MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

František Couf

Fourierova transformace na polytopech a dláždění obdélníky

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce:	doc. Mgr. Vítězslav Kala, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych zde poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce doc. Mgr. Vítězslavu Kalovi, Ph.D. a konzultantovi Mgr. Mikulášovi Zindulkovi za jejich čas, vstřícnost a cenné rady.

Název práce: Fourierova transformace na polytopech a dláždění obdélníky

Autor: František Couf

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Vítězslav Kala, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: Cílem této práce je podrobné zpracování důkazů tvrzení o pěkných intervalech v libovolných d dimenzích a vlastnosti harmonických intervalů. Nejprve zavedeme pojmy pěkný obdélník a dláždění množiny. Poté rozšíříme pěkný obdélník na pěkný d-rozměrný uzavřený interval. Následně dokážeme hlavní větu (uzavřený interval vydlážděný pěknými uzavřenými intervaly je také pěkný) pro d dimenzí. Poté zavedeme pojem harmonický interval a podrobně dokážeme několik důležitých tvrzení o dláždění harmonickými intervaly. Jejich předpoklady demonstrujeme na příkladech, které jejich důležitost vystihují. V závěru poslední kapitoly pro intervaly s celočíselnými hranami dáme do souvislosti pojmy harmonický interval a násobek intervalu.

Klíčová slova: Fourierova transformace, polytop, dláždění

Title: Fourier transform on polytopes and tiling with rectangles

Author: František Couf

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. Mgr. Vítězslav Kala, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: The aim of this thesis is a detailed exposition of the proof of a theorem on nice intervals in d dimensions and a theorem on the properties of harmonic intervals. We introduce first the notions of a nice rectangle and a tiling of a set. Then we extend the notion of a nice rectangle to that of a nice d-dimensional interval. We subsequently prove the main theorem (a closed interval tiled by nice closed intervals is also nice) in d dimensions. Then we define harmonic intervals and prove in detail several important theorems on tiling by harmonic intervals. We illustrate their assumptions with examples which demonstrate their importance. We show the connection between the notions of a harmonic interval and a multiple of an interval for intervals with integral edges at the end of the last chapter.

Keywords: Fourier transform, polytope, tiling

Obsah

Úvod

Tato práce je inspirovaná knihou Robins (2021) z níž je převzat problém o pěkném obdélníku, který je motivací naší práce. Jeho znění je následující: Je obdélník, který lze vyplnit menšími pěknými obdélníky, také pěkný?

Klíčovým pojmem naší práce je pěkný obdélník (překlad z anglického analogického pojmu nice rectangle), který je definovaný jako obdélník s alespoň jednou celočíselnou stranou. V roce 1903 se podařilo matematikovi M. Dehnovi dokázat, že lze-li vyplnit velký obdélník menšími obdélníky, které jsou pěkné, pak je alespoň jedna strana velkého obdélníku racionální (Dehn (1903)). De Bruijn pak dokázal, že racionální strana obdélníku je dokonce celočíselná (de Bruijn (1969)). Poté došlo k zobecnění do d dimenzí.

Ačkoli tento problém spadá do kombinatoriky, budeme ho překvapivě řešit pomocí analytických metod. Základním nástrojem, který využijeme pro důkaz našeho hlavního tvrzení, je Fourierova transformace. Používáme Fourierovu transformaci obdélníku, čímž myslíme Fourierovu transformaci jeho charakteristické funkce. Jiné způsoby řešení jsou založeny na teorii grafů a dalších diskrétních metodách. Je možné uvažovat také řešení tohoto problému zobecněné do d dimenzí.

Nejprve je třeba zobecnit pojem pěkný obdélník. Obdélník v rovině je dvoudimenzionální uzavřený interval. Tudíž v případě dimenze $d > 2$ budeme uvažovat d-dimenzionální uzavřený interval. Za účelem formálnosti budeme raději hovořit o d-dimenzionálním uzavřeném intervalu, než o d-rozměrném kvádru. Kvádr nemá závislost na mezích, ale pouze na rozměrech hran. Ovšem Fourierova transformace je pro různé meze různá, tedy na mezích závisí. Uzavřený interval v $\mathbb{R}^d$ nazveme pěkný, má-li alespoň jednu hranu celočíselné délky. Ukazuje se, že analogie výše uvedeného platí i v d dimenzích. Tedy d-dimenzionální uzavřený interval je pěkný, pokud ho lze vyplnit menšími pěknými d-dimenzionálními uzavřenými intervaly. Postup důkazu je analogický, využití Fourierovy transformace je podobné, jen zde uvažujeme charakteristickou funkci d-dimenzionálního intervalu místo obdélníku.

Práce je členěna do čtyř kapitol. První kapitola obsahuje definici Fourierovy transformace a některé její základní vlastnosti. Dokazujeme také jisté elementární vlastnosti exponenciály, které brzy využijeme v důkazu tvrzení 5 v druhé kapitole a tvrzení 8 v kapitole třetí. Ve druhé kapitole uvedeme definici pěkného obdélníku a tvrzení 5, ve kterém je uvedena charakterizace pěkného obdélníku pomocí Fourierovy transformace. Na základě tohoto tvrzení dokážeme větu 6 o dláždění obdélníku. Třetí kapitola se zabývá zobecněním této věty (věta 6) do d dimenzí. Od obdélníku přejdeme k d-dimenzionálním uzavřeným intervalům a dokážeme hlavní větu (věta 9) této práce. Důkazu předchází dílčí tvrzení (tvrzení 7 a tvrzení 8), která samotný důkaz zpřehledňují. Čtvrtá kapitola se zabývá podrobněji vlastnostmi dláždění d-rozměrného intervalu. Navíc zavádíme pojem harmonický interval a následně prozkoumáváme důsledky dláždění harmonickými intervaly. Důkazy jsou rozděleny do několika lemmat a každé podrobně dokázáno. V závěru kapitoly odvodíme větu 18 jako alternativní definici harmonického intervalu, která dává do souvislosti vlastnost být harmonickým intervalem a vlastnost být násobkem intervalu.

Hlavním přínosem této práce je podrobné zpracování důkazu hlavní věty (věta 9) v d dimenzích. V knize Robins (2021) je dokázána jen věta 6, ale v článku de Bruijn (1969) je uvedena věta 9 včetně důkazu, ovšem v této práci je detailně rozpracován a rozdělen do dvou tvrzení. Podobně i vlastnosti harmonických intervalů, které jsou reprezentovány převzatým tvrzením 10, tvrzením 11 a tvrzením 16, jsou zpracovány v článku de Bruijn (1969), ale v práci jsou podrobněji dokazovány - důkazy jsme rozdělili do několika lemmat, každé podrobně zpracovali. Dalším přínosem jsou poznámky s příklady, které osvětlují podstatu předpokladů v tvrzení 10 a v tvrzení 16 ve čtvrté kapitole. V literatuře se nevyskytují, ale autor je doplnil.

1. Fourierova transformace

Po zbytek práce budeme používat značení: λ_d... Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$, $\operatorname{int} S$... vnitřek množiny S, ∂S... hranice množiny S.

Definice. Fourierovou transformací funkce $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ rozumíme funkci $\hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definovanou jako

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \mathsf{d}x,$$

kde $\xi \in \mathbb{R}^d$. Nechť $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ je množina konečné d-rozměrné Lebesgueovy míry. Fourierovou transformací množiny $\mathcal{S}$ myslíme Fourierovu transformaci její charakteristické funkce.

Než začneme používat Fourierovu transformaci, připomeneme si některé vlastnosti exponenciální funkce.

