David Holý: **Zavedení vektorového součinu**

Posudek oponenta bakalářské práce

Práce je věnována vektorovému součinu – jeho definici, vlastnostem a využití ve fyzice. Kapitola 1 uvádí jako motivaci studium otáčivých účinků sil (momentů sil) a přirozeným způsobem dospívá ke geometrické definici vektorového součinu. V kapitole 2 je z této definice a distributivity odvozen vzorec pro souřadnice vektorového součinu. V kapitole 3 jsou pomocí tohoto vzorce dokázány vlastnosti vektorového součinu, dále jsou uvedeny tři jednoduché geometrické aplikace a vyjádření vektorového součinu pomoci Levi-Civitova symbolu. Kapitola 4 je věnována pohybu částice v magnetickém poli a vzorci pro Lorentzovu sílu $F = qv \times B$. Kapitola 5 popisuje vektorová pole, pojem rotace a uvádí způsob, jak pomocí rotace poznat, že jde o pole konzervativní.

Práce neobsahuje nové výsledky, je zaměřena na didaktiku vektorového součinu s důrazem na využití ve fyzice. Je napsána poměrně kultivovaně, čtivě a doplněna velkým množstvím obrázků. Počet překlepů a gramatických chyb je vzhledem k rozsahu práce přiměřený, pečlivější kontrola by ale jistě některé z nich odhalila (např: 3^{20}: definující → definujícím; 8_6: otáčením → otáčení; 9^8: sílá → síla; 12^{12}: stejně → stejně jako; 12_{12}: Dostálo → dostalo; 13^{13}: jednozačně → jednoznačně; 15^8: je a, b → je z a, b; 22^8: vlasnosti → vlastnosti; 22^8 a 43_3: narozdíl → na rozdíl; 34^{11}: rigorizitě → rigorozitě; 34^{17}: polem → pole; 34^{18}: určeného → určenému; 39^2: oxy → osy; 41^{16}: nesouvísi → nesouvisí; 44_6: akumulátorech → akumulátorů). Oceňuji, že autor prostudoval velké množství zdrojů, které jsou v práci citovány.

Kapitoly 1–3 jsou podle mého názoru didakticky poměrně zdařilé, mám k nim jen málo připomínek:

1) V úvodu autor píše, že kapitola 1 má být srozumitelná i pro studenta 1. ročníku střední školy. V kapitole se však bez vysvětlení používají termíny báze, orientace, lineární závislost/nezávislost, které středoškolák v 1. ročníku nejspíše nebude znát. Těmto pojmům by se přitom dalo poměrně snadno vyhnout.
2) Na straně 14 se pracuje s tím, že momenty dvou sil lze sčítat jako vektory. To vlastně znamená, že otáčivý účinek součtu dvou sil je stejný jako součet otáčivých účinků jednotlivých sil. Autor píše, že to víme ze zkušenosti. Podle mého názoru to není vůbec samozřejmé, samotný pojem „moment síly" není úplně triviální (jeho zavedení je koneckonců věnována velká část kapitoly 1). Za vhodnější bych považoval spoléhat se pouze na znalost vektorového skládání samotných sil (nikoliv jejich momentů) a z něj pomocí distributivity vektorového součinu odvodit poznatek o sčítání momentů. Zde autor postupuje obráceně, poznatek o sčítání momentů uvádí jako motivaci pro distributivitu vektorového součinu – zdá se mi, že složitější výsledek je použit jako motivace pro jednodušší výsledek.
3) Strana 15: Důkaz distributivity vektorového součinu je podle mého názoru neúplný. Autor nejprve vyšetřuje případ, kdy vektory b, c jsou kolmé k a. Pokud to neplatí, tak to ale ještě nemusí znamenat, že $b + c$ není kolmý k a (složky b, c ve směru rovnoběžném k a se mohou odečíst). Závěr důkazu je nesrozumitelný: Není řečeno, jaký úhel značí písmeno α na předposledním řádku. Věta na posledním řádku tvrdící, že výsledný vektor splňuje definiční podmínky vektorového součinu, je nesrozumitelná. Který vektor má autor na mysli? Na předchozím řádku jsou velikosti vektorů, nikoliv vektory. Jak z tohoto výpočtu plyne distributivita, kterou dokazujeme?
4) Strana 17: V předchozí kapitole jsme dokázali distributivitu jen pro součiny typu $a \times (b + c)$, zde ji však bez komentáře používáme i pro $(a + b) \times c$. Algebraický důkaz distributivity pro $(a + b) \times c$ je až na str. 22.
5) Strana 19: Důkaz obrázkem je zdlouhavý a málo obecný, nevidím v něm žádnou didaktickou výhodu. Rovnost $(av) \times w = a(v \times w)$ lze snadno ověřit přímo z geometrické definice vektorového součinu pro libovolné vektory v, w a číslo a.
6) Strana 20: Formulace „vektor e_3 tvoří bázi levotočivou" (a podobná formulace v předchozí větě) je nešťastná, vektor sám o sobě netvoří bázi.
7) Strana 23: V sekci 3.1.2 na začátku třetího důkazu chybí číslo a. Druhá věta v poznámce pod čarou nedává smysl.
8) Strana 24: Věta v sekci 3.2.1 by mohla být formulována jako ekvivalence, nikoliv jen jako implikace.

