Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Algebraizace v úlohách s geometrickým kontextem – žákovské obtíže a chyby

Algebraisation in problems with a geometric context – pupils' difficulties and mistakes

Bc. Štěpánka Benešová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika

Praha 2022

Prohlášení:

Odevzdáním této diplomové práce na téma *Algebraizace v úlohách s geometrickým kontextem – žákovské obtíže a chyby* potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 17. 11. 2022

Poděkování:

Ráda bych poděkovala prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za odborné vedení při zpracování mé diplomové práce, za cenné rady, připomínky, velkou trpělivost, pečlivost a čas, který mé práci věnovala.

Abstrakt

Diplomová práce je zaměřena na úlohy, ve kterých žáci prokazují schopnost přecházet mezi geometrickou a algebraickou reprezentací. Cílem práce je identifikovat obtíže a chyby žáků při algebraizaci úloh s geometrickým kontextem před výukou algebry a po její výuce. Práce je rozdělena na teoretickou a experimentální část.

Teoretická část vymezuje potřebné pojmy, zabývá se vybranými výsledky z výzkumů a studií týkajících se algebraizace úloh s geometrickým kontextem a obsahuje analýzu pěti vybraných učebnic pro osmý ročník základní školy, které používají žáci účastnící se výzkumu. Analýza učebnic je zaměřena konkrétně na kapitoly, které se věnují tématům *Výrazy s proměnnou* a *Mocniny*. Učebnice jsou analyzovány z hlediska přítomnosti výše uvedených úloh.

Experimentální část je zaměřena na vlastní výzkum, který identifikuje obtíže a chyby žáků při řešení úloh, ve kterých žáci algebraicky modelují geometrické vztahy. Podkladem pro výzkum byly dva testové soubory úloh a následné individuální rozhovory s žáky. Jeden soubor úloh byl vytvořen pro žáky 6., 7. a 8. ročníků. Druhý soubor byl vytvořen pro žáky 9. ročníků. Testy byly zadány ve dvou základních školách a na jednom osmiletém gymnáziu. Každá úloha ze souboru je nejprve analyzována z hlediska předpokládaných obtíží a chyb žáků. V další části práce je provedena analýza žákovských řešení úloh. Součástí analýzy je popis nejčastějších obtíží a chyb spolu s ukázkami žákovských řešení a s ukázkami rozhovorů s žáky. Výsledky testování jsou zde také kvantitativně vyhodnoceny.

Závěr experimentální části práce shrnuje nejčastější obtíže a chyby žáků při řešení úloh v testu a při individuálních rozhovorech. Dále jsou zde uvedena didaktická doporučení ke zmírnění nebo odstranění obtíží a chyb.

Klíčová slova:

algebraizace geometrických vztahů, úlohy s geometrickým kontextem, analýza učebnic, řešení úloh, žákovské chyby

Abstract

The aim of this thesis are problems in which pupils demonstrate the ability to switch between geometric and algebraic representation. The task of the thesis is to correctly identify the difficulties and mistakes of pupils in the algebraisation of problems with geometric context before the teaching of algebra and after the teaching of algebra. The thesis consists of theoretical and experimental parts.

The theoretical part defines the necessary concepts, summarizes selected results of research and studies related to the algebraisation of problems with geometric context and contains an analysis of five selected textbooks for the eighth year of elementary school, which are used by pupils participating in the research. The analysis of textbooks is focused on chapters dealing with the topics of *Algebraic expressions with variables* and *Powers*.

The experimental part focuses on research identifying difficulties and mistakes of pupils in solving problems in which pupils try to algebraically model geometric relations. The basis of the research was two sets of test problems followed by an individual conversation with the pupils. The first set of problems was made for sixth-graders, seventh-graders and eight-graders. The second set of problems was made for ninth-graders. The tests were used in two primary schools and a gymnasium. First, each problem from the set is analyzed in terms of the expected difficulties and mistakes of the pupils. Pupils' solutions are analyzed in the following part of the thesis. The analysis contains a description of the most common difficulties and mistakes of pupils, along with examples of their solutions and interviews with them. The results of the testing are quantitatively evaluated.

The conclusion of the experimental part of the thesis summarizes the most common mistakes and difficulties of pupils in solving problems in the test and in individual conversations. The following are didactic recommendations to decrease or eliminate difficulties and mistakes.

Keywords:

Algebraisation of geometric relations, problems with geometric context, textbook analysis, problem solving, pupils’ mistakes

Obsah

Úvod

Pro zpracování diplomové práce jsem si vybrala téma *Algebraizace úloh s geometrickým kontextem.* Autoři Vondrová, Rendl a kol. prostřednictvím sekundární analýzy výsledků českých žáků při řešení úloh TIMMS 2007 identifikovali tzv. slabé úlohy, tedy úlohy, v nichž čeští žáci nedosáhli uspokojivého výsledku. Jednou ze slabších míst jsou podle nich úlohy, kde žáci modelovali geometrické vztahy algebraickými výrazy. Proto je hlavním cílem mé práce identifikovat obtíže a chyby žáků při algebraizaci úloh s geometrickým kontextem. Dalším cílem je porovnat, jakých chyb se dopouštějí žáci, kteří se ještě algebru neučili, a ti, kteří se ji již učili.

Práci jsem rozdělila na dvě hlavní části – teoretickou a experimentální. Teoretická část je rozdělena na tři oddíly. V prvním oddíle vymezuji potřebné pojmy (např. algebraizace, geometrické modelování) a poukazuji na propojení geometrického a symbolického myšlení v historii matematického poznání. V druhém oddíle popisuji výsledky čtyř výzkumů týkající se algebraizace v úlohách s geometrickým kontextem. V posledním oddíle teoretické části analyzuji čtyři řady učebnic pro 8. ročník základní školy a víceletá gymnázia s cílem zjistit, v jaké míře a v jakých souvislostech se v učebnicích vyskytují úlohy na algebraické modelování geometrických vztahů. Učebnice používají žáci 8. ročníků, kteří se účastnili mého výzkumu.

Experimentální část je rozdělena na pět oddílů. V prvním oddíle uvádím cíle a metody výzkumu. Podkladem pro vlastní výzkum jsou dvě sady testových úloh vycházejících z různých zdrojů a následné individuální rozhovory s vybranými žáky. Testy byly zadány ve dvou základních školách a na jednom osmiletém gymnáziu. Jedna sada testových úloh je vytvořena pro žáky 6., 7. a 8. ročníků, kteří neprošli výukou výrazů. Druhá sada je vytvořena pro žáky 9. ročníků. V dalším oddíle úlohy shrnuji z pohledu možných řešitelských obtíží a chyb. Ve třetím oddíle je popsána analýza dat. Ve čtvrtém oddíle experimentální části se zaměřuji na analýzu žákovských řešení testových úloh. Popisuji nejčastější obtíže a chyby. Výsledky jednoho souboru testových úloh porovnávám u mladších žáků (6., 7. ročníky) a starších žáků (8. ročníky). Výsledky druhého testu jsou porovnány mezi 9. ročníky. V jedné úloze srovnávám výsledky žáků 8. a 9. ročníků. Analýza úloh je doplněna o ukázky žákovských řešení a o rozhovory s vybranými žáky. V posledním oddíle shrnuji výsledky testů, rozhovorů a uvádím didaktická doporučení k obtížím a k chybám, které z analýzy testů a rozhovorů vyplynuly. Práce je doplněna přílohou, ve které je uvedeno zadání testů.

1 Teoretická část

1.1 Uvedení do problematiky

Vyjdeme-li z rámcového vzdělávacího programu[1] pro základní školy a víceletá gymnázia, nalezneme algebru v rámci oblasti nazvané číslo a proměnná. Tento zásadní okruh zavádí na druhém stupni základní školy do matematiky symbolický jazyk. Algebra je zde zastoupena dvěma očekávanými výstupy:

- M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad na součin pomocí vzorců a vytýkáním.
- M-9-1-08 Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.

K těmto výstupům se váže učivo výrazy a rovnice. Algebraické myšlení a jazyk rozvíjí i další algebraicky zaměřené téma funkce a s ním spojené výstupy:

- M-9-2-04 Žák vyjádří funkční vztah tabulkou rovnicí, grafem.
- M-9-2-05 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů.

Jazyk algebry žáci používají také v oblasti rovinné i prostorové geometrie při práci se vzorci pro délku, obsah a objem.

Autorky metodických komentářů k tematickým okruhům *Číslo a početní operace*, *Číslo a proměnná* zdůrazňují (Nováková & Vondrová, 2015, s. 8), že proměnná a algebraické výrazy představují pro žáky vstup do abstraktní matematiky a zároveň představují nejvyšší stupeň abstrakce. Porozumění této oblasti je nutným předpokladem pro vyšší matematiku. Současně autorky uvádějí, že tato problematika spočívá na třech pilířích a měla by být představována v těchto kontextech:

- Číselné výrazy a jejich aritmetika.
- Geometrie a vzorce pro délku, obsah, objem.
- Úlohy na zobecňování s vazbou na funkce.

K výše uvedeným pilířům autorky dodávají, že tvrzení o algebře jako zobecněné aritmetice není úplně přesné. Upozorňují na odlišnosti mezi aritmetikou a algebrou. Například roznásobování závorek se v aritmetice téměř nepoužívá, protože zde stačí použít znalost

1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: MŠMT, 2017. [cit. 2022-26-01] Dostupné z WWW: https://www.msmt.cz/file/41216/

přednosti operací. Například u číselného výrazu $5 \cdot (6 + 8)$ provedeme nejprve operaci v závorce a poté násobíme. U výrazu $5 \cdot (x + 8)$ nelze operaci v závorce provést, musíme závorku roznásobit. Žáci si přinášejí z aritmetiky zkušenost, že znaménko operace je vždy výzvou k procesu. V algebře je nutno v určitých situacích pracovat s výrazem jako s objektem, tedy přestat vnímat určitý matematický zápis jako proces. Spojení algebraických výrazů s geometrií, resp. korespondence mezi obrazci a vzorci pro obvod, obsah apod., ale také geometrická reprezentace některých algebraických vzorců může přispět k lepšímu pochopení proměnné, algebraických výrazů a práce s nimi. Úlohy na zobecňování autorky popisují jako úlohy, v nichž je úkolem odhalit pravidelnost v nějaké řadě prvků (obrázků, čísel apod.) a tuto pravidelnost obecně zapsat pomocí proměnných. Zároveň zdůrazňují, že řešení těchto úloh přirozeně vede žáky k potřebě použít symbolický zápis. K zápisu pomocí symbolů by měli žáci dospět až po zkušenosti s dostatečným počtem konkrétních případů. Vhodným mezistupněm od konkrétních příkladů k symbolickému zápisu může být slovní popis pravidla. „Základem algebraického uvažování je právě pochopení korespondence mezi určitou slovně vyjádřenou situací a jejím popisem pomocí písmen“ (Nováková & Vondrová, 2015, s. 26).

Podle Hejného a kol. (1990) se práce s výrazy dělí do tří hladin:

- Modelování – nejnižší ale zároveň nejdůležitější hladina, kde se slovní vyjádření nahrazuje symboly. Umět modelovat znamená chápat smysl a význam metody.
- Standardní manipulace – úprava výrazů podle známých pravidel.
- Strategická manipulace – nejvyšší hladina, v níž jde o úpravy, ve kterých žák musí vymyslet strategii postupu; nestačí znát známá pravidla či vzorce.

Podobně kategorizuje práci s výrazy Kieran (2004). Jednotlivé kategorie nazývá aktivitami:

- „Generational activities“ – zápis výrazů a rovnic, které reprezentují slovní zadání; zápis výrazů, které zobecňují geometrické nebo aritmetické vztahy.
- „Transformational activities“ – úprava výrazů podle pravidel (operace s výrazy) tak, aby byla zachována ekvivalence.
- „Global meta-level activities“ – zobecňování, dokazování, analyzování vztahů, navrhování obecných matematických postupů, kde se výrazy používají jako nástroj k řešení problémů.

Oba autoři se shodují v tom, že zásadní význam pro budování algebraického myšlení žáků mají právě hladina *modelování* a kategorie *generational activities*. Podstatou modelování je přechod mezi různými reprezentacemi. Příprava na modelování situací pomocí písmen v matematice by měla probíhat již od prvního stupně základní školy. Hejný (1990) uvádí, že způsob, kterým se učí žáci modelovat, je mnohdy imitativní. Například učitel předloží žákům vzorec na výpočet obvodu obdélníku $o = 2(a + b)$ a předvede dosazení do vzorce. Žák se pouze snaží postup zopakovat, ale nerozumí jeho významu. Tím se podle Hejného nový poznatek stane pro žáka poznatkem formálním. Hejný v tomto případě doporučuje prodloužit období přechodu od zápisu nesymbolického k symbolickému. Dále zdůrazňuje, že výhodu symbolického zápisu by měli žáci objevovat sami.

> Většina žáků si osvojí pouze manipulativní dovednosti a standardní použití písmen v nacvičených situacích. Jen málo žáků si uvědomí obrovskou sílu tohoto jazyka a bude schopno tímto jazykem „mluvit s matematikou“, řešit pomocí tohoto jazyka složité úlohy. Příčinu vidíme ve snaze nás, učitelů, dávat žákům tento silný nástroj poznávání matematiky příliš brzo, bez toho, aby žáci cítili potřebu tohoto jazyka. Přitom naše edukační strategie zdůrazňuje nácviky úprav algebraických výrazů a zanedbává to podstatné – schopnost jazyka rozumně uchopovat nejrůznější situace. (Hejný, 2014, s. 58)

V diplomové práci se zabývám zejména algebraickým modelováním – algebraizací v geometrickém kontextu[2] a z části standardní manipulací s výrazy. Proto se nyní budu věnovat hladině modelování v geometrickém kontextu. Geometrický kontext se podle mých zkušeností při výuce algebry příliš nevyužívá.

> Geometrická reprezentace algebraických výrazů je jedna z opomíjených příležitostí ve výuce matematiky. Pouze přibližně polovina učitelů v dotazníkovém šetření souhlasila s tím, že při výuce algebry využívá jejich geometrické znázornění (obr. 1). (Vondrová, 2015, s. 100)

	Počet	Souhlasí	Nesouhlasí
Pro porozumění úpravám algebraických výrazů pomáhá žákům poukazování na souvislosti s příslušnými úpravami číselných výrazů.	244	95 %	5 %
Pro porozumění úpravám algebraických výrazů pomáhá žákům metafora „jablíčka a hruštičky“, tj. nahrazování písmen abstraktních proměnných konkrétním předmětem (nebo přesněji jeho názvem).	243	93 %	7 %
U algebraických výrazů využívám jejich geometrická znázornění (geometrické reprezentace).	228	54 %	46 %

Obr. 1: Část výsledků dotazníkového šetření. Zdroj: Vondrová (2015, s. 330)

[2] V těchto úlohách je propojen druhý pilíř (obsah, obvod geometrických útvarů) s hladinou modelování a následně v některých úlohách s hladinou standardní manipulace.

Žalská (2015) doplňuje, že tato geometrická znázornění jsou žákům předkládána v pozdní fázi, a to např. až když násobí nebo umocňují dvojčleny. Do té doby mají málo nebo žádné zkušenosti s geometrickými reprezentacemi.

Žáci při řešení výše zmíněných úloh prokazují schopnost přecházet mezi geometrickou a algebraickou reprezentací. Vondrová (2015, s. 88) popisuje algebraizaci jako vyjádření (reprezentaci) situace v daném kontextu pomocí prostředků algebry (proměnná, algebraický výraz, rovnice atd.). Při modelování žáci v dané situaci hledají matematické vztahy a snaží se je vhodně zapsat. Algebra je při tom využívána jako nástroj k porozumění a popisu situace. Situace, které algebraicky vyjadřujeme (modelujeme), se mohou nacházet v různých kontextech (Žalská, 2015, s. 320):

- číselných (např. „Zapiš výraz: k trojnásobku nějakého čísla přičti číslo pět.“),
- geometrických (např. „Zapiš výraz, který představuje obvod čtverce s délkou strany x“.),
- v kontextech slovních úloh
  (např. „Auto jede rychlostí 80 km/h. Kolik km ujede za n hodin?“).

Algebraické modelování geometrických vztahů je založeno na geometrické reprezentaci algebraických výrazů a jejich ekvivalencí. Například vztah mezi obsahem obdélníku a délkami jeho stran b a $2b$ bude modelován jako $S = 2b \cdot b = 2b^2$. Součin $2b$ lze chápat jako obsah obdélníku s délkami stran 2 a b, ale rovněž lze $2b$ interpretovat jako délku úsečky (dvě úsečky délky b za sebou). Výraz x^2 můžeme chápat jako obsah čtverce, x^3 jako objem krychle.

Vizuální představy napomáhají žákům získat vhled do aritmetických a algebraických výpočtů, a tím rozvíjet schopnost vnímat různé interpretace téže situace. Přechod od symbolického zápisu ke geometrické reprezentaci a naopak pomáhá rozvíjet propojení mezi symbolickým a geometrickým myšlením. Podle Žalské jsou potíže žáků v algebře ovlivněny tím, jak chápou struktury číselných nebo geometrických vztahů.

> Výuka algebry navazuje na žákovy předchozí zkušenosti s řešením aritmetických a geometrických úloh. To má dva důležité důsledky. Za prvé, pokud jsou žákovy aritmetické (a geometrické) znalosti osvojeny nesprávně nebo pouze povrchně (formálně), budou působit jako překážka v činnosti na algebraické úrovni. Druhý důsledek plyne z rozdílů podstat algebraických a aritmetických činností: a) práce s konkrétní číselnou hodnotou a práce s proměnnou, která je zobecněním číselných

hodnot nebo jiných objektů, b) podstata řešení úloh pomocí aritmetických prostředků a podstata jejich řešení pomocí prostředků algebraických a c) práce s rovností jako operací a s rovností jako relací. (Žalská, 2015, s. 322)

Vlastnosti matematických postupů byly často v historii objevovány při studiu geometrických představ. Algebraické symboly vznikaly z geometrických pojmů. Celý proces přístupně popisuje Kvasz (2007, 2018), z jehož textů níže uvedený stručný popis vychází.

Podle Kvasze (2008, s. 63) se v dějinách matematického poznání zajímavým způsobem střídá symbolický a geometrický způsob reprezentace poznatků, přičemž se naskýtá otázka, proč se tak děje s takovou pravidelností. Pravděpodobně nejde o dva nezávislé způsoby myšlení, ale jako by jeden podmiňoval rozvoj druhého. Tuto tezi podporují jednotlivá období, ve kterých se střídá symbolické a geometrické myšlení:

- *Pythagorejská vizualizace* počtu pomocí figurálních čísel. V období starověkého Egypta a Mezopotámie bylo číslo chápáno jako předmět symbolické operace. Pythagorejci začali čísla zobrazovat pomocí různých geometrických útvarů, což jim umožňovalo dokazovat všeobecná tvrzení a tedy to, co bylo původně chápáno jen symbolicky, se stává předmětem geometrického názoru.
- *Symbolizace proměnné*. Předchůdcem proměnné byla úsečka neurčité délky, pomocí této konstrukce byla dokazována všeobecná tvrzení. Po zavedení neznámé pomocí písmena, byla tato původně geometrická reprezentace přenesena do symbolické oblasti.
- *Karteziánská vizualizace polynomů*. Polynom byl původně chápán jen jako objekt k aritmetickým výpočtům. Descartes vytvořil soustavu souřadnic, což umožnilo grafické znázornění polynomu. Opět něco, co bylo původně chápáno jen symbolicky, se stává předmětem geometrického názoru. (Kvasz, 2008, s. 64)

Překonává se tak bariéra rozměrnosti, která omezovala tehdejší geometrii. Násobení dvou délek úseček bylo chápáno jako obsah a násobení třech jako objem. „Neexistovala ovšem žádná interpretace pro součin čtyř a více délek úseček. Descartes součin úseček délky a a b interpretuje jako úsečku délky $a \cdot b$." (Kvasz, 2007, s. 30) Všechny mocniny představují opět délku úsečky, a proto je můžeme porovnávat, násobit, dělit apod.

Pojem neznámá není výhradně algebraický pojem, ale je to jen symbolické vyjádření myšlenky úsečky neurčité délky, která se zrodila v geometrii. Podobně pojem křivka není jen geometrický pojem. Je to geometrické vyjádření hluboké myšlenky polynomu, která se zakládá na zrovnoprávnění různých mocnin neznámé. Symbolické a geometrické myšlení je propojeno a je možné, že žáci, kteří nedokáží zvládnout některý z těchto způsobů myšlení, jsou blokováni tím, že u nich dostatečně nedozrála předešlá fáze, a tak příslušná vizualizace či symbolizace nemůže nastat. (Kvasz, 2008, s. 64)

1.2 Výzkumy a studie týkající se algebraizace v úlohách s geometrickým kontextem

1.2.1 Mezinárodní srovnávací výzkum TIMSS

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) je mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Jde o projekt Mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání (IEA)[3]. Výzkum TIMSS je zaměřen na vědomosti a dovednosti rozvíjené ve školní výuce a vychází z učebních osnov matematiky a přírodovědných předmětů zúčastněných zemí. Zaměřuje se přitom na věkové kategorie devítiletých a třináctiletých žáků – ve většině zemí se jedná o žáky 4. a 8. ročníku povinné školní docházky. Probíhá od roku 1995 ve čtyřletých cyklech. Česká republika se do výzkumu zapojila v letech 1995, 1999, 2007, 2011, 2015 a 2019. Žáci osmých ročníků byli testováni pouze v letech 1995, 1999 a 2007. Vědomosti a dovednosti se zjišťují pomocí písemných testů, které obsahují úlohy z matematiky a přírodních věd[4].

Výsledky českých žáků se v matematice od roku 1995 do roku 2007 výrazně zhoršily. V osmém ročníku dosáhli žáci České republiky v roce 2007 průměrného výsledku. Nadprůměrní byli v aritmetice a v oblasti data a pravděpodobnost. Průměrní byli při řešení geometrických úloh a podprůměrní v algebře. (Tomášek & Mandíková, 2009)

Součásti oblasti učiva algebra jsou tři tematické celky: řady a posloupnosti; algebraické výrazy; rovnice, vzorce a funkce. Dle Tomáška (2009, s. 35) je v rámci oblasti učiva algebra kladen důraz na funkční vztahy a jejich využívání k modelování a řešení úloh. Dále do ní patří rozvíjení číselných řad, užívaní algebraických symbolů, ale i hodnocení výpočetní zběhlosti

---

[3] IEA = the International Association for the Evaluation of Educational Achievement

[4] Součásti výzkumu je i dotazníkové šetření mezi žáky, učiteli matematiky a přírodovědných předmětů a řediteli škol, v jehož rámci se zjišťují např. postoje žáků, metody výuky a školní prostředí.

žáků. Žáci 8. ročníků by již měli dobře chápat lineární vztahy a pojem proměnné. Očekává se od nich používání a zjednodušování algebraických výrazů, řešení lineárních rovnic, nerovnic, soustav dvou rovnic o dvou neznámých a užívání funkcí. Ze současného rámcově vzdělávacího programu je řešení rovnic vyjmuto.

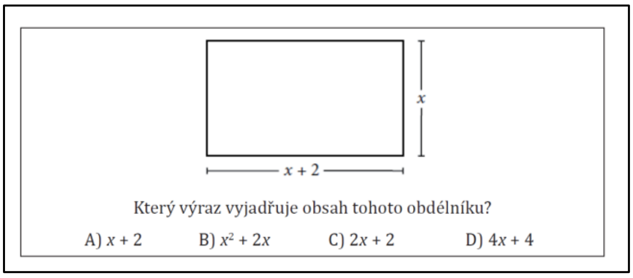
Pro účely své práce jsem z TIMSS vybrala jen takové úlohy, kde měli žáci algebraicky modelovat geometrické vztahy. Takové úlohy byly jen dvě. Do testování byly zařazeny v roce 2007 a uvolněny byly v roce 2011 (obr. 2, obr. 3).

Sekundární analýzou výzkumu TIMSS 2007 se podrobně zabývali Rendl a Vondrová (2014). Podle výsledků českých žáků identifikovali tzv. kritická místa v matematice a popsali pravděpodobné příčiny obtíží žáků v daných oblastech. Problematické úlohy, ve kterých byli žáci průměrní a podprůměrní, autoři dále rozdělili na:

- *Slabé* úlohy – odchylka úspěšnosti je v intervalu 0 až + 5 % oproti průměrné úspěšnosti mezinárodního souboru.
- *Velmi slabé* úlohy – odchylka úspěšnosti je záporná oproti průměrné úspěšnosti mezinárodního souboru.

Je důležité dodat, že průměrná odchylka úspěšnosti našich žáků od úspěšnosti mezinárodního souboru činila + 9,4 %. Autoři navíc uvádějí fakt, že pokud by vyřadili úlohy, které označili za slabé a velmi slabé, zvýšil by se průměrný odstup od mezinárodního průměru na + 13,6 %.

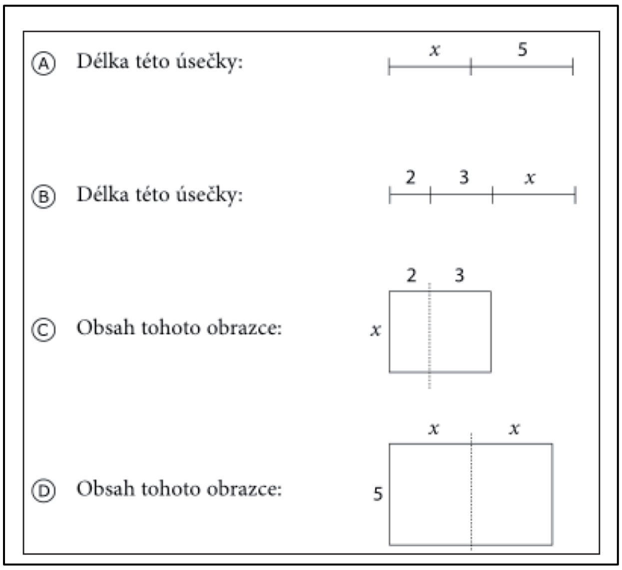
Při zhodnocení výsledků u následujících dvou úloh vycházím analýzy Rendla a Vondrové.



Obr. 2: Zadání úlohy M10-08. Zdroj: Rendl, Vondrová (2014, s. 27)

Úspěšnost řešení úlohy na obr. 2 byla 35,5 % a odchylka oproti mezinárodnímu průměru byla – 2,8 %. Žáci nejčastěji volili chybnou odpověď $x^2 + 2$, a to v 36,1 % případech. Podle autorů je tato chyba způsobena nesprávným roznásobením závorky nebo tím, že žák závorku nenapíše. Zároveň se domnívají, že pokud by byly strany obdélníka zadány „standardně“ písmeny a, b, úloha by měla vyšší úspěšnost.

Zadání druhé úlohy zní: *Co by mohlo být znázorněním výrazu* $2x + 3x$*?* Řešení žáci vybírají ze čtyř geometrických nákresů zobrazených na obr. 3.



Obr. 3: Obrázek k úloze M09-04. Zdroj: Rendl, Vondrová (2014, s. 40)

Zde byla úspěšnost o něco vyšší, a to 42,5 %. Žáci nejčastěji vybírali chybné odpovědi A a B. Podle autorů zřejmě žáci pro vyjádření obsahu očekávají druhou mocninu a nejsou schopni pod výrazem $2x$ vidět obsah, ale jen délku.

V závěru analýzy autoři uvádějí, že kolem 40 % českých žáků dělá větší problém výraz podle zadání zkonstruovat, než vybrat nebo uhodnout správný výraz z nabídnutých odpovědí.

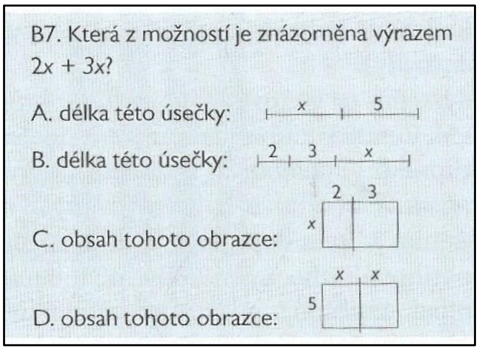
1.2.2 Výzkum u českých žáků v rámci projektu GA ČR Kritická místa matematiky na základní škole – analýza didaktických praktik učitelů.

Tento kvalitativní výzkum mj. identifikoval obtíže, které mají čeští žáci 1. a 2. stupně v oblastech matematiky, která autoři vybrali na základě rozhovorů s učiteli a označili je jako tzv. *kritická místa*. Jsou to oblasti, ve kterých žáci opakovaně selhávají. Výzkum byl realizován prostřednictvím hloubkových rozhovorů s žáky.

Z oblasti algebry byla pro výzkum vybrána témata *algebraické modelování* a *úpravy algebraických výrazů*. Z výzkumných úloh jsem vybrala ty, v nichž žáci pomocí výrazu modelovali geometrické vztahy, případně výraz následně upravovali. Jsou to úlohy[5] A3, B7, C9, C10, C11.

Výsledky jednotlivých úloh

Úlohu[6] A3 (obr. 4) řešilo celkem 8 žáků (jeden žák z 6. ročníku, sedm žáků ze 7. ročníku). Tito žáci se ještě s algebraickými tématy podle školních vzdělávacích programů nesetkali. Stejnou úlohu, ale označenou B7 řešilo celkem 13 žáků 9. ročníku.



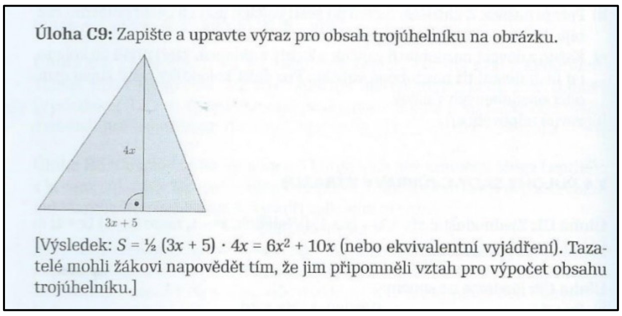
Obr. 4: Úlohy A3, B7. Zdroj: Žalská (2015, s. 337)

Jak bylo uvedeno výše, úloha byla součásti šetření TIMSS 2007, kde žáci vybírali jednu správnou odpověď. Oproti TIMSS měli žáci v rozhovorech uvést, jak by vypadaly výrazy pro ostatní možnosti.

Nejméně úspěšná byla podúloha A3a, resp. B7a. To ukazuje, že žáci mají větší problém s geometrickou reprezentací proměnné nebo výrazu na úsečce než s geometrickou reprezentací obsahu obdélníku. U mladších žáků byla zřejmá nezkušenost s úpravami výrazů. Projevil se u nich problém s chápáním ekvivalence výrazů, např. ekvivalence výrazu $x \cdot 2 + x \cdot 3$ s výrazem $2x + 3x$, nebo ekvivalence výrazu $3x$ s výrazem $x3$. U starších i u mladších žáků se také ukázala nezkušenost s ekvivalencí, která se týká distributivního zákona (např. $2x + 3x = x(2 + 3)$). Kromě výše uvedených obtíží žáci zaměňovali pojem obsah a obvod a s modelem útvaru pracovali jako s konkrétním objektem.

Úlohy C9, C10 a C11 (obr. 5, obr. 6, obr. 7) řešilo celkem 16 žáků, 8 žáků 8. ročníku a 8 žáků 9. ročníku.

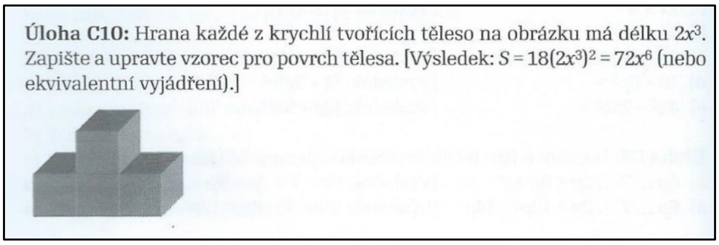
[5] Jednotlivé úlohy jsou takto označeny autory publikace, která výzkum popisuje.
[6] Úlohy A3 a B7 mají stejné zadání. Test označený jako B s příslušnými úlohami označenými čísly řešili žáci 9. ročníku.



Úloha C9: Zapište a upravte výraz pro obsah trojúhelníku na obrázku.

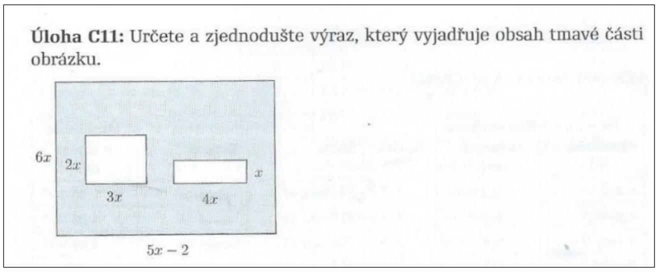
[Výsledek: $S = \frac{1}{2}(3x + 5) \cdot 4x = 6x^2 + 10x$ (nebo ekvivalentní vyjádření). Tazatelé mohli žákovi napovědět tím, že jim připomněli vztah pro výpočet obsahu trojúhelníku.]

Obr. 5: Zadání úlohy C9. Zdroj: Vondrová, Rendl a kol., (2015, s. 440)



Úloha C10: Hrana každé z krychlí tvořících těleso na obrázku má délku $2x^3$. Zapište a upravte vzorec pro povrch tělesa. [Výsledek: $S = 18(2x^3)^2 = 72x^6$ (nebo ekvivalentní vyjádření).]

Obr. 6: Zadání úlohy C10. Zdroj: Vondrová, Rendl a kol., (2015, s. 440)



Úloha C11: Určete a zjednodušte výraz, který vyjadřuje obsah tmavé části obrázku.

Obr. 7: Zadání úlohy C11. Zdroj: Vondrová, Rendl a kol., (2015, s. 441)

Nejobtížnějším momentem spojeným s algebrou v úlohách C9 a C11 bylo použití závorek. Dosazené objekty $3x + 5$ (v úloze C9) a $5x - 2$ (v úloze C11) nebrali žáci v úvahu jako celek a výrazy nezapsali do závorek. Samotné úpravy výrazů v závorce (odčítání, násobení, dělení) se také ukázaly jako problematické. Dalšími častými jevy byly nesprávné operace s proměnnými, především při násobení mocnin a při sčítání různých mocnin. Např. v úloze C9 čtyři žáci chybně vynásobili $4x \cdot 3x = 12x$. V úloze C10 čtyři žáci uvedli výsledek úlohy $2x^3 \cdot \cdot 2x^3$ nesprávně jako $2 \cdot 2x^3$. V úloze C11 měli žáci největší problém s uchopením úlohy v geometrickém smyslu a poté s její správnou formulací v algebraické symbolice. U násobení mocnin vyššího řádu, např. $18 \cdot 4x^6$, tři žáci zvažovali, zda vynásobit $18 \cdot 6$. (Žalská, 2015, s. 379–386)

Závěrem lze konstatovat, že algebraické výrazy a úpravy jsou odtrženy od kontextu geometrického, jak se ukázalo v procesu žákovských řešení. Celkově rozhovory ukázaly, že žáci nemají algebraické výrazy propojeny s geometrickými reprezentacemi. (Žalská, 2015, s. 364–367)

> Kurikulární oddělenost dvou oblastí matematiky (algebry a geometrie) je poměrně rozšířená a je také možným vysvětlením těžkostí, kterou způsobily našim žákům úlohy z TIMSS 2007, v nichž se algebraické výrazy aplikují v geometrickém prostředí (Rendl, Vondrová, 2014), a zároveň vysvětlením obtíží žáků s geometrickou reprezentací v naší studii. (Žalská, 2015, s. 397)

1.2.3 Vliv výuky na schopnosti žáků integrovat proměnné s aritmetickými operacemi.

Výzkum (Moseley & Brenner, 2009) se zaměřil na schopnost žáků integrovat proměnné s aritmetickými operacemi a schopnost vytvářet si vlastní symbolické reprezentace. Vybraný vzorek 27 žáků, kteří ještě neprošli výukou algebry, byl rozdělen na skupinu experimentální (15 žáků) a na skupinu kontrolní (12 žáků). Oběma skupinám byl nejprve zadán test, který zkoumal úroveň jejich dovedností. S některými žáky byly rovněž vedeny rozhovory, při kterých úlohy řešili. Poté následovala dvacetidenní výuka, pro každou skupinu zvlášť.

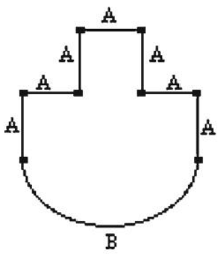
Žáci z experimentální skupiny řešili aplikační úlohy, při jejichž řešení si sami vytvářeli různé reprezentace a následně o nich vzájemně diskutovali. Byl u nich aplikován konstruktivistický přístup. Kontrolní skupina byla vyučována pomocí výkladu nového učiva a následného procvičování.

Po skončení intervence byli žáci opět testováni. Test před a po intervenci obsahoval čtyři úlohy. Dvě z nich byly slovní úlohy a dvě byly úlohy, ve kterých měli žáci algebraicky modelovat geometrické vztahy. Stejně jako ve výše uvedených výzkumech uvádím jen takové úlohy, které se týkají algebraizace geometrických vztahů.

Jednou z formulovaných očekávání před začátkem výzkumu bylo, že žáci vyučovaní konstruktivisticky výrazně zlepší své schopnosti používat proměnnou k reprezentaci obsahu a obvodu geometrických útvarů.

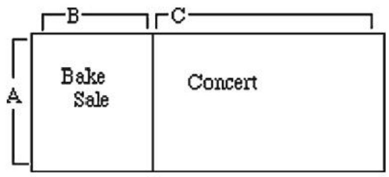
Úlohy testu před intervencí

Úloha č. 1: Jaký je obvod útvaru na obrázku?



Obr. 8: Obrázek k úloze č. 1. Zdroj: Moseley, Brenner (2009, s. 9)

Úloha č. 2: Autor plánuje koncert a prodej koláčů, aby získal peníze pro tým. Potřebuje rozdělit plochu stadionu tak, aby vypadala jako na obrázku. Pomůžeš mu doplnit tabulku pod obrázkem?

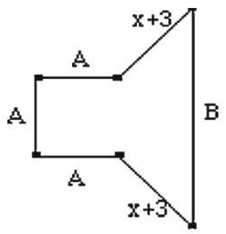


Obr. 9: Obrázek k úloze č. 2. Zdroj: Moseley, Brenner (2009, s. 9)

	Délka	Šířka	Obsah
Prodejní sekce (Bake Sale)			
Koncertní sekce (Concert)			
Celková plocha			

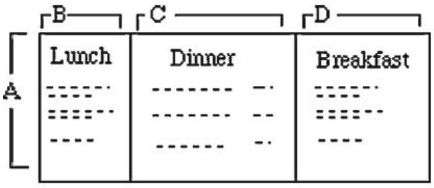
Úlohy testu po intervenci

Úloha č. 1: Jaký je obvod útvaru na obrázku?



Obr. 10: Obrázek k úloze č. 1. Zdroj: Moseley, Brenner (2009, s. 9)

Úloha č. 2: Nina chce pro svou restauraci vytvořit nový jídelní lístek. Potřebuje lístek rozdělit podle obrázku. Můžeš jí pomoci vyplněním tabulky pod obrázkem?



Obr. 11: Obrázek k úloze č. 2. Zdroj: Moseley, Brenner (2009, s. 9)

	Délka	Šířka	Obsah
Oběd (Lunch)			
Večeře (Dinner)			
Snídaně (Breakfast)			
Celé menu			

Výsledky testů

Jednotlivým odpovědím v řešení úloh byly přiřazeny hodnoty od 1 do 5 bodů. Hodnota 5 bodů byla přiřazena správnému řešení (např. $7A + B$ u úlohy na obr. 8). Hodnotu 4 bodů získal žák, pokud napsal výraz, který odpovídá zadání, ale např. nevhodně použil exponent místo násobení ($A^7 + B$ u úlohy na obr. 8). Odpověď, kde byla použita proměnná, ale výraz neodpovídal zadání, byla hodnocena 3 body. Žák, který uvedl v řešení číselnou hodnotu např. měřením v obrázku, získal 2 body a jeden bod byl udělen za prázdné řešení.

Žáci z experimentální skupiny se významně zlepšili v úlohách s obvodem i s obsahem. Z 15 žáků 13 správně použilo proměnnou v úloze s obvodem útvaru (obr. 8) a 9 žáků v úloze s obsahem (obr. 11). Žáci z kontrolní skupiny se významně zlepšili pouze v úloze s obvodem, nikoliv již v úloze s obsahem. Navíc pouze polovina žáků dosáhla 4 nebo 5 bodů v úloze s obvodem, zatímco v experimentální skupině získalo 4 nebo 5 bodů 87 % žáků. Očekávání, které autoři na začátku výzkumu měli, se splnilo.

1.2.4 Jak žáci ve věku 11–15 let rozumí algebraickému zápisu.

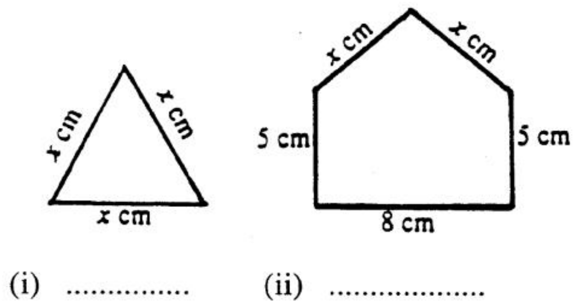
Studie (MacGregor & Stacey, 1997) se zabývala porozuměním algebraickému zápisu žáků ve věku od 11 do 15 let. Dále porovnávala, jakých chyb se žáci dopouštějí před výukou algebry a po ní. Testování probíhalo ve třech částech. Celkem se do výzkumu zapojilo přibližně 2000 žáků (ve věku 11 až 15 let) z 24 škol různého typu.

První část studie zkoumala způsoby, jakými 11 a 12 letí žáci, kteří se dosud s algebrou nesetkali, interpretují neznámou. Žákům byly předloženy dva testy. Po prvním testu následovala osmitýdenní výuka základů algebry. Poté byli žáci opět testováni. V obou testech žáci řešili podobné úlohy, ve kterých měli zapsat algebraický výraz, který byl zadán slovně.

Druhé části studie se účastnili žáci ve věku 11 – 15 let z 22 škol (celkem 1 463 žáků). Žákům byly zadány čtyři úlohy. První dvě úlohy byly stejné jako v předchozí výzkumné části. Čtvrtá úloha byla odlišná od prvních dvou. Opět měli žáci zapsat algebraický výraz zadaný slovně. Ve třetí úloze měli žáci použít neznámou v geometrickém kontextu.

Poslední část studie se zabývala vývojem úspěšnosti v řešení úloh stejného typu jako v předchozích částech, kromě úlohy s geometrickým kontextem. Žáci tří škol byli testováni třikrát během 13 měsíců (celkem 156 žáků)[7]. Níže uvádím výsledky jen takových úloh, které se týkají algebraizace geometrických vztahů. Úloha na obr. 12 byla zadána žákům při druhé části výzkumu. Jak je již uvedeno výše, druhé části výzkumu se zúčastnilo celkem 1 463 žáků v ročnících, které odpovídají našemu 2. stupni základní školy.

Úloha č. 3: Jaký je obvod útvarů na obrázku?



Obr. 12: Obrázek k úloze č. 3. Zdroj: MacGregor, Stacey (1997, s. 8)

V tabulce jsou uvedena procentuální zastoupení správných odpovědí u žáků 6.–9. ročníků[8].

Tab. 1: Správné odpovědi v %. Zdroj: MacGregor, Stacey (1997, s. 9)

Úloha se správnou odpovědí	6. ročník (307 žáků)	7. ročník (511 žáků)	8. ročník (338 žáků)	9. ročník (307 žáků)
3. i) $3x$	42 %	44 %	64 %	61 %
3. ii) $2x + 18$	27 %	35 %	55 %	53 %

Autorky identifikovaly několik chybných jevů, které se často opakovaly. Mladší žáci často délky úseček, které byly označeny neznámou x, měřili. Starší žáci rovněž uváděli číselné

[7] Žáci 7., 8. a 9. ročníků dle naší povinné školní docházky.
[8] V originálním textu jsou to žáci 7.–10. ročníků.

odpovědi. V úloze 3ii uváděli často výsledek 20 cm. V následných rozhovorech tento výsledek odůvodňovali tím, že x je 1. Podle autorek tato chyba pravděpodobně pramení z nepochopení toho, když učitel vysvětluje, že x bez koeficientu znamená $1x$. Žáci si chybně zafixují, že písmeno x samo o sobě má něco společného s číslem 1. Dalším zdrojem této chyby mohou být nejasnosti v pravidlech $x = x^1$ a $x^0 = 1$.

Někteří žáci se snažili úlohy řešit geometricky. Různým způsobem rozdělovali útvary např. na pravoúhlé trojúhelníky, případně se snažili použít Pythagorovu větu. Někteří žáci 9. ročníků zapsali obvod útvaru výrazem $x^2 + 5^2 + 8$. Hledali naučené postupy z geometrie a nedokázali úlohu vyřešit jednoduše, a to součtem délek jednotlivých stran.

Se zvyšujícím se ročníkem se zvyšoval výskyt chybného použití zápisu x^3 místo $3 \cdot x$ při řešení úlohy 3i. V 6. ročnících tuto chybu napsalo 5 % žáků a v 9. ročnících již 17 % žáků. Autorky tuto chybu vysvětlují nedostatečným pochopením toho, jak zapsat pomocí mocniny opakované sčítání či opakované násobení.

1.2.5 Shrnutí výsledků výzkumů

V kapitole byly představeny některé výzkumné studie, které se zabývaly obtížemi žáků v oblasti algebry. Popsány byly především ty obtíže, které se týkaly schopností žáků přecházet mezi algebraickou a geometrickou reprezentací. Konkrétně výzkumy odhalily obtíže žáků při používání proměnné k reprezentaci obsahů a obvodů geometrických útvarů, čímž se zabývá i můj vlastní výzkum. Výsledky uvedených výzkumů budou posléze srovnány s výsledky vlastního výzkumu.

Z prvních dvou výzkumů vyplynulo, že větší potíže mají žáci s geometrickou reprezentací proměnné na úsečce než s geometrickou reprezentací obsahu obdélníku. Dalším problematickým momentem bylo chápání role závorek. Žák nesprávně závorku roznásobí, nebo ji vůbec nepoužije tam, kde je nutná. Např. výraz, který představuje délku strany obdélníku, nebere v úvahu jako celek a výraz nenapíše do závorky. Rovněž se objevily chyby při operacích s mocninami. S modelem útvaru žáci pracovali jako s konkrétním objektem, např. měřili délku úsečky, která byla označena za neznámou.

Třetí výzkum se zaměřil na schopnosti žáků vytvářet si vlastní symbolické zápisy a přecházet mezi různými reprezentacemi, a to v závislosti na typu výuky. Z tohoto výzkumu vyplynulo, že žáci vyučování konstruktivisticky se v post-testu významně zlepšili v obou úlohách, kde přecházeli od geometrické reprezentace k symbolickému zápisu.

Čtvrtý výzkum zjistil, že většina žáků není schopna interpretovat neznámou jako zobecněné číslo. Žáci nahrazují písmena číselnými hodnotami. Proměnnou často interpretují podle svých předchozích zkušeností. Považují ji za zkratku nebo za označení fyzikálních veličin a jednotek.

1.3 Analýza učebnic z hlediska úloh na algebraizaci s geometrickým kontextem

V této části práce se zaměřuji na analýzu pěti vybraných učebnic pro osmý ročník základní školy, konkrétně na kapitoly, které se věnují tématům Výrazy s proměnnou a Mocniny. Cílem analýzy je porovnat, v jaké míře a v jakých souvislostech se v učebnicích vyskytují úlohy na algebraické modelování geometrických vztahů, tzn. úlohy, při jejichž řešení žáci přecházejí od symbolického zápisu ke geometrické reprezentaci a naopak. Učebnice používají na školách (ZŠ I, ZŠ II, gymnázium)[9], jejichž žáci se účastnili mého výzkumu. První tři učebnice vypsané níže používají na gymnáziu, čtvrtou na ZŠ I a pátou na ZŠ II.

Vybrané učebnice:

- Matematika Sekunda (Výrazy [1]) (Herman; nakl. Prometheus)
- Matematika Tercie (Výrazy [2]) (Herman; nakl. Prometheus)
- Matematika 8 pro základní školy a víceletá gymnázia (Aritmetika) (Fuchs, Tlustý, Bitnerová; nakl. Fraus)
- Matematika 8 (Cihlář, Zelenka; nakl. AOS Publishing)
- Matematika 8 pro základní školy (Algebra) (Půlpán a kolektiv; nakl. SPN)

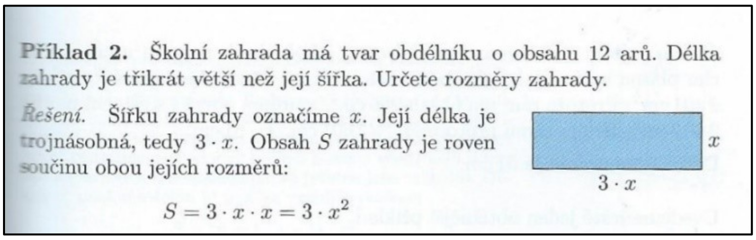
1.3.1 Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií, Výrazy [1], [2], Herman a kol., nakl. Prometheus

První díl učebnice obsahuje kapitoly *Mocniny a odmocniny*, *Pythagorovu větu*, *Číselné výrazy* a *Výrazy s proměnnou* (standardní manipulace s jednočleny). Ve druhém díle následují kapitoly, které se zabývají operacemi s mnohočleny a operacemi s lomenými výrazy.

V kapitole *Mocniny a odmocniny* je na začátku kapitoly pojem druhá a třetí mocnina objasněn na geometrickém modelu: druhá mocnina pomocí obsahu čtverce a třetí mocnina pomocí objemu krychle. Chybí zde geometrický model proměnné v první mocnině, např. pomocí délky úsečky. Operace s mocninami již ale geometrickou reprezentací podpořeny nejsou. Propojení mocnin s geometrickými reprezentacemi autoři uvádějí v kapitole *Mocniny*

[9] Pro název dvou škol používám obecné označení dle požadavků ředitelů škol.

v geometrii. Zde se poprvé objevují příklady na algebraické modelování geometrických vztahů (obr. 13, obr. 14). Většina úloh je zároveň doplněna řešením.

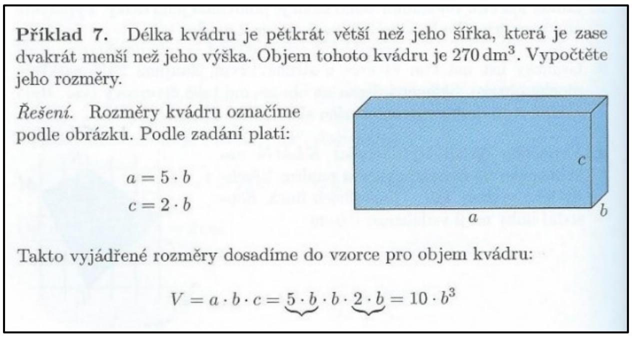


Příklad 2. Školní zahrada má tvar obdélníku o obsahu 12 arů. Délka zahrady je třikrát větší než její šířka. Určete rozměry zahrady.

Řešení. Šířku zahrady označíme x. Její délka je trojnásobná, tedy $3 \cdot x$. Obsah S zahrady je roven součinu obou jejích rozměrů:

$$S = 3 \cdot x \cdot x = 3 \cdot x^2$$

Obr. 13: Zadání příkladu 2. Zdroj: Herman a kol. (1997, s. 75)



Příklad 7. Délka kvádru je pětkrát větší než jeho šířka, která je zase dvakrát menší než jeho výška. Objem tohoto kvádru je 270 dm^3. Vypočtěte jeho rozměry.

Řešení. Rozměry kvádru označíme podle obrázku. Podle zadání platí:

$$a = 5 \cdot b$$
$$c = 2 \cdot b$$

Takto vyjádřené rozměry dosadíme do vzorce pro objem kvádru:

$$V = a \cdot b \cdot c = \underbrace{5 \cdot b} \cdot b \cdot \underbrace{2 \cdot b} = 10 \cdot b^3$$

Obr. 14: Zadání příkladu 7. Zdroj: Herman a kol. (1997, s. 78)

V kapitole *Výrazy s proměnnou* je proměnná zavedena pomocí vzorce pro obvod čtverce $o = 4 \cdot a$. Dále jsou uvedeny příklady výrazů s proměnnou na příkladech vzorců z geometrie. Operace s jednočleny nebo s mnohočleny (sčítání, odčítání, násobení) jsou v obou učebnicích vykládány bez geometrické interpretace. V rámci procvičovacích úloh, které vždy následují za výkladovou částí, se úlohy s geometrickým kontextem objevují jen sporadicky. Opět jsou doplněny řešením (obr. 15).

Příklad 2. Určete obsah obdélníku s rozměry a a $7b$. O kolik se tento obsah zvětší, zvětší-li se rozměry obdélníku o délku b?

Řešení. Původní obdélník má obsah $S_1 = 7ab$. Zvětšený obdélník má rozměry u, v, pro které platí:

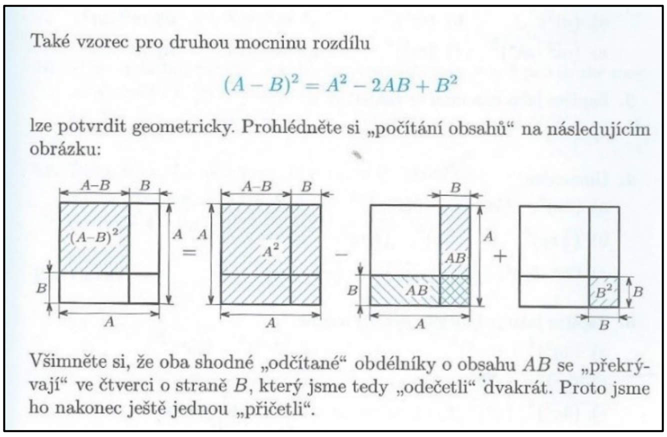
$$u = a + b, \qquad v = 7b + b = 8b$$

Pro jeho obsah S_2 proto vychází:

$$S_2 = uv = (a + b) \cdot 8b = 8ab + 8b^2$$

Obr. 15: Zadání příkladu 2. Zdroj: Herman a kol. (1997, s. 125)

V kapitolách *Umocňování mnohočlenů* se objevují geometrické interpretace vzorců (obr. 16, obr. 17).



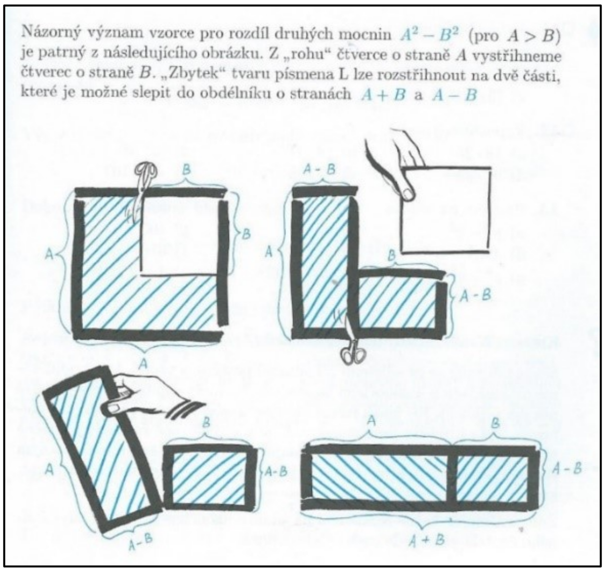
Také vzorec pro druhou mocninu rozdílu

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

lze potvrdit geometricky. Prohlédněte si „počítání obsahů“ na následujícím obrázku:

Všimněte si, že oba shodné „odčítané“ obdélníky o obsahu AB se „překrývají“ ve čtverci o straně B, který jsme tedy „odečetli“ dvakrát. Proto jsme ho nakonec ještě jednou „přičetli“.

Obr. 16: Geometrická interpretace vzorce $(a-b)^2$. Zdroj: Herman a kol. (1997, s. 39)



Názorný význam vzorce pro rozdíl druhých mocnin $A^2 - B^2$ (pro $A > B$) je patrný z následujícího obrázku. Z „rohu“ čtverce o straně A vystřihneme čtverec o straně B. „Zbytek“ tvaru písmena L lze rozstřihnout na dvě části, které je možné slepit do obdélníku o stranách $A+B$ a $A-B$

Obr. 17: Geometrická interpretace vzorce $a^2 - b^2$. Zdroj: Herman a kol. (1997, s. 53)

Geometrické interpretace následují až po výkladové části a po sadě procvičovacích úloh. Např. vzorec pro druhou mocninu dvojčlenu autoři vyvozují z trojice příkladů (obr. 18).

$$(a+3)^2 = (a+3)\cdot(a+3) = a^2 + \underbrace{3a + 3a} + 9 = a^2 + 6a + 9$$

$$(x^3+y)^2 = (x^3+y)\cdot(x^3+y) = (x^3)^2 + \underbrace{x^3y + x^3y} + y^2 = \\ = x^6 + 2x^3y + y^2$$

$$(uv+2z)^2 = (uv)^2 + \underbrace{2uvz + 2uvz} + (2z)^2 = u^2v^2 + 4uvz + 4z^2$$

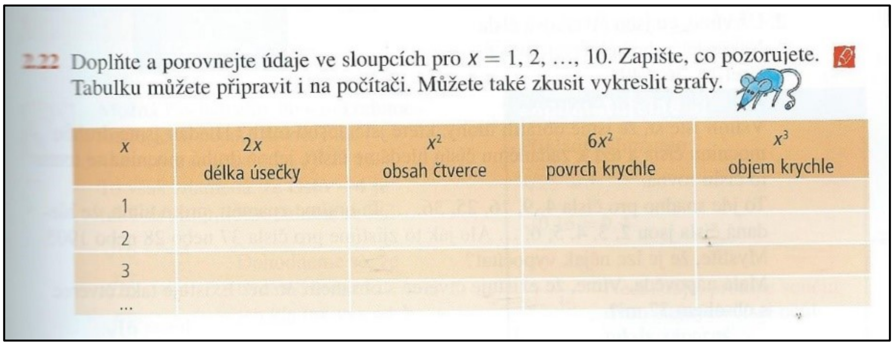
Vidíme, že výsledkem je vždy trojčlen. Jeho „krajní“ členy jsou druhými mocninami původních sčítanců, „prostřední“ člen vzniká sečtením dvou stejných členů.

Obr. 18: Zavedení vzorce $(a+b)^2$. Zdroj: Herman a kol. (1997, s. 34)

1.3.2 Matematika 8 pro základní školy a víceletá gymnázia (Aritmetika), Bitnerová, Fuchs, Tlustý, nakl. Fraus

Učebnice je určena pro základní školy a odpovídající ročníky víceletých gymnázií. Obsahuje kapitoly *Mocniny a odmocniny*, *Výrazy*, *Rovnice*, *Procenta, úroky a statistika* a soubor rozšiřujících úloh.

Žáci pracují s proměnnou již v kapitole mocniny a odmocniny. Proměnné se objevují zejména v záhlavích tabulek různých úloh. Vizualizace proměnné x, x^2, x^3 se při zavedení neobjevuje. Rovněž sčítání a odčítání mocnin není podpořeno geometrickou reprezentací. Propojení mocnin a geometrie se poprvé objevuje v úloze na procvičení (obr. 19).

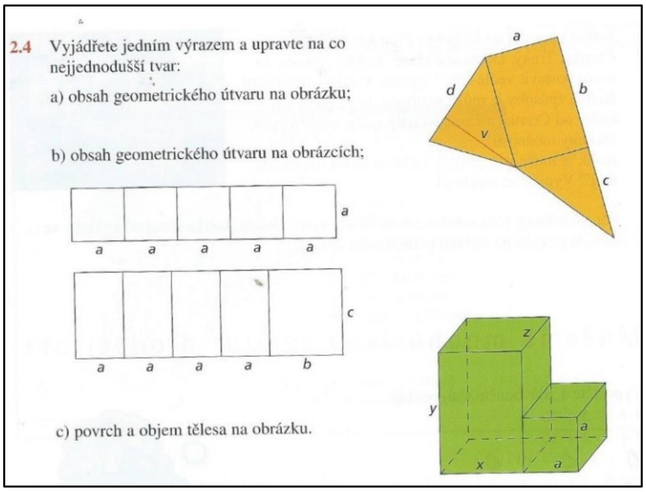


2.22 Doplňte a porovnejte údaje ve sloupcích pro $x = 1, 2, \ldots, 10$. Zapište, co pozorujete. Tabulku můžete připravit i na počítači. Můžete také zkusit vykreslit grafy.

x	$2x$ délka úsečky	x^2 obsah čtverce	$6x^2$ povrch krychle	x^3 objem krychle
1				
2				
3				
…				

Obr. 19: Zadání úlohy 2.22. Zdroj: Bitnerová a kol. (2007, s. 23)

Další úlohy s geometrickým kontextem jsou v kapitole sčítání mnohočlenů v rámci úloh na procvičení (obr. 20, obr. 21). Obě úlohy propojují symbolické a geometrické myšlení. Úloha na obr. 20 vyžaduje přechod od geometrické reprezentace k symbolickému zápisu. Naopak u úlohy na obr. 21 jde o přechod od symbolického zápisu ke geometrické reprezentaci.



2.4 Vyjádřete jedním výrazem a upravte na co nejjednodušší tvar:

a) obsah geometrického útvaru na obrázku;

b) obsah geometrického útvaru na obrázcích;

c) povrch a objem tělesa na obrázku.

Obr. 20: Zadání úlohy 2.4 Zdroj: Bitnerová a kol. (2007, s. 60)

2.5 Uveďte, které z následujících výrazů můžeme upravit na jednočlen:

$a^3 + a^2$ $\qquad$ $ac^2 + a^2c$

$c^2 + a^2$ $\qquad$ $a^2c + a^2c$

Nakreslete a napište, co by v geometrii mohly představovat jednotlivé výrazy. Zdůvodněte svá tvrzení o jejich součtu.

Obr. 21: Zadání úlohy 2.5 Zdroj: Bitnerová a kol. (2007, s. 60)

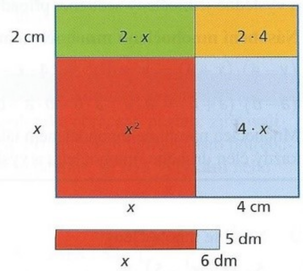
Násobení mnohočlenů autoři, na rozdíl od sčítání a odčítání, zavádějí pomocí geometrického modelu (obr. 22). Dále je žákům dán návod, jak roznásobit závorky mnohočlenů, aniž by museli používat geometrické reprezentace.

Jak na to?

Násobení mnohočlenů si můžeme názorně představit na geometrickém modelu.

Obsah celého modře ohraničeného obdélníku vyjadřuje výraz $(x + 2) \cdot (x + 4)$.
Tento obdélník se skládá z jednoho čtverce a tří obdélníků, jejichž obsahy jsou x^2, $2x$, $4x$ a $2 \cdot 4 = 8$ (cm²). Platí:
$(x+2)\cdot(x+4) = x^2 + 2x + 4x + 2\cdot 4 = x^2 + 6x + 8$.

Obsah obdélníku na dalším obrázku vyjádříme výrazem $5\cdot(x+6) = 5x + 5\cdot 6 = 5x + 30$.



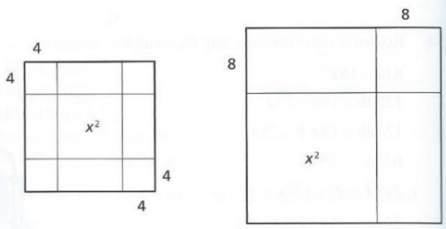
Obr. 22: Geometrická interpretace násobení dvojčlenu. Zdroj: Bitnerová a kol. (2007, s. 63)

K výuce vzorců pro úpravy mnohočlenů přistupují autoři nejprve geometricky za pomocí obsahů čtverců. Na obr. 23 jsou úvodní úlohy, kde žáci pracují s obsahy čtverců a dokazují platnost ekvivalence dvou výrazů.

4. A ještě vzorce pro úpravy mnohočlenů

4.1 Vyjádřete obsah čtverců na obrázku a porovnejte oba obrázky i výsledky výpočtu.

4.2 Podle výsledků příkladu 4.1 rozhodněte, zda platí:
$(x+8)^2 = x^2 + 2\cdot 8x + 8^2$
Své tvrzení zdůvodněte a dokažte.



Obr. 23: Zadání úloh 4.1, 4.2. Zdroj: Bitnerová a kol. (2007, s. 66)

Poté autoři přecházejí k algebraickému vyjádření, kde si žáci ověřují platnost některých vzorců za využití násobení dvojčlenů. Ve dvou úlohách ověřují žáci rovnost geometricky (obr. 24, obr. 25).

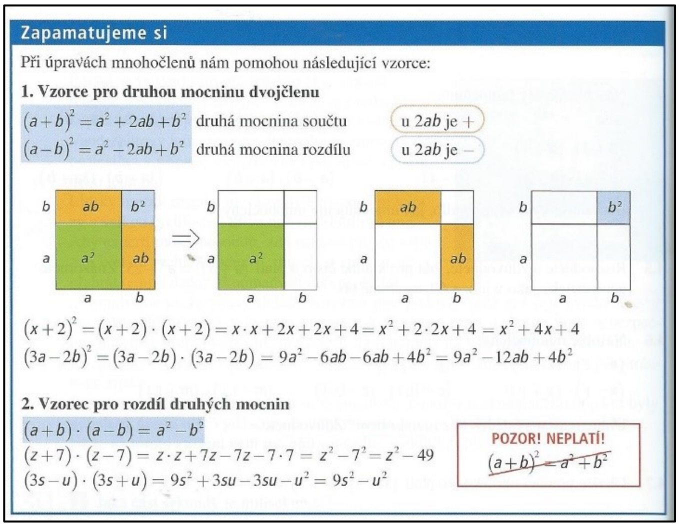
4.5 Rozhodněte a zdůvodněte, zda pro kladné číslo a platí $(a+5)^2 = a^2 + 25$. Znázorněte geometricky jako v úloze 4.1 na straně 66.

Obr. 24: Zadání úlohy 4.5. Zdroj: Bitnerová a kol. (2007, s. 67)

4.7 Ukažte pomocí obrázku, že platí $(x+3)\cdot(x-3) = x^2 - 9$.

Obr. 25: Zadání úlohy 4.7. Zdroj: Bitnerová a kol. (2007, s. 67)

Na konci kapitoly na obr. 26 uvádějí autoři shrnutí vzorců a geometricky interpretují pouze vzorec $(a+b)^2$.


Zapamatujeme si

Při úpravách mnohočlenů nám pomohou následující vzorce:

1. Vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ druhá mocnina součtu — u $2ab$ je +

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ druhá mocnina rozdílu — u $2ab$ je −

$(x+2)^2 = (x+2)\cdot(x+2) = x\cdot x + 2x + 2x + 4 = x^2 + 2\cdot 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$

$(3a-2b)^2 = (3a-2b)\cdot(3a-2b) = 9a^2 - 6ab - 6ab + 4b^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$

2. Vzorec pro rozdíl druhých mocnin

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

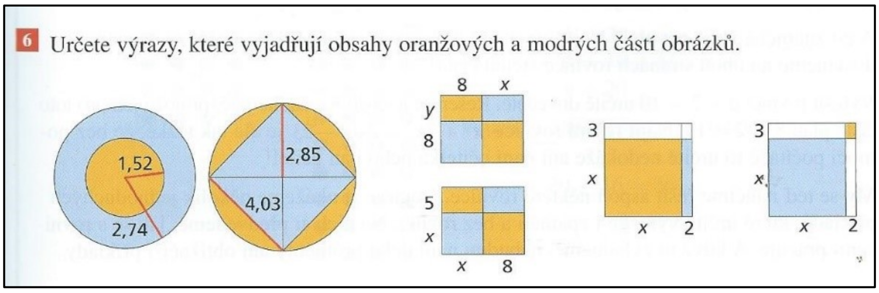
$(z+7)\cdot(z-7) = z\cdot z + 7z - 7z - 7\cdot 7 = z^2 - 7^2 = z^2 - 49$

$(3s-u)\cdot(3s+u) = 9s^2 + 3su - 3su - u^2 = 9s^2 - u^2$

POZOR! NEPLATÍ!
$\cancel{(a+b)^2 = a^2 + b^2}$

Obr. 26: Geometrická interpretace vzorce $(a+b)^2$. Zdroj: Bitnerová a kol. (2007, s. 68)

V závěrečném opakování celé kapitoly *Výrazy* se objevuje jedna úloha s geometrickým kontextem (obr. 27).

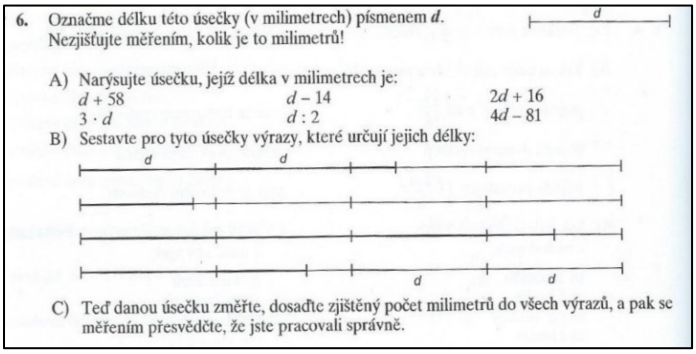

6 Určete výrazy, které vyjadřují obsahy oranžových a modrých částí obrázků.

Obr. 27: Zadání úlohy 6. Zdroj: Bitnerová a kol. (2007, s. 71)

1.3.3 Matematika 8, Cihlář, Zelenka, nakl. AOS Publishing

Učebnice je určena pro základní školy i pro odpovídající ročníky víceletých gymnázií. Obsahuje kapitoly *Druhá mocnina a odmocnina*, *Pythagorova věta*, *Mocniny s přirozeným mocnitelem*, *Výrazy*, *Lineární rovnice*, *Základy statistiky*, *Kruh, kružnice, válec*, *Konstrukční úlohy* a kapitolu *Zajímavé problémy*.

V kapitolách *Druhá mocnina a odmocnina* a *Mocniny s přirozeným mocnitelem* autoři používají model čtverce a krychle při zavedení mocniny x^2 a x^3. Operace s mocninami nejsou vizualizovány. Neobjevují se ani žádné úlohy na procvičení, které by rozvíjely propojení mezi symbolickým a geometrickým jazykem. Geometrická reprezentace proměnné se objevuje v podkapitole *Výrazy s proměnnou*. Autoři zavádějí výraz s proměnnou jako výraz, kde se čísla nahrazují písmeny. Následují příklady výrazů s proměnnou. Po sérii úloh na procvičení, kde je slovně zadán číselný výraz nebo výraz s proměnnou a úkolem je zapsat výrazy pomocí čísel nebo proměnné, následuje několik úloh s geometrickým kontextem. V úloze na obr. 28 žáci získají představu o geometrickém významu proměnné v první mocnině. Jednak k daným výrazům konstruují geometrický objekt, a naopak k daným délkám úsečky sestavují výraz.



6. Označme délku této úsečky (v milimetrech) písmenem ***d***. Nezjišťujte měřením, kolik je to milimetrů!

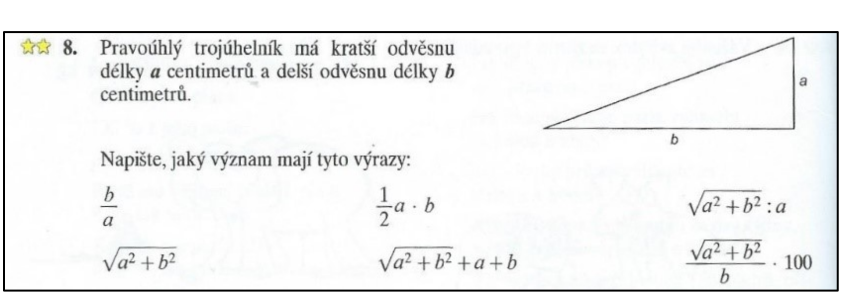
A) Narýsujte úsečku, jejíž délka v milimetrech je:
$d + 58$ $\quad d - 14$ $\quad 2d + 16$
$3 \cdot d$ $\quad d : 2$ $\quad 4d - 81$

B) Sestavte pro tyto úsečky výrazy, které určují jejich délky:

C) Teď danou úsečku změřte, dosaďte zjištěný počet milimetrů do všech výrazů, a pak se měřením přesvědčte, že jste pracovali správně.

Obr. 28: Zadání úlohy 6. Zdroj: Cihlář, Zelenka (2013, s. 64)

Zajímavá a náročnější je podle mého názoru úloha na obr. 29. Žáci vysvětlují význam daných výrazu, které se vztahují k pravoúhlému trojúhelníku.



8. Pravoúhlý trojúhelník má kratší odvěsnu délky ***a*** centimetrů a delší odvěsnu délky ***b*** centimetrů.

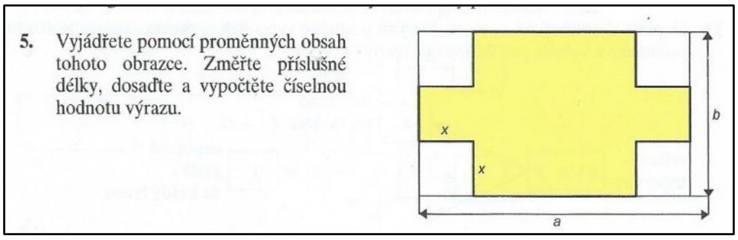
Napište, jaký význam mají tyto výrazy:

$\frac{b}{a}$ $\quad \frac{1}{2}a \cdot b$ $\quad \sqrt{a^2+b^2} : a$

$\sqrt{a^2+b^2}$ $\quad \sqrt{a^2+b^2}+a+b$ $\quad \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} \cdot 100$

Obr. 29: Zadání úlohy 8. Zdroj: Cihlář, Zelenka (2013, s. 64)

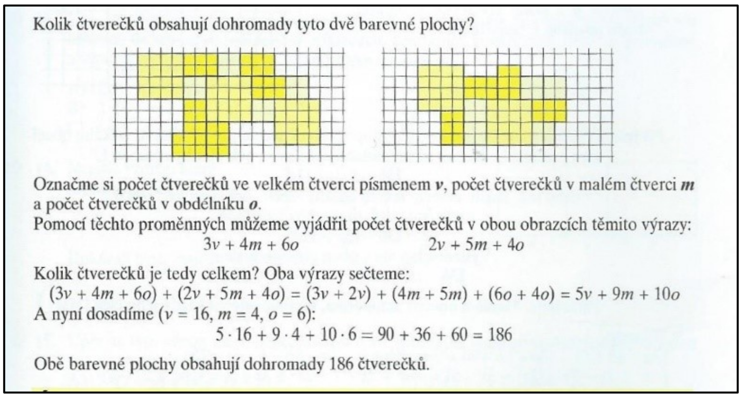
Na začátku kapitoly *Mnohočleny* se objevuje několik motivačních úloh, kde žáci sestavují na základě slovních popisů výrazy s několika proměnnými a následně počítají jejich hodnoty. Mezi nimi se objevuje i úloha s geometrickým kontextem (obr. 30).



5. Vyjádřete pomocí proměnných obsah tohoto obrazce. Změřte příslušné délky, dosaďte a vypočtěte číselnou hodnotu výrazu.

Obr. 30: Zadání úlohy 5. Zdroj: Cihlář, Zelenka (2013, s. 70)

Sčítání a odčítání mnohočlenů v první mocnině je v učebnici zavedeno pomocí počítání čtverečků různě zabarvených ploch (obr. 31, obr. 32).



Kolik čtverečků obsahují dohromady tyto dvě barevné plochy?

Označme si počet čtverečků ve velkém čtverci písmenem ***v***, počet čtverečků v malém čtverci ***m*** a počet čtverečků v obdélníku ***o***.
Pomocí těchto proměnných můžeme vyjádřit počet čtverečků v obou obrazcích těmito výrazy:

$3v + 4m + 6o \qquad 2v + 5m + 4o$

Kolik čtverečků je tedy celkem? Oba výrazy sečteme:

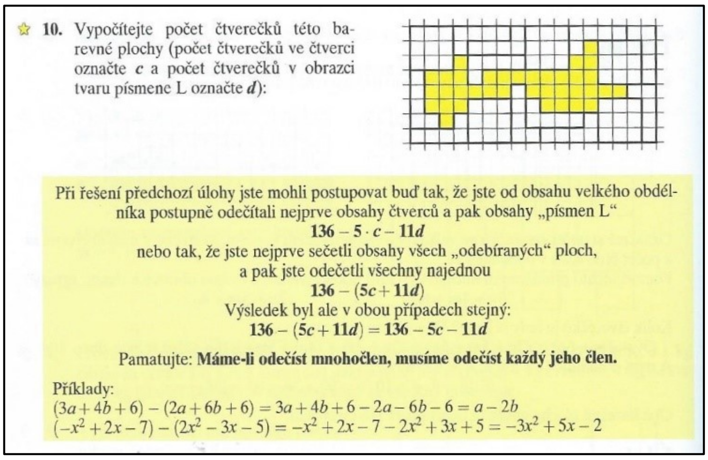
$(3v + 4m + 6o) + (2v + 5m + 4o) = (3v + 2v) + (4m + 5m) + (6o + 4o) = 5v + 9m + 10o$

A nyní dosadíme ($v = 16$, $m = 4$, $o = 6$):

$5 \cdot 16 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 6 = 90 + 36 + 60 = 186$

Obě barevné plochy obsahují dohromady 186 čtverečků.

Obr. 31: Zadání příkladu 1. Zdroj: Cihlář, Zelenka (2013, s. 71)



☆ **10.** Vypočítejte počet čtverečků této barevné plochy (počet čtverečků ve čtverci označte ***c*** a počet čtverečků v obrazci tvaru písmene L označte ***d***):

Při řešení předchozí úlohy jste mohli postupovat buď tak, že jste od obsahu velkého obdélníka postupně odečítali nejprve obsahy čtverců a pak obsahy „písmen L“

$\mathbf{136 - 5 \cdot c - 11d}$

nebo tak, že jste nejprve sečetli obsahy všech „odebíraných“ ploch, a pak jste odečetli všechny najednou

$\mathbf{136 - (5c + 11d)}$

Výsledek byl ale v obou případech stejný:

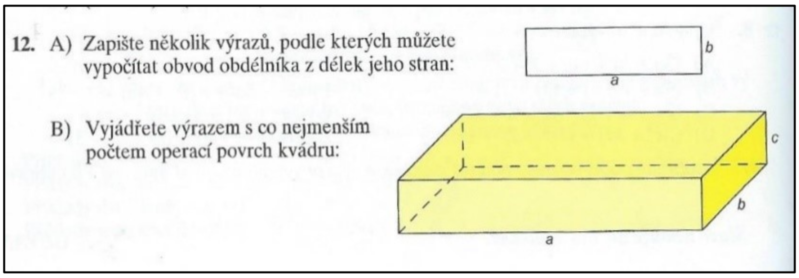
$\mathbf{136 - (5c + 11d) = 136 - 5c - 11d}$

Pamatujte: **Máme-li odečíst mnohočlen, musíme odečíst každý jeho člen.**

Příklady:
$(3a + 4b + 6) - (2a + 6b + 6) = 3a + 4b + 6 - 2a - 6b - 6 = a - 2b$
$(-x^2 + 2x - 7) - (2x^2 - 3x - 5) = -x^2 + 2x - 7 - 2x^2 + 3x + 5 = -3x^2 + 5x - 2$

Obr. 32: Zadání úlohy 10. Zdroj: Cihlář, Zelenka (2013, s. 72)

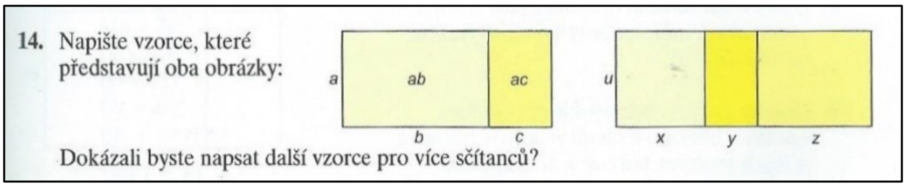
Jak se sčítají jednočleny s proměnnými v různých mocninách, zde vysvětleno není. Autoři zřejmě předpokládají, že látku zprostředkuje žákům učitel. Na procvičení sčítání a odčítání mnohočlenů se na závěr kapitoly objevuje jen jedna úloha s geometrickým kontextem (obr. 33). Žáci mají v úloze výraz zapsat a následně zjednodušit.


12. A) Zapište několik výrazů, podle kterých můžete vypočítat obvod obdélníka z délek jeho stran:

B) Vyjádřete výrazem s co nejmenším počtem operací povrch kvádru:

Obr. 33: Zadání úlohy 6. Zdroj: Cihlář, Zelenka (2013, s. 72)

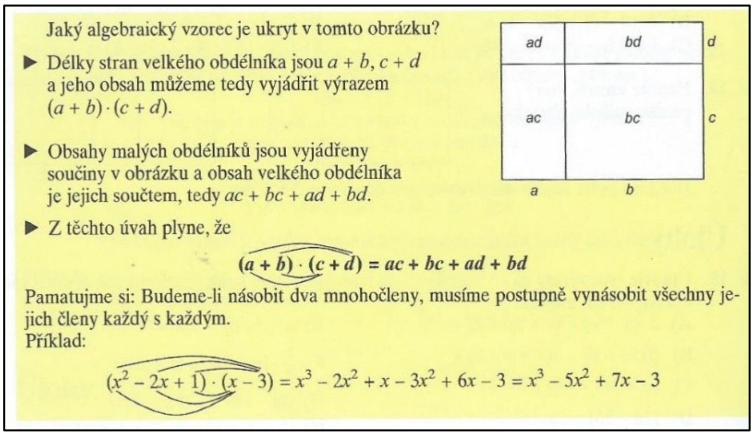
Násobení jednočlenu mnohočlenem autoři nejprve vysvětlují instruktivně. Potom následuje úloha, kde žáci mají pomocí obsahu obdélníku interpretovat roznásobení závorky (obr. 34).


14. Napište vzorce, které představují oba obrázky:

Dokázali byste napsat další vzorce pro více sčítanců?

Obr. 34: Zadání úlohy 14. Zdroj: Cihlář, Zelenka (2013, s. 73)

Při násobení dvojčlenu dvojčlenem autoři zvolili opačný postup (obr. 35). Násobení závorek nejprve objasňují na geometrickém modelu obdélníku. Poté následuje symbolické znázornění postupu. Následují série úloh bez geometrického kontextu zaměřené na násobení výrazů.


Jaký algebraický vzorec je ukryt v tomto obrázku?

▶ Délky stran velkého obdélníka jsou $a + b$, $c + d$ a jeho obsah můžeme tedy vyjádřit výrazem $(a + b) \cdot (c + d)$.

▶ Obsahy malých obdélníků jsou vyjádřeny součiny v obrázku a obsah velkého obdélníka je jejich součtem, tedy $ac + bc + ad + bd$.

▶ Z těchto úvah plyne, že

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + bc + ad + bd$$

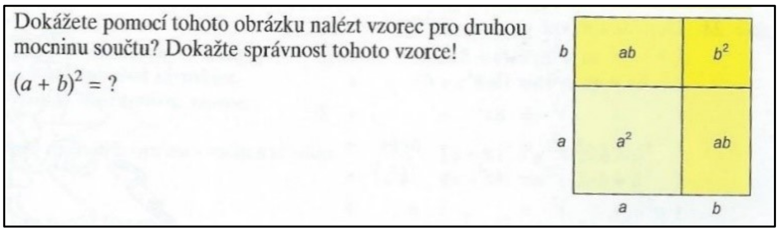
Pamatujme si: Budeme-li násobit dva mnohočleny, musíme postupně vynásobit všechny jejich členy každý s každým.

Příklad:

$$(x^2 - 2x + 1) \cdot (x - 3) = x^3 - 2x^2 + x - 3x^2 + 6x - 3 = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

Obr. 35: Zavedení násobení dvojčlenů. Zdroj: Cihlář, Zelenka (2013, s. 74)

Poslední částí celé kapitoly *Výrazy* jsou vzorce pro úpravy výrazů. V úloze na obr. 36 autoři žákům předkládají geometrický model, pomocí kterého mají sami nalézt vzorec pro druhou mocninu součtu.



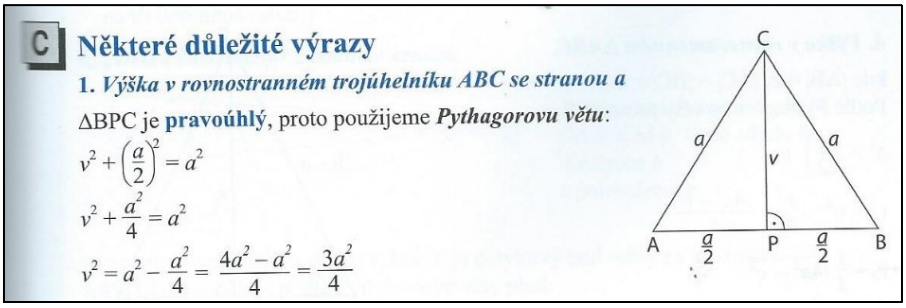
Obr. 36: Zadání úlohy 19 A). Zdroj: Cihlář, Zelenka (2013, s. 75)

Pro objevení vzorce druhé mocniny rozdílu a vzorce pro rozdíl čtverců nabádají autoři žáka k roznásobení předem daných výrazů. Geometrické interpretace těchto vzorců ani úlohy s geometrickým kontextem na procvičení se v učebnici již dále neobjevují.

1.3.4 Matematika 8 pro základní školy Algebra, Půlpán a kol., nakl. SPN

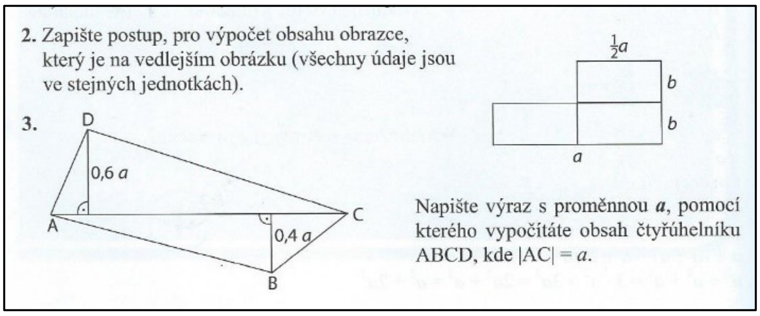
Tato učebnice je rozčleněna na kapitoly *Druhá mocnina a odmocnina*, *Pythagorova věta a její užití*, *Mocnina s přirozeným mocnitelem*, *Výrazy*, *Lineární rovnice*, *Základy statistiky* a *Pravděpodobnost*.

Proměnná od počátku vystupuje jako symbol nahrazující číslo. Zobecnění čísel a jejich nahrazení proměnnou využívají autoři při zavedení mocnin. Geometrická reprezentace proměnných x, x^2 a x^3 se při zavedení ani při operacích s mocninami neobjevuje. Při zavedení výrazů s proměnnou autoři zdůrazňují nejčastější užití v geometrii a ve fyzice při úpravách vzorců (obr. 37).



Obr. 37: Výrazy v geometrii. Zdroj: Půlpán a kol. (2009, s. 67)

Manipulace s výrazy nejsou doprovázeny žádnými geometrickými reprezentacemi. Operace s výrazy jsou vysvětlovány pomocí instruktivních pouček a návodů. Následují řešené příklady se stupňující se obtížností a úlohy na procvičení. Mezi úlohami na procvičení se objevují jen dvě úlohy s geometrickým kontextem (obr. 38). Na závěr kapitoly v závěrečném opakováni autoři uvádějí geometrické interpretace vzorce a násobení dvojčlenů.



Obr. 38: Zadání úloh 2, 3. Zdroj: Půlpán a kol. (2009, s. 74)

1.3.5 Shrnutí analýzy učebnic

Ve všech analyzovaných učebnicích se úlohy na algebraizaci s geometrickým kontextem objevují. Rozdíl je v míře výskytu a také v tom, v jakých souvislostech a s jakými činnostmi jsou úlohy spojeny. Srovnání jednotlivých učebnic je uvedeno v tabulce 2 a 3.

Tab. 2: Geometrické interpretace – mocniny

	Mocniny		
	Zavedení mocnin	**Zavedení operací**	**Úlohy na procvičování**
Herman a kol., Prometheus	x^2, x^3 pomocí obsahu čtverce, objemu krychle x jako model úsečky neuveden	bez geometrické interpretace	kapitola Mocniny v geometrii, úlohy doplněny řešením
Bitnerová a kol., Fraus	bez geometrické interpretace	bez geometrické interpretace	jedna úloha
Cihlář, Zelenka, AOS Publishing	x^2, x^3 pomocí obsahu čtverce, objemu krychle x jako model úsečky až v kapitole výrazy	bez geometrické interpretace	žádné úlohy
Půlpán a kol., SPN	bez geometrické interpretace	bez geometrické interpretace	žádné úlohy

Tab. 3: Geometrické interpretace – výrazy

	Výrazy		
	Zavedení operací	**Zavedení vzorců**	**Úlohy na procvičování**
Herman a kol., Prometheus	bez geometrické interpretace	$(a+b)^2$ algebraické ověření roznásobením $(a-b)^2$ algebraické ověření roznásobením, poté následuje geometrická interpretace a^2-b^2 algebraické ověření roznásobením, geometrická interpretace později pomocí vystřihování papíru	dvě úlohy (zadán obrazec – zapiš výraz), úlohy doplněny řešením
Bitnerová a kol., Fraus	sčítání, odčítání bez geometrické interpretace násobení je interpretováno pomocí obsahu obdélníku	$(a+b)^2$, a^2-b^2 pomocí geometrické interpretace, poté algebraické ověření násobením $(a-b)^2$ uveden v rámečku na konci kapitoly bez vysvětlení	dvě úlohy (zadán obrazec – zapiš výraz) tři úlohy (zadán výraz – znázorni geometricky)
Cihlář, Zelenka, AOS Publishing	sčítání, odčítání jen v první mocnině pomocí počítání čtverečků v síti násobení jednočlenu mnohočlenem nejprve instruktivně, poté interpretace pomocí obsahů	$(a+b)^2$ žáci sami odvozují pomocí předloženého geometrického modelu $(a-b)^2$, a^2-b^2 autoři vyzývají k ověření vzorců roznásobením, chybí geometrická interpretace	tři úlohy (zadán obrazec – zapiš výraz) jedna úloha (zadány výrazy – vysvětli význam výrazů v pravoúhlém trojúhelníku)
Půlpán a kol., SPN	před zavedením operací ukázky geometrických vzorců, operace bez geometrické interpretace	bez geometrických interpretací pouze na konci kapitoly v rámečku ukázána interpretace vzorce $(a+b)^2$	dvě úlohy (zadán obrazec – zapiš výraz)

Z obou tabulek je patrné, že žádná z vybraných učebnic nepoužívá geometrické interpretace kontinuálně při všech vypsaných činnostech – zavedení mocnin, zavedení výrazů, operace s mocninami, operace s výrazy a úlohy na procvičení. Geometrické reprezentace autoři všech učebnic využívají až při zavedení operací s výrazy nebo vzorců. Jednotlivé učebnice se také liší v tom, v jakém pořadí (algebraicky nebo geometricky) operace či vzorce zavádějí. Na výrazech v geometrii nejméně staví autoři Půlpán a kol. V této učebnici autoři nezavádí pomocí geometrické interpretace žádné algebraické vztahy. V učebnici jsou jen ukázky vzorců obsahů a obvodů některých geometrických útvarů. Nejvíce geometrických interpretací se objevuje v učebnicích autorů Bitnerové a kol. a autorů Cihláře a Zelenky.

V procvičovacích úlohách ve všech učebnicích výrazně převládají úlohy s hladinou standardní manipulace před úlohami, kde se geometricky modelují algebraické vztahy.

2 Experimentální část

2.1 Metodologie

Hlavním cílem experimentální části mé práce je identifikovat obtíže a chyby žáků při algebraizaci v úlohách s geometrickým kontextem. Dalším cílem je porovnat, jakých chyb se dopouštějí žáci, kteří se ještě algebru neučili, a ti, kteří se ji již učili. Metodou sběru dat byl test a následné individuální rozhovory s vybranými žáky.

Testy byly zadány v 6.–9. ročnících ve dvou základních školách a na jednom osmiletém gymnáziu. Vybrala jsem dvě běžné základní školy s přibližně stejným počtem žáků. Gymnázium bylo vybráno pro srovnání výsledků žáků kvarty s výsledky žáků 9. ročníků běžných škol. Žáci měli na vypracování testu 45 minut. Testové úlohy jsou převzaté z učebnic či publikací, některé jsou typově podobné úlohám z výzkumu TIMSS (viz níže). Tab. 4 obsahuje počty žáků, kteří se výzkumu zúčastnili.

Tab. 4: Počty žáků, kteří se zúčastnili výzkumu

	6. ročník	7. ročník	8. ročník	9. ročník	celkem
ZŠ I	20	16	13	18	67
ZŠ II	20	24	25	19	88
gymnázium	24	25	22	23	94
celkem	64	65	60	60	249

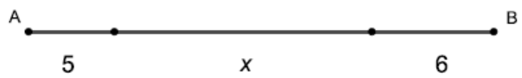
Rozhovory jsem vedla se žáky Základní školy I, kde zároveň vyučuji. Časové rozmezí mezi testem a rozhovory byly dva dny. Průběh rozhovorů byl nahráván na diktafon. Výběr žáků jsem provedla na základě výsledků jejich řešení úloh v testu. Vybrala jsem žáky, kteří danou úlohu vůbec neřešili, nebo řešení měli chybné. Při rozhovoru jsem se vždy doptávala na řešení jedné nebo i více úloh. Nechala jsem vždy žáky, aby postupovali vlastní strategií. Pokud nepřišli na řešení, snažila jsem se je navést tak, aby každý žák odcházel z rozhovorů s tím, že úlohu nakonec vyřešil. Jména žáků, která v této práci uvádím, byla vzhledem k domluvené anonymitě změněna. Celkem bylo vedeno 26 rozhovorů (6 rozhovorů s žáky 6. ročníku, 6 rozhovorů s žáky 7. ročníku, 8 rozhovorů s žáky 8. ročníku, 6 rozhovorů s žáky 9. ročníku). Jeden rozhovor trval průměrně 13 minut.

2.2 Výběr a didaktická analýza úloh

Na základě cíle práce jsem vybrala úlohy, kde žáci prokazují schopnost pracovat s algebraickým jazykem v geometrickém kontextu. Konkrétně zjišťuji, do jaké míry jsou žáci schopni přecházet mezi geometrickou a algebraickou reprezentací. Geometrická reprezentace je v úlohách zastoupena délkou úsečky, obvodem a obsahem obdélníku a dále obvodem a obsahem nepravidelných útvarů nebo útvarů složených. Zadání úloh je navíc koncipováno podle toho, zda se žáci již setkali s výukou algebry, či nikoliv. Čtyři testové úlohy jsou stejné pro žáky šestého, sedmého i osmého ročníku (A1, A2, A3, A4). V testu pro žáky osmého ročníku je navíc přidána úloha (A5), kde je délka strany útvaru zadána pomocí zlomku. Test pro žáky devátého ročníku obsahuje čtyři úlohy s odlišným zadáním (B1, B2, B3, B4) a jednu úlohu (A5), která byla zadána i žákům osmého ročníku. Odlišné zadání spočívá v tom, že žáci kromě sestavení výrazu na základě geometrické reprezentace výraz dále upravují.

Každá úloha je analyzována z hlediska očekávaných obtíží a chyb žáků.

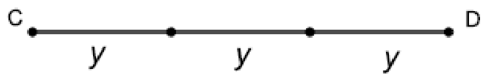
Úloha A1: *Zapiš délku úsečky AB.*



Možné obtíže a chyby:

- Žák má problém s pochopením toho, co znamená proměnná x.
- Žák nerozliší mezi teoretickým objektem a jeho reprezentací, bude odhadovat x, x se jeví delší, nebo bude úsečku měřit.
- Žák aditivní vztah mezi proměnnou a číslem ($11 + x$) zamění za multiplikativní vztah ($11 \cdot x$)

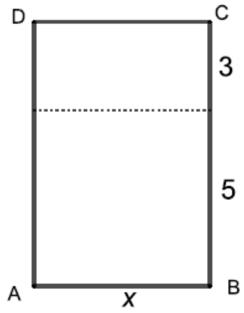
Úloha A2: *Zapiš délku úsečky CD.*



Možné obtíže a chyby:

- Žák má problém s pochopením toho, co znamená proměnná y.
- Žák nerozliší mezi teoretickým objektem a jeho reprezentací, bude odhadovat y, nebo bude úsečku měřit.
- Žák místo výrazu $3 \cdot y$ napíše y^3(předpokládám spíše u žáků osmého ročníku, kteří již prošli výukou mocnin).

Úloha A3: *Zapiš obsah a obvod obdélníku ABCD.*



Možné obtíže a chyby:

- Žák neumí spočítat obsah a obvod.
- Žák zamění vztah pro výpočet obsahu a obvodu.
- Žák správně zapíše výraz pro obsah a obvod, ale problémy budou na úrovni algebraických úprav.

  Možné chybné úpravy pro obsah: $x \cdot (5+3) = 5x + 3$, $5x + 3x = 8x^2$

  Možné chybné úpravy pro obvod: $x + 8 + x + 8 = 16 + x^2$, $2 \cdot (x+8) = 2x + +8 = 16x$, $2 \cdot (x+8) = 2 \cdot 8x$
- Žák ví, že při výpočtu obsahu obdélníku musí vynásobit délky sousedních stran, ale chybně zapíše výraz.

  Možné chybné zápisy: $5 + 3 \cdot x$, $x \cdot 5 \cdot 3$, případně $x \cdot 15$
- Žák ví, že při výpočtu obvodu obdélníku musí sečíst délky všech stran, ale chybně zapíše výraz.

  Možný chybný zápis: $16 + x^2$ (předpokládám spíše u žáků osmého ročníku, kteří již prošli výukou mocnin)

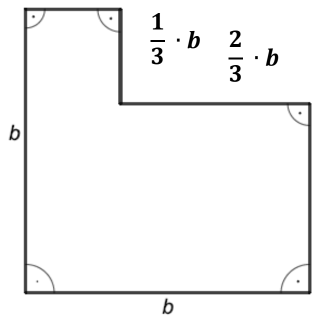
Úloha A4: *Zapiš obsah a obvod obdélníku ABCD.*

Možné obtíže a chyby:

- Žák neumí spočítat obsah a obvod.
- Žák zamění vztah pro výpočet obsahu a obvodu.

- Žák správně zapíše výraz pro obsah a obvod, ale problémy budou na úrovni algebraických úprav.
  Možné chybné úpravy pro obsah:
  $10 \cdot a + 10 \cdot a = 100 \cdot a^2$, případně $20 \cdot a^2$, $(a + a) \cdot 10 = a^2 \cdot 10$
  Možné chybné úpravy pro obvod: $a + a + a + a + 10 + 10 = a^4 + 20$
  Tyto chyby při úpravách předpokládám spíše u žáků osmého ročníku, kteří již prošli výukou mocnin.
- Žák ví, že při výpočtu obsahu obdélníku musí vynásobit délky sousedních stran, ale chybně zapíše výraz.
  Možné chybné zápisy: $a + a \cdot 10, a \cdot a \cdot 10$
- Žák si pamatuje vzorec pro výpočet obvodu jako $2 \cdot (a + b)$, ale nedokáže ho použít v kontextu této úlohy.
  Možné chybné zápisy: $a + a + 10 \cdot 2, (a + 10) \cdot 2$

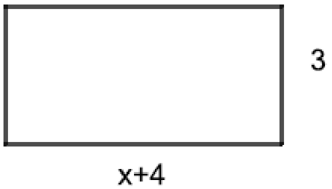
Úloha A5: *Zapiš obvod útvaru na obrázku.*



Možné obtíže a chyby:

- Žák neumí spočítat obvod mnohoúhelníku.
- Žák ví, že obvod mnohoúhelníku se spočítá součtem délek všech jeho stran, ale není schopen určit délku zbývajících stran.
- Žák si neuvědomí, že může doplnit útvar do čtverce a obvod se nezmění, nemusí tedy vůbec počítat se zlomky.
- Žák si uvědomí, že obvod tohoto útvaru lze spočítat jako obvod čtverce s délkou strany *b*, ale chybně zapíše nebo upraví výraz.

Úloha B1: *Zapiš výrazem obsah a obvod obdélníku a výraz uprav.*



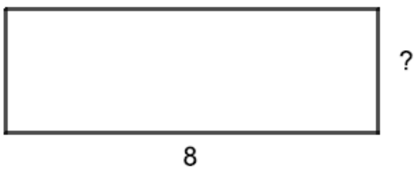
Možné obtíže a chyby:

- Žák neumí spočítat obsah a obvod.
- Žák zamění vztah pro výpočet obsahu a obvodu.
- Žák správně zapíše výraz pro obsah a obvod, ale chybuje na úrovni algebraických úprav.
- Žák ví, že při výpočtu obsahu obdélníku musí vynásobit sousední strany, ale chybně zapíše výraz.

  Možné chybné zápisy: $x + 4 \cdot 3, 3 \cdot x + 4$
- Žák ví, jak spočítat obvod obdélníku, ale chybně zapíše výraz.

  Možné chybné zápisy: $x + 4 + 3 \cdot 2, 3 + x + 4 \cdot 2$

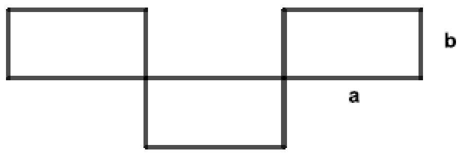
Úloha B2: *Obvod obdélníku na obrázku je* $o = 16 + 4y$. *Zapiš výrazem délku neznámé strany.*



Možné obtíže a chyby:

- Žák si pamatuje vzorec pro výpočet obvodu obdélníku jako $2 \cdot (a + b)$, ale nedokáže ho použít k výpočtu zbývající strany v kontextu této úlohy.
- Žák si splete obvod s obsahem a délku zbývající strany bude počítat jako podíl obvodu $16 + 4y$ a čísla 8.
- Žák přijde na strategii výpočtu délky strany, ale chybu udělá při úpravách výrazů.

Úloha B3: *Napiš výraz, který vyjadřuje obsah a obvod útvaru na obrázku, který je složený ze tří shodných obdélníků. Dané výrazy uprav.*

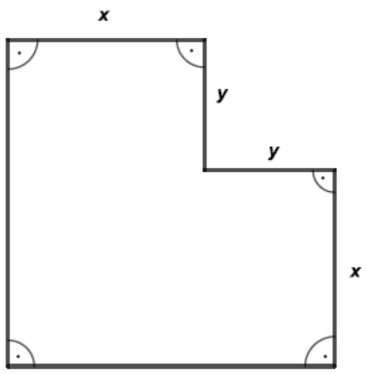


Možné obtíže a chyby:

- Žák neumí spočítat obsah a obvod obdélníku.
- Žák zamění vztah pro výpočet obsahu a obvodu obdélníku.
- Žák správně zapíše výraz pro obsah a obvod, ale chybuje na úrovni algebraických úprav.
- Žák zná strategii, jak spočítat obvod a obsah tohoto útvaru, ale chybně zapíše výrazy. Možné chybné zápisy pro obsah a obvod: $S = a^3 \cdot b^3, o = a + b \cdot 2 \cdot 3,$

  $o = 6 \cdot\ 2 \cdot a + b$

Úloha B4: *Zapiš a uprav výrazy pro výpočet obsahu a obvodu tohoto obrazce.*



Možné obtíže a chyby:

- Žák neumí spočítat obvod mnohoúhelníku.
- Žák ví, že obvod mnohoúhelníku se spočítá součtem všech jeho stran, ale není schopen určit délku zbývajících stran jako výraz *x* + *y*.
- Žák zapíše správně délky neznámých stran výrazem *x* + *y*, ale chybně zapíše nebo upraví výraz pro obvod.

- Žák nenalezne strategii výpočtu obsahu útvaru buď doplněním na čtverec, nebo rozdělením na obdélníky.
- Žák strategii pro výpočet obsahu nalezne, ale chybně zapíše výraz pro obsah útvaru nebo chybuje při úpravách výrazu.

2.3 Analýza dat

Výzkumná data zahrnují žákovská řešení testových úloh a nahrávky rozhovorů. Výsledky testových úloh jsem nejprve zpracovávala kvantitativně. Jednotlivé úlohy jsem rozdělila na správně řešené, chybně řešené a neřešené. Následně jsem identifikovala nejčastější chyby a obtíže, které jsou v práci ilustrovány naskenovanými obrázky žákovských řešení a doplněny ukázkami z rozhovorů se žáky. Rovněž jsem doplnila obrázky žákovských řešení, která jsem neočekávala. Opakující se chyby jsem vyhodnotila kvantitativně pro jednotlivé ročníky.

Rozhovory jsem analyzovala s cílem zjistit problematická místa v procesu řešení žáka, která se z chybných nebo neřešených testových úloh nedala nalézt. Současně jsem se zaměřila na to, jakou dopomoc jsem žákům poskytla a zda byla úspěšná.

2.4 Výsledky experimentu

V této části práce jsou analyzovány výsledky žáků z řešení jednotlivých úloh. Úlohy A1, A2, A3, A4 řešili žáci 6., 7. a 8. ročníků. Úlohy B1, B2, B3, B4 řešili žáci 9. ročníků. Úloha A5 byla zařazena do testu 8. i 9. ročníků. V době, kdy byl test žákům zadán, žáci 8. ročníků všech tří škol již prošli výukou mocnin a operací s mocninami, nikoliv výukou výrazů.

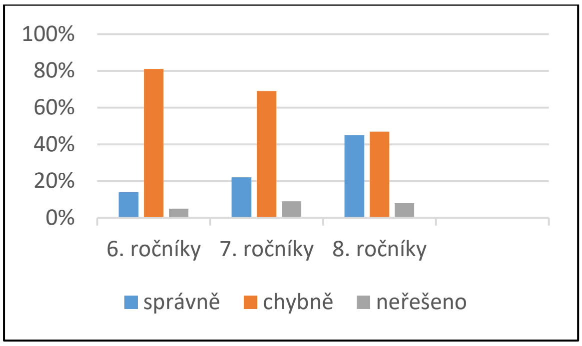
Analýza úloh A1–A4 obsahuje porovnání úspěšnosti řešení úlohy mezi jednotlivými ročníky (6–8), nejčastější chyby a obtíže napříč ročníky a porovnání chyb mezi žáky 6., 7. ročníků[10] a 8. ročníků[11].

Analýza úlohy A5 obsahuje porovnání úspěšnosti řešení úlohy mezi 8. a 9. ročníky, nejčastější chyby a obtíže a porovnání chyb mezi žáky 8. a 9. ročníků.

Analýza úloh B1–B4 obsahuje úspěšnost řešení úloh žáků 9. ročníků, nejčastější chyby a obtíže. V těchto úlohách jsou rovněž srovnány výsledky žáků mezi jednotlivými školami. Zajímalo mě, jak velké budou rozdíly mezi školami v úspěšnosti žáků, kteří již prošli výukou výrazů.

[10] V další části práce označeni jako mladší žáci.
[11] V další části práce označeni jako starší žáci.

2.4.1 Úloha A1



Obr. 39: Relativní četnosti výsledků žáků v úloze A1

Z grafu na obr. 39 lze vyčíst, že nejméně chybovali žáci 8. ročníků. Zřejmě je to tím, že již měli zkušenosti s prací s neznámou při výuce mocnin a operací s mocninami. Tento fakt se projevil i v odlišnosti chyb, kterých se dopouštěli žáci 8. ročníků a žáci 6. a 7. ročníků.

Celková úspěšnost u této úlohy byla přibližně 26 %. Obtížné pro většinu žáků se ukázalo rozlišení mezi obrázkem a matematickým modelem. Žáci úsečku přímo změřili nebo její délku odhadovali. V odhadech délky se objevovaly různé výsledky, nejčastěji 22. Úryvek z rozhovoru s Anetou (7. ročník) ukazuje, jak k výsledku 22 dospěla. Tato úvaha se objevila i v dalších rozhovorech.

> U: „Jak jsi přišla na délku dvacet dva?“
>
> A: „Já jsem si spočítala pět plus šest, to je jedenáct a pak jsem to všechno sečetla dohromady. To mi dalo dvacet dva.“
>
> U: „Tenhle kousek (ukazuje na část úsečky označenou x) ti vyšel jedenáct?“ (Aneta přitakává) „Proč myslíš, že je to jedenáct?“
>
> A: „Nevim. Pět plus šest sem si spočítala. Připadalo mi to stejně dlouhý jako iks.“

Aneta vizuálně odhadla, že část úsečky označená x je stejně dlouhá jako součet dvou částí označených 5 a 6. Někteří žáci napsali, že délka úsečky je 11, což znamená, že sečetli díly označené 5 a 6. Díl označený x již nebrali v úvahu. Příkladem jsou ukázky rozhovorů s Patrikem (7. ročník) a s Pavlem (6. ročník). Oba dva měli problém s pochopením významu proměnné x. Potíže měli také při sestavení výrazu. Pavel neodhadoval délku úsečky 11, ale napsal zápis 6,5.

Rozhovor s Patrikem:

> U: „Jak jsi přišel na délku úsečky jedenáct?“
>
> P: „Sečetl jsem ty délky pět a šest.“
>
> U: „Ta úsečka je dlouhá od A do B, co tenhle kousek?“ (učitel ukazuje na x)

P: „To mi přišlo stejně dlouhý jako tohleto.“ (žák ukazuje na x)

U: „Myslíš, že je to tak skutečně?“

P: „To právě nevíme.“

U: „Ano. To nevíme, když je tady nějaká neznámá. Když to nevíme, tak to nemůžeme odhadovat, viď? Když si vezmeš pravítko a změříš tenhle kousek, tak určitě není 5, to je jen náčrtek. Kdyby místo iks bylo třeba číslo deset. Jak bys tu úsečku zapsal?“

P: „Tak bych to sečetl.“

U: „ A když tu nemám číslo, ale iks?“

P: „Nevím.“

U: „Předtím jsi řekl, že ty části sečteme. Tak když tu bude pět, tak to sečteme, když tam bude jiné číslo, tak to také sečteme. My tu ale máme písmeno, které nám nahrazuje jakékoliv číslo. Tak jak by se ta délka dala zapsat? Zkus psát, jak bys ty délky sčítal.“

P: píše $5 + 6 + x = 11$

P: „ A nevím, co teď.“

U: „No, ten zápis je dobře. Když toto je jedenáct a to iks neznám? Můžu sečíst jedenáct a číslo, které neznám? Tak jak by se dal ten zápis zjednodušit?“

P: „Nevím.“

U: „Co tady můžu sečíst?“

P: „Pět a šest.“

U: „Místo pět a šest jsi napsal jedenáct. A tento kousek, označený iks neznám, viď. Můžu sečíst iks a jedenáct?“

P: „Ne, tak jedenáct plus iks.“

Rozhovor s Pavlem:

U: „Jak jsi přišel na to, že je to šest celých pět, zkus mi to vysvětlit?“

P: „Já jsem tipoval.“

U: „Co znamená podle tebe iks?“

P: „Tipl bych, že je nějaké číslo.“

U: „Je to konkrétní číslo?“

P: (dlouho přemýšlí) „Nevím.“

U: „To může být jakékoliv číslo. Ta neznámá nám zastupuje jakékoliv číslo. Kdybychom věděli, že je to deset. Uměl bys zjistit délku úsečku?“

P: „To bude dvacet jedna.“

U: „A když to iks nevím?“

P: „Jedenáct a iks.“

U: „Jak by se to zapsalo. Co znamená to „a“. Zkus to zapsat.“

P: (přemýšlí a mlčí)

U: „Co jsi udělal s těmi konkrétními čísly?“

P: „Dal jsem to dohromady.“

U: „A co znamená dohromady?“

P: „Sečetl jsem to.“

U: „Výborně. Když to iks nevím, počítá se délka stejným způsobem. Jen to iks tam musím nějak zapsat, musím s ním nějak počítat.“

P: „Pět plus šest je jedenáct.“

U: „A co to iks? Zkusíme to znova, ano? Říkal jsi pět plus deset plus šest. To, jak jsi délku úsečky zapisoval s čísly, zapiš stejně s iks.“

P: píše $5 + x + 6$

U: „Ták, výborně.“

Tereza (6. ročník) a Richard (8. ročník) si potřebovali ujasnit, co znamená neznámá. Výraz pro délku úsečky sestavili bez potíží.

Tereza napsala do testu délku úsečky $2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$. Následuje úryvek z rozhovoru s Terezou.

T: „Já jsem si vzala pravítko. Změřila jsem si ty kousky. A vyšlo mi to iks jako pět a šest dohromady.“

U: „Zkus tento dílek změřit. Je to pět?“

T: (měří dílek) „Není.“

U: „Co podle tebe znamená iks?“

T: „Že to je nějaké číslo, ale nevíme jaký právě.“

U: „Nóó, výborně. Tady v té úloze jsi napsala správně, že délka úsečky je tři krát ypsilon. Pokus se zapsat délku této úsečky.“

T: píše $5 + x + 6$

U: „Perfektní.“

Rozhovor s Richardem.

U: „Ty jsi napsal, že celá úsečka je dvacet dva. Část iks je jedenáct, proč?“

R: „Ty dvě části jsem sečetl a odhadl jsem, že to iks bude stejný.“

U: „Myslíš, že tato část je skutečně pět?

R: „Není.“

U: „Co znamená podle tebe písmenko iks?“

R: „Neznámá.“

U: „Jak si vysvětluješ, co je to neznámá?“

R: „Nějaký číslo.“

U: „Výborně. Kdybychom to číslo věděli, třeba by to iks bylo deset. Tak bys délku určitě uměl spočítat, že?“

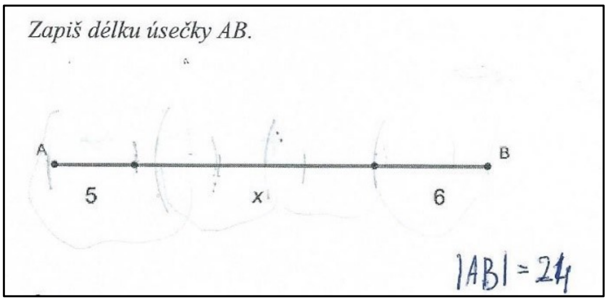
R: „Deset plus deset a ty dvě strany sečtu.“

U: „A když to nevíme a tady je iks. Jak by ta délka byla?“

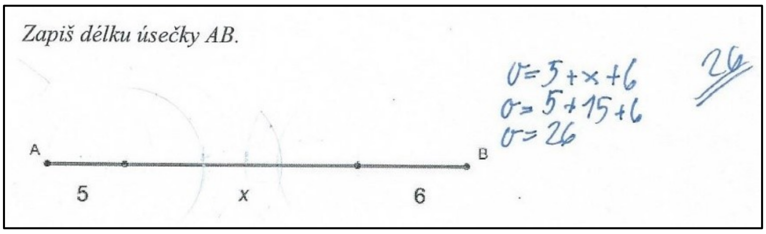
R: „Jedenáct plus iks.“

U: „Ano, přesně tak.“

Jiní žáci se snažili délku úsečky určit tak, že pomocí kružítka nanášeli úseky označené 5 a 6 na část označenou x (obr. 40, obr. 41). Dospěli tak k různým výsledkům, např. 24, 26 nebo 23.



Obr. 40: Markovo řešení úlohy A1. 6. ročník



Obr. 41: Petrovo řešení úlohy A1. 6. ročník

Kromě číselných výsledků se v řešení objevily tyto zápisy délky úsečky: $5 \cdot 6 \cdot x, 5 + 6 \cdot \cdot x, 5 + x + 6 = 11x, 5x6$. Posledně jmenovaný výraz vysvětluje Eliška.

U: „Co znamená tento zápis $5x6$?“

E: „Já jsem to udělala, že AB rovná se pět to iks tady a šest.“

U: „Co si mám pod tím představit? To, že $5x6$ je délka úsečky? Když třeba bude iks jedna, tak by to podle tvého zápisu znamenalo, že délka je 516.“

E: „Takže si tam místo iks mám dát nějaké číslo?“

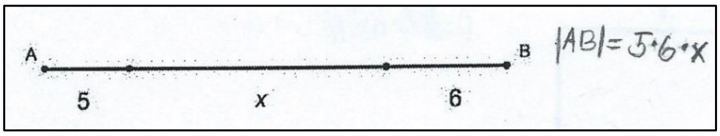
U: „No, zkus si místo iks dát třeba osm. Jak bys tu délku úsečku napsala.“

E: „Tak bysme to sečetli dohromady.“

U: „Ano. My tam ale máme písmenko, které zastupuje číslo. Tak jak by se dala ta délka úsečky zapsat?“

E: „pět plus iks plus šest“.

U: „Výborně, přesně tak.“



Obr. 42: Andreino řešení úlohy A1. 8. ročník

Andrea (obr. 42) i Gábina (8. ročník) aditivní vztah mezi proměnnou a čísly $5 + 6 + x$ zaměnily za multiplikativní vztah $5 \cdot 6 \cdot x$. Když jsem Andreu vyzvala, aby si místo x dala nějaké konkrétní číslo a určila délku úsečky, opravila své řešení na $5 + 6 + x$. Rovněž poznamenala, že původně tam měla znaménka plus, což je na obrázku vidět. Dosazení konkrétního čísla rovněž pomohlo Gábině:

U: „Napsal jsi iks krát pět krát šest. Kdyby iks bylo devět, kolik by úsečka měřila?“

G: „Devět plus šest plus pět.“

U: „Ano, říkáš to správně. Co jsi tady napsala?“

G: „To krát je špatně. Má to bejt jedenáct plus iks,“

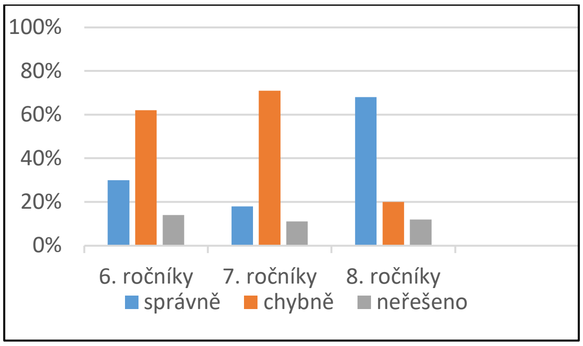
Ze srovnání výsledků 6. a 7. ročníků a 8. ročníků vyplynulo, že mladší žáci ve většině případů volili měření nebo odhady délky úsečky. Tato potřeba konkrétního výsledku se objevila přibližně u 70 % žáků, kteří úlohu řešili chybně, u starších žáků to bylo přibližně 40 %. Rozdíly se objevily rovněž u způsobu správného zápisu. Mladší žáci zapisovali délku úsečky převážně výrazem $5 + 6 + x$. Starší žáci zapisovali výraz zjednodušený, tzn. $11 + x$.

V tabulce 5 jsou shrnuty opakující se chyby a jejich relativní četnosti v jednotlivých ročnících.

Tab. 5: Relativní četnosti opakujících se chyb v úloze A1

	6. ročník	7. ročník	8. ročník
měření modelu úsečky	27 %	16 %	0 %
různé jiné odhady	35 %	13 %	14 %
odhad délky 22	4 %	20 %	14 %
geometrické nanášení délek	4 %	18 %	11%

2.4.2 Úloha A2



Obr. 43: Relativní četnosti výsledků žáků v úloze A2

Celková úspěšnost u této úlohy v testu byla 38 %, tedy o něco vyšší než v úloze A1. Zhoršení nastalo pouze u žáků sedmých ročníků (obr. 43). Z výsledků testů vyplynulo, že žáci, kteří vyřešili správně úlohu A1, rovněž vyřešili tuto úlohu. Zajímavé je zjištění, že někteří žáci, kteří byli v úloze A1 neúspěšní (úlohu neřešili nebo řešili chybně), úlohu A5 vyřešili správně (přibližně 27 % žáků). V chybných postupech opět převažovaly odhady délky úsečky a změření délky. Někteří žáci napsali správně délku $y + y + y$ nebo $3 \cdot y$. Posléze za y dosadili odhadovaná čísla, čímž se snažili opět dospět ke konkrétnímu výsledku.

Žáci, kteří v rozhovorech s dopomocí vyřešili úlohu A1, celkem snadno dospěli již sami ke správnému výsledku v této úloze. Příkladem jsou ukázky rozhovorů s Patrikem (7. ročník) a s Pavlem (6. ročník). V okamžiku, kdy pochopili roli neznámé v úloze A1, úlohu A2 bez problému vyřešili.

Rozhovor s Patrikem:

P: „Ty čísla nevím, že jo?“

U: „Ano.“

P: „Tak ypsilon plus ypsilon plus ypsilon.“

U: „Výborně. A šel by ten zápis nějak zjednodušit?“

P: (chvíli přemýšlí) „Asi už ne. Vlastně tři krát ypsilon.“

Rozhovor s Pavlem:

U: „Pokus se teď zapsat délku této úsečky.“

P: píše $y + y + y$

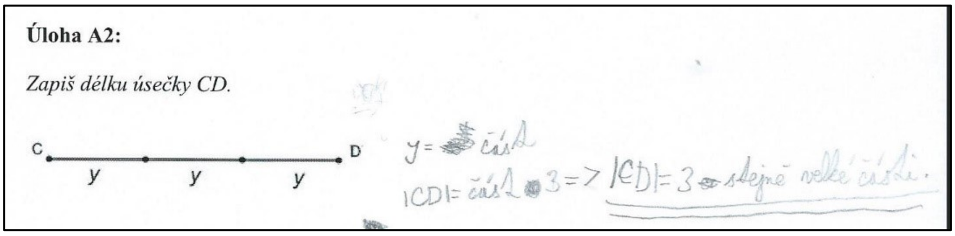
U: „No, výborně. Můžeme to zapsat ještě nějak jinak?“

P: „Tři krát ypsilon.“

Radek (7. ročník) rovněž rychle přišel na řešení $y + y + y$, ale těžší pro něj bylo nahradit součet součinem.

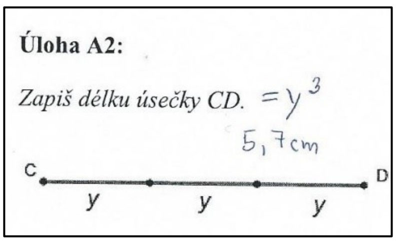
U: „Šlo by to zapsat jinak?“
R: „Nevím.“
U: „Co si vysvětluješ pod tím, že tady jsou stejná písmenka?“
R: „Že to je stejně dlouhý.“
U: „Správně. Když bude ypsilon například šest, jak délku *CD* spočítáš?“
R: „Šest plus šest plus šest.“
U: „A šlo by šest plus šest plus šest vypočítat i jinak?“
R: „Šest krát tři.“
U: „ Když tam nemáme šest, ale ypsilon plus ypsilon plus ypsilon.“
R: „ypsilon krát tři.“
U: „To je přesně ono.“

Mezi správnými algebraickými zápisy se objevilo netradiční řešení Tomáše (obr. 44). Pochopil, co znamená proměnná *y*, ale využil zde jakousi kombinaci slovního a algebraického popisu situace.



Obr. 44: Tomášovo (7. ročník) řešení úlohy A2

Na obr. 45 je vidět Klářin (7. ročník) pokus o algebraický zápis, který je ovšem chybný. Klára navíc připsala číselný údaj, který získala měřením úsečky. Tento druh chyby jsem očekávala spíše u žáků 8. ročníků, kteří již mají zkušenosti s mocninami.



Obr. 45: Klářino řešení úlohy A2

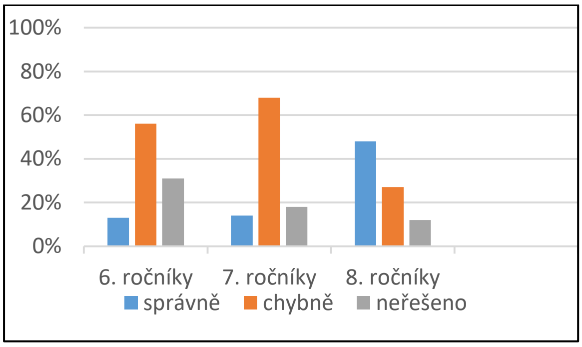
U mladších žáků bylo v chybných řešeních zastoupeno v 94 % měření a odhady úsečky. U starších žáků již méně, kolem 75 % (tab. 6). V obou skupinách byl mnohem více zastoupen zápis $3 \cdot y$ místo zápisu $y + y + y$. V tabulce 6 jsou shrnuty opakující se chyby a jejich relativní četnosti v jednotlivých ročnících.

Tab. 6: Relativní četnosti opakujících se chyb v úloze A2

	6. ročník	7. ročník	8. ročník
měření modelu úsečky	43 %	13 %	0 %
různé odhady	53 %	78 %	75 %

2.4.3 Úloha A3

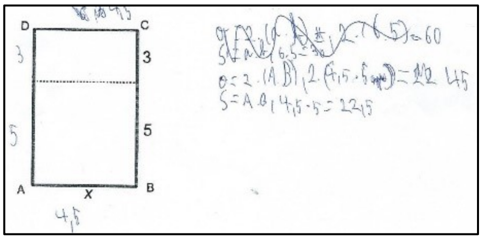
Obvod



Obr. 46: Relativní četnosti výsledků žáků v úloze A3

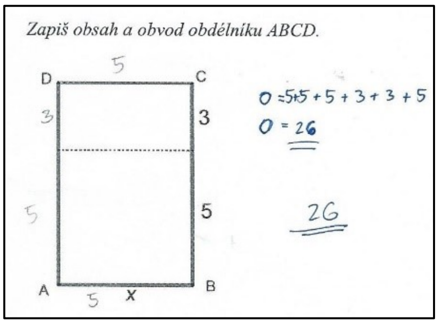
Z grafu na obr. 46 je vidět, že geometrická reprezentace obvodu obdélníku dělala velké obtíže mladším žákům. Celková úspěšnost této části úlohy byla 24 %. Chybná řešení, ve kterých žáci měřili nebo odhadovali délku strany *x*, by se dala rozdělit do tří početně vyrovnaných skupin:

- Žáci odhadli nebo změřili délku strany *x*, ale neuměli spočítat obvod obdélníku (obr. 47).



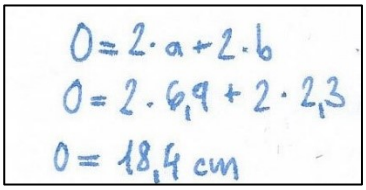
Obr. 47: Ivanovo (7. ročník) chybné počítání obvodu

- Žáci změřili nebo odhadli délku strany $x = 5$ a obvod spočítali správně (obr. 48).



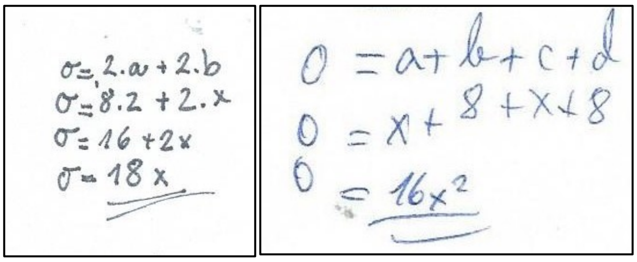
Obr. 48: Řešení Petry (6. ročník)

- Žáci odhadovali délku strany x a obvod spočítali správně (obr. 49).



Obr. 49: Terezčino (6. ročník) řešení obvodu

Žáci, kteří správně zapsali obvod, chybovali na úrovni algebraických úprav (obr. 50, obr. 51).



Obr. 50, 51: Ukázky chybných úprav výrazů (8. ročníky)

Andrea (8. ročník) zapsala v testu obvod $o = 15 \cdot 2 + 2 \cdot x$. Rozhovor níže ukazuje, že zná výpočet obvodu obdélníku, ale neumí ho použít v kontextu této úlohy.

U: „Kde jsi vzala to číslo patnáct?“

A: „Pět krát tři.“(ukazuje na části strany označené 5 a 3)

U: „Aha. Jak se vypočítá obvod obdélníku?“

A: „Dva krát á plus dva krát bé.“

U: „Co znamená á, bé?“(učitelka načrtne jiný obdélník)

A: „Tohle je třeba strana á, tohle strana bé.“ (ukazuje na strany načrtnutého obdélníku)

U: „Dobře. Takže kolik měří strana tohoto obdélníku (ukazuje na obdélník v testu), třeba tato strana?“

A: „Iks.“

U: „Kolik měří druhá strana?“

A: „Osm“.

U: „Ano. Zkus znova zapsat ten obvod.“

A: „osum krát iks“.

U: „Proč je v tom vzorci, co jsi říkala, dva krát $á$?“

A: „Takže by to bylo osm krát dva krát, teda plus dva krát iks.“

Richard (8. ročník) odhadoval délku strany označenou x číslem 5. Jakmile jsem ho upozornila, že x je neznámé číslo, obvod zapsal bez problémů.

U: „Napsal jsi, že obvod je dvacet šest.“

R: „Tahle strana je pět a tahle osm a sečetl jsem všechny strany.“

U: „Jak víš, že je to pět?“

R: (chvíli přemýšlí) „Je to je čtverec.“

U: „Víme, že to je čtverec? Tam je zase nějaká neznámá.“

R: „No, vlastně.“

U: „Zkus obvod zapsat ještě jednou.“

R: píše $16 + 2 \cdot x$

V dalších rozhovorech se situace opakovala. Pokud si žák ujasnil, jak se spočítá obvod obdélníku a jaké má obdélník délky stran, byl schopen obvod správně zapsat.

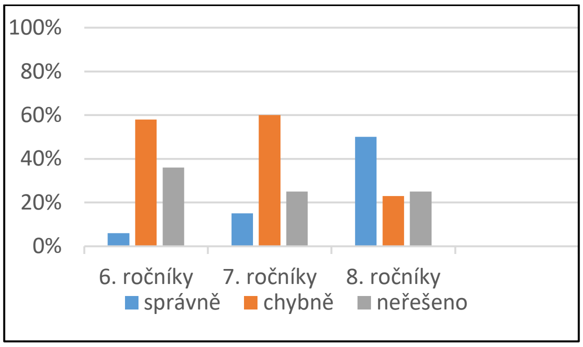
Správná řešení obsahovala různé zápisy ekvivaletních výrazů: $2 \cdot x + 16, 2 \cdot (8 + x), 8 + 8 + +2x, 2 \cdot 8 + 2x, 2x + 2 \cdot (3 + 5), 2 \cdot (3 + 5 + x)$

V tabulce 7 jsou shrnuty opakující se chyby a jejich relativní četnosti v jednotlivých ročnících.

Tab. 7: Relativní četnosti opakujících se chyb v úloze A3 – obvod

	6. ročník	7. ročník	8. ročník
různé číselné výsledky obvodu	42 %	27 %	19 %
změření strany délky x a výpočet obvodu	25 %	10 %	19 %
odhad délky strany $x = 5$, výpočet obvodu $o = 26$	22 %	0 %	13 %

Obsah



Obr. 52: Relativní četnosti výsledků žáků v úloze A3 (obsah)

Celková úspěšnost při určování obsahu byla 23 %. Chybné jevy se opakovaly jako při určování obvodu. Žáci odhadovali, měřili stranu x, a to především opět v nižších ročnících. Problém nebyl v tom, že by neuměli obsah spočítat, ale spíše v pochopení toho, co znamená neznámá x. Žáci, kteří se pokusili úlohu řešit, často napsali vzorec $S = a \cdot b$ a poté dosadili číslo 8 a nějaké odhadované číslo, nebo číslo 5 (v náčrtku strana x měří 5). V rozhovorech se ukázalo, že žáci často nabyli dojmu, že větší část obdélníku je čtverec. Stranu neměřili, ale útvar se jim jevil jako čtverec. Nejčastější výsledek obsahu byl 40.

Neznalost výpočtu obsahu a nenapsání závorky ukazuje úryvek z rozhovoru s Terezou (6. ročník).

U: „Obvod máš dobře. Obsah jsi nespočítala."

T: „Obsah jsem zapomněla, jak se počítá."

U: „Pamatuješ si, jak jsme pokrývali obdélník čtverečkama? Když ti načrtnu obdélník se stranami pět a osm. Tady si udělám osm řádků a pět sloupků. Tak zjišťuji, kolik čtverečních centimetrů potřebuji na pokrytí, viď?"

T: „Pět krát osm."

U: „Zkus to napsat u tohoto obdélníku. Jaký je rozdíl mezi těmi dvěma obdélníky?"

T: „Tady je číslo a tady ho nevíme."

U: „Výborně a obsah se počítá stejně u každého obdélníku, viď? Tak tady jsi udělala pět krát osm. Jak bys začala tady?"

T: píše $5 + 3$, dál neví

U: „Tady jsi napsala správně pět krát osm."

T: píše $5 + 3 \cdot x$

U: „Která operace má přednost? Násobení nebo sčítání?"

T: „Násobení před sčítáním."

U: „Přesně tak. A tahle strana měří?"

T: „Osum.“ (dává do závorky $5 + 3$)

U: „Čím bychom mohli tu závorku nahradit?“

T: píše $8 \cdot x$

Aneta (7. ročník) si spletla výpočet obsahu obdélníku s obsahem a navíc odhadovala délku strany označenou x číslem 5. Při sestavení výrazu pomohl model obdélníku s konkrétními čísly.

U: „Obsah obdélníku ti vyšel dvacet šest. Jak jsi dospěla k číslu dvacet šest?“

A: „Osm krát dva plus pět krát dva.“

U: „Tady jsi označila stranu iks pět. Jak jsi zjistila, že je to pět?“

A: „To nevim, to jsem si tipla, že je to čtverec.“

U: „My nevíme, kolik je ta strana, viď?“

A: „Tak si ji označím taky iks.“

U: „A jak se počítá obsah obdélníku. Když ti načrtnu nějaký konkrétní obdélník se stranami osm a pět?“

A: „Osm krát pět.“

U: „Výborně. Teď to zkus u tohoto obdélníku.“

A: „Pět krát tři.“

U: „Tady jsi násobila šířku a délku (načrtnutý obdélník se stranami 8 a 5). Tak ukaž mi strany tohoto obdélníku.“ (obdélník v úloze)

A: „Pět plus tři krát osm.“

U: „Výborně. Jak to zapíšeš?“

A: píše $8 \cdot x$

U: „Přesně tak.“

Problém se závorkami se v testech neobjevoval. Žáci totiž zapisovali správné řešení ve většině případů $8 \cdot x$, ve dvou případech $x \cdot 5 + x \cdot 3$.

Ve výsledcích se objevily i tyto chybné zápisy obsahu: $5 \cdot x, x \cdot 5 \cdot 3 = 20, 128 + 2 \cdot x^2, x \cdot$ $\cdot 5 \cdot 3$, $8 \cdot 8 \cdot x \cdot x$. Ukázky z rozhovorů s Eliškou (6. ročník) a s Gábinou (8. ročník) ilustrují jejich chybné úvahy při sestavování výrazu.

U: „Obvod jsi napsal dobře, obsah jsi napsala iks krát pět krát tři.“

U: „Jak se spočítá obsah obdélníku?“

E: „Strana krát strana.“

U: „Tahle strana měří?“

E: „ Iks.“

U: „A tahle?“

E: „Pět a tři.“

U: „A to je?“

E: „Osm.“

U: „Jak bude obsah?“

E: „Iks krát osm.“

U: „Obvod máš dobře zapsaný. Obsah jsi napsala osm krát osm krát iks krát iks. Jak se počítá obsah obdélníku?“

G: „Násobím strany.“

U: „Všechny?“

G: „Tuhle krát tuhle.“

U: „Ano, co jsi tady v tom zápise násobila?“

G: „No jo vlastně jen osum krát iks.“

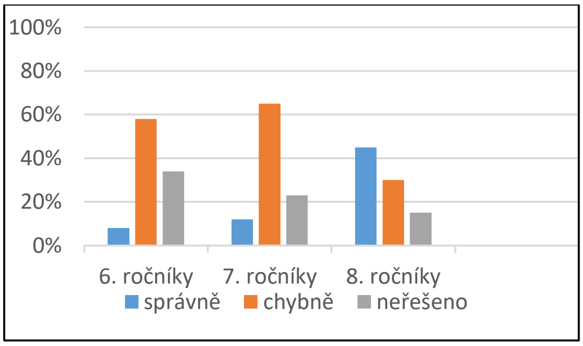
V tabulce 8 jsou shrnuty opakující se chyby a jejich relativní četnosti v jednotlivých ročnících.

Tab. 8: Relativní četnosti opakujících se chyb v úloze A3 (obsah)

	6. ročník	7. ročník	8. ročník
různé číselné výsledky obsahu	30 %	51 %	29 %
odhad délky strany $x = 5$, výpočet S= 40	16 %	23 %	14 %
měření délek stran a výpočet obsahu	24 %	0 %	0 %

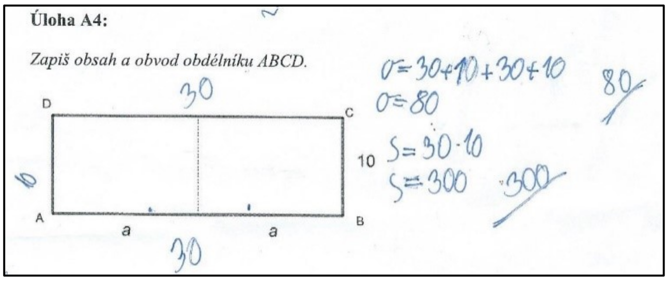
2.4.4 Úloha A4

Obvod



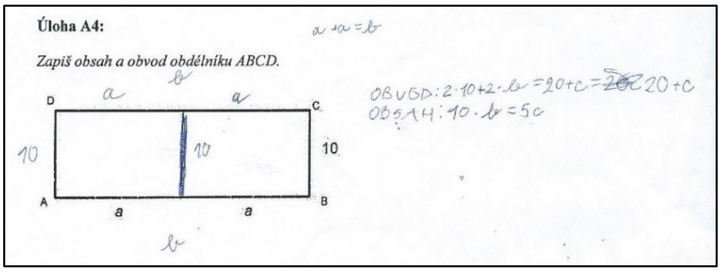
Obr. 53: Relativní četnosti výsledků žáků v úloze A4

Se zvyšujícími se ročníky se také zvyšuje počet správných řešení, přesto je celková úspešnost jen 21 %. Výrazně vyšší úspěšnost je opět u starších žáků (obr. 53). Domnívám se, že velkou roli zde hraje větší zkušenost starších žáků s prací s neznámou a také s tím, co neznámá představuje. Číselné vyjádření obvodu převažuje před algebraickým zápisem. Způsob geometrického přenášení délky kratší strany obdélníku na délku delší strany nebyl neobvyklý (obr. 54), stejně jako výsledek obvodu 80.



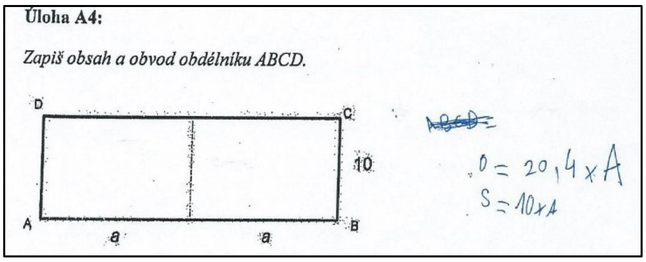
Obr. 54: Lindino (6. ročník) řešení obvodu

Matějovo řešení na obr. 55 je překvapivé tím, jakým způsobem využil k zápisu obvodu substituci. Jednou $a + a = b$, podruhé $2 \cdot b = c$.



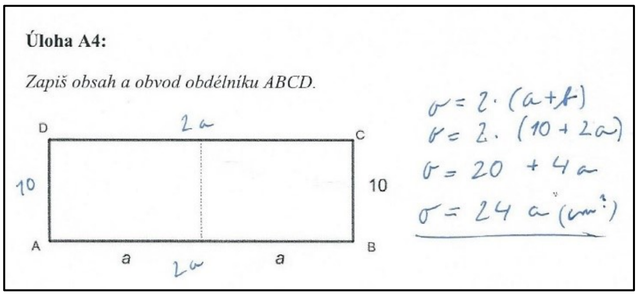
Obr. 55: Matějovo (7. ročník) řešení obvodu

Amálie sečetla délky stran označené číselnou hodnotou, správně sečetla délky stran označených neznámou, ale celkový obvod již nedokázala zapsat jako součet těchto dílčích výpočtů (obr. 56).



Obr. 56: Amáliino (6. ročník) řešení obvodu

Naopak Karolína (obr. 57) správně obvod zapsala, roznásobila správně závorku, ale provedla chybnou algebraickou úpravu $20 + 4a = 24a$, což byl častý jev u starších žáků.



Obr. 57: Karolíny (8. ročník) řešení obvodu

Nejčastější chybný zápis $20 + 2 \cdot a$ ilustrují dvě ukázky z rozhovorů s Richardem a s Dominikem (8. ročníky, viz níže). Oba si hned uvědomili chybu a opravili se. U některých žáků je zřejmě tato chyba způsobena tím, že jsou silně vázáni na obecný vzorec pro obvod obdélníku $o = 2 \cdot a + 2 \cdot b$.

Ukázka rozhovoru s Richardem:

U: „Richarde, napsal jsi, že obvod je dvacet plus dva krát á. Vysvětli, jak jsi k tomu došel.“

R: „Tady je deset a deset (žák ukazuje na strany), to je dvacet.“

U: „Ano, a to dva krát á?“

R: (žák uvažuje nahlas) „Když bylo tady á, tady, tady a tady, takže by to bylo vlastně dvacet plus čtyři krát á.“

Ukázka rozhovoru s Dominikem:

D: (žák napsal $20 + 2 \cdot a$)

U: „Jak se počítá obvod obdélníku?“

D: „Sečtem všechny čtyry strany“.

U: „Podívej na ten zápis. Udělal jsi to, co jsi teď říkal?“

D: (žák chvíli přemýšlí) „Ne, tam má bej dvacet plus čtyry krát á.“

Stejný chybný výraz $20 + 2 \cdot a$ napsala do testu také Gábina. Správně určila i délku strany výrazem $2 \cdot a$. Chybu udělala nejspíše jen z nepozornosti.

U: Obvod jsi napsal dvacet plus dva krát á. Jak se počítá obvod obdélníku?“

G: „Sečtu všechny strany.“

U: „Ano. Kolik měří tato strana?“

G: „dva krát á.“

U: „Tato?“

G: „Dva krát á, takže to bude dvacet plus čtyři krát á.“

U: „Přesně. Vidíš, kde jsi udělal chybu?“

G: „Tu stranu jsem tam započítala jen jednu.“

Eliška uměla spočítat obvod obdélníku, ale potíže jí činilo určit délku strany výrazem $2 \cdot a$. K tomuto jevu docházelo především u mladších žáků.

U: „Teď zkusíme poslední úlohu, ano?“

E: „Já jsem napsala obsah a obvod úplně stejně.“

U: „No, to je divný, viď. Zapiš do obrázku zbývající délky stran.“

U: „Jak se počítá obvod obdélníku?“

E: „Sečtu všechny strany.“

U: „Ano, zapisuj obvod tak, jak to říkáš.“

E: píše $o = aa$

U: „Co znamená zápis áá?“

E: „To je ta celá tahle strana.“

U: „Kdybys ty čísla znala, třeba á by bylo tři.“

E: „Tak to je šest.“

U: „Jak jsi spočítala, že je to šest?“

E: „Sečetla jsem to dohromady.“

U: „Výborně sečetla jsi to. Když tady je á a tady také á.“

E: „Dva krát á.“

U: „Ano. Tak napiš to znovu.“

U: píše $o = 2 \cdot a + 2 \cdot 10 + 2 \cdot a$

U: „Šel by ten zápis nějak ještě upravit?“

E: píše $4 \cdot a + 2 \cdot 10$

U: „ A ještě bychom to mohly zjednodušit?“

E: „Asi ne.“

U: „Dva krát deset nejde vypočítat?“

E: „Čtyři krát plus dvacet.“

Chybné i správné zápisy byly zapsány v mnoha variantách, jak ukazuje tab. 9. Chybné zápisy rovněž ukazují nesprávné operace s proměnnými a chybné roznásobení závorky. V tabulce 10 jsou shrnuty opakující se chyby a jejich relativní četnosti v jednotlivých ročnících.

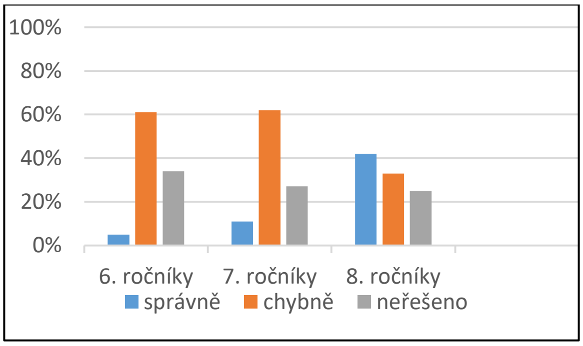
Tab. 9: Algebraické zápisy obvodu obdélníku v řešení žáků

Správné zápisy obvodu	Chybné zápisy obvodu
$20+4a$	$a+a+10\cdot 2$
$a+a+10+10+a+a$	$2\cdot(a+10)$
$10+10+4\cdot a$	$2\cdot(2a+10)=4a+40$
$2\cdot(10+2a)$	$2a+20$
$4\cdot a+2\cdot 10$	$a+10+a+10=20a^2$
$2\cdot 10+2\cdot 2a$	$20+4a=24a$
$10\cdot 2+2\cdot(a+a)$	$2\cdot 2a+2\cdot 10=4a+20=24a$
$2\cdot(10+a+a)$	$10\cdot 2+2\cdot a=20+2a=22a$

Tab. 10: Relativní četnosti opakujících se chyb v úloze A4 (obvod) v jednotlivých ročnících

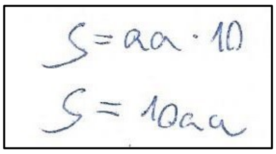
	6. ročník	7. ročník	8. ročník
různé číselné výsledky obvodu	22 %	50 %	22 %
geometrického přenášení délky kratší strany obdélníku na délku delší strany, $o=80$	25 %	10 %	11 %
měření délek stran a výpočet obvodu	24 %	0 %	0 %

Obsah

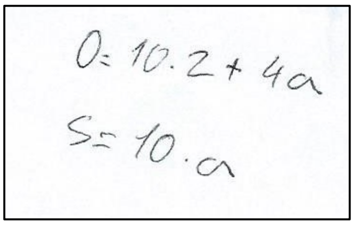


Obr. 58: Relativní četnosti výsledků žáků v úloze A4 (obsah)

Celková úspěšnost 19 % je nejnižší ze všech výše analyzovaných úloh, a to ve všech ročnících. U mladších žáků byl opět největší problém v pochopení významu neznámé. Stejným způsobem jako u výpočtu obvodu měřili či odhadovali délky stran, které následně mezi sebou násobili. Pokud se žáci v obou skupinách pokusili o algebraický zápis, správné řešení selhalo na tom, že si neuvědomili, že délka strany obdélníku je $a + a$, tedy $2 \cdot a$, nikoliv $a \cdot a$ nebo jen a (obr. 59, obr. 60).

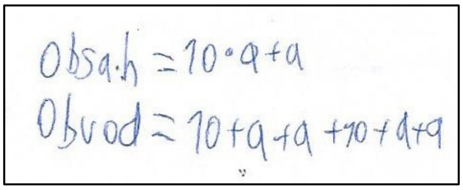


Obr. 59: Jarmily (8. ročník) řešení obsahu



Obr. 60: Sářino (8. ročník) řešení obsahu

Nepoužití závorky vedlo Libora (obr. 61) k chybnému řešení. Nebral v úvahu $a + a$ jako jeden objekt.



Obr. 61: Liborovo (7. ročník) řešení obsahu

Problém s určením délky obdélníku výrazem $2 \cdot a$ se opakoval v mnoha rozhovorech. Příkladem je úryvek z rozhovoru s Adélou (7. ročník) a s Anetou (7. ročník).

Rozhovor s Adélou:

U: „Jaká je délka téhle strany?“

A: „Deset.“

U: „A téhle.“

A: „á“

U: „Celá strana měří á?“

A: „Ne, áá.“

U: „Co znamená áá? Jak bys to zapsala? (žákyně delší dobu mlčí) Tady jsi to zapsala iks plus iks.“

A: „á plus á“

U: „Šlo by to zapsat nějak jinak?“

A: „Dva krát á“.

U: „No, výborně. Takže tahle strana měří?“

A: „Dva krát á“.

Rozhovor s Anetou:

U: „Teď se podíváme na tuto úlohu (A4). Uvažuj stejně jako u předchozího obdélníku."

A: „Deset krát á."

U: „Ukaž mi, co jsi mezi sebou vynásobila."

A: ukazuje na šířku a délku

U: „A tahle celá strana měří á? Ukaž mi, co měří á."

A: ukazuje jen na část strany

U: „Celá strana?"

A: „Á plus á."

U: „Výborně. Kolik je á plus á?"

A: „Sto."

U: „Tahle strana měří deset?" (učitelka ukazuje na stranu označenou proměnnými)

A: „Hmm."

U: „Jak to víme, když je tu napsáno jen á? Tady jsi správně napsala, že ypsilon plus ypsilon plus ypsilon je tři krát ypsilon. Kolik bude á plus á?"

A: „Á dva."

U: „Co znamená á dva? Napiš mi, jak to myslíš."

A: píše $a + a = 2 \cdot a$

U: „Ano. Jedna strana měří deset a druhá dva krát á. A výsledný obsah?"

A: „Á krát dva krát deset."

Při určení délky strany $2 \cdot a$ žákům často pomohlo, když jsem se s nimi vrátila k řešení úlohy A2. Tento jev ilustruje rozhovor s Anetou (výše) i následující ukázka z rozhovoru s Terezou.

U: „Obsah jsi v předchozí úloze zvládla. Pokus se zapsat obsah obdélníku v této úloze."

T: píše $(a + a) \cdot 10$, „Takhle?"

U: „Výborně. A šla by ta závorka nahradit nějakým jiným zápisem?"

T: „Myslím, že ne."

U: „Tady v té úloze jsi napsala správně, že ypsilon plus ypsilon plus ypsilon je tři krát ypsilon. Jak by se to dalo zapsat tady v té závorce?"

T: píše $2 \cdot a \cdot 10$

Viktorie (6. ročník) napsala do testu $2 \cdot a + 10$. Zřejmě si uvědomila, že délka strany je $2 \cdot \cdot a$. Výpočet obsahu obdélníku také popisuje správně. Obtížné pro ni bylo tyto dvě správné úvahy algebraicky propojit.

U: „Jak jsi přišla na tento zápis?“

V: „No já jsem udělala, jako že strana deset krát tahle strana.“

U: „Říkáš to dobře a ty jsi napsala dva krát á plus deset. Je to to samé, co říkáš?“

V: „Ne.“

U: „A co je tam teda podle tebe špatně?“

V: „To, že tam je dva krát á plus deset.“ (žákyně důraz klade na znaménko plus)

U: „Co tam má být podle tebe? Zkus to napsat.“

V: (žákyně odpovídá) „Asi á krát deset nebo á krát á krát deset.“

U: „Kolik měří tato strana?“

V: „Dva krát á.“

U: „A tahle?“

V: „Deset.“

U: „Ano, říkáš to správně. A na začátku jsi říkala, že jsi vypočítala obsah jako strana deset krát tahle strana, že jo? (žákyně přikyvuje) Teď jen zapiš to, co říkáš.“

V: (píše a zároveň popisuje slovy) „ Dva krát á krát deset.

V testech se objevily i další chybné reprezentace obsahu a následné úpravy:

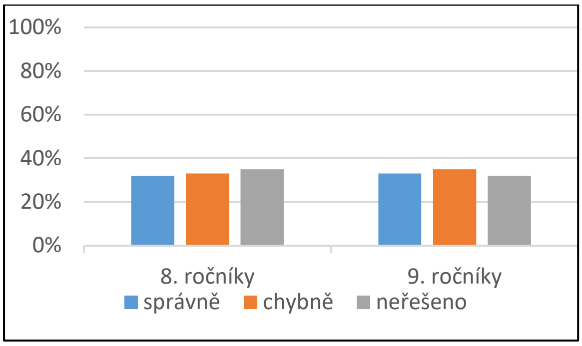
$S = 10 \cdot 2$	$S = 2 \cdot a$	$S = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot 10 \cdot 10$
$S = 10 \cdot a = a^{10}$	$S = 2 \cdot (10 \cdot a) = 20a^2$	$S = (a + a) \cdot (10 + 10)$

V tabulce 11 jsou shrnuty opakující se chyby a jejich relativní četnosti v jednotlivých ročnících.

Tab. 11: Relativní četnosti opakujících se chyb v úloze A4 (obsah)

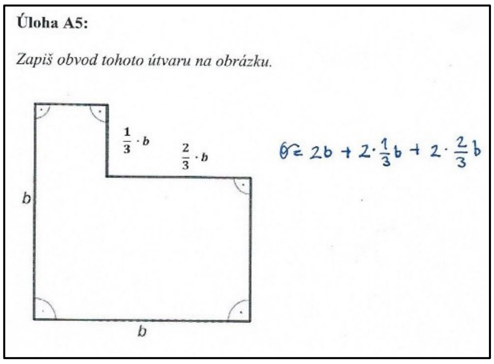
	6. ročník	7. ročník	8. ročník
různé číselné výsledky obsahu	31 %	63 %	30 %
odhad délky strany $2 \cdot a = 30$, výpočet $S = 300$	15 %	23 %	5 %
měření délek stran a výpočet obsahu	21 %	0 %	0 %

2.4.5 Úloha A5



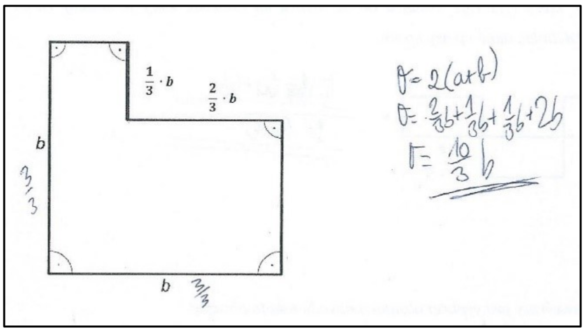
Obr. 62: Relativní četnosti výsledků žáků v úloze A5

Výsledky obou ročníků se ve všech třech ukazatelích liší jen minimálně. Podle mě problém souvisí s uchopením úlohy v geometrickém smyslu. Žáci, kteří si uvědomili, že mohou útvar doplnit na čtverec a obvod útvaru se nezmění, snadno dospěli k výsledku $4 \cdot b$, aniž by počítali se zlomky. Tuto strategii zvolila přibližně polovina žáků v obou ročnících. Ostatní žáci zapsali obvod pomocí součtu délek stran (obr. 63).

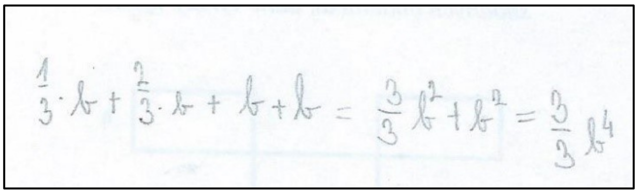


Obr. 63: Lenčin (8. ročník) správně zapsaný výraz

Strategie zápisu obvodu pomocí zlomků vedla žáky k častým chybám. Většinou si nedopsali délky zbývajících stran mnohoúhelníku a výraz zapsali chybně (obr. 64, obr. 65). Chybné zápisy se objevily v mnoha variantách (konkrétně se v řešení objevilo 18 neekvivalentních výrazů). Z těchto 18 výrazů se opakoval jen výraz $3 \cdot b$, a to třikrát. K tomuto výsledku zřejmě žáci dospěli tím, že sečetli jen ty strany, které byly určené.



Obr. 64: Cyrilovo (9. ročník) chybné řešení



Obr. 65: Terezčin (9. ročník) chybný zápis obvodu i chybná následná úprava výrazu

V rozhovorech se ukázalo, že žáci mají problém určit zbývající strany zlomkem jako část délky strany b a zlomky sečíst. Většině pomohla otázka: „Kolik je třetina bé a dvě třetiny bé?“ Pak již rychle dospěli sami k výsledku $4 \cdot b$ (úryvek rozhovoru s Jirkou).

U: „Tahle celá strana měří kolik?“

J: „Bé“

U: „Tahle část strany bé?“

J: „Dvě třetiny bé.“

U: „A tenhle zbytek strany bé?“

J: „Jedna třetina bé.“

U: „Jak to bude u téhle strany?“

J: „Taky nějak tak. Dvě třetiny bé.“

U: „Ano. A teď počítej obvod.“

J: píše $b + b + \frac{1}{3} \cdot b + \frac{1}{3} \cdot b + \frac{2}{3} \cdot b + \frac{2}{3} \cdot b$

U: „No, a teď by to chtělo nějak upravit.“

J: „To bé převedu na zlomek a najdu společného jmenovatele.“

U: „Ano, to by určitě šlo. Pokus se to udělat jednodušeji. Kolik je $\frac{1}{3} \cdot b + \frac{2}{3} \cdot b$?“

J: „Jedno bé, takže tohle je taky bé, a dohromady je to čtyři bé.“

Zdenka stačilo navést na určení délek chybějících stran a obvod určil úvahou, aniž by si cokoliv zapisoval.

Z: „Zkusím to otočit.“

U: „Jak otočit? Tomu nerozumím.“

Z: „Že tohle bude tady a tohle tady.“ (žák ukazuje doplnění na čtverec)

U: „A jak by tedy ten obvod vyšel?“

Z: „Takže čtyři krát bé.“

Bára si v testu rozdělila mnohoúhelník na čtverec a obdélník a počítala obvody těchto dvou útvarů, které následně sečetla. Při rozhovoru si chybný postup uvědomila a pak již obvod spočítala správně. Stejně jako většina ostatních žáků zvolila složitější postup.

U: „Tady jsi napsala, že strana měří jednu třetinu. Takhle samostatně jen jedna třetina?“

B: „Ještě by tam mělo být jedna třetina krát bé.“

U: „A tato strana?“

B: „Dvě třetiny krát bé.“

U: „Ano, a obvod bude? Klidně to piš.“

B:napsala $o = b + b + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot b + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot b = 2b + \frac{2}{3} \cdot b + \frac{4}{3} \cdot b = 2b + \frac{6}{3} \cdot b = 2b +$
$+ 2b = 4b$

U: „Teď, když se na ten útvar podíváš, nešlo by to spočítat nějakou rychlejší úvahou? Abychom to nemuseli tak rozepisovat?“

B: „Tak, když tohleto je jedna třetina a tohle dvě třetiny (ukazuje na strany mnohoúhelníku), musí to dát celé bé. To samé tyto dvě strany sečtu a vyjde mi bé. Dvě bé plus bé plus bé je čtyři bé.“

U: „Ano, šlo to i takhle jednoduše, viď?

Matěj zvolil jednodušší strategii, a to doplnění útvaru na čtverec. Přesto udělal chybu při součtu stran. V úryvku z rozhovoru je vidět, že udělal chybu spíše z nepozornosti.

U: „Jak bychom počítali obvod takového mnohoúhelníku?“

M: „Sečteme všechny jeho strany.“

U: „Ano. Tady ale chybí délky stran, šlo by to nějak podle obrázku určit?“

M: „Kdybych si to ohraničil (dokresluje do čtverce), tak tohle bude jedna třetina bé a tahle bude dvě třetiny bé.“

U: „Hm, a co ten obvod?“

M: „To jsou dvě třetiny a to je jedna třetina. To jsou tři bé, když to sečtu.“

U: „Ještě jednou ukaž, jak jsi dal dohromady tři bé.“

M: ukazuje na jednotlivé strany a sčítá

M: „Tři bé.“

U: „Sečetl jsi opravdu všechny strany? Ukazuj ještě jednou.“

M: „Tři bé plus tyhle dvě třetiny s tou jednou třetinou.“

U: „To je kolik.“

M: „Taky bé, takže čtyři bé.“

M: „Já jsem si říkal, že tohle bude určitě jednoduchý, ale v ten moment jsem to neměl v hlavě a šel jsem radši na další úlohu.“

Nechala jsem vždy žáky, aby postupovali vlastní strategií. Až poté jsem je navedla na jednoduché řešení doplněním na čtverec.

V tabulce 12 uvádím chybné výrazy, které se vícekrát opakovaly.

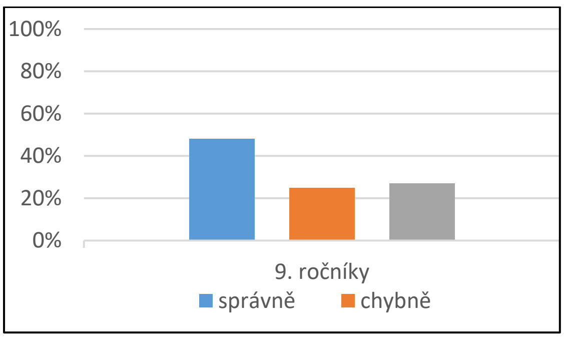
Tab. 12: Algebraické zápisy obvodu obdélníku v řešení žáků

chybný výraz	četnost
$3 \cdot b$	3
$\frac{14}{3} \cdot b$	2
$3b + \frac{1}{3}b$	2
$3b + \frac{2}{3}b$	2

2.4.6 Úloha B1

Úkolem v úlohách B1, B2, B3 a B4 bylo kromě zápisu příslušného výrazu tento výraz upravit. Protože jsem se zaměřovala především na to, jak žáci dokáží algebraicky modelovat geometrické vztahy, za správné řešení jsem považovala výraz, který reprezentoval obsah či obvod útvaru s následnou správnou úpravou výrazu nebo bez následné úpravy tohoto výrazu. V každé úloze uvádím srovnání úspěšnosti jednotlivých škol.

Obvod



Obr. 66: Relativní četnosti výsledků žáků 9. ročníků v úloze B1 (obvod)

V žádném řešení se již neobjevilo měření délek stran či vizuální odhady délek. V rozhovorech se ukázalo, že překážkou při sestavení výrazu nebyla neznalost výpočtu obvodu obdélníku, ale spíše spojení geometrické představy obvodu s algebraickým výrazem. Když jsem žáky vyzvala k tomu, aby zapisovali obvod tak, jak jeho výpočet umí slovy popsat (sečtu všechny strany), výraz sestavili správně. Obdobně si vedl Petr při rozhovoru. Petr do testu napsal $2x + \ 4 \cdot 6$.

U: „Jak jsi přišel na výraz dva krát iks plus čtyři krát šest“

P: „No tak, tuhle tu stranu a tuhle tu stranu (žák ukazuje na délky obdélníku označené výrazem $x + 4$) sečtu, to je dva krát iks plus osm, takže to mám špatně napsaný. A tři a tři je šest.“

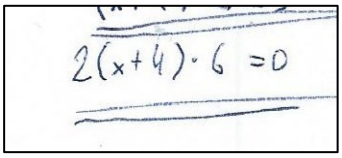
U: „Tak piš, co říkáš.“

P: napsal $2x + 8 \cdot 6$

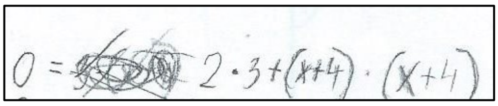
U: „Proč tu máš osm krát šest? Dopiš si sem zbývající strany a podívej se na ten obdélník znovu.“

P: „No obvod je strana plus strana … jo, takže tady (žák ukazuje na $8 \cdot 6$) nebude krát, ale plus.“

Na obrázcích 67, 68 je vidět snahu o sestavení výrazu zřejmě podle naučeného postupu $2 \cdot a + \ 2 \cdot b$.

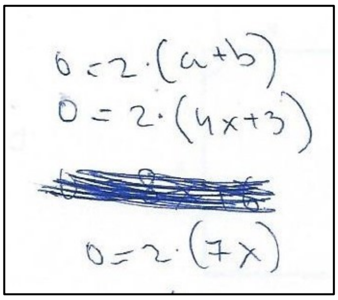


Obr. 67: Cyrilovo (9. ročník) chybné řešení



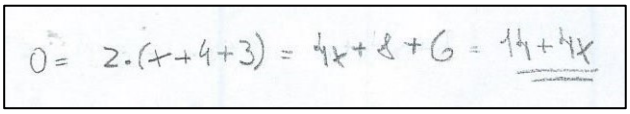
Obr. 68: Karlovo (9. ročník) chybné řešení

Jana (obr. 69) napsala správně vzorec tak, jak ho má naučený. Při substituci za stranu a dosadila místo $x + 4$ výraz $4x$. Usuzuji, že si chybně spočítala $x + 4 = 4x$. Obdobně chybně určila $4x + 3 = 7x$.



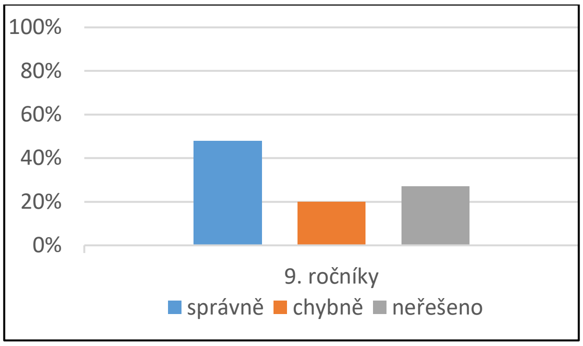
Obr. 69: Janino chybné sestavení výrazu pro obvod

Při rozhovoru s Bárou se ukázalo, že chybu při roznásobení závorky (obr. 70) udělala jen z nepozornosti. Poté, co jsem ji vyzvala, aby si zkontrolovala celý zápis, chybu hned našla.



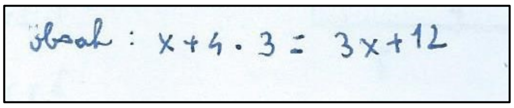
Obr. 70: Bářina chyba z nepozornosti

Obsah



Obr. 71: Relativní četnosti výsledků žáků 9. ročníků v úloze B1 (obsah)

Nejběžnější chybný výraz $x + 4 \cdot 3$ se objevil v 47 % chybných řešení, výraz $4x \cdot 3$ v 25 %. Nenapsání závorky ve výrazu $x + 4 \cdot 3$ přesto vedlo některé žáky ke správnému výsledku $3x + 12$. Je možné, že žák potřebu závorky vnímal, ale nenapsal ji (obr. 72).



Obr. 72: Neekvivalentní výrazy v Jirkově řešení úlohy B1 (obsah)

Situace v rozhovoru s Matějem se opakovala i s jinými žáky. Když jsem je vyzvala, aby si za x v obrázku dosadili konkrétní číslo, spočítali obsah a poté dosadili do sestaveného výrazu, uvědomili si, že musí výraz $x + 4$ uzávorkovat.

Matěj napsal $x + 4 \cdot 3$.

U: „Podívej se na ten obdélník. Když bude iks jedna. Kolik vyjde obsah obdélníku?“
M: „Patnáct.“
U: „Dosaď si tu jedničku do toho tvého zápisu. Kolik vyjde obsah?“
M: „Třináct.“
U: „Což je divné, viď? Jak to zařídit, aby to vyšlo patnáct?“
M: „Pomohla by závorka?“

U: „Vyzkoušej to. Kam bys ji dal?“

M: píše $(x + 4) \cdot 3$

U: „Vyzkoušej to s jedničkou.“

M: „Jedna plus čtyři je pět, pět krát tři je patnáct, takže takhle s tou závorkou to bude dobře.“

Rozhovor s Frantou:

U: „Obsah obdélníku spočítat umíš?“

F: „Vynásobím dvě strany.“

U: „Pokus se obsah napsat u tohoto obdélníku.“

F: „Takže by to bylo tři krát iks plus čtyři a to se rovná sedum krát iks.“

U: „ Dívej se jen na ten obdélník. Když bude iks jedna. Jak dlouhá bude strana?“

F: „Strana bude pět a obsah patnáct.“

U: „A teď dosaď jedničku do tvého výrazu.“

F: „No to mi vyjde špatně, sedm. Protože tady jsme sečetli jedna plus čtyři.“

U: „Jak to zařídíš, aby v tom zápise vyšlo pět?“

F: zapisuje $3 \cdot (x + 4)$

U: „Mohl bys tu závorku roznásobit?“

F: píše $4 \cdot x$

U: „Kde jsi vzal čtyři krát iks?“

F: „Iks plus čtyři je čtyři iks.“

U: „To nám zase nevyjde patnáct po dosazení jedničky.“

F: „Iks plus čtyři asi nejde sečíst.“

U: „Tak to roznásobení musíš provést jinak.“

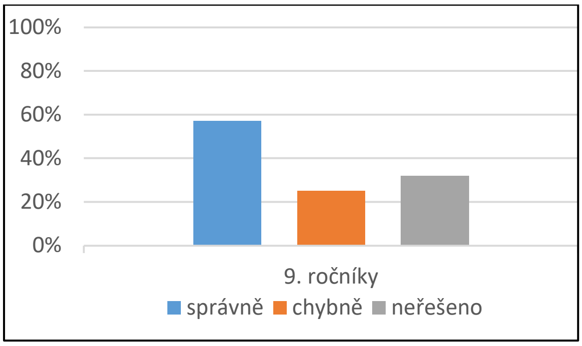
F: píše $3 \cdot x + 3 \cdot 4 = 3 \cdot x + 12$

V tabulce 13 uvádím chybné výrazy, které se vícekrát opakovaly.

Tab. 13: Algebraické zápisy obsahu obdélníku v řešení žáků

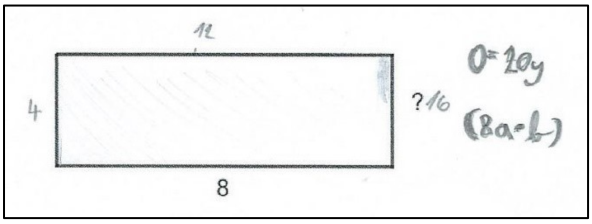
chybný výraz	četnost
$4 \cdot 3 = 12x$	3
$x + 4 \cdot 3$	3
$x^2 + 25$	2
$x + 4 \cdot 3 = 3x + 12$	2

2.4.7 Úloha B2



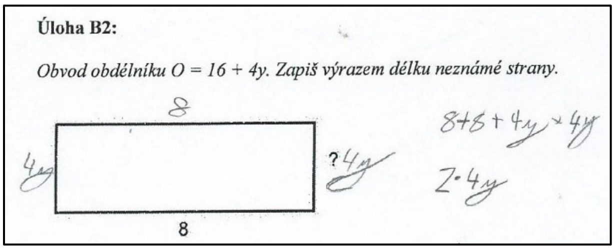
Obr. 73: Relativní četnosti výsledků žáků 9. ročníků v úloze B2

Zde si již v testech objevily číselné výsledky délky strany (u čtyř žáků z 15). Tři žáci dokonce počítali obvod, přestože byl zadán. Na obr. 74 u Marka je vidět kombinace obou těchto chyb. Navíc si k délkám stran napsal (pro mě nepochopitelně) pokaždé jiný číselný údaj.



Obr. 74: Markovo řešení úlohy B2

David (obr. 75) dospěl zřejmě úvahou k výsledku $4 \cdot y$. Vedle obrázku obdélníku vpravo je vidět, že prováděl zkoušku, jejíž výsledek neodpovídá zadanému obvodu. Při rozhovoru jsem ho nechala zkoušku dopočítat. Vypočítal ji správně a byl překvapen tím, že napsal délku strany $4 \cdot y$, chybu opravil. Neuměl vysvětlit, proč původně napsal $4y$.

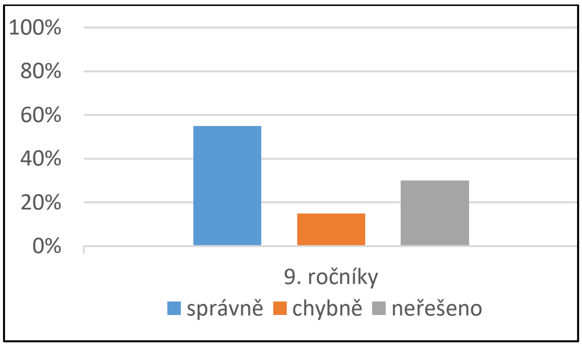


Obr. 75: Davidovo řešení úlohy B2

Většina žáků řešila úlohu zřejmě úvahou. Soudím podle toho, že u délky strany označené otazníkem, napsali $2y$, bez jakéhokoliv písemného postupu.

2.4.8 Úloha B3

Obvod



Obr. 76: Relativní četnosti výsledků žáků 9. ročníků v úloze B3 (obvod)

Z devíti chybných řešení se ve dvou případech objevil výraz $6a \cdot 6b = 36ab$. Stejnou chybu udělal Petr. V rozhovoru se také ukázalo, že chybuje při operacích s proměnnými.

U: „Jak se počítá obvod obdélníku?“

P: „Strana krát strana.“

U: „Petře, počítáme obvod.“

P: „Všechny strany sečtu.“

U: „A ty tady máš?“

P: „Mám tam krát.“ (žák píše $6a + 6b = 12ab$)

U: „Zkus si dosadit za á jedničku a za číslo dva. Kolik vyjde obvod podle toho výrazu na levé straně?“

P: „To je osmnáct.“

U: „Když ta stejná čísla dosadíš do výrazu na pravé straně, tak jaký výsledek vyjde?“

P: „Dvacet čtyři.“

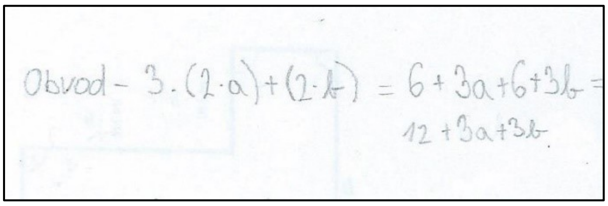
U: „Ty výsledky by se měly rovnat, když je mezi výrazy rovnost.“

P: „Tak jenom šest á bé“.

U: „A vyjde to osmnáct?“

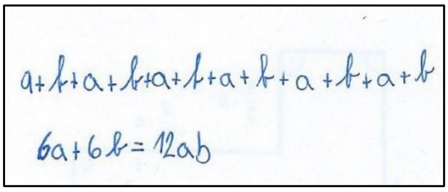
P: „Ne, dvanáct. Á plus bé teda asi nejde sečíst? Tak to necháme jako šest á plus šest bé.“

Tereza (obr. 77) zřejmě uchopila úlohu správně v geometrickém smyslu, ale formulace v algebraické symbolice je chybná. Místo výrazu $2a + 2b$ dala do závorky jednočleny a chybně interpretovala distributivní zákon.



Obr. 77: Terezčino řešení úlohy B3 (obvod)

Markéta (obr. 78) obvod algebraicky zapsala správně, ale udělala stejnou chybu při úpravě výrazu $6a + 6b$ jako Petr při rozhovoru výše.



Obr. 78: Markétino řešení úlohy B3 (obvod)

V testech se objevily i další chybné reprezentace obvodu a následné úpravy:

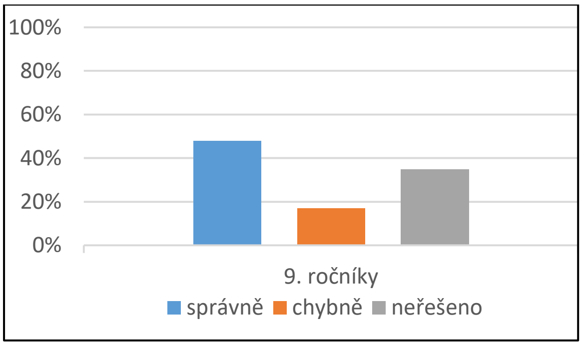
$o = a + a + b + b = a^3 + 3 \cdot b^2$

$o = a + b + a + b + a + b = a^3 + b^3$

$o = \ 3a + b + 3a + b$

$o = 2 \cdot (3a + b)$

Obsah



Obr. 79: Relativní četnosti výsledků žáků 9. ročníků v úloze B3 (obsah)

Z 10 chybných zápisů se objevil dvakrát výraz $a^6 + b^6$, dvakrát výraz $36ab$ a dvakrát výraz $3 \cdot (ab) = 3a \cdot 3b$.

Franta napsal $3a \cdot 3b = 9ab$ V ukázce z rozhovoru jsem se doptávala na jeho řešení.

U: „Jak jsi vymyslel tento výraz?“ (ukazuje na $3a \cdot 3b$)

F: „No, takže jeden je á bé. Jelikož jsou stejný, tak tohle je taky á bé a tohle taky á bé. Takže jsem jenom sečetl ty strany a vynásobil jsem to.“

U: „Hmm. A obsah jednoho obdélníčku je?"

F: „Á bé"

U: „Ano, výborně."

F: „Takže to mám vlastně špatně, to musí bejt tři á bé."

Nela tuto úlohu v testu neřešila. Z ukázky rozhovoru je vidět, že velké problémy jí dělají operace s proměnnými, především násobení. S velkou dopomocí se Nela nakonec dopracovala ke správnému výsledku.

U: „Obvod jsi zapsala správně. Co ten obsah, to jsi neuměla?"

N: „Chtěla jsem se k tomu vrátit a pak už nebyl čas."

U: „Pokus se to tedy vymyslet."

N: „ Že by šest bé krát šest á?"

U: „Tak, teď mi jen vysvětli, co podle tebe znamená šest bé?"

N: „To znamená, že tam je šest stejných stran."

U: „Ano a uměla bys spočítat obsah jednoho obdélníčku?"

N: „To by bylo bé krát á, to se rovná á bé.

U: „Tak, to je jeden, viď?"

N: „Hmm."

U: „Tak, co ta šestka tady? Obsah jednoho je á krát bé a ty tady máš šest bé krát šest á."

N: „Takže to mám špatně, anebo vlastně stačí napsat šest á samostatně krát šest bé samostatně."

N: napsala $a.a.a.a.a.a.b.b.b.b.b.b$

U: „Kolik by to bylo, kdybys to vynásobila?"

N: „ Á bé na šestou vlastně."

U: „Kolik je obsah jednoho obdélníku? Před chvílí jsi to říkala správně."

N: „Á krát bé."

U: „Kolik obdélníků tu máš na obrázku."

M: „Tři, takže á bé na třetí."

U: „Jaký je obsah tohoto jednoho?"

N: „ Á krát bé."

U: „Kolik je obsah tohodle?"

N: „Taky á krát bé."

U: „A když chci všechny ty obsahy dohromady?"

N: „Á bé plus á bé plus á bé."

U: „A to je?“

N: „Tři krát á krát bé.“

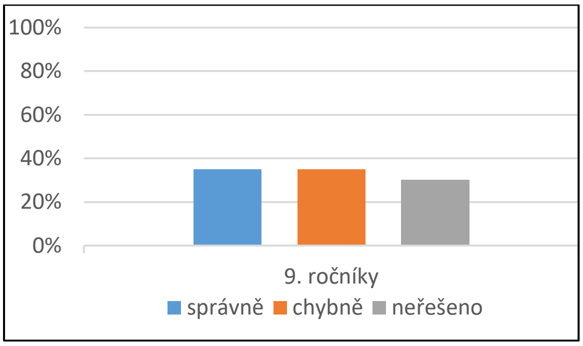
Další chybně sestavené výrazy pro obsah byly:

$S = 6a^2 + 6b^2$ $\qquad$ $S = 3a + 3b = 3ab$

$S = a^3 \cdot b^3$ $\qquad$ $S = 2ab \cdot 3$

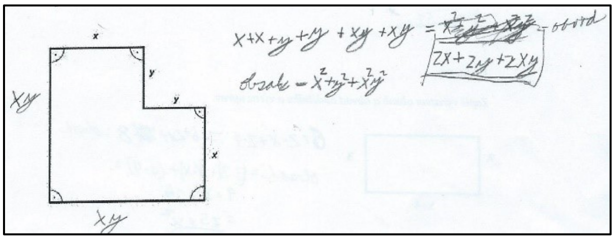
2.4.9 Úloha B4

Obvod



Obr. 80: Relativní četnosti výsledků žáků 9. ročníků v úloze B4 (obvod)

Obvod mnohoúhelníku chybně zjistilo 21 žáků z celkového počtu 60. Úspěšnost řešení se z velké části odvíjela od toho, zda žáci správně či vůbec určili délky stran, které v obrázku nebyly zadány. Čtyři žáci označili chybějící délky stran výrazem xy (obr. 81), místo výrazu $x + y$.



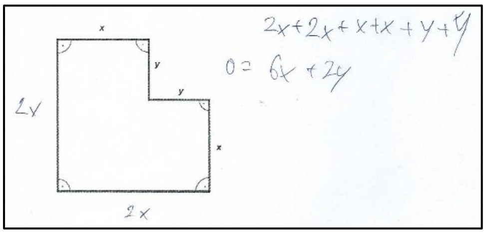
Obr. 81: Davidovo řešení úlohy B4 (obvod)

Zřejmě uvažovali obdobně jako František. Když jsem se ho zeptala, co podle něj znamená xy, odpověděl:

F: „Tohle je x a tohle je y. Tak když se jakoby sečtou, tak jsou jedna ta velká strana.“

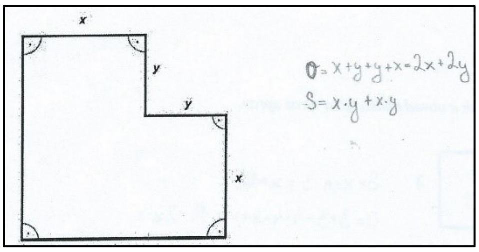
Tento chybný jev, kdy žáci např. součet $2 + x$ upraví na $2x$, nebo naopak $2x$ chápou jako $2 +$ $+x$, byl častý.

Na obr. 82 je vidět další chybné označení stran výrazem $2x$. Richard nedokázal rozlišit mezi teoretickým objektem a jeho reprezentací. Délka neznámé strany se mu jevila jako dvojnásobek strany x.



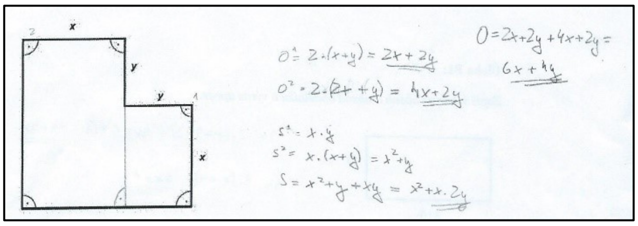
Obr. 82: Richardovo řešení úlohy B4 (obvod)

Tři žáci si chybějící délky stran vůbec neoznačili a podle výsledku obvodu je zřejmě ani nebrali v úvahu (obr. 83). Všem třem vyšel obvod $2x + 2y$.



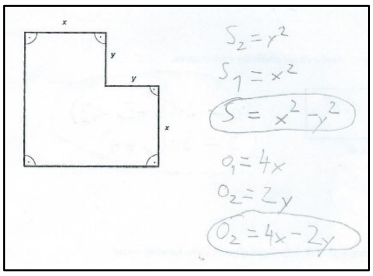
Obr. 83: Terezčino řešení úlohy B4 (obvod)

Další chybná řešení tří žáků souvisejí s nesprávnou strategií výpočtu obvodu nepravidelného útvaru, a to rozdělení útvaru na pravidelné mnohoúhelníky. Na obr. 84 je vidět, že Bára spočítala obvody jednotlivých obdélníků správně. Její řešení v kontextu zadání je ale chybné.

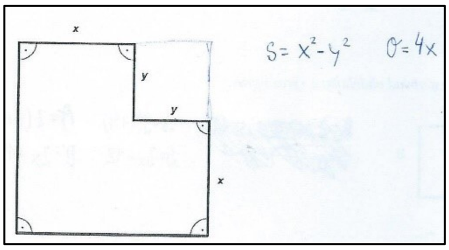


Obr. 84: Bářino řešení úlohy B4 (obvod)

Dva žáci (obr. 85) použili chybně strategii komplementu. Další nesprávná úvaha vedla žáky k tomu, že doplněný útvar je čtverec (obr. 86).



Obr. 85: Prokopovo řešení úlohy B4 (obvod)



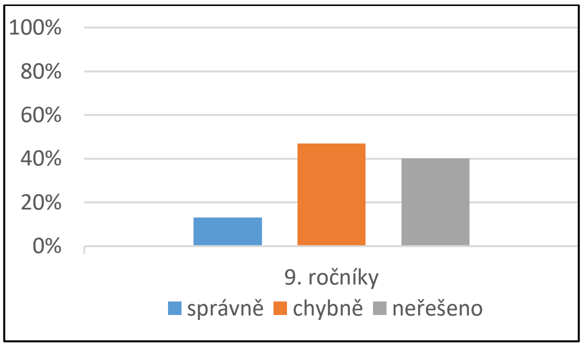
Obr. 86: Tondovo řešení úlohy B4 (obvod)

Další chybně sestavené výrazy pro obvod byly:

$o = xy$ $\qquad$ $o = 4xy$ $\qquad$ $o = 4x + 2y$

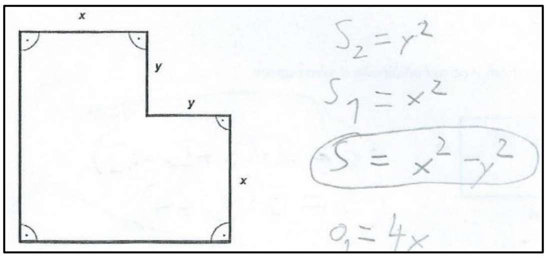
$o = 2x \cdot 2y \cdot 2xy = 8xy$ $\qquad$ $o = 4x + 2 \cdot [2 \cdot (x + y)]$

Obsah



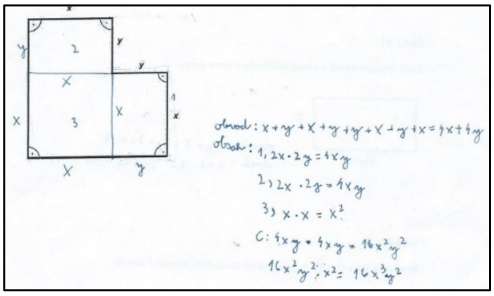
Obr. 87: Relativní četnosti výsledků žáků 9. ročníků v úloze B4 (obsah)

Úloha na obsah měla nejnižší úspěšnost ze všech analyzovaných úloh. Podle mého názoru šlo jednak o neschopnost rozdělit si obrazec na obdélníky nebo o neschopnost využít strategii komplementu. Žáci, kteří si obrazec rozdělili nebo doplnili útvar do obdélníku, chybně doplnili délky stran nebo spočítali nesprávně obsahy jednotlivých obdélníků. Nejčastější chybný zápis obsahu $(x + y)^2$ se objevil u osmi žáků. Myslím si, že v těchto případech žáci počítali obsah útvaru jako součin dvou stran bez ohledu na jeho tvar. Šest žáků napsalo výsledek $x^2 - y^2$. V řešení žáků se objevilo mnoho chybných neekvivalentních zápisů. Na obr. 88 je podle postupu zřejmé, že si Prokop útvar doplnil. Ovšem doplnění provedl chybně do čtverce, nikoliv do obdélníku. Dalších pět žáků napsalo výsledný obsah výrazem $x^2 + y^2$.



Obr. 88: Prokopovo řešení úlohy B4 (obsah)

Jirka (obr. 89) si správně rozdělil mnohoúhelník na dva obdélníky a čtverec, správně určil i délky stran, ale chybně zapsal obsahy obdélníků. Navíc jednotlivé obsahy vynásobil.



Obr. 89: Jirkovo řešení úlohy B4 (obsah)

Rozhovor s Bohoušem ukazuje kombinaci téměř všech chyb uvedených výše.

U: „Jak jsi dospěl k výsledku šestnáct iks ypsilon?“

B: „To jsem vynásobil tyhle strany, nevim. Jo čtyři iks krát čtyři ypsilon.“

U: „Aha, tohle je ale nějaký nepravidelný útvar. To můžeme počítat obsah stejně jako u čtverce nebo u obdélníku?“

B: „Rozdělil bych si to.“ (žák rozděluje mnohoúhelník na dva obdélníky)

U: „A jak teď dál?“ (žák si dopisuje správně společnou chybějící délku strany rozdělených obdélníků)

B: „Já teď nevím, jak se počítá obsah obdélníku.“

U: „Vždyť jsi mi před chvílí říkal, jak se počítá obsah obdélníku.“

B: „Jo, strana krát strana.“ (žák chvíli přemýšlí) „To asi nemůžu napsat čtyři krát iks?“

U: „Jaké má délky stran?“

B: „Jóó, už vím.“ (žák píše $(x+y)\cdot x = x^2xy$)

U: „Zkontroluj si, jestli jsi tu závorku správně roznásobil.“

B: „To plus jsem zapoměl.“ (žák opravuje na x^2+xy) „Teď obsah tohodle je xy a teď ty obsahy sečtu. Iks na druhou plus iks ypsilon plus iks ypsilon. To bude iks na čtvrtou tím pádem.“

U: „Napiš si nejprve co budeš sčítat.“ (žák píše $x^2+xy+xy$)

B: „Už to vidím.“ (žák píše $x^2+(xy)^2$)

U: „Bohouši, kolik je iks plus iks?“

B: „ Dvě iks.“

U: „Kolik je iks ypsilon plus iks ypsilon?“

B: „Dvě iks ypsilon, takže to bude.“ (žák píše $x^2 + 2xy$)

František při rozhovoru odpověděl, že obsah bude $4xy$. Napsal si k délce neznámé strany xy. Pak si spletl obvod s obsahem. Na rozdělení útvaru přišel sám, ale problémy měl při určování obsahů obdélníku. Sčítal strany, přitom řekl správně, jak se obsah obdélníku počítá. Další potíž spočívala ve správném zapsání součinu strany $x + y$ a strany x. S velkou dopomocí nakonec úlohu vyřešil.

F: „Tady si to rozdělím na dva obdélníky a budu počítat obsahy a pak je sečtu.“

F: píše obsah menšího obdélníku $xy \cdot xy$

U: „Jaké strany má tenhle obdélník?“

F: „Jednu iks a jednu ypsilon.“

U: „Jak se počítá obsah?“

F: „Strana krát strana, takže jen iks ypsilon.“

U: „Teď obsah toho druhého.“

F: píše $xy \cdot x$

U: „Jaká je délka téhle strany?“

F: „Iks plus ypsilon.“

U: „Ták, výborně.“

F: obsah píše $x + y \cdot x$

U: „Vzpomeň si na tu úlohu s obdélníkem. Jedna strana měla délku iks plus čtyři a druhá tři. Jak jsi zapsal ten součin?“

F: „Jo, do závorky.“ píše $(x + y) \cdot x$

Další chybně sestavené výrazy pro obsah byly:

$S = x \cdot y$ $\quad S = (xy)^2$ $\quad S = 16xy$ $\quad S = x^2 + y^2 + x^2y^2$

$S = x^4 + y^4$ $\quad S = xy + xy$ $\quad S = 4x \cdot 4y$ $\quad S = 2x \cdot 2y \cdot 2xy$

$S = 2y \cdot 2x + x^2$

2.5 Shrnutí výsledků experimentální části

V této části práce shrnuji výsledky analýzy žákovských řešení testových úloh a rozhovorů s žáky. Výsledky jsou také srovnány s výsledky výzkumů, které jsou uvedeny v oddíle 1.2. Dále uvádím didaktická doporučení ke zmírnění identifikovaných obtíží a chyb.

2.5.1 Shrnutí výsledků analýzy žákovských řešení

Úlohy A1 a A2

Geometrická reprezentace je v těchto úlohách zastoupena délkou úsečky. Celková úspěšnost v úloze A1 byla 26 % a v úloze A2 o něco vyšší: 38 %. Mladší žáci převážně délky úseček přímo změřili nebo vizuálně odhadovali část úsečky označenou x v úloze A1. V této úloze někteří žáci úseky označené 5 a 6 geometricky nanášeli na úsek označený x. Tento způsob řešení se objevil jen u žáků gymnázia. Starší žáci byli úspěšnější v obou úlohách, výrazněji v úloze A2. Délky úseček v obou úlohách převážně odhadovali, měření úsečky se neobjevilo. Potřeba dojít k nějakému konkrétnímu výsledku je velmi silná u mladších žáků. Je to zřejmě dáno tím, že žáci 8. ročníků již prošli výukou mocnin. Z analýzy řešení obou úloh vyplynulo, že aditivní zápis, kde se vyskytuje neznámá, dělá žákům větší problémy než multiplikativní zápis. Mnohem častěji se totiž v úloze A2 vyskytoval zápis délky $3y$ místo $y + y + y$. Také v úloze A1 žáci zápis $5 + x + 6$ nahrazovali zápisem $11 \cdot x$ nebo $30 \cdot x$.

Z prvních dvou výzkumů (oddíl 1.2.1, oddíl 1.2.2) vyplynulo, že větší potíže mají žáci s geometrickou reprezentací proměnné na úsečce než s geometrickou reprezentací obsahu obdélníku. V mém výzkumu se tento fakt u žáků 6., 7. a 8. ročníků nepotvrdil. V úlohách A3, A4 se úspěšnost snižovala, i když rozdíl úspěšnosti v úloze A1 a v úlohách A2 a A3 nebyl velký.

Měření úseček, nahrazování neznámé číselnými údaji a rovněž nesprávné operace s proměnnými byly častými jevy ve výzkumu v oddíle 1.2.4. U mnou zkoumaných žáků jsem naopak nezaznamenala případ, kdy by žáci nahradili neznámou číslem 1.

Úlohy A3 a A4

Geometrická reprezentace je v těchto úlohách zastoupena obvodem a obsahem obdélníku. Opět zde převažují řešení s číselnými odhady či měřením stran. Na rozdíl od úloh A1 a A2 se v řešení starších žáků již objevovaly číselné výsledky (přibližně u třetiny chybných řešení). Zvýšil se také počet žáků, kteří úlohy vůbec neřešili. V obou úlohách byli žáci mírně úspěšnější při zápisu obvodu obdélníku než u zápisu obsahu. Celkově byli žáci úspěšnější v úloze A3. Podle mého názoru to je dáno tím, že v úloze A3 byla jedna strana obdélníku rozdělena na dvě části číselnými údaji, zatímco v úloze A4 byly použity proměnné. Žáci měli problém délku této strany určit jako součet $a + a = 2a$. Starší žáci byli opět úspěšnější. Přibližně polovina žáků 8. ročníků sestavila správně výraz pro obvod a obsah v úloze A3 a výraz pro obvod v úloze A4. Výraz pro obsah správně sestavila přibližně čtvrtina žáků. V chybných zápisech se často objevuje silná vazba na obecné vzorce $o = 2 \cdot a + 2 \cdot b$, $o = 2 \cdot (a + b)$, $s = a \cdot b$. Pokud se žákům podařilo výraz správně sestavit, objevily se chyby v úpravách výrazů. Žáci často nahrazovali součet, který již nelze upravit na součin (např. $20 + 4a = 24a$), chybně roznásobili závorku nebo ji ani nenapsali. Nesprávné operace s proměnnými a nepoužití závorek byly rovněž častými jevy ve výzkumu popsaném v oddíle 1.2.2.

Úloha A5

Tuto úlohu řešili pouze žáci 8. a 9. ročníků. Při výpočtu obvodu mnohoúhelníku byla úspěšnost žáků 8. ročníků 32 % a 9. ročníků 33 %. Přibližně třetina žáků v obou ročnících se vůbec nepokusila o řešení, resp. do řešení nic nenapsala. Obtíže v obou ročnících byly identické. Žáci měli problém v určení délek stran, které nebyly v obrázku zapsány. Domnívám se, že překážkou bylo to, že dvě strany mnohoúhelníku byly zadány pomocí zlomků. Dalším problémem byl součet zlomků. Je možné, že pokud by délky stran nebyly zadány zlomky, úspěšnost by se zvýšila.

Úlohy B1, B2, B3, B4

Tyto úlohy řešili jen žáci 9. ročníků. Ve všech čtyřech úlohách byli výrazně úspěšnější žáci gymnázia, poté žáci ZŠ I a nejméně úspěšní byli žáci ZŠ II (viz tab. 14).

Z analýzy učebnic v oddíle 1.3.5 vyplynulo, že na výrazech v geometrii nejméně staví autoři Půlpán a kol. V této učebnici autoři nezavádí pomocí geometrické interpretace žádné algebraické vztahy. V učebnicích se žáci ZŠ II s úlohami, které propojují algebru s geometrií, tedy nesetkali. Kromě vzorců na obvod a obsah některých geometrických útvarů zde nejsou téměř žádné úlohy, kde by žáci algebraicky modelovali geometrické vztahy. Domnívám se, že to může být jedna z příčin, proč je u těchto žáků úspěšnost nižší než u žáků ZŠ I. Příčiny mohou být přirozeně i jiné. Nemohu např. soudit na to, že třídy na ZŠ II dosahují obecně nižších výkonů v matematice než třídy na ZŠ I, či jiné faktory.

Tab. 14: Shrnutí výsledků žáků 9. ročníků v úlohách B1, B2, B3 a B4

[%]		ZŠ I			ZŠ II			gymnázium		
		S[12]	CH[13]	N[14]	S	CH	N	S	CH	N
B1	obvod	**50**	44	6	**16**	11	73	**74**	22	4
	obsah	**33**	50	17	**16**	5	79	**87**	9	4
B2		**67**	33	0	**11**	31	58	**87**	13	0
B3	obvod	**45**	33	22	**21**	5	74	**87**	9	4
	obsah	**22**	44	33	**26**	0	74	**87**	9	4
B4	obvod	**28**	50	22	**11**	21	68	**61**	35	4
	obsah	**6**	61	33	**0**	11	89	**30**	65	5

Úloha B1

Celková úspěšnost v této úloze byla 48 %. Překážkou ve správném sestavení výrazů pro obsah i pro obvod (stejně jako v úlohách A2, A3) byly vazby na obecné vzorce $o = 2 \cdot a + 2 \cdot b$, $o = 2 \cdot (a + b)$, $s = a \cdot b$. Další obtíže spočívaly v operacích s proměnnou $(x + 4 = 4x)$ a vynechání závorky při zápisu obsahu $(x + 4 \cdot 3)$. Délku strany obdélníku označenou výrazem $x + 4$ žáci nechápou jako jeden celek, což byl problematický jev i ve výzkumech uvedených v oddílech 1.2.1 a 1.2.2.

Úloha B2

Celková úspěšnost v této úloze byla nejvyšší (57 %) ze všech úloh označených B. Vzhledem k nestandardnímu zadání úlohy jsem očekávala spíše nižší úspěšnost. Objevily se číselné výsledky délky strany (v jediné úloze z celého souboru úloh B) a někteří žáci počítali obvod obdélníku, přestože v zadání byl obvod zadán. Z 15 chybných řešení se ve dvou případech objevila délka strany $4y$ a v jednom případě $2y^2$. V prvním případě si zřejmě žáci neuvědomili, že musí celý výraz $16 + 4y$ dělit číslem 2. Ve druhém případě měl žák u délky strany napsáno jen výraz $2y^2$. Není mi jasné, jak k tomuto výsledku přišel.

[12] Úloha řešená správně.
[13] Úloha řešená chybně.
[14] Úloha neřešena.

Úlohy B3 a B4

Celková úspěšnost v úloze B3 při určení obvodu byla 55 % a při určení obsahu 48 %. Úloha B4 měla nejnižší úspěšnost ze všech úloh v souboru B (obvod 35 %, obsah 13 %). Nejméně úspěšní v této úloze byli i žáci gymnázia.

V úloze B3 měli žáci za úkol zapsat výraz, který vyjadřuje obsah a obvod útvaru, který byl složený ze tří shodných obdélníku označených písmeny a, b. Tyto proměnné se standardně objevují ve vzorcích na obsah a obvod obdélníku, přesto přibližně polovina žáků úlohu nevyřešila. Je možné, že jejich obtíže spočívaly v tom, že útvar byl složený. V chybně sestavených výrazech se objevily různé reprezentace obsahu i obvodu.

Úloha B4 byla pro žáky náročná spíše v geometrickém smyslu, a to především při určení obsahu. Od nesprávného uchopení úlohy v geometrickém smyslu se pak odvíjela chybná formulace v algebraické symbolice. Žáci nebyli schopni rozdělit si mnohoúhelník na obdélníky nebo využít strategii komplementu. Někteří chápali obsah útvaru jako součin dvou stran bez ohledu na jeho tvar. Další potíž spočívala v doplnění délek stran, které nebyly určeny (místo délky $x + y$ určili $x \cdot y$) nebo délky neurčili vůbec. Objevovalo se také rozdělení útvaru při počítání obvodu, což vedlo k tomu, že do obvodu žáci započítali délky stran rozdělených útvarů uvnitř mnohoúhelníku.

2.5.2 Shrnutí výsledků rozhovorů

Rozhovory jsem vedla s žáky ZŠ I. Vybrala jsem žáky, kteří danou úlohu vůbec neřešili, nebo řešení měli chybné. V obou případech jsem se doptávala na řešení do té doby, než se žákům podařilo úlohu vyřešit. Mladší žáci, především 6. a 7. ročníků, si často potřebovali ujasnit, co znamená neznámá. Pak byli s menšími či většími potížemi schopni úlohy vyřešit. V některých případech bylo potřeba připomenout, jak se počítá obsah a obvod obdélníku. Další dopomoc spočívala v předložení úsečky či obdélníku s konkrétními čísly. Přechod od konkrétních výpočtů k symbolickému zápisu vždy žákům velmi pomohl.

Žáci 8. a 9. ročníků neměli tolik obtíží se znalostmi obsahu a obvodu, ale spíše v tom, aby tuto znalost algebraicky vyjádřili. Další obtíže kopírují chyby v testu: nesprávné operace s proměnnými, vynechání závorek. Zde žákům opět pomohlo dosazení konkrétního čísla do výrazu. Nejprve pracovali s konkrétním číslem přímo v obrázku a pak jsem je vyzvala, aby to samé číslo dosadili do jimi sestaveného výrazu. Odhalili tak chybný zápis. Dále jsem je vedla k tomu, aby chybný výraz opravili. Největší potíže v testech i v rozhovorech měli tito žáci v úlohách B4 a B5 převážně s geometrickým uchopením. Většinou se uchylovali k rozdělení mnohoúhelníku na jednodušší útvary, ale i v případě obvodu. Na strategii komplementu jsem je musela vždy dovést.

2.5.3 Didaktická doporučení

V procesu žákovských řešení se ukázalo, že především mladší žáci všech tří škol nemají zkušenost s řešením úloh, ve kterých přecházejí mezi geometrickou a algebraickou reprezentací. I výsledky starších žáků poukazují na nedostatečnou zkušenost s aplikací výrazů v geometrickém kontextu. Výrazně lépe jsou na tom žáci gymnázia.

V této části práce uvádím didaktická doporučení, která by mohla obtíže žáků zmírnit. Vycházím jednak z výsledků svého výzkumu a také z publikací (Vondrová, Rendl a kol., 2015; Vondrová, 2019).

Významnou příčinou problémů žáků v mém výzkumu bylo jejich nepochopení, co představuje písmeno x. Pro pochopení proměnné je důležité umožňovat již mladším žákům vstupovat do algebry pomocí úloh, kde mají hledat zobecnění nějakého pravidla. Přínos úloh na zobecňování tkví v tom, že zcela přirozeně vede žáky k potřebě použít symbolický zápis. Uvědomují si tak smysl symbolického zápisu a hlavně jeho opodstatnění.

Propojovat geometrii s algebrou je možné již u mladších žáků. Při měření délek úseček, při určování obsahu a obvodu útvarů lze zpočátku zadávat rozměry délek pomocí čísel, poté proměnnými a následně výrazy s proměnnými. Žákům tak pomůžeme z izolovaných modelů délky úsečky rozdělených na dvě a více částí přijít na obecný aditivní model. Stejným způsobem z izolovaných modelů součinu délek stran pro obsah obdélníku si žáci mohou vybudovat obecný multiplikativní model. Tento přechod od aritmetiky k algebře, který jsem se snažila navodit při rozhovorech, žákům pomohl. Úlohy by se měly také zadávat v různých kontextech. Nežádat jen sestavení výrazu např. pro obsah, obvod nebo pro délku, ale také žádat, aby žáci k danému výrazu vytvořili geometrickou reprezentaci. Příkladem může být úloha: „Znázorni, co může v geometrii představovat výraz $3x$.“

Geometrické vizualizace mocnin, výrazů a operací s mocninami a s výrazy pomáhají žákům získat vhled do algebraických výpočtů. Je však potřeba, aby žáci pomocí geometrických reprezentací řešili mnoho úloh, aby tyto reprezentace nesloužily jen jako ilustrace, tedy aby žáci nezůstávali jen na úrovni izolovaných modelů. Dobrým příkladem je geometrická reprezentace distributivního zákona. Opět je vhodné začít nejprve s několika modely s konkrétními hodnotami a postupně přidávat proměnné a vést žáky k objevení pravidla. Geometrickou reprezentaci lze dobře využít i pro násobení dvojčlenů. Vhodným nástrojem k vizualizaci úprav výrazů s proměnnou je prostředí algebraických dlaždic (Vondrová, 2019). Algebraické dlaždice („Algebra tiles“) se hojně vyskytují v zahraničních studijních textech. Časté je také jejich využití v appletech. Prostředí algebraických dlaždic využívají také české učebnice autorského kolektivu vedeného M. Hejným. Prostředí algebraických dlaždic je založeno na jednoduché manipulaci s geometrickými objekty (čtverci a obdélníky). Žáci si při manipulaci s dlaždicemi mohou osvojit základní zákonitosti, které mohou dále aplikovat při práci s algebraickými výrazy, které modelovat v prostředí dlaždic nelze. Stávají se tak pro žáky generickým modelem. Pomocí dlaždic je možné vizualizovat sčítání, odčítání, násobení výrazů s proměnnou, ale také rozklad na součin.

Na základě dobré zkušenosti, kterou jsem získala při rozhovorech, doporučuji učit žáky ověřovat platnost sestaveného výrazu dosazením číselných hodnot, resp. vést je k tomu, aby dokázali dosazením čísla zjistit, že mají nesprávně sestavený výraz. Např. při sestavení výrazu pro obsahu obdélníku, kde jedna strana je zadána proměnnou nebo výrazem, nejprve nahradit proměnnou konkrétním číslem přímo v obrázku a spočítat obsah. Poté to samé konkrétní číslo dosadit do sestaveného výrazu a porovnat výsledky. Tento postup se osvědčil při rozhovorech v případech, kdy žáci nenapsali výraz, který určoval délku strany útvaru, do závorky. Objevení rozdílných výsledků s použitím závorek a bez nich je snadné a didakticky vhodné u číselných výrazů, ale rovněž u algebraických výrazů. Dosazování konkrétních hodnot za proměnnou je také vhodné při úpravách sestavených výrazů. Domnívám se, že to by také mohlo zlepšit představu žáků o tom, že původní a upravený výraz se sobě rovnají.

Další obtíže žáků při řešení testových úloh přímo nesouvisí s mým tématem práce, ale s obtížemi žáků při určování obsahů a obvodů především nepravidelných geometrických útvarů. Výzkumy v této oblasti a didaktická doporučení by obsáhly několik kapitol. V této souvislosti doporučuji učitelům prostudovat např. kapitolu „ *Obtíže žáků 2. stupně ve zjišťování obsahu útvarů a objemů těles*“ v publikaci „*Kritická místa matematiky základní školy v řešení žáků*“ (Vondrová, Rendl a kol., 2015), ze které jsem čerpala při psaní diplomové práce.

Závěr

Hlavním cílem mé práce bylo identifikovat obtíže a chyby žáků při algebraizaci úloh s geometrickým kontextem. Dalším cílem bylo porovnat, jakých chyb se dopouštějí žáci, kteří se ještě algebru neučili, a ti, kteří se ji již učili.

V teoretické části práce jsem se zaměřila na vymezení pojmů algebraizace, modelování a geometrické modelování. Popisuji zde základní pilíře algebry a historickou propojenost mezi geometrickým a symbolickým myšlením. Dále jsem popsala výsledky čtyři výzkumů, ve kterých autoři kromě výsledků jiných algebraických úloh analyzovali výsledky úloh s geometrickým kontextem. Obtíže žáků při řešení úloh s geometrickým kontextem popisované v těchto výzkumech byly ve většině případů totožné s obtížemi žáků, které jsem popsala v mém výzkumu. V poslední části teoretické části jsem analyzovala učebnice z hlediska výskytu úloh s geometrickým kontextem. Tyty učebnice používají žáci, kteří se mého výzkumu zúčastnili. Analýza ukázala, že mezi učebnicemi je jednak rozdíl v míře výskytu úloh s geometrickým kontextem a také v tom, v jakých souvislostech a s jakými činnostmi jsou úlohy spojeny.

V experimentální části jsem popsala vlastní výzkum. Na základě studia literatury a učebnic jsem vytvořila a zadala test žákům druhého stupně dvou základních škol a odpovídajícím ročníkům jednoho osmiletého gymnázia. Jedna sada testových úloh byla zaměřena na žáky 6., 7. a 8. ročníků, kteří neprošli výukou výrazů, a druhá sada úloh byla pro žáky 9. ročníků. V práci uvádím didaktickou analýzu všech použitých úloh. Po vyhodnocení výsledků testů jsem provedla rozhovory s žáky základní školy, kde vyučuji. Rozhovory s žáky přinesly další zajímavé a doplňující informace a pomohly posunout proces poznání žákových myšlenek do větší hloubky.

Na základě výsledků testů a průběhu rozhovorů jsem identifikovala nejčetnější chyby a obtíže žáků před výukou algebry a po ní. Celkově lze z výsledků říci, že mladší žáci, především 6. a 7. ročníku, mají problémy aplikovat výrazy v geometrickém prostředí. Ukázaly se rozdíly mezi oběma základními školami a rozdíly mezi základními školami a gymnáziem. Žáci gymnázia byli ve všech úlohách úspěšnější, což jsem očekávala. Žáci jedné ze základních škol byli výrazně úspěšnější v některých úlohách než žáci druhé školy. Z mnou získaných dat však nebylo možné usuzovat přesněji na příčinu tohoto jevu.

Obtíže mladších žáků všech škol spočívaly především v tom, že nechápali význam proměnné a nerozlišovali mezi teoretickým objektem a jeho reprezentací. Úsečky nebo délky stran odhadovali nebo přímo měřili. U žáků 8. a 9. ročníků se tyto jevy vyskytovaly v menší míře a u některých úloh vůbec. Zde byl problém spojit geometrické představy délky, obvodu či obsahu s algebraickým výrazem. To ukazuje na nezkušenost žáků s řešením takových úloh. Žákům rovněž působily obtíže operace s proměnnými a úpravy výrazů. Dalším problematickým jevem u žáků všech tří škol se ukázalo uchopení úlohy v geometrickém smyslu při počítání obsahu nepravidelného útvaru.

Mnou získané výsledky nelze přirozeně zobecňovat na celou populaci českých žáků daných ročníku, ukazují však na jevy, kterých bychom si měli být jako učitelé vědomi a které mohou být i inspirací pro autory učebnic a učebních materiálů.

Celá práce pro mne byla velkou zkušeností a přínosem pro mou další učitelskou praxi. Především rozhovory s žáky mi umožnily hlouběji proniknout do myšlenkových procesů žáků. Získané informace mě vedly také k zamyšlení nad volbou vhodných úloh a na úpravě některých metod a forem mé výuky.

Seznam použité literatury

BITNEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. (2009). *Matematika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus.

CIHLÁŘ, Jiří a Milan ZELENKA. (2013). *Matematika 8: učebnice*. Ústí nad Labem: AOS Publishing.

FUCHS, Eduard, Eva ZELENDOVÁ, Helena BINTEROVÁ, Růžena BLAŽKOVÁ, Marie KUPČÁKOVÁ, Hana LIŠKOVÁ, Eva NOVÁKOVÁ, Pavel REZEK, Naďa VONDROVÁ a Marta VRTIŠOVÁ. (2015). *Metodické komentáře ke Standardům ZV k* oboru matematika [online]. Praha: Národní ústav pro vzdělávání [cit. 2022-07-06]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/metodicke-komentare

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Dominik DVOŘÁK, Jana HANUŠOVÁ, Miroslav HRICZ, Jaroslava KLOBOUČKOVÁ a Lukáš UMÁČENÝ. (2010). *Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání*: *náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.

HEJNÝ, Milan, L'udovít BÁLINT, Mária BENEŠOVÁ, Helena BEREKOVÁ, Peter BERO, L'udmila FRANTÍKOVÁ, Ondrej GÁBOR, L'udovít HRDINA, Vladimír REPÁŠ a Juraj VANTUCH. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. 2. vydání. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatel'stvo.

HEJNÝ, Milan. (2014) *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

HERMAN, J. a kol. (2019). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 1*. Praha: Prometheus.

HERMAN, Jiří, Vítězslava CHRÁPAVÁ, Eva JANČOVIČOVÁ a Jaromír ŠIMŠA. (2019). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 2*. Praha: Prometheus.

KIERAN, Carolyn. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), s. 139–15

KVASZ, Ladislav. (2008). O vzťahu medzi symbolickým a geometrickým myslením. In: STEHLÍKOVÁ, Naďa. *Dva dny s didaktikou matematiky*. [online] Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, s. 62–65 [cit. 2022-07-06].

Dostupné z: https://www.suma.jcmf.cz/materialy-pro-ucitele/sborniky-z-konferenci/

KVASZ, Ladislav. (2007). Vznik algebraickej symboliky. In: STEHLÍKOVÁ, Naďa. *Dva dny s didaktikou matematiky*. [online] Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, s. 20–32 [cit. 2022-07-06]. Dostupné z: https://www.suma.jcmf.cz/materialy-pro-ucitele/sborniky-z-konferenci/

MacGREGOR, Mollie a Kaye STACEY. (1997). Students'understanding of algebraic notation: 11–15. Educational Studies in Mathematics, 33(1), 1–19. https://doi.org/10.1023/A:1002970913563

MOSELEY, Bryan a Mary E. BRENNER. (2009). A comparison of curricular effects on the integration of arithmetic and algebraic schemata in pre-algebra students. *Instructional Science*, 37(1), 1–20. https://doi.org/10.1007/s11251-008-9057-6

Národní ústav pro vzdělávání (NÚV): RÁMCOVÉ VZDĚLÁVACÍ PROGRAMY [online], [cit. 2022-07-06]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani

PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL a Jitka BOUŠKOVÁ. (2009). *Matematika 8 pro základní školy*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství.

RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*, 24(1), 22–57. https://doi.org/10.5817/PedOr2014-1-22

TOMÁŠEK, Vladislav, Miroslav FRÝZEK, Jana PALEČKOVÁ, Dana ŠVEJDOVÁ a Martina VERNEROVÁ. (2009). *Výzkum TIMSS 2007 – Úlohy z matematiky pro 8. ročník*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.

TOMÁŠEK, Vladislav a Dana MANDÍKOVÁ. (2009). Výsledky českých žáků ve výzkumu TIMSS 2007. *Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách*. [online] 19(5), 275–291 [cit. 2022-07-06].

Dostupné z: https://www.mfi.upol.cz/old/

TREJBAL, Josef. (2017). *Sbírka úloh z matematiky 9 pro 9. ročník ZŠ*. Praha: SPN.

VONDROVÁ, Naďa. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

VONDROVÁ Naďa, Miroslav RENDL, Radka HAVLÍČKOVÁ, Lenka HŘÍBKOVÁ, Anna PÁCHOVÁ a Jana ŽALSKÁ. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum.

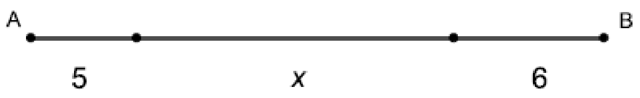
VONDROVÁ, Naďa, Radka HAVLÍČKOVÁ, Miroslav RENDL a Jana ŽALSKÁ. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy: metodický materiál pro učitele.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Příloha – Zadání testových úloh

TESTOVÉ ÚLOHY – 6, 7 ročník

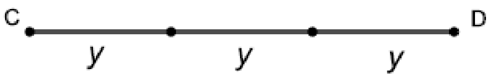
Úloha A1:

Zapiš délku úsečky AB.



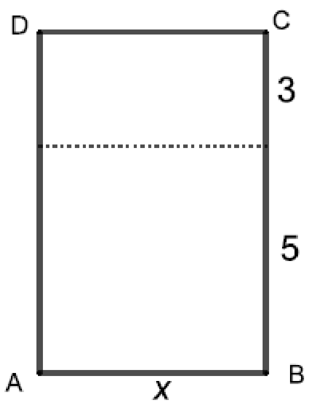
Úloha A2:

Zapiš délku úsečky CD.



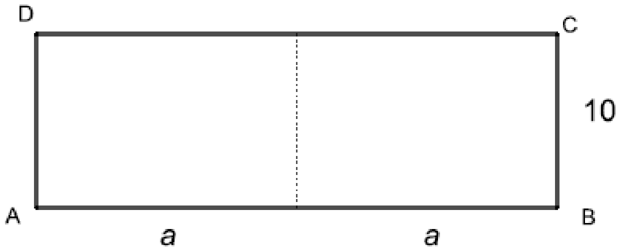
Úloha A3:

Zapiš obsah a obvod obdélníku ABCD.



Úloha A4:

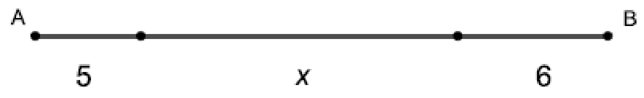
Zapiš obsah a obvod obdélníku ABCD.



TESTOVÉ ÚLOHY – 8. ročník

Úloha A1:

Zapiš délku úsečky AB.

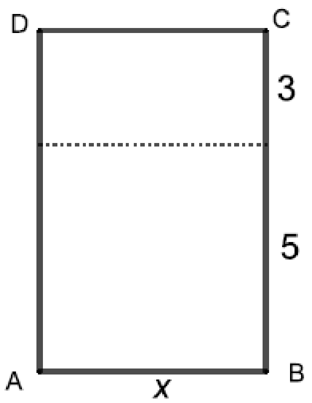


Úloha A2:

Zapiš délku úsečky CD.

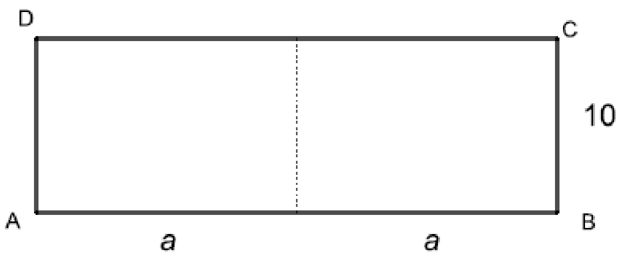
Úloha A3:

Zapiš obsah a obvod obdélníku ABCD.



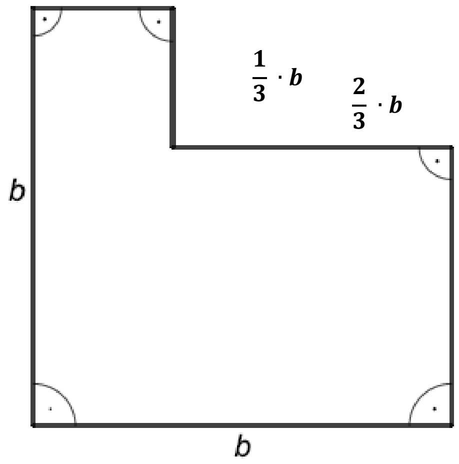
Úloha A4:

Zapiš obsah a obvod obdélníku ABCD.



Úloha A5:

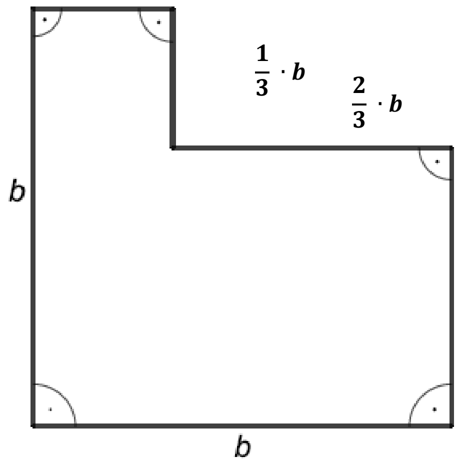
Zapiš obvod tohoto útvaru na obrázku.



TESTOVÉ ÚLOHY – 9. ročník

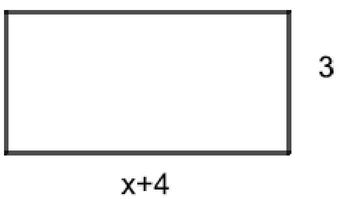
Úloha A5:

Zapiš obvod tohoto útvaru na obrázku.



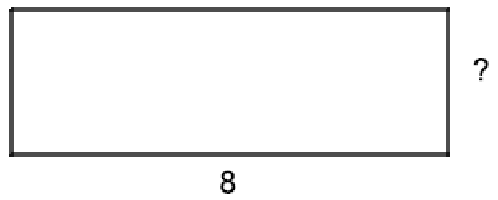
Úloha B1:

Zapiš výrazem obsah a obvod obdélníku a výraz uprav.



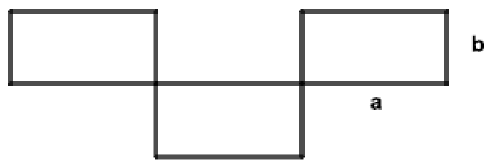
Úloha B2:

Obvod obdélníku O = 16 + 4y. Zapiš výrazem délku neznámé strany.



Úloha B3:

Napiš výraz, který vyjadřuje obsah a obvod útvaru na obrázku, který je složený ze tří shodných obdélníků, dané výrazy uprav.



Úloha B4:

Zapiš a uprav výrazy pro výpočet obsahu a obvodu tohoto obrazce.