Lemma 1. *Komplexní funkce $e^{2\pi i x}$ komplexní proměnné $x \in \mathbb{C}$ splňuje $e^{2\pi i x} = 1$ právě tehdy, když $x \in \mathbb{Z}$.*

Důkaz. Buď $x = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$e^{2\pi i x} = e^{2\pi i(a+bi)} = e^{-2\pi b}(\cos(2\pi a) + i \sin(2\pi a)).$$

Tím jsme vyjádřili komplexní číslo $e^{2\pi i x}$ v goniometrickém tvaru.

($\Rightarrow$) Předpokládáme $e^{2\pi i x} = 1$. Číslo $e^{2\pi i x}$ je reálné právě tehdy, když je jeho imaginární část rovna nule. Tedy

$$\operatorname{Im}(e^{2\pi i x}) = e^{=2\pi b} \sin(2\pi a) = 0.$$

Protože exponenciální funkce nikdy nenabývá nuly, můžeme podmínku ekvivalentně vyjádřit jako $\sin(2\pi a) = 0$. Z vlastností reálné funkce sinus je $a = \frac{k}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Reálná část čísla $e^{2\pi i x}$ je kladná právě tehdy, když $\cos(2\pi a) > 0$, neboť exponenciála je nezáporná na celém $\mathbb{R}$. Pokud k je liché celé číslo, pak $\cos(\pi k) = -1$. Tudíž k musí být sudé celé číslo, tedy $a \in \mathbb{Z}$ a $\cos(2\pi a) = 1$.

Dokázali jsme $e^{2\pi i x} = e^{-2\pi b}$. Rovnost $e^{-2\pi b} = 1$ je splněna právě tehdy, když $b = 0$. Dokázali jsme $x = a + ib = a \in \mathbb{Z}$.

($\Leftarrow$) Platnost obrácené implikace plyne ihned dosazením libovolného $x \in \mathbb{Z}$. $\square$

V následujícím tvrzení vypočteme Fourierovu transformaci dvourozměrného intervalu, kterou budeme využívat v důkazech v druhé kapitole.

Tvrzení 2. *Nechť $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ je uzavřený interval v $\mathbb{R}^2$. Pak pro každé $\xi = (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2$ takové, že $\xi_1, \xi_2 \neq 0$ platí*

$$\int_I e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\xi_1 \xi_2} \left(e^{-2b_1 \pi i \xi_1} - e^{-2a_1 \pi i \xi_1} \right) \cdot \left(e^{-2b_2 \pi i \xi_2} - e^{-2a_2 \pi i \xi_2} \right).$$

Důkaz. Označme $x = (x_1, x_2)$, kde $x_1 \in [a_1, b_1]$, $x_2 \in [a_2, b_2]$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, kde $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zadaný integrál $\int_I e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx$ upravíme na výraz

$$\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} e^{-2\pi i(x_1\xi_1)} \cdot e^{-2\pi i(x_2\xi_2)} dx_1 dx_2,$$

kde jsme využili definici skalárního součinu pro vektory x, ξ. Z Fubiniho věty plyne, že poslední integrál je roven

$$\int_{[a_1,b_1]} \int_{[a_2,b_2]} e^{-2\pi i(x_1\xi_1)} \cdot e^{-2\pi i(x_2\xi_2)} dx_2 dx_1.$$

Množina I je měřitelná vzhledem k míře λ_2, neboť I je dvourozměrný interval. Funkce $f(x_1, x_2) = e^{-2\pi i(x_1\xi_1)} \cdot e^{-2\pi i(x_2\xi_2)}$ je měřitelná vzhledem k míře λ_2, neb je na I spojitá. Funkce f je omezená, integrál $\int_I f(x) dx$ má tedy smysl. Tím jsme ověřili, že jsou splněny předpoklady Fubiniho věty.

Poslední integrál upravíme na součin

$$\int_{[a_1,b_1]} e^{-2\pi i(x_1\xi_1)} dx_1 \cdot \int_{[a_2,b_2]} e^{-2\pi i(x_2\xi_2)} dx_2,$$

neboť výraz $e^{-2\pi i(x_2\xi_2)}$ nezávisí na proměnné x_1 a zároveň výraz $e^{-2\pi i(x_1\xi_1)}$ nezávisí na proměnné x_2. Tím jsme rozdělili zadaný dvourozměrný integrál na součin dvou jednorozměrných.

Funkce $e^{-2\pi i(x_j\xi_j)}$, $j \in \{1,2\}$, má primitivní funkci $\frac{1}{-2\pi \xi_j} e^{-2\pi i x_j \xi_j}$. Dosazením mezí intervalů, přes které integrujeme, získáme rovnost

$$\int_I e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} dx = \frac{\left(e^{-2\pi i b_1\xi_1} - e^{-2\pi i a_1\xi_1}\right)}{-2\pi i\xi_1} \cdot \frac{\left(e^{-2\pi i b_2\xi_2} - e^{-2\pi i a_2\xi_2}\right)}{-2\pi i\xi_2}.$$

□

Přestože při Fourierově transformaci vycházíme z funkce v $L_1(\mathbb{R}^d)$, vzniklá transformovaná funkce nemusí ležet v $L_1(\mathbb{R}^d)$, jak osvětluje lemma 3. Ovšem transformace funkce z $L_2(\mathbb{R}^d)$ již v $L_2(\mathbb{R}^d)$ vždy leží.

Lemma 3. *Označme 1_I charakteristickou funkci intervalu $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Fourierova transformace intervalu I splňuje*

$$\widehat{1}_I(\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}$$

pro $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Položme

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a v bodě 0 dodefinujme funkci limitou. Potom integrál

$$\int_{\mathbb{R}} |\operatorname{sinc}(x)| dx$$

diverguje, a tedy $\operatorname{sinc} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Důkaz. Charakteristická funkce intervalu I leží v prostoru $L_1(\mathbb{R})$, tedy

$$\widehat{1}_I(\xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i x\xi}.$$

Poslední integrál upravíme na

$$\left[\frac{e^{2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}\right] = \frac{e^{i\pi\xi} - e^{-i\pi\xi}}{2i\pi\xi} = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

Tím jsme dokázali první část lemmatu. Dále máme

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1,$$

kde jsme použili substituci $y = \pi\xi$. Když položíme $\operatorname{sinc}(0) = 1$, je funkce sinc definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$ a integrál z formulovaného tvrzení má smysl.

Stačí dokázat $\int_1^\infty \left|\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right| d\xi = +\infty$. Protože $\sin(\pi\xi) \in [-1{,}1]$, platí nerovnost

$$\left|\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right| \geq \frac{\sin^2(\pi\xi)}{\pi\xi}, \tag{1.1}$$

kde $\xi \in (0{,}\infty)$. Uvažme rovnost

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2(\pi\xi)}{\pi\xi} d\xi = \int_1^\infty \frac{1 - \cos(2\pi\xi)}{\pi\xi} d\xi = \int_1^\infty \frac{1}{\pi\xi} d\xi - \int_1^\infty \frac{\cos(2\pi\xi)}{\pi\xi} d\xi. \tag{1.2}$$

První integrál diverguje. Použitím per partes dostáváme

$$\int_1^\infty \frac{\cos(2\pi\xi)}{\pi\xi} d\xi = \left[\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi}\frac{1}{\pi\xi}\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\sin(2\pi\xi)}{2(\pi\xi)^2} d\xi.$$

Pro zobecněný přírůstek platí

$$\left[\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi}\frac{1}{\pi\xi}\right]_1^\infty = \lim_{\xi\to\infty}\left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi}\frac{1}{\pi\xi}\right) - \frac{\sin(2\pi)}{2\pi^2} = 0,$$

tedy

$$\int_1^\infty \frac{\cos(2\pi\xi)}{\pi\xi} d\xi = \int_1^\infty \frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi}\frac{1}{\pi\xi^2} d\xi.$$

Integrovanou funkci můžeme odhadnout

$$\left|\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi}\frac{1}{\pi\xi^2}\right| \leq \frac{1}{2\pi^2\xi^2}.$$

Dle limitního srovnávacího kritéria integrál konverguje. Tím je dokázáno, že druhý integrál na pravé straně (1.2) konverguje a integrál na levé straně (1.2) diverguje. Podle (1.1) diverguje také původní integrál. $\square$

2. Dláždění obdélníku

Definice. Nechť $S \subset \mathbb{R}^d$ je množina. Systém množin $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ nazveme *dlážděním* S, jestliže platí

- $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$, tedy systém $\mathcal{S}$ je *pokrytím* S,
- Pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ platí $\operatorname{int} S_i \cap \operatorname{int} S_j = \emptyset$.

Fakt. Konvexní kompaktní množina $K \subset \mathbb{R}^d$ má hranici Lebesgueovy míry 0, tedy $\lambda_d(\partial K) = 0$.

Lemma 4. *Nechť $S \subset \mathbb{R}^d$ je měřitelná množina a $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ je dláždění S. Předpokládejme, že množiny S_i jsou navíc konvexní a kompaktní. Pak pro měřitelnou funkci $f : S \to \mathbb{C}$ platí*

$$\int_S f d\lambda_d = \int_{S_1} f d\lambda_d + \dots + \int_{S_n} f d\lambda_d,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Podle předpokladu je $\mathcal{S}$ dláždění množiny S a podle definice dláždění je $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ a každé $i \in \{1, \dots, n\}$ splňuje $S_i = \operatorname{int} S_i \cup \partial S_i$. Dále pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ platí $\operatorname{int} S_i \cap \partial S_j = \emptyset$, neboť $\operatorname{int} S_i \cap \operatorname{int} S_j = \emptyset$ a vnitřek množiny je otevřená množina. Zdůvodnění. Množina $\operatorname{int} S_i$ je otevřená, tudíž její doplněk $\mathbb{R}^d \setminus (\operatorname{int} S_i)$ je uzavřená množina a obsahuje $\operatorname{int} S_j$. Tedy uzávěr množiny $\operatorname{int} S_j$ je obsažen v $R^d \setminus (\operatorname{int} S_i)$. Protože ∂S_j je podmnožina uzávěru, dostáváme $\operatorname{int} S_i \cap \partial S_j$ je prázdná množina. Předchozí tvrzení implikuje rovnost $\bigcup_{i=1}^n \operatorname{int} S_i \cap \bigcup_{i=1}^n \partial S_i = \emptyset$, z které dostáváme

$$\int_S f d\lambda_d = \int_{\bigcup_{i=1}^n \operatorname{int} S_i} f d\lambda_d + \int_{\bigcup_{i=1}^n \partial S_i} f d\lambda_d. \tag{2.1}$$

Množina S_i je konvexní a kompaktní, tedy její hranice je míry 0. Protože Lebesgueova míra je subaditivní a $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\lambda_d(\partial S_i) = 0$, $\bigcup_{i=1}^n \partial S_i$ je množinou míry 0.
Integrál přes množinu míry 0 je roven 0, tedy

$$\int_{\bigcup_{i=1}^n \partial S_i} f d\lambda_d = 0. \tag{2.2}$$

Z rovnic (2.1) a (2.2) plyne

$$\int_S f d\lambda_d = \int_{\bigcup_{i=1}^n \operatorname{int} S_i} f d\lambda_d. \tag{2.3}$$

Integrujeme přes sjednocení disjunktních množin $\operatorname{int} S_i$, tedy

$$\int_{\bigcup_{i=1}^n \operatorname{int} S_i} f d\lambda_d = \sum_{i=1}^n \int_{\operatorname{int} S_i} f d\lambda_d. \tag{2.4}$$

Protože ∂S_i je míry 0, máme

$$\int_{S_i} f d\lambda_d = \int_{\operatorname{int} S_i} f d\lambda_d + \int_{\partial S_i} f d\lambda_d = \int_{\operatorname{int} S_i} f d\lambda_d.$$

Dosazením do (2.4) získáme

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int} S_i} f d\lambda_d = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} f d\lambda_d.$$

Konečně z (2.3) dostáváme

$$\int_S f d\lambda_d = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} f d\lambda_d.$$

□

Nyní zavádíme klíčový pojem naší práce, pěkný obdélník.

Definice. Obdélník R nazveme *pěkný* (nice rectangle), jestliže délka alespoň jedné jeho strany je celé číslo.

Poznámka. Obdélník v našem pojetí je jen jiný název pro uzavřený interval v $\mathbb{R}^2$.

Tvrzení 5. *Nechť $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ je uzavřený dvourozměrný interval. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

i) R je pěkný obdélník.

ii) Fourierova transformace R splňuje $\hat{1}_R(\xi) = 0$ pro všechna $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, kde $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

iii) Platí $\hat{1}_R(1, 1) = 0$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nechť R je pěkný obdélník, pak existuje $k \in \{1,2\}$ takové, že $(b_k - a_k) \in \mathbb{Z}$. Dále nechť $\xi_1,\xi_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Podle tvrzení 2

$$\hat{1}_R(\xi) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\xi_1 \xi_2} \left(e^{-2b_1\pi i\xi_1} - e^{-2a_1\pi i\xi_1}\right) \cdot \left(e^{-2b_2\pi i\xi_2} - e^{-2a_2\pi i\xi_2}\right). \tag{2.5}$$

Označme $V_j(a_j,b_j,\xi_j) = \frac{e^{-2\pi i b_j \xi_j} - e^{-2\pi i a_j \xi_j}}{\xi_j}$ pro $j = 1, 2$. Rovnost (2.5) přejde do tvaru

$$\hat{1}_R(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^2} V_1(a_1,b_1,\xi_1) V_2(a_2,b_2,\xi_2). \tag{2.6}$$

Pro výraz V_k platí

$$V_k(a_k, b_k, \xi_k) = \frac{e^{-2\pi i a_k \xi_k}}{\xi_k} \cdot \left(e^{-2\pi i(b_k - a_k)\xi_k} - 1\right) = 0.$$

Tudíž pravá strana rovnosti (2.6) je rovna nule a $\hat{1}_R(\xi) = 0$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Volbou $\xi = (1,1)$ v (ii) dostáváme $\hat{1}_R(1,1) = 0$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Nechť $\hat{1}_R(1, 1) = 0$. Dosazením $\xi = (1,1)$ v rovnosti (2.6) dostáváme

$$0 = \frac{1}{(-2\pi i)^2} V_1(a_1,b_1,1) V_2(a_2,b_2,1). \tag{2.7}$$

Tedy existuje $k \in \{1,2\}$ splňující $V_k(a_k,b_k,1) = 0$. Výraz V_k vyjádříme v tvaru

$$e^{-2\pi i a_k} \cdot \left(e^{-2\pi i(b_k - a_k)} - 1\right).$$

Exponenciální funkce nikdy nenabývá nuly, proto z definice výrazu V_k plyne $e^{-2\pi i(b_k-a_k)} - 1 = 0$. Z lemmatu 1 plyne, že pro $z \in \mathbb{C}$ platí $e^{-2\pi iz} - 1 = 0$ právě tehdy, když $z \in \mathbb{Z}$. Tedy dostáváme $(b_k - a_k) \in \mathbb{Z}$.

Dokázali jsme, že $\hat{1}_R(1,1) = 0$ implikuje $(b_k - a_k) \in \mathbb{Z}$ pro nějaké $k = 1, 2$. Obdélník R je tedy pěkný. □

Nyní, když máme charakterizované pěkné obdélníky, můžeme uvést a dokázat hlavní větu této kapitoly, která je převzata z článku de Bruijn (1969).

Věta 6. *Nechť R je obdélník a $\{R_1, \ldots, R_n\}$ je dláždění R. Pokud R_i je pěkný obdélník pro $i = 1, \ldots, n$, pak R je pěkný.*

Důkaz. Definujme $f(x) = e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}$, $\xi \in \mathbb{R}^2$. Podle lemmatu 4 funkce f splňuje

$$\hat{1}_R(\xi) = \int_R f d\lambda_2 = \sum_{i=1}^{n} \int_{R_i} f d\lambda_2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{1}_{R_i}(\xi). \tag{2.8}$$

Předpoklad je splněn, protože obdélníky R_i jsou konvexní a kompaktní množiny.

Předpokládáme, že pro každé $i \in \{1 \ldots n\}$ je R_i pěkný obdélník. Podle implikace (i) $\Rightarrow$ (iii) v tvrzení 5 platí $\hat{1}_{R_i}(1,1) = 0$. Z rovnosti (2.8) plyne $\hat{1}_R(\xi) = 0$. S využitím implikace (iii)$\Rightarrow$(i) v tvrzení 5 dostáváme, že R je pěkný obdélník. □

3. Dláždění vícerozměrného intervalu

V následujícím tvrzení vypočteme Fourierovu transformaci vícerozměrného uzavřeného intervalu.

Tvrzení 7. *Nechť $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ je uzavřený interval v $\mathbb{R}^d$. Fourierova transformace I splňuje*

$$\hat{1}_I(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{-2\pi i b_j \xi_j} - e^{-2\pi i a_j \xi_j}}{\xi_j},$$

kde $\xi \in \mathbb{R}^d$ je takové, že $\xi_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle d. Uvažme případ $d = 1$. Platí

$$\begin{aligned} \hat{1}_I(\xi_1) &= \int_{\mathbb{R}} 1_I \cdot e^{-2\pi i x_1 \xi_1} dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} e^{-2\pi i x_1 \xi_1} dx_1 \\ &= \left[\frac{e^{-2\pi i x_1 \xi_1}}{-2\pi i \xi_1} \right]_{a_1}^{b_1} = \frac{1}{(-2\pi i)} \frac{e^{-2\pi i b_1 \xi_1} - e^{-2\pi i a_1 \xi_1}}{\xi_1}, \end{aligned}$$

kde v předposledním kroku jsme využili $\xi_1 \neq 0$. Nyní provedeme indukční krok. Předpokládáme, že tvrzení platí pro $d - 1$ a dokážeme ho pro d.

Zavedeme značení $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] = I' \times [a_d, b_d]$, kde I' je $(d-1)$-rozměrný interval. Podobně $x = (x', x_d)$ a $\xi = (\xi', \xi_d)$, kde ξ' a x' jsou vektory z $\mathbb{R}^{d-1}$. Skalární součin pak vyjádříme jako

$$\langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j \xi_j = \sum_{j=1}^{d-1} x_j \xi_j + x_d \xi_d = \langle x', \xi' \rangle + x_d \xi_d.$$

Fourierovu transformaci I píšeme ve tvaru

$$\int_I e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\lambda_d(x) = \int_{I' \times [a_d, b_d]} e^{-2\pi i (\langle x', \xi' \rangle + x_d \xi_d)} d\lambda_d(x),$$

Po aplikaci Fubiniho věty dostaneme, že poslední integrál je roven

$$\int_{I'} \int_{[a_d, b_d]} e^{-2\pi i (\langle x', \xi' \rangle + x_d \xi_d)} d\lambda_1(x_d) d\lambda_{d-1}(x')$$

Protože skalární součin $\langle x', \xi' \rangle$ nezávisí na x_d, lze předchozí výraz rozdělit na součin dvou integrálů

$$\int_{I'} e^{-2\pi i \langle x', \xi' \rangle} d\lambda_{d-1}(x') \cdot \int_{[a_d, b_d]} e^{-2\pi i x_d \xi_d} d\lambda_1(x_d). \tag{3.1}$$

Podle případu $d = 1$ je

$$\int_{[a_d, b_d]} e^{-2\pi i x_d \xi_d} d\lambda_1(x_d) = \frac{1}{(-2\pi i)} \frac{e^{-2\pi i b_d \xi_d} - e^{-2\pi i a_d \xi_d}}{\xi_1}. \tag{3.2}$$

Podle indukčního předpokladu je

$$\int_{I'} e^{-2\pi i\langle x',\xi'\rangle} d\lambda_{d-1}(x') = \frac{1}{(-2\pi i)^d} \prod_{j=1}^{d-1} \frac{e^{-2\pi i b_j \xi_j} - e^{-2\pi i a_j \xi_j}}{\xi_j}. \tag{3.3}$$

Dosazením (3.2) a (3.3) do (3.1) je důkaz dokončen. □

Nyní rozšíříme pojem *pěkný obdélník* do více dimenzí.

Definice. Uzavřený interval $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$ nazveme *pěkný*, pokud $b_j - a_j \in \mathbb{Z}$ pro alespoň jedno $j \in \{1, \ldots, d\}$.

V následujícím tvrzení charakterizujeme pěkné intervaly pomocí Fourierovy transformace.

Tvrzení 8. *Nechť $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ je uzavřený interval v $\mathbb{R}^d$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

i) Interval I je pěkný.

ii) Fourierova transformace I splňuje $\hat{1}_I(\xi) = 0$, kde $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)$ je libovolný vektor takový, že $\xi_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ pro $j = 1, \ldots, d$.

iii) Platí $\hat{1}_I(1, 1, \ldots, 1) = 0$.

Důkaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Nechť I je pěkný, pak podle definice existuje $k \in \{1, \ldots, d\}$ takové, že $b_k - a_k$ je celé číslo. Podle tvrzení 7 je

$$\hat{1}_I(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^d} \prod_{j=1}^{d} V_j(a_j, b_j, \xi_j),$$

kde

$$V_j(a_j, b_j, \xi_j) = \frac{e^{-2\pi i b_j \xi_j} - e^{-2\pi i a_j \xi_j}}{\xi_j}.$$

Pro výraz V_k platí

$$V_k(a_k, b_k, \xi_k) = \frac{e^{-2\pi i a_k \xi_k}}{\xi_k} \cdot \left(e^{-2\pi i (b_k - a_k)\xi_k} - 1\right) = 0.$$

Z toho dostáváme $\hat{1}_I(\xi) = 0$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ V (ii) položme $\xi = (1,1,\ldots,1)$. Pak $\hat{1}_I(1,1,\ldots,1) = 0$, což jsme chtěli dokázat.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Nechť $\hat{1}_I(1,1,\ldots,1) = 0$. Dosazením vektoru $\xi = (1,1,\ldots,1)$ do vzorce pro Fourierovu transformaci 1 v tvrzení 7 získáváme

$$\hat{1}_I(1,1,\ldots,1) = \frac{1}{(-2\pi i)^d} \prod_{j=1}^{d} V_j(a_j, b_j) = 0, \tag{3.4}$$

kde

$$V_j(a_j, b_j) = e^{-2\pi i b_j} - e^{-2\pi i a_j} = e^{-2\pi i a_j} \cdot \left(e^{-2\pi i (b_j - a_j)} - 1\right).$$

Existuje $k \in \{1, \ldots, n\}$ splňující $V_k(a_k, b_k) = 0$ díky (3.4). Pak $e^{-2\pi i (b_k - a_k)} - 1 = 0$, nebo ekvivalentně $e^{-2\pi i (b_k - a_k)} = 1$ a podle lemmatu 1 je $(b_k - a_k)$ celé číslo. Dle definice pěkného intervalu je I pěkný. □

Docházíme k hlavní větě této práce, jež je převzata z článku de Bruijn (1969).

Věta 9. *(Hlavní věta) Nechť I je interval v $\mathbb{R}^d$ a $\{I_1, \dots, I_n\}$ je dláždění I. Pokud I_i je pěkný pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, pak I je pěkný.*

Důkaz. Definujme $f(x) = e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. Podle lemmatu 4 funkce f splňuje

$$\hat{1}_I(\xi) = \int_I f d\lambda_d = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} f d\lambda_d = \sum_{i=1}^{n} \hat{1}_{I_i}(\xi). \tag{3.5}$$

Předpoklad je splněn, protože intervaly I_i jsou omezené a uzavřené podmnožiny $\mathbb{R}^d$, tedy jsou kompaktními a konvexními množinami.

Předpokládáme, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je I_i pěkný interval. Podle implikace (i) $\Rightarrow$ (iii) v tvrzení 8 platí $\hat{1}_{I_i}(1,1,\dots,1) = 0$. Z rovnosti (3.5) plyne $\hat{1}_I(\xi) = 0$. S využitím implikace (iii)$\Rightarrow$(i) v tvrzení 8 dostáváme, že I je pěkný interval. $\square$

4. Důsledky hlavní věty a harmonické intervaly

4.1 Zavedení pojmů

Definice. Nechť $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ a $J = [a'_1, b'_1] \times [a'_2, b'_2] \times \ldots \times [a'_d, b'_d]$ jsou uzavřené intervaly v $\mathbb{R}^d$. Interval J nazveme *kopií* intervalu I, jestliže existuje permutace π množiny indexů $\{1, 2, \ldots, d\}$ taková, že platí

$$b'_{\pi(i)} - a'_{\pi(i)} = b_i - a_i$$

pro každé $i = 1, \ldots, d$.

Definice. Nechť $I = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_d,b_d]$ je interval v $\mathbb{R}^d$ a $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Pak definujeme množinu tI předpisem $tI = \{tx \mid x \in I\} = [ta_1,tb_1] \times \cdots \times [ta_d,tb_d]$.

Definice. Nechť $I = [A_1,B_1] \times \cdots \times [A_d,B_d]$, $I_0 = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_d,b_d]$ jsou intervaly v $\mathbb{R}^d$. Řekneme, že interval I je *násobkem* intervalu I_0, pokud existují celá čísla $k_1, \ldots, k_d$ a permutace π množiny $\{1, \ldots, d\}$ splňující

$$B_{\pi(j)} - A_{\pi(j)} = k_j(b_j - a_j)$$

pro $j = 1, \ldots, d$.

Definice. Uzavřený interval $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$ nazveme *harmonický*, pokud existuje permutace π a posloupnost celých čísel $\{k_i\}_{i=1}^{d-1}$ splňující

$$b_{\pi(j+1)} - a_{\pi(j+1)} = k_j(b_{\pi(j)} - a_{\pi(j)})$$

pro $j = 1, \ldots, d - 1$.

4.2 Harmonické intervaly

Tvrzení 10. *Nechť $I = [A_1, B_1] \times \cdots \times [A_d, B_d]$ a $I_0 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ jsou uzavřené intervaly v $\mathbb{R}^d$. Předpokládejme, že existuje dláždění $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ intervalu I kopiemi intervalu I_0. Potom pro každý index i existuje index j takový, že $B_j - A_j$ je celočíselným násobkem $b_i - a_i$.*

Důkaz. Fixujeme $i \in \{1, \ldots, n\}$ a označíme $c = b_i - a_i$. Pak definujeme intervaly $I'_0 = \frac{1}{c} I_0$ a $I' = \frac{1}{c} I$. Tvrdíme, že množina $\{I'_1, \ldots, I'_n\}$, kde $I'_j = \frac{1}{c} I_j$ pro $j = 1, \ldots, n$ je dlážděním I'. Ověříme předpoklady z definice dláždění.

i) Interval I' je sjednocením intervalů I'_i: $I' = \{\frac{x}{c} | \ x \in I\} = \{\frac{x}{c} | \ x \in \bigcup_{i=1}^n I_i\} = \bigcup_{i=1}^n \{\frac{x}{c} | \ x \in I_i\} = \bigcup_{i=1}^n I'_i$.

ii) Vnitřky intervalů I'_i a I'_j jsou disjunktní:

$$\begin{aligned} \operatorname{int} I'_i \cap \operatorname{int} I'_j &= \left(\frac{1}{c} \operatorname{int} I_i\right) \cap \left(\frac{1}{c} \operatorname{int} I_j\right) = \left\{\frac{x}{c} | \ x \in \operatorname{int} I_i\right\} \cap \left\{\frac{y}{c} | \ y \in \operatorname{int} I_j\right\} \\ &= \left\{\frac{z}{c} | \ z \in \operatorname{int} I_i \cap \operatorname{int} I_j\right\} = \frac{1}{c}(\operatorname{int} I_i \cap \operatorname{int} I_j) = \emptyset. \end{aligned}$$

Tím jsou předpoklady ověřeny. Interval I'_0 je pěkný, protože $\frac{1}{c}(a_i - b_i) = 1$ je celé číslo. Jeho kopie $I'_1, \dots, I'_n$ jsou také pěkné intervaly. Podle věty 9 je I' pěkný interval, tudíž jedna jeho hrana je celočíselná. Tedy existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ splňující $\frac{1}{c}(B_j - A_j) = k$, $k \in \mathbb{Z}$ a tím dostáváme $B_j - A_j = k(a_i - b_i)$. $\square$

Poznámka. Za předpokadů tvrzení 10 nemusí platit, že interval I je násobkem intervalu I_0. Tedy index j může být stejný pro různá i, jak ukazují následující příklady.

Příklad 1. Buď $I = [0,5] \times [0,6]$ a $I_0 = [0,2] \times [0,3]$. Podle výše uvedené definice I není násobkem intervalu I_0, neboť hrana délky 5 není celočíselným násobkem 2 ani 3. Přitom existuje dláždění I kopiemi intervalu I_0. Označme

$$\mathcal{S} = \{[0,2] \times [0,3], [0,2] \times [3,6], [2,5] \times [0,2], [2,5] \times [2,4], [2,5] \times [4,6]\}.$$

Potom každý prvek množiny $\mathcal{S}$ je kopií intervalu I_0, $\bigcup_{J \in \mathcal{S}} J = I$ a navíc pro každé dva různé prvky množiny $\mathcal{S}$ platí, že průnik jejich vnitřků je prázdný. Tedy $\mathcal{S}$ je hledaným dlážděním.

Příklad 2. Buď $I = [0,7] \times [0,11] \times [0,30]$ a $I_0 = [0,2] \times [0,3] \times [0,5]$. Pak I není násobkem intervalu I_0, ale hrana $[0,30]$ je násobkem všech hran intervalu I_0.

Hrana délky 7 není celočíselným násobkem 2, 3 ani 5, tudíž I není násobkem intervalu I_0. Pro $f \neq 0$ definujme $J([a,b],[c,d],e) = [a,b] \times [c,d] \times [(1-e)\frac{30}{f}, e\frac{30}{f}]$, kde $f = 10 - (b-a) - (d-c)$. Pak

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \{&J([0,5],[0,2],e_1), J([0,5],[2,5],e_2), J([0,5],[5,8],e_2), J([0,5],[8,11],e_2),\\ &J([5,7],[0,5],e_1), J([5,7],[5,8],e_3), J([5,7],[8,11],e_3) \mid e_1 \in \{1,\dots,10\},\\ &e_2 \in \{1,\dots,15\}, e_3 \in \{1,\dots,6\}\}\end{aligned}$$

je systém třídimenzionálních intervalů, každý z nich je kopií intervalu I_0. Systém $\mathcal{S}$ tvoří pokrytí intervalu I. Přitom průnikem vnitřků libovolných dvou různých prvků z $\mathcal{S}$ je prázdná množina, tedy $\mathcal{S}$ je hledané dláždění intervalu I.

Přidáním předpokladu, že interval I_0 je harmonický, dostaneme silnější závěr.

Tvrzení 11. *Nechť $I = [A_1, B_1] \times \cdots \times [A_d, B_d]$ a $I_0 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ jsou uzavřené intervaly v $\mathbb{R}^d$. Předpokládejme, že interval I_0 je harmonický a existuje dláždění $\{I_1, \dots, I_n\}$ intervalu I kopiemi I_0. Pak I je násobkem intervalu I_0.*

Před samotným důkazem si dokážeme několik dílčích lemmat, která jej zpřehlední.

Lemma 12. *Nechť $I = [A_1, B_1] \times \ldots \times [A_d, B_d] = I' \times [A_d, B_d]$ a $I_0 = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$ jsou uzavřené intervaly v $\mathbb{R}^d$, kde I' je $(d-1)$-rozměrný uzavřený interval. Předpokládejme, že existuje dláždění $CC = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ intervalu I kopiemi intervalu I_0. Označme $\mathcal{C}' = \{J \in \mathcal{C} \mid J \cap (I' \times \{A_d\}) \neq \emptyset\} = \{J_1, \dots, J_k\}$. Pro každé $i = 1, \dots, k$ pišme J_i ve tvaru $J'_i \times [A_d, e_i]$, kde $e_i \in [A_d, B_d]$. Potom $\mathcal{D} = \{J'_1, \dots, J'_k\}$ je dlážděním intervalu I'.*

Důkaz. i) $\mathcal{D}$ je pokrytím I'. Buď $x' \in I'$ a uvažme $x = (x', A_d) \in I' \times [A_d, B_d] = I$. Protože $\mathcal{C}$ je dle předpokladu pokrytím intervalu I, existuje $j \in \{1 \dots n\}$, pro které $x \in I_j$. Dále $x' \in I'$, tedy existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že $x \in J_i = J'_i \times [A_d, e_i]$. Tudíž $(x', A_d) = (y', A_d)$ pro nějaké $y' \in J'_i$. Tím dostáváme $x' = y' \in J'_i$. Protože x' byl libovolný prvek intervalu I', je tvrzení dokázané.

ii) Označme $A'_{ij} = (\text{int } J'_i) \cap (\text{int } J'_j)$. Ukážeme, že pak $A'_{ij} = \emptyset$ pro každé $i,j \in \{1,\ldots,k\}, i \neq j$. Pro spor předpokládejme existenci prvku $x \in A'_{ij}$ pro nějaké i,j. Pak bod $x = (x',x_d)$, kde $x_d \in (A_i,e_i) \cap (A_j,e_j)$, náleží $(\text{int } J_i) \cap (\text{int } J_j)$. Protože J_i,J_j jsou prvky $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, docházíme ke sporu s předpokladem, že $\mathcal{C}$ je dláždění intervalu I.

□

Lemma 13. *Buďte $I_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ a $I_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ uzavřené intervaly. Dále buďte*

$$\mathcal{S}_1 = \{J_1, \ldots, J_{n_1}\}, \mathcal{S}_2 = \{K_1, \ldots, K_{n_2}\}$$

dláždění intervalů I_1, I_2. Potom

$$\mathcal{D} = \{J_j \times K_k \mid j = 1, \ldots, n_1; k = 1, \ldots, n_2\}$$

je dlážděním intervalu $I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$.

Důkaz. 1. $\mathcal{D}$ je pokrytím $I_1 \times I_2$. Buď $x \in I_1 \times I_2$ libovolný. Uvažme projekce bodu x na intervaly I_1, I_2. Pak lze x vyjádřit jednoznačně ve tvaru $x = (x_1,x_2)$, kde $x_1 \in I_1$ a $x_2 \in I_2$. Tedy existuje nějaké $i = 1, \ldots, n_1$ a nějaké $k = 1, \ldots, n_2$ takové, že $(x_1,x_2) \in (J_i \times K_k) \in \mathcal{D}$. Množina $\mathcal{D}$ je tudíž pokrytím $I_1 \times I_2$.

2. Buďte $(j_1,k_1),(j_2,k_2)$ dvě různé dvojice z

$$M = \{(m_1,m_2) \mid m_1 = 1, \ldots, n_1; m_2 = 1, \ldots, n_2\}.$$

Označme $A = \text{int}(J_{j_1} \times K_{k_1}) \cap \text{int}(J_{j_2} \times K_{k_2})$. Ukážeme, že pak platí $A = \emptyset$.

Tvrzení dokážeme sporem. Nechť existuje $x \in A$. Pak lze psát $x = (x_1,x_2) \in I_1 \times I_2$. Upravíme A do tvaru

$$A = \text{int}(J_{j_1} \times K_{k_1}) \cap \text{int}(J_{j_2} \times K_{k_2}) = (\text{int } J_{j_1} \times \text{int } K_{k_1}) \cap (\text{int } J_{j_2} \times \text{int } K_{k_2}).$$

Protože $(j_1,k_1),(j_2,k_2)$ jsou různé dvojice, platí $j_1 \neq j_2$ nebo $k_1 \neq k_2$. V prvním případě $x_1 \in \text{int } J_{j_1} \cap \text{int } J_{j_2} = \emptyset$, neboť $\mathcal{S}_1$ je dláždění. V druhém případě $x_2 \in \text{int } K_{k_1} \cap \text{int } K_{k_2} = \emptyset$, neboť $\mathcal{S}_2$ je dláždění. V obou případech docházíme ke sporu.

□

Lemma 14. *Nechť $I = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_d,b_d]$ je uzavřený interval v $\mathbb{R}^d$ a předpokládejme, že pro každé $i = 1, \ldots, d-1$ existuje $k_i \in \mathbb{Z}$ splňující $b_{i+1} - a_{i+1} = k_i(b_i - a_i)$. Buď $j \in \{1, \ldots, d\}$ pevné. Definujeme uzavřený interval J v $\mathbb{R}^{d-1}$ předpisem*

$$J = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_{j-1},b_{j-1}] \times [a_{j+1},b_{j+1}] \times \cdots \times [a_d,b_d].$$

Označme $I_0 = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_{d-1},b_{d-1}]$. Potom

i) J je harmonický interval v $\mathbb{R}^{d-1}$,

ii) existuje dláždění intervalu J kopiemi intervalu I_0.

Důkaz. i) Podle předpokladů existuje pro každé $i = 1, \dots, d-1$ celé číslo k_i splňující $(b_{i+1} - a_{i+1}) = k_i(b_i - a_i)$. Tato rovnost speciálně platí pro $i \in \{1, \dots, j-2, j+1, \dots, d-1\}$. Navíc získáváme

$$(b_{j+1} - a_{j+1}) = k_j(b_j - a_j) = k_j k_{j-1}(b_{j-1} - a_{j-1}),$$

tedy interval J je harmonický.

ii) Označme $J_0 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{j-1}, b_{j-1}]$. Stačí dokázat, že interval $J_k = J_0 \times [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \cdots \times [a_{j+k}, b_{j+k}]$ lze vydláždit kopiemi $I_k = J_0 \times [a_j, b_j] \times \cdots \times [a_{j+k-1}, b_{j+k-1}]$ pro každé $k \in \{1, \dots, d-j\}$, neboť původní tvrzení je jen speciální případ, kdy $k = d - j$.

Tvrzení dokážeme matematickou indukcí podle k. Nejprve uvažujme $k = 1$. Víme $(b_{j+1} - a_{j+1}) = k_j(b_j - a_j)$ pro nějaké celé číslo k_j. Definujme

$$I_{1,l} = J_0 \times [a_{j+1} + l(b_j - a_j), a_{j+1} + (l+1)(b_j - a_j)]$$

pro $l = 0, \dots, k_j - 1$. Pak systém intervalů $\{I_{1,l}\}_{l=0}^{k_j-1}$ je pokrytím J_1. Dále $(\operatorname{int} I_{1,l_1}) \cap (\operatorname{int} I_{1,l_2}) = \emptyset$ pro každé $l_1, l_2 \in \{0, \dots, k_j - 1\}, l_1 \neq l_2$, neboť vnitřky intervalů $[a_{j+1} + l(b_j - a_j), a_{j+1} + (l+1)(b_j - a_j)]$ jsou disjunktní pro každé l. Dostáváme, že $\{I_{1,l}\}_0^{k_j-1}$ je dlážděním J_1. Protože $(a_{j+1} + (l+1)(b_j - a_j)) - (a_{j+1} + l(b_j - a_j)) = (b_j - a_j)$ pro každé $l = 0 \dots k_j - 1$ a ve zbývajících $j - 1$ rozměrech se intervaly $I_{1,l}$ a interval I_1 shodují, intervaly $I_{1,l}$ jsou kopiemi intervalu I_1. Tedy podle lemmatu 13 $\{I_{1,l}\}_{l=0}^{k_j-1}$ je dláždění kopiemi intervalu I_1.

Nyní provedeme indukční krok. Předpokládáme platnost tvrzení pro $k < d - j$. Dokážeme ho pro $k+1$. Nechť existuje dláždění intervalu J_k kopiemi I_k. Buď $\{J_{k,i}\}_{i=1}^n$ tímto dlážděním. Protože existuje m celé, pro které $(b_{j+k+1} - a_{j+k+1}) = m(b_{j+k} - a_{j+k})$, můžeme psát

$$[a_{j+k+1}, b_{j+k+1}] = \bigcup_{l=0}^{m-1} [a_{j+k+1} + l(b_{j+k} - a_{j+k}), a_{j+k+1} + (l+1)(b_{j+k} - a_{j+k})].$$

Jedná se o pokrytí intervalu $[a_{j+k+1}, b_{j+k+1}]$. Dosazením do definice intervalu J_{k+1} a s využitím indukčního předpokladu dostáváme

$$J_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{l=0}^{m-1} I_{k,l},$$

kde

$$I_{k,l} = J_{k,i} \times [a_{j+k+1} + l(b_{j+k} - a_{j+k}), a_{j+k+1} + (l+1)(b_{j+k} - a_{j+k})].$$

Buď $\mathcal{D}$ množina intervalů $I_{k,l}$ pro $l = 0, \dots, m-1$ v rovnosti výše. Z lemmatu 13 dostáváme, že $\mathcal{D}$ je dlážděním intervalu J_{k+1}. Protože $\mathcal{D}$ je množina kopií I_{k+1}, zkonstruovali jsme dláždění intervalu J_{k+1} kopiemi I_{k+1}.

$\square$

Lemma 15. *Nechť $I = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_d,b_d]$ je uzavřený harmonický interval v $\mathbb{R}^d$, tedy existuje permutace π splňující $b_{\pi(i+1)} - a_{\pi(i+1)} = k_i(b_{\pi(i)} - a_{\pi(i)})$, kde $k_i \in \mathbb{Z}$ pro každé $i = 1, \dots ,d-1$. Definujeme uzavřený interval J v $\mathbb{R}^{d-1}$ předpisem*

$$J = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_{j-1},b_{j-1}] \times [a_{j+1},b_{j+1}] \times \cdots \times [a_d,b_d]$$

jako v lemmatu 14. Potom J je harmonický interval. Dále označme

$$I_0 = [a_{\pi(1)},b_{\pi(1)}] \times \cdots \times [a_{\pi(d-1)},b_{\pi(d-1)}].$$

Pak existuje dláždění intervalu J kopiemi intervalu I_0.

Důkaz. Definujeme interval $I' = [a_{\pi(1)},b_{\pi(1)}] \times \cdots \times [a_{\pi(d)},b_{\pi(d)}]$, tedy I' je kopií intervalu I. Označme $k = \pi^{-1}(j)$. Dosazením I' do lemmatu 14 získáváme interval

$$J' = [a_{\pi(1)},b_{\pi(1)}] \times \cdots \times [a_{\pi(k-1)},b_{\pi(k-1)}] \times [a_{\pi(k+1)},b_{\pi(k+1)}] \times \cdots \times [a_{\pi(d)},b_{\pi(d)}],$$

který je harmonický. Protože J je kopií J', interval J je také harmonický. Dále podle lemmatu 14 existuje dláždění intervalu J' kopiemi I_0. Protože J je kopií J', existuje také dláždění intervalu J kopiemi I_0.

□

Nyní jsme připraveni dokázat tvrzení 11.

Důkaz tvrzení 11. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle d. Pro $d = 1$ máme $I = [A_1, B_1]$, $I_0 = [a_1, b_1]$ a podle tvrzení 10 je $B_1 - A_1$ celočíselným násobkem $b_1 - a_1$, tedy I je násobkem I_0. Nechť tvrzení platí pro $d-1$. Dokážeme ho pro d.

Interval I_0 je harmonický, tedy existuje permutace π splňující $b_{\pi(i+1)} - a_{\pi(i+1)} = k_i(b_{\pi(i)} - a_{\pi(i)})$, kde $k_i \in \mathbb{Z}$ pro každé $i = 1, \dots ,d-1$. Definujme

$$J_0 = [a_{\pi(1)},b_{\pi(1)}] \times \cdots \times [a_{\pi(d)},b_{\pi(d)}].$$

Podle tvrzení 10 existuje $j \in \{1, \dots ,d\}$, pro které $(B_j - A_j) = m(b_{\pi(d)} - a_{\pi(d)})$, kde m je celé. Fixujme dané číslo j. Bez újmy na obecnosti $j = d$.

Zavedeme značení $I = I' \times [A_d,B_d]$ a $J_0 = J'_0 \times [a_{\pi(d)},b_{\pi(d)}]$, kde I' a J'_0 jsou $(d-1)$-rozměrné uzavřené intervaly.

Buď K množina indexů definovaná jako $K = \{i \in \{1 \dots n\} \mid I_i \cap (I' \times \{A_d\}) \neq \emptyset\}$. Definujme $J_k := I_k$ pro každé $k \in K$. Pak můžeme zavést značení $J_k = J'_k \times [A_d,e_k]$, kde $e_k \in [A_d,B_d]$.

Podle lemmatu 12 je $\{J'_k \mid k \in K\}$ dlážděním intervalu I'. Dále pro každé $k \in K$ podle lemmatu 15 je J'_k harmonický interval a navíc existuje množina $\mathcal{S}_k$ kopií J'_0, která je dlážděním J'_k. Pak $\bigcup_{k \in K} \mathcal{S}_k$ je dláždění I' kopiemi J'_0.

Interval J'_0 je harmonický a zároveň J'_0, I' jsou podmnožiny $\mathbb{R}^{d-1}$, tedy podle indukčního předpokladu je I' násobkem J'_0. Protože $(B_d - A_d) = m(b_{\pi(d)} - a_{\pi(d)})$, I je násobkem J_0, tedy i I_0, neboť J_0 je kopií I_0. □

Pokud by interval I_0 nebyl harmonický, interval I už nemusí být násobkem I_0, o čemž nás přesvědčí následující tvrzení.

Tvrzení 16. *Buď $I_0 = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_d,b_d]$ uzavřený interval v $\mathbb{R}^d$, který* není harmonický*. Předpokládejme, že pro každé i platí $c_i = b_i - a_i \in \mathbb{Z}$. Pak existuje uzavřený interval $I \subset \mathbb{R}^d$, pro který existuje dláždění kopiemi I_0, ale přitom I není násobkem I_0.*

Dříve, než tvrzení dokážeme, si uvedeme pomocné lemma.

