFTfcqk-6w>. Nelze sice jistě hovořit o synchronizaci v protifázi, neboť je video příliš krátké a k překlopení do synchronizace ve fázi by mohlo dojít později. Jako ukázka, co si pod tím představit, je však vhodné.

⁷Výborným příkladem je převrácené kyvadlo. Existuje jediný bod, v němž kyvadlo udrží rovnováhu – pokud je jeho rameno rovnoběžné se směrem působící gravitační síly – nestabilní



Obrázek 3.5: Synchronizace metronomů ve fázi - fázový rozdíl $\approx 2\pi$

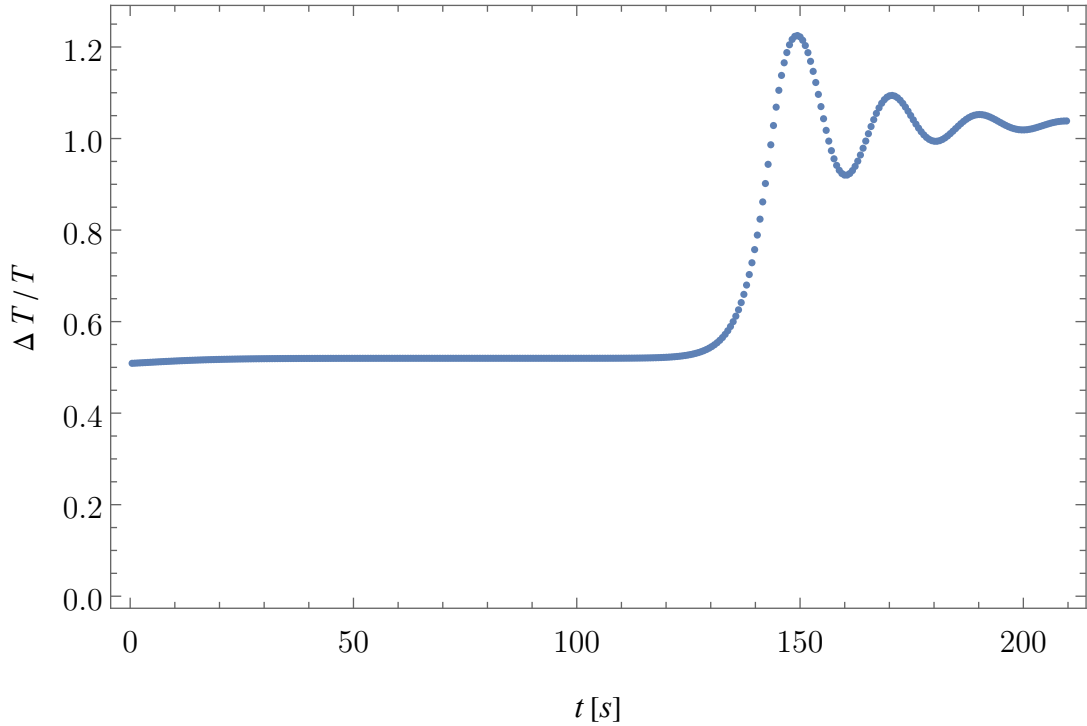
To vypovídá o citlivosti takového stavu a mohlo by platit, že numerickým řešením jej nelze v nastavení s uvedenými počátečními podmínkami nalézt. I drobné chyby, které jsou do řešení vneseny použitými numerickými metodami, mohou synchronizaci v protifázi narušit. Že však má situace $\Phi = \pi$ pro synchronizaci nějaký význam totiž napovídají právě jiná nastavení počátečních podmínek. Například volba shodně velkých počátečních výchylek v protifázi, přičemž jsou oba metronomy nastaveny jako identické (mají shodnou vlastní frekvenci). Vývoj situace je na obrázku 3.6.

Z grafu na obr. 3.6 lze vyčíst, že určitý čas se protifáze drží a zdá se stabilním stavem, což je však okolo 140 sekund vyvráceno. Zde dojde k náhlé rychlé změně fázového rozdílu a následně ustálení fázového zámku poblíž hodnoty $\Delta T/T = 1$. Předchozí úvaha ukazuje, že synchronizaci v protifázi nelze v modelu dosáhnout ani s identickými metronomy. Lze si tak klást otázku, zdali významnou roli v tomto problému nehrají jiné parametry, kupříkladu síla vazby β . Přesněji řečeno je možné se ptát, jak na tomto parametru závisí vývoj celého systému?