Kapitola 4 je poněkud problematická, uvádím konkrétní připomínky:

9) Za hlavní problém kapitoly 4 považuji to, že není jasné, jaká je definice vektoru magnetické indukce B. Obvykle tento vektor bývá definován implicitně tím, že na částici s nábojem q a vektorem rychlosti v působí magnetické pole silou $qv \times B$ (viz např. Feynmanovy přednášky z fyziky, 2. díl, s. 224, nebo Wikipedia, `https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_force`). Při použití této definice je velká část kapitoly 4 (zejména popisované experimenty) zbytečná. Pracuje autor s nějakou jinou definicí B? Pokud ano, s jakou? Jak k definici B přistupoval Lorentz?

10) Strana 29: Tvrzení, že pokud velikost rychlosti zůstává konstantní, pak síla působící na částici je kolmá k vektoru rychlosti, nemusí být podle mého názoru pro čtenáře zcela zřejmé. Probírá se tento fakt na střední škole? Autor dále píše: „Jak víme, pokud částici vystřelíme pod libovolným úhlem $\alpha \in (0, 90°)$, pozorujeme pohyb po šroubovici.“ Odkud to víme? Předpokládá se, že čtenář ví, co je šroubovice?

11) Strana 31: Tato sekce věnovaná experimentům opět nedává smysl, pokud není řečeno, s jakou definicí magnetické indukce B pracujeme a jak ji měříme. Druhá věta v poznámce 12 pod čarou nedává smysl.

12) Strana 32: Mluvit o vztahu (4.5) jako o definici je zavádějící. Lorentzova síla je jen speciální případ síly vyvolané magnetickým polem, není potřeba ji definovat. Vztah (4.5) spíše udává, jak ji vypočítat. Poznámka 14 pod čarou nedává smysl, pokud neuvedeme, v jakých jednotkách měříme B, což opět není jasné bez řádné definice B.

Ani kapitolu 5 nemohu hodnotit kladně. V úvodu autor píše, že je určena maturantům a studentům technicky zaměřených VŠ. Snaží se sice o čtivý výklad, některé věci však nejsou řádně vysvětleny, takže se domnívám, že čtenář, který se doposud nesetkal s křivkovým integrálem, rotací a konzervativními vektorovými poli nemá šanci výklad pochopit. Zdá se mi, že např. v klasických Feynmanových přednáškách z fyziky (1. díl, kapitola 14 a 2. díl, kapitoly 2–3) je tato problematika vyložena o dost srozumitelněji.
Kromě toho se domnívám, že kapitola svou náplní ani příliš nezapadá do bakalářské práce. Operátor rotace sice píšeme ve tvaru $\nabla \times F$, kde F je vektorové pole, ve skutečnosti však nejde o vektorový součin − symbol $\times$ zde pouze představuje pomůcku pro snadné zapamatování vzorce pro vyjádření rotace v souřadnicích. Další konkrétní připomínky:

13) Jeden z hlavních problémů je chybějící definice pojmu potenciál. Na str. 35 je v poznámce 5 napsáno, že z potenciálu lze pomocí gradientu vypočítat dané vektorové pole. Proč není uveden příslušný matematický vztah, který by bylo možné považovat za definici potenciálu? Za definici potenciálu pro konzervativní pole by bylo možné pokládat i vztah (5.2), který je zde ale formulován jako tvrzení. Na str. 44 se píše, že pro elektrostatické konzervativní pole můžeme zavést elektrický potenciál, ale není uvedeno, jak to udělat.

14) Motivační úvahy vedoucí k definici operátoru rotace mi připadají zcela nesrozumitelné: Na str. 39 se hovoří o jakýchsi příspěvcích k rotaci, není však vůbec jasné, co to znamená a proč by měly být vyjádřeny parciálními derivacemi. Podmínka (5.5) na nulovou rotaci je formulována jako postačující pro konzervativnost vektorového pole, ve skutečnosti je však i nutná. Škoda, že autor neuvádí žádný odkaz na důkaz tohoto tvrzení.

15) Úvodní věta sekce 5.1 na str. 34 je zavádějící. Není pravda, že každou vektorovou veličinu lze chápat jako vektorové pole. Např. rychlost hmotného bodu je vektor, ale není to vektorové pole.

Rozsah práce je nadstandardní, podle mého názoru by však bylo prospěšnější vynechat kapitolu 5 a o něco kvalitněji zpracovat kapitoly 1–4.

Za předpokladu, že se autor při obhajobě fundovaně vyjádří k výše uvedeným připomínkám (zejména k bodům 1, 3, 9, 11, 13, 14), doporučuji uznat práci jako bakalářskou a navrhuji hodnocení *velmi dobře.*

V Praze dne 24. 8. 2022

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK