

## POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

**Název:** Resolutions of singularities using blow-ups

**Autor:** Matúš Komora

### SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

Práce si dává za cíl popsat rezoluci singularit algebraických variet pomocí metody tzv. „blow-upů“ a demonstrovat tuto metodu na příkladech. Výsledná práce je rozdělena do tří kapitol, kde první dvě kapitoly pokrývají základy teorie afinních a projektivních variet. V poslední kapitole se autor věnuje tématu blow-upů a demonstruje ho na dvou konkrétních příkladech.

### CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

**Téma práce.** Téma práce je adekvátní rozsahu bakalářské práce, nastudovaný materiál je rozhodně nad rámcem bakalářského studia na MFF UK. Bohužel, vytyčený cíl práce nemohu považovat za úplně splněný, jak vysvětluji níže.

**Vlastní příspěvek.** Práce je téměř ryze kompilačního charakteru. Za samostatnější příspěvky lze považovat zpracování Example 2 a některé důkazy v kapitole 2.

**Matematická úroveň.** První dvě kapitoly jsou vesměs dobře strukturované a čitelné. Především v poslední kapitole je zavedena řada klíčových pojmů, které však autor nijak nepropojuje se zadáním práce.

**Práce se zdroji.** Práce v zásadě dobře pracuje se zdroji. Bylo by záhodno u citací do rozsáhlejších textů uvádět přesnější referenci.

**Formální úprava.** Práce je psaná v angličtině. Text obsahuje nadstandardní množství překlepů a chyb v jazyce, ale většinou toto výrazně nenasuší porozumění textu. Oceňuji, že je text proložen docela čtivými pasážemi s neformálním vysvětlením zavedených pojmů.

### VYBRANÉ PŘIPOMÍNKY A OTÁZKY

První kapitola je z valné většiny tvořena přímou kompilací ze skript [7]. Kapitola druhá obsahuje krátký úvod do projektivních variet a poněkud nepořádný důkaz pokrytí standardními afinními varietami. Počínaje podsekcí 2.2.1 práce bohužel výrazně ztrácí svůj narativ. Autor se věnuje produktům afinních a projektivních variet a Segreho vnoření, dále v poslední sekci stráví čas zaváděním pojmu biracionální mapy, v dosti skoupé Definition 29 pak definuje pojem singularity variety. Žádný z těchto pojmů však není nikterak svázán se zadáním práce, to jest s pojmem blow-upu a s odstraňováním singularit. Obzvláště překvapivé vzhledem k názvu a zadání práce je pak to, že zrovna zde řetězec definic končí, a nikdy se tak nedostaneme ke klíčovému termínu „resolution of singularities“. Samotný blow-up afinní variety v bodě je tak pouze definován, ale citelně chybí jakákoliv diskuze toho, jak tato konstrukce souvisí se zavedenými pojmy. Dále bohužel ani žádný ze dvou spočtených příkladů neobsahuje zmínku (natož výpočet) toho, že konstrukce blowupu odstranila singularitu původní variety (přestože ve zdroji [5], ze kterého Example 1 přímo vychází, takovou diskuzi nalezneme). Hlavní příslib práce slíbený v posledním odstavci úvodní kapitoly tak z mého pohledu zůstává nenaplněn. Nejsem schopen odhadnout, zda toto bylo způsobeno nedostatkem času na dokončení práce, či neúplným pochopením materiálu autora.

Následuje výčet některých dalších konkrétních připomínek k práci.

1. Bod 6. v Lemmatu 5 by zasloužil argument (v referenci [7] je toto formulováno jako cvičení!).
2. V Corollary 2 se aplikuje Hilbertova věta o nulách a tedy je třeba předpokládat, že  $K$  je algebraicky uzavřené.
3. Práce by mohla obsahovat důkaz Lemmatu 10 spíše než Lemmatu 1.
4. V kapitole 1 není definována afinní algebraická varieta. V textu se pak místy zaměňují pojmy "algebraic set" a "algebraic variety".
5. Důkaz Theorem 11 není srozumitelný: definice homogenizace polynomů (zobrazení  $\beta$ ) nesedí, symbol  $Y$  není definován, výraz  $\alpha(T)$  nedává zjevný smysl.
6. Zavedení Segreho vnoření v sekci 2.2.1 není moc čitelné. Jaké uspořádání na indexech  $i, j$  volíme v definici mapy  $\psi$ ? V textu se pak náhle nahradí dimenze  $r, s$  jediným datem  $n$ .
7. Důkaz Theorem 13 obsahuje několik nepříjemných překlepů, které dost stěžují porozumění.
8. Example 2: Ve druhém odstavci není srozumitelný text okolo výpočtu  $\overline{W}_u$ . Jednak zde vypadl důležitý kus formule, druhak  $\psi$  je definovaná jako mapa  $W_u \rightarrow \mathbb{A}^2$ , jak tedy souvisí předobraz  $\psi^{-1}(\mathbb{A}^2)$  s uzávěrem  $W_u$ ? Další odstavec končí bez pointy v půlce věty.
9. V závěru píšete "We also tried to fill in gaps in the literature on this topic.". Jaké části textu a jakých "gaps in the literature" se toto týká?

## ZÁVĚR

Text se z výše uvedených důvodů nachází na dolní hranici uznatelnosti za práci bakalářskou a úplně nejlépe by bylo text pečlivě dopracovat. Případná úspěšná obhajoba by měla zahrnovat vysvětlení, jak se zadáním práce souvisí v textu se nacházející části o Segreho vnoření a biracionálních mapách, a jak blow-upy souvisí s pojmem "resolution of singularities".

RNDr. Michal Hrbek, Ph.D.

Matematický ústav Akademie věd České Republiky  
22.1.2023