3.2.1 Závislost na síle vazby

V první řadě je třeba zmínit, že parametr β , který má roli síly vazby, má díky svému zavedení v rovnicích (3.10) určitý horní odhad. Stačí brát hmotnost $M = 2m$, což je dolní odhad hmotnosti M , při němž lze ještě předpokládat plat-

stacionární bod. Při drobném narušení však spadne a dospěje do stabilního stacionárního stavu – opět rovnoběžně se směrem gravitace, nyní však kyvadlo visí dolů. Pokud by kyvadlo například viselo na nějakém vibrujícím závěsu, mohlo by dojít k tomu, že se nikdy v žádném místě nezastaví – pak stacionární bod neexistuje.



Obrázek 3.6: Vývoj fázového rozdílu identických metronomů začínajících v protifázi

nost podmínek na zvolený systém souřadnic⁸. Tím platí pro horní odhad, za užití hodnot stanovených pro metronomy na začátku sekce, $\beta \approx 0.083$.

Vyšší hodnota β při stálých parametrech metronomů je dosažitelná snížením hmotnosti podložky. Lehká podložka je snáze uvedena do pohybu, jak je však patrné z následujících rozborů, nutně to nemusí znamenat silnější vazbu zajišťující synchronizaci. Stejně tak snížení hodnoty β znamená růst hmotnosti podložky, což v prvním pohledu může snižovat vazebnou schopnost. Pro $\beta = 0$, tedy $M \gg 2m$, vazba totiž zaniká. Obecně by toto tvrzení však bylo unáhlené, o čemž vypovídají i grafy na obrázku 3.7. Ukazují, jak souvisí výsledný časový vývoj a rozdílné hodnoty parametru β .

Pro přehlednost jednotlivých výsledků jsou vybrány jen určité hodnoty β . Počáteční podmínky jsou ve všech situacích stejné a jsou shodné s podmínkami v situaci na obr. 3.4. Výsledky ihned potvrzují, že limitní chování systému na tomto parametru značně záleží.

Vývoj s hodnotou $\beta = 0$ diverguje. V takové situaci vymizí člen s výrazem $\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)$ v rovnicích (3.11) a jedná se o případ nezávislých kyvadel. Libovolně malé rozdíly ve vlastních frekvencích ω_i pak nutně způsobí nárůst časového, a tedy i fázového rozdílu mezi kyvadly. Prvotní pokles posloupnosti značí, že rychlejší metronom dohání tempo pomalejšího (začínají téměř proti sobě), než jej nakonec předběhne. To určují jednak frekvence metronomů, jednak počáteční výchylky. Při této konfiguraci metronomy nejsou schopny s podložkou vůbec hýbat.

Pro hodnoty v rozmezí $0 < \beta < 0,06$ podle grafů dochází k jedné ze synchro-

⁸Pro zanedbání odporu vzduchu při pohybu desky je třeba aby $M \geq 2m$ – viz poznámka pod čarou 3.

nizací, které byly diskutovány na obrázcích 3.4 a 3.5. Ukazuje to, že podložka, ačkoliv velmi hmotná, zde již roli vazby plní. Dokonce v porovnání s dalšími grafy vykazuje i rychlejší dosažení synchronizace, asi okolo 100 s. Nadále se projevuje pro hodnotu $\beta = 0,071$ zajímavý jev. Synchronizace se dosáhne pro časový rozdíl $\Delta T/T = 2$, tedy rychlejší metronom stačí „utéct“ pomalejšímu o dvě periody, než se projeví účinek vazby, nebo než je pomalejší metronom urychlen pohonným mechanismem tak, aby vůbec druhý metronom stačil ovlivnit. Této skutečnosti lze dosáhnout pro více hodnot β , než ukazuje graf na obrázku 3.7, což bylo zjištěno jemnějšími změnami parametru.

Pro hodnoty $0,075 \leq \beta$, což by odpovídalo desce lehčí, než v předchozích případech, dochází ke změně limitního chování. Relativní časový rozdíl začíná oscilovat v určitém rozsahu a k synchronizaci vůbec nedochází. Oproti $\beta = 0$, kdy také nedojde ke sjednocení chování metronomů, se však metronomy stále ovlivňují. Zajímavé je pozorování, že k oscilaci dochází okolo nějaké hodnoty blízké hodnotě $\Delta T/T = 0,5$, což je hodnota odpovídající případné synchronizaci v protifázi. Také lze z posledních dvou grafů na obrázku 3.7 vyčíst, že se rozsah oscilace se zvětšujícím se β zmenšuje. Vystává otázka, zdali toto není cesta k dosažení synchronizace v protifázi, ovšem je třeba opět připomenout omezenost β shora hodnotou $0,082^9$.

Podrobnější rozbor vývoje systému v závislosti na β a jeho jemnější dělení v určené horní hranici neodhalil pro zmíněné počáteční podmínky žádné další zajímavé výsledky. Ačkoliv tedy parametr β v modelu ovlivňuje, zda dojde k synchronizaci a s jakým fázovým rozdílem, synchronizace v protifázi s jeho změnou a užitými podmínkami pro numerická řešení dosažitelná není.

3.2.2 Závislost na rozdílu frekvencí

Nadále byla proměřována závislost na parametru Δ . Ten popisuje, jak moc rozdílné jsou frekvence metronomů. Výpočet by v prvním přiblížení šlo provést čistě přes posloupnost různých hodnot Δ . Problémem je, že v reálné situaci dochází k úpravě frekvence kmitání metronomu pomocí posunu závažíčka na delším rameni kyvadla (viz obrázek 3.1), což s sebou nese změnu pozice těžiště $r_{tk,i}, i = \{1, 2\}$, ale i momentu setrvačnosti každého kyvadla. Vzhledem k tomu, že jsou v rovnicích (3.11) uvažovány momenty setrvačnosti pro oba metronomy shodné, což se také projevuje v definici parametru β , je tato skutečnost při změně Δ reflektována následovně: pozice závažíčka na jednom metronomu zůstává konstantní – tedy je konstantní i ω_1 – mění se pouze $r_{tk,2}$, z níž je ω_2 určena pomocí

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{mr_{tk,2}g}{J}}.$$

To je důležité právě také pro parametr β , který při povolených rozdílech frekvencí prochází nezanedbatelnou změnou $\Delta\beta \approx 10^{-3}$ (závisí na průměrné frekvenci ω a r_{tk}) a jak bylo vidět v sekci 3.2.1, ovlivňuje výslednou synchronizaci. Proto je ve výpočtech každého časového vývoje zahrnuta pro danou hodnotu Δ právě i příslušná hodnota β .

⁹Pokud se v modelu ignoruje dolní odhad hmotnosti M a parametr β se při uvažované konfiguraci zvětšuje nad hodnotu $0,083$, ukazuje se, že by oscilace vymizely a hodnota $\Delta T/T$ se ustálila na hodnotě $0,5$.

Vzhledem k tomu, že parametr Δ je zaveden pro dostatečně malé odchylky vlastních frekvencí ω_i od průměrné frekvence, je nutné tento fakt také zohlednit – přesněji byl parametr Δ brán v takovém rozsahu, aby platilo

$$\left| 1 - \frac{(1 + \Delta)}{\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2} \right| \leq 10^{-3},$$

což odpovídá hornímu odhadu frekvenčního rozdílu

$$|\omega_1 - \omega_2| \leq 0.5.$$

Výsledek pro podmínky uvedené na počátku kapitoly je zachycen v grafu 3.8 (vodící linky odpovídají hodnotám $\Delta T/T \in \{1, 2, 3, 4\}$). Zde je vidět, že k synchronizaci dochází pouze pro vzájemně blízké frekvence. Ukazuje to interval okolo $\Delta = 0$, kde v závislosti na parametru dojde k synchronizaci ve fázi odpovídající kladnému celočíselnému násobku 2π . To je dáno právě rozdílnými frekvencemi a jak bylo zmíněno dříve, záleží na tom, kdy se metronomy doženou. Pro Δ dostatečně vzdálené od 0 již časové rozdíly $\Delta T/T$ divergují.

To, že není interval, v němž k synchronizaci dochází, souměrný podle $\Delta = 0$, lze vysvětlit právě popsanou souvislostí parametrů β , ω a hodnoty Δ . Je-li $\Delta < 0$, znamená to, že $\omega_2 > \omega_1$ a vzhledem ke konstantní hodnotě ω_1 je průměrná frekvence vyšší než pro $\Delta > 0$. Tedy pro $\Delta < 0$ je hodnota β vyšší než pro $\Delta > 0$. Tyto rozdíly β mohou ovlivnit limitní chování a mít za následek právě nesymetričnost intervalu.

Vzhledem k tomu, že parametr β lze nezávisle na frekvencích upravovat hmotností podložky, naskýtá se otázka, jak se různé počáteční podmínky pro β promítnou do proměňování vývoje v závislosti na Δ .

Pokud platí

$$M \approx 2m,$$

pak je v závislosti na Δ výsledný graf typově stejný, jako na obrázku 3.8 a k žádným překvapivým situacím nedochází¹⁰. Co je však zajímavé, že při studování závislosti na parametru β se při zadaných podmínkách zdála synchronizace snáze dosažitelná pro menší hodnoty β , větší hodnoty M . Metronomy se sjednotily s menším fázovým rozdílem. Jak ale ukazuje obrázek 3.9, s větší hmotností M , tedy menší hodnotou β se zmenšuje interval okolo $\Delta = 0$, na němž dochází k synchronizaci.

Ve výsledku se dostáváme k zajímavé vzájemné závislosti. Je-li β příliš velká, nemusí k synchronizaci vůbec dojít ani při malých frekvenčních rozdílech. Pokud však k synchronizaci dospět lze, větší β ji umožňuje pro větší frekvenční rozdíly. Na druhou stranu příliš malá β interval synchronizace okolo $\Delta = 0$ značně omezuje. Tato vzájemná souvislost mezi parametry a vliv jejich kombinace na limitní chování by tak mohla napovídat o křehkosti synchronizační tendence.

¹⁰Opačnou úpravu hmotnosti, tedy volbu $M < 2m$, nelze uvažovat kvůli předpokladům užití soustavy souřadnic v části 3.1.

3.2.3 Synchronizace v protifázi

Při proměrování závislosti vývoje systému na síle vazby se pro hodnoty parametru $\beta > 0.75$ projevovala oscilace časového (fázového) rozdílu okolo hodnoty 0.5, poloviny jedné periody (protifázi). Pro dané podmínky byl parametr β omezen shora kvůli požadavku na hmotnost podložky M .

Jiný způsob, jak měnit hodnotu β , byl diskutován dříve v souvislosti s parametrem Δ – průměrnou frekvencí metronomů. Pokud se například vezme $\omega = 12.8 \text{ s}^{-1}$, čehož by bylo možné v realitě dosáhnout například odstraněním posuvného závažíčka z horního ramene metronomu, vzroste při hmotnosti podložky $M = 2m$ parametr β na hodnotu 0.13, což je značně vyšší hodnota, než nejvyšší proměřovaná v sekci 3.2.1. Další parametry měněny nebyly, počáteční podmínky jsou stejné jako v situaci na obrázku 3.4, výsledek výpočtu zachycuje obrázek 3.10.

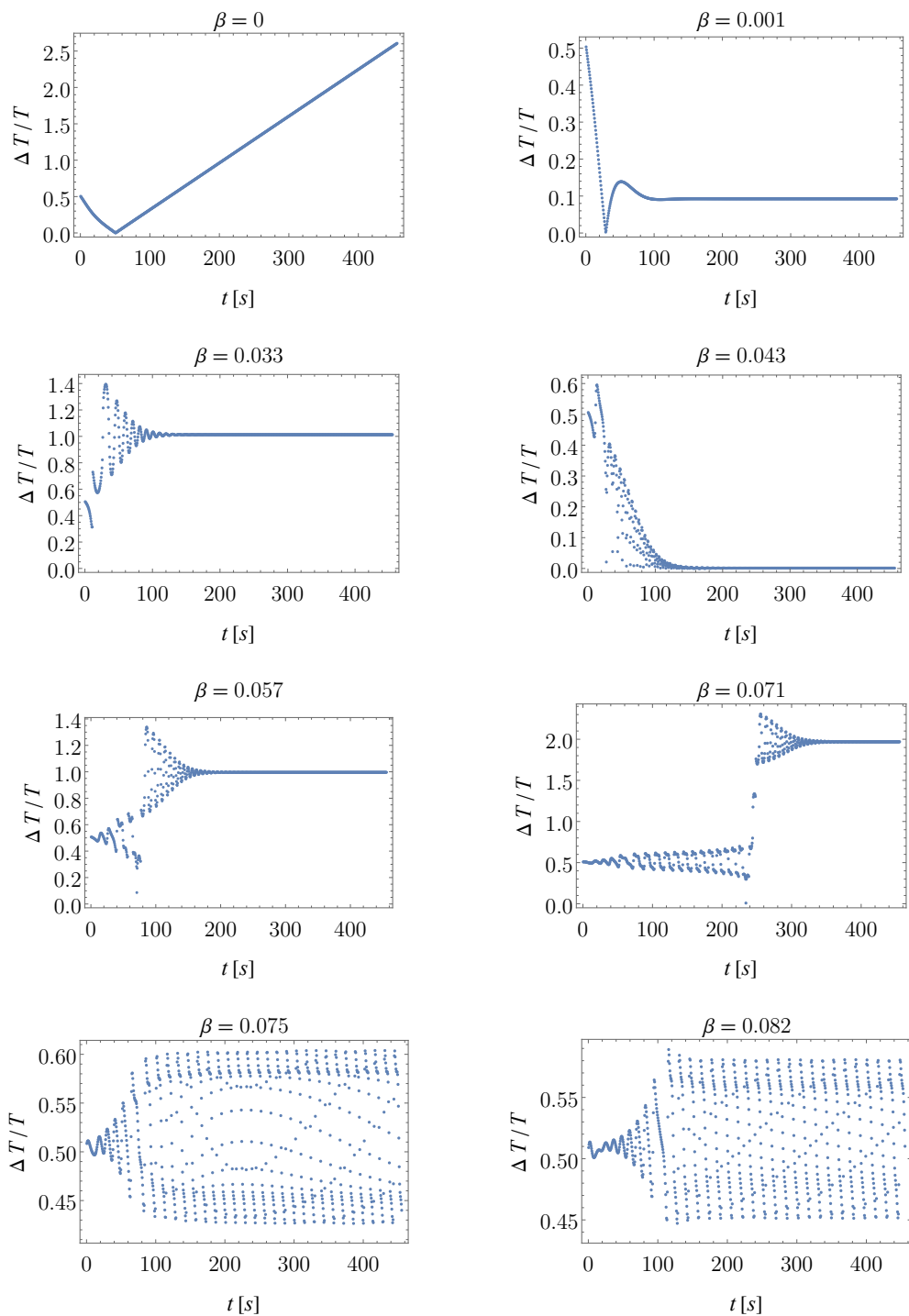
Experimentální ověření dosažení synchronizace v protifázi při odstranění závažíček z ramen metronomů je krátce diskutováno například i v práci Pantaleona (Pantaleone [10]). Zde je též naznačeno, že zvyšování β příliš neodpovídá pozorovaným situacím, kdy k protifázi došlo – prvotní úvaha totiž vede spíše ke snižování hodnoty β . Inspiraci této myšlenky lze najít i ve studiích Huygensových hodin, například v článku Bennetta a kol. (Bennett a kol. [1]), nebo Ramirez a kol. (Ramirez a kol. [11]), kde je synchronizace v protifázi hlavním předmětem diskuze. V jednoduchosti, Huygensovy hodiny jsou brány jako kyvadla zavěšená na silném trámu velké hmotnosti. V takovém nastavení by pak parametr β měl být spíše menší.

Ačkoliv jsou zkoumané modely v [1] a [11] značně odlišné oproti modelu uvažovanému v této práci, velkou roli zde pro limitní chování hraje poměr hmotnosti kyvadel a celého systému, což je ovšem obsaženo právě i v parametru β . Podle [1] by tedy měla k synchronizaci v protifázi vést menší hodnota parametru β , tedy větší hmotnost podložky oproti hmotnosti kyvadel, což si odporuje s poznatkem na začátku této sekce. Naproti tomu v [11] jsou řešeny obě zdánlivé paradoxní situace – k protifázi vede za určitých podmínek jak malá hodnota, tak velká hodnota β . Vysvětlení tohoto jevu je v [11] přisouzeno nikoliv přímo síle vazby, ale tomu, jaké brzdící síly v systému působí.

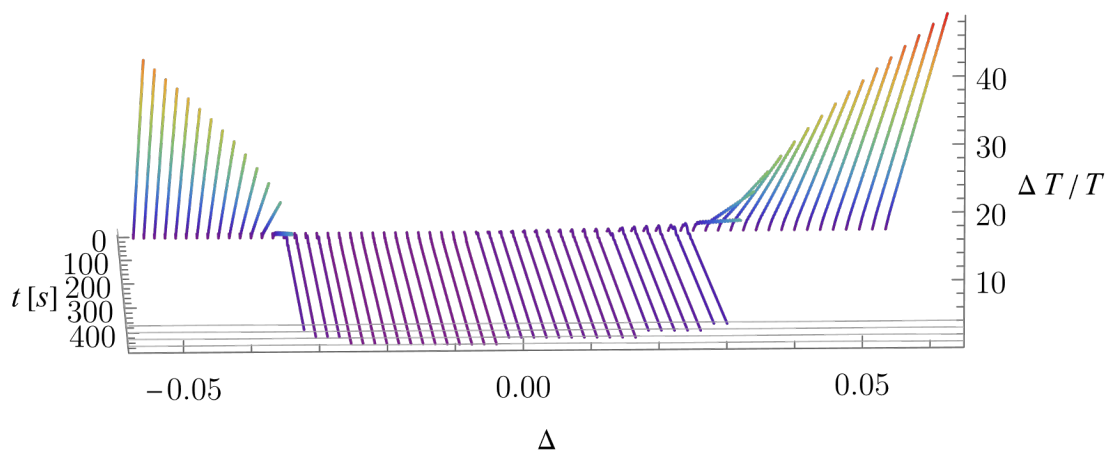
To by mohl být případ i modelu použitým pro metronomy. Jedním ze základních předpokladů, na kterém je vystavěn souřadný systém, v němž rovnice nabývají tvaru (3.11), je zanedbání pohybu podložky vůči pohybu metronomů. Vyšší frekvence metronomů v kombinaci s nižší hmotností podložky může představovat zesílení tohoto předpokladu. Lehčí podložka sice snáze podléhá pohybu kyvadel, vysoká frekvence však způsobí, že podložka nestihá „reagovat“, což by bylo možné analogicky popsat silnějšími vnějšími brzdícími mechanismy, působícími na podložku. Tento efekt je zmiňován i v [10], kdy je možné synchronizace v protifázi dosáhnout právě zvýšením vnějších brzdících efektů (pohyb podložky na plechovkách na mokřím podkladu). Pouhou úpravou hmotnosti podložky, jak bylo ukázáno při změnách β , tohoto efektu v užitém modelu dosáhnout nelze. To je logické i vzhledem k tomu, že parametr β je vystavěn na požadavcích uvedených při odvozování pohybových rovnic, aby na těžiště soustavy (a tedy na podložku) žádné vnější síly nepůsobily.

Synchronizace v protifázi tedy je pro jednotné limitní chování významná i ve zde použitém modelu. Jak je však vidět, že podmínky jejího dosažení neodpovídají běžnému nastavení metronomů a její vysvětlení může být skryto za usuzovanými

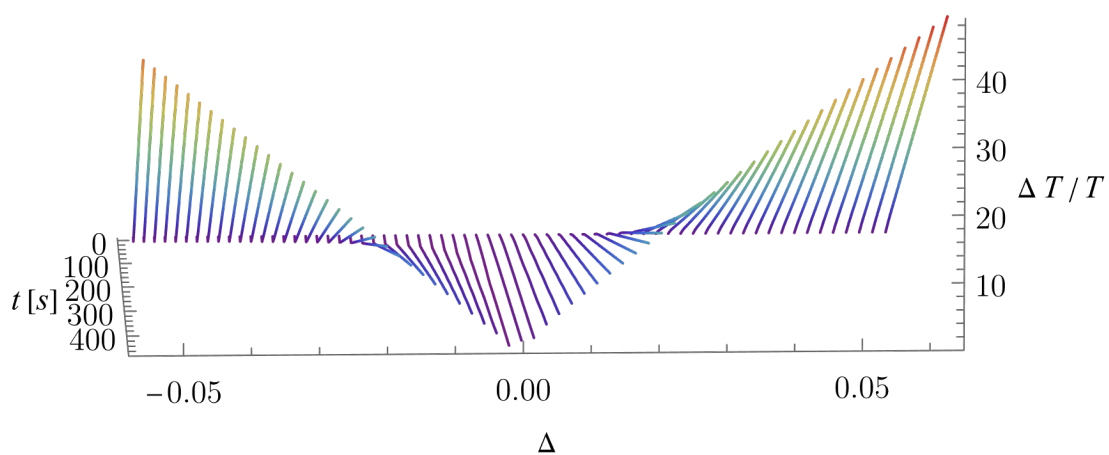
podmínkami při analýze rovnic v modelu použitých.



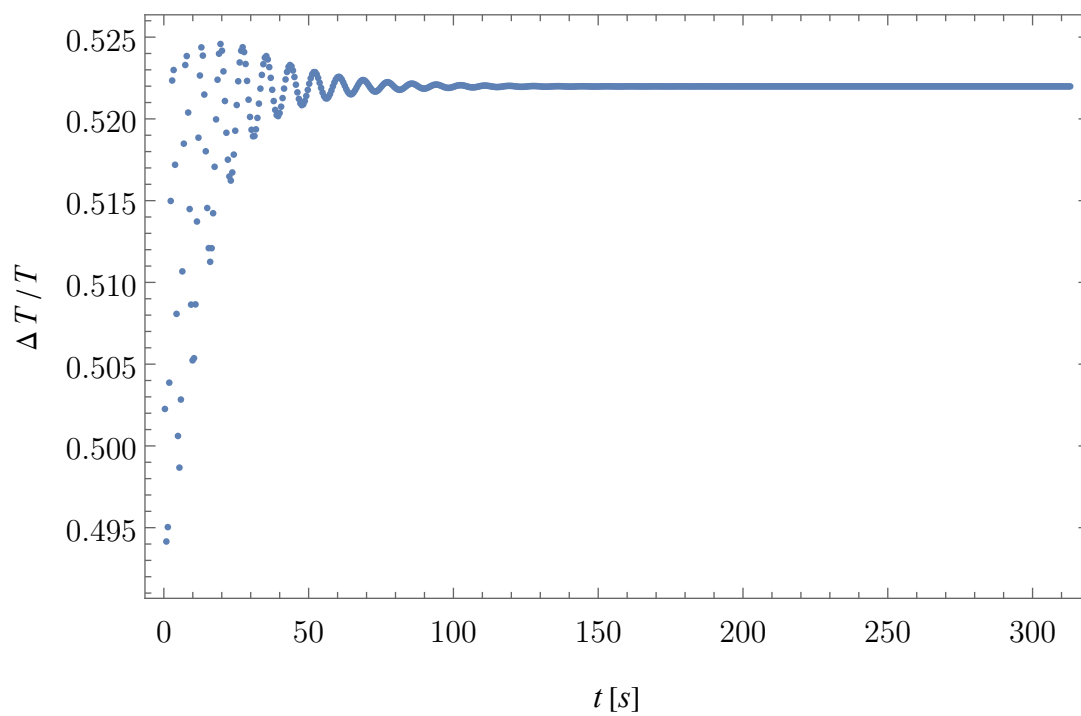
Obrázek 3.7: Závislost synchronizace na parametru β



Obrázek 3.8: Závislost synchronizace na parametru Δ



Obrázek 3.9: Závislost synchronizace na parametru Δ – vyšší hmotnost podložky



Obrázek 3.10: Synchronizace v protifázi za speciálních podmínek

Závěr

Diplomová práce je rozdělena do tří primárních kapitol. Každá kapitola představuje nějaký matematický model synchronizace, ať s konkrétním zaměřením (světlušky a metronomy), nebo obecný (Kuramotoův). Uspořádání kapitol je podle obtížnosti modelu, jímž se kapitola zabývá, respektive složitosti numerických řešení, neboť teoretické části nejsou z důvodu zaměření a náročnosti práce probrány příliš do detailů. Veškeré obrázky a grafy v práci obsažené jsou vytvořeny převážně v programu Wolfram Mathematica a v programu GeoGebra.

První část se týká nejjednoduššího modelu představovaného blikající světluškou a vnějším zdrojem, kterému se světluška snaží přizpůsobovat. Model je převzatý ze Strogatzovy knihy [14]. Představena jsou numerická řešení, pro různé počáteční parametry systému světluška-zdroj. V této kapitole je také vysvětlen termín stacionárního bodu (stabilního i nestabilního) pomocí příslušných grafů. Rozšíření kapitoly spočívá ještě v přidání druhého zdroje a příslušných úpravách modelu, kterých je, na základě práce Pantaleona [10], navrženo několik možných. Výsledky modelů byly porovnávány s výsledky situace jednoho zdroje a posuzována jejich konzistentnost. Právě zde dochází ke zmínce o Kuramotově modelu, který je předmětem druhé kapitoly.

Ta navazuje zobecněním situace dvou vzájemně vázaných oscilátorů. I zde je proveden rozbor modelu a představena numerická řešení. Obdobně jako v knize Strogatze [14] je pro grafické vyobrazení řešení zvolen čtverec o délce hrany 2π ve fázovém prostoru dvou oscilátorů, přičemž z důvodu periodicity jsou ztotožněny protilehlé strany. Ukázány jsou zde různé vývoje na základě volených počátečních podmínek (například, jak se chová nestabilní stacionární bod, jak vypadá úplná synchronizace, k jakému vývoji lze dospět, pokud jsou oscilátory příliš rozdílné ve vlastních frekvencích).

Část týkající se myšlenek A. Winfreeho je jakýmsi mostem k obecnému Kuramotovu modelu, neboť obsahuje myšlenky, na kterých Kuramoto svoji práci stavěl. Důležité zde jsou předpoklady podobnosti oscilátorů, pouze slabé vazby mezi nimi a pro každý oscilátor, je-li volný, dospění do jednoho stabilního periodického stavu. Nadále pak také vyvozený výsledek, že ve velkém množství vázaných oscilátorů vzniká při překročení určité hodnoty vazebné síly, tzv. kritické hodnoty, částečná synchronizace, a to mezi oscilátory, které mají nejpodobnější vlastní frekvence. Oscilátory s vlastními frekvencemi příliš odlišnými se s touto skupinou nesynchronizují.

Jak na těchto úvahách Kuramoto vystavěl svůj model je rozebráno v další sekci. Zde je uveden obecný model, nastínění jeho zjednodušení a velice důležitý prvek – parametr uspořádání, který je vlastně zobecněním fázového rozdílu užívaného v situaci dvou oscilátorů, a který se dále používá pro analýzu vývoje skupiny oscilátorů. Opět jsou výsledky numerických výpočtů zaznamenány převážně v grafech. Ty ukazují, že takovýto matematický konstrukt opravdu dospěje při vhodných podmínkách do stavu jednotného chování pro všechny komponenty.

Poslední část druhé kapitoly se zabývá porovnáním kritické hodnoty vazebné síly nalezené v numerických řešeních a teoreticky určené pomocí vzorce odvozeného přímo Kuramotoem. Diskutována zde je vcelku dobrá shoda, a to pro různé konfigurace systému. Žádné další teoretické podklady zde však uvedeny nejsou kvůli

jejich přílišné složitosti.

Třetí kapitola se týká nejkompexnější soustavy – dvou mechanických metronomů. Tato část byla volena hlavně z důvodu její vhodné prezentace, bez obtíží lze dohledat různá videa tohoto fenoménu (i s více než dvěma metronomy), některé odkazy jsou uvedeny přímo v textu. S trochou šikovnosti a s vhodnými pomůckami by bylo možné právě tuto část zařadit a předvést jako zajímavý příklad při výuce fyziky či matematiky. Přitom lze zmínit, že podobně se synchronizují například buňky v živých organismech (např. srdce) a zavést tak přesah do dalších předmětů.

V této kapitole je popsáno odvození pohybových (vývojových) rovnic metronomů, zdůvodněno užití jednotlivých parametrů a opět nalezena numerická řešení a analyzována jejich závislost na těchto parametrech. Grafické zpracování výsledků je zde doplněno o trojrozměrné grafy v situacích, kdy to bylo výhodné. Zajímavým výsledkem zde bylo nalezení speciálních podmínek, při kterých by metronomy měly kmitat proti sobě, tedy v protifázi.

Pro první dvě kapitoly byly vyrobeny interaktivní aplikace/animace, které mohou usnadnit pochopení diskutovaných situací a které jsou součástí příloh, případně dohledatelné na Wolfram Cloudu na adresách uvedených v závěru každé jednotlivé kapitoly.

Seznam použité literatury

- [1] BENNETT, M., SCHATZ, M. F., ROCKWOOD, H. a WIESENFELD, K. (2002). Huygens's clocks. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **458**(2019), 563–579. URL <https://www.jstor.org/stable/3067433>.
- [2] BUCK, J. (1988). Synchronous rhythmic flashing of fireflies. ii. *The Quarterly Review of Biology*, **63**(3), 265–289. URL <https://www.jstor.org/stable/2830425>.
- [3] DVOŘÁK, L. (2014). Lagrangeovy rovnice druhého druhu. *Skripta k přednášce Teoretická mechanika*. URL https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Teoreticka_mechanika/TM_02_LagrangeovyRovnice_2druhu_ver_02bb.pdf.
- [4] HANSON, F. E. (1978). Comparative studies of firefly pacemakers. *Fed. Proc.*, pages 2158–2164.
- [5] HOPE, R. (2006). Firefly synchronization. URL <https://www.math.hmc.edu/~dyong/math164/2006/runyeon/finalreport.pdf>.
- [6] KINGSBURRY, M., HUANG, M., MCINROE, B. a WAGSTAFF, W. (2012). Synchronization of led fireflies using finite line of sight. URL https://nldlab.gatech.edu/w/images/4/4c/Mark_Kingsbury.pdf.
- [7] KURAMOTO, Y. (1975). Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics*, **39**, 420–422.
- [8] KURAMOTO, Y. a NISHIKAWA, I. (1987). Statistical macrodynamics of large dynamical systems: case of a phase transition in oscillator communities. *Journal of Statistical Physics*, **49**, 569–605.
- [9] MIROLLO, R. E. a STROGATZ, S. H. (1990). Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **50**(6), 1645–1662. URL <https://www.jstor.org/stable/2101911>.
- [10] PANTALEONE, J. (2002). Synchronization of metronomes. *American Journal of Physics*, **70**, 992–1000.
- [11] RAMIREZ, J. P., FEY, R. H. B., AIHARA, K. a NIJMEIJER, H. (2014). An improved model for the classical huygens' experiment on synchronization of pendulum clocks. *Journal of Sound and Vibration*, **333**, 7248–7266. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2014.08.030>.
- [12] STROGATZ, S. H. (2000). From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, **143**, 1–20.
- [13] STROGATZ, S. H. (2003). *SYNC*. First edition. Hyperion. ISBN 0-7868-8721-4.

- [14] STROGATZ, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Second edition. CRC Press. ISBN 978-0-8133-4910-7.
- [15] UK. KFPP, Skripta – kurz fyziky pro DS. online. URL https://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/www/fyzika.html.
- [16] WINFREE, A. T. (1967). Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, **16**, 15–42.