Lemma 17. *Nechť interval* $I_0 = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2] \subset \mathbb{R}^2$ *není harmonický. Označme* $c_i = b_i - a_i$ *pro* $i \in \{1,2\}$*. Předpokládejme, že* c_1 *a* c_2 *jsou celá čísla. Pak* $I \subset \mathbb{R}^2$ *o rozměrech* $(c_1 + c_2) \times (c_1c_2)$ *lze vydláždit kopiemi* I_0*, ale není násobkem* I_0*.*

Důkaz. Podíly $\frac{c_1}{c_2},\frac{c_2}{c_1}$ jsou neceločíselné, neboť I_0 není harmonický. Tudíž podíly $\frac{c_1+c_2}{c_2},\frac{c_1+c_2}{c_1}$ nemohou být celočíselné, tedy I není násobkem I_0. Ovšem dláždění kopiemi I_0 existuje. Interval I lze rozdělit na dva podintervaly $I_1,I_2 \subset \mathbb{R}^2$ o rozměrech $(c_1)\times(c_1c_2)$, $(c_2)\times(c_1c_2)$, jejichž sjednocením získáme I, ale jejich vnitřky jsou disjunktní. Nejprve vydláždíme I_1. Označme $I_1 = [A_1, A_1 + c_1] \times [A_2, A_2 + c_1c_2]$, kde $A_1 = a_1$ a $A_2 = b_1$. Pak

$$\mathcal{S} = \{I_{1,l} \mid l = 1,\dots,c_1\},$$

kde $I_{1,l} = [A_1, A_1 + c_1] \times [A_2 + (l-1)c_2, A_2 + lc_2]$, je systém intervalů, jejichž sjednocením je interval I_1. Navíc pro každé dva intervaly z $\mathcal{S}$ platí, že průnik jejich vnitřků je prázdný. Tedy systém $\mathcal{S}$ je dláždění. Protože rozměry intervalů $I_{1,l}$ a I_0 se shodují, prvky systému $\mathcal{S}$ jsou kopiemi I_0. Zkonstruovali jsme hledané dláždění. Dále označme $I_2 = [A_1, A_1 + c_2] \times [A_2, A_2 + c_1c_2]$, kde $A_1 = a_1 + c_1$ a $A_2 = b_1$. Pak

$$\mathcal{S}' = \{I_{2,l} \mid l = 1,\dots,c_2\},$$

kde $I_{2,l} = [A_1, A_1 + c_1] \times [A_2 + (l-1)c_1, A_2 + lc_1]$, je systém intervalů, jejichž sjednocením je interval I_2. Navíc pro každé dva intervaly z $\mathcal{S}'$ platí, že průnik jejich vnitřků je prázdný. Tedy systém $\mathcal{S}'$ je dláždění. Protože rozměry intervalů $I_{2,l}$ a I_0 se shodují, prvky systému $\mathcal{S}'$ jsou kopiemi I_0. Zkonstruovali jsme hledané dláždění. □

Důkaz tvrzení 16. Pro $d = 1$ je každý uzavřený interval v $\mathbb{R}^d$ harmonický. Pro $d = 2$ tvrzení platí podle lemmatu 17. Předpokládáme, že tvrzení platí pro $d = 2$ a dokážeme ho pro libovolné $d > 2$.

Definujme $c_i = b_i - a_i$ pro všechna $i \in \{1,\dots,d\}$. Bez újmy na obecnosti uvažujme $c_i \le c_{i+1}$ pro $i = 1,\dots,d-1$. Existuje $k \in \{2,\dots,d\}$ splňující $\frac{c_k}{c_{k-1}} \notin \mathbb{Z}$, protože I_0 není harmonický. Nechť k je největší takové. Uvažme interval

$$I = [0,c_1] \times \cdots \times [0,c_{k-2}] \times [0,c_{k-1} + c_k] \times [0,c_{k-1}c_k] \times [0,c_{k+1}] \times \cdots \times [0,c_d] \subset \mathbb{R}^d$$

o rozměrech

$$c_1 \times \cdots \times c_{k-2} \times (c_{k-1} + c_k) \times (c_{k-1}c_k) \times c_{k+1} \times \cdots \times c_d.$$

Označme j nejmenší index splňující $c_j = c_{k-1}$. Tvrdíme, že žádné z čísel

$$c_1,\dots,c_{j-1},c_{k-1} + c_k$$

není celočíselným násobkem žádného z čísel $c_j,\dots,c_d$.

a) Uvažujme čísla $c_j,\dots,c_{k-1}$. Ta splňují $c_j = c_{j+1} = \cdots = c_{k-1}$. Pak ani jedno z čísel $c_1,\dots,c_{j-1},c_{k-1} + c_k$ není dělitelné c_{k-1}.
Odůvodnění. Víme, že c_{k-1} nedělí c_k, tedy ani $c_{k-1} + c_k$. Dále čísla $c_1,\dots,c_{j-1}$ jsou ostře menší než c_{k-1}, tedy nejsou dělitelná c_{k-1}.

b) Uvažujme $c_k,\dots,c_d$. Protože k je největší číslo splňující $\frac{c_k}{c_{k-1}} \notin \mathbb{Z}$, platí

$$c_k \mid c_{k+1} \mid \cdots \mid c_d.$$

Protože $c_{k-1} < c_k$, c_k nedělí $c_{k-1} + c_k$ a tedy ani žádný násobek c_k nedělí $c_{k-1} + c_k$. Dále

$$c_1 \le \cdots \le c_{j-1} < c_k \le \cdots \le c_d,$$

tudíž čísla $c_1,\dots,c_{j-1}$ nemůžou být násobkem žádného z čísel $c_k,\dots,c_d$.

Pokud nějaký interval $J = [A_1,B_1] \times \cdots \times [A_d,B_d]$ je násobkem I_0, pak existuje nejvýše $j-1$ indexů i takových, že $B_i - A_i$ není celočíselným násobkem žádného z čísel $c_j,\dots,c_d$. Kdyby existovalo alespoň j takových indexů i, pak by nejvýše $d-j$ indexů i splňovalo, že $B_i - A_i$ je násobkem některého z $d-j+1$ čísel $c_j,\dots,c_d$. Tudíž by pro alespoň jedno z čísel $c_j,\dots,c_d$ neexistoval násobek tvaru $B_i - A_i$ pro nějaký index i. Tedy J není násobkem I_0, čímž docházíme ke sporu.

V našem případě j čísel $c_1,\dots,c_{j-1},c_{k-1}+c_k$ splňuje, že není násobkem žádného z čísel $c_j,\dots,c_d$. Tedy interval I není násobkem I_0. Zbývá ukázat existenci netriviálního dláždění I kopiemi I_0.

Označme $J_0 = [0,c_{k-1}] \times [0,c_k]$. Buď $\{J_1,\dots,J_n\}$ dláždění intervalu $J = [0,c_{k-1}+c_k] \times [0,c_{k-1}c_k]$ kopiemi J_0. Definujme

$$I_i = [0,c_1] \times \cdots \times [0,c_{k-2}] \times J_i \times [0,c_{k+1}] \times \cdots \times [0,c_d].$$

Potom $\{I_1,\dots,I_n\}$ je dláždění I. □

Poznámka. Bez předpokladu $c_i = b_i - a_i \in \mathbb{Z}$ tvrzení neplatí. Například v $\mathbb{R}^2$ pro $I_0 = [0,1] \times [0,\sqrt{2}]$ neexistuje interval $I \subset \mathbb{R}^2$, který by nebyl násobkem I_0 a zároveň by existovalo dláždění kopiemi I_0.

Důkaz. Pro spor nechť takový interval I existuje a k němu existuje i dláždění $\mathcal{S} = \{I_i\}_{i=1}^n$ kopiemi I_0. Předpokládejme, že počet prvků systému $\mathcal{S}$ je nejmenší možný. Označme ho k. Interval I_0 není harmonický, ale je pěkný, tedy podle věty 9 je I také pěkný. Označme [a,b] nějakou celočíselnou hranu intervalu I. Buď $\{I_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{S}$ množina těch kopií I_0, které nemají prázdný průnik s hranou $[a,b]$. Protože $\mathcal{S}$ je dláždění, průnikem I_i a $[a,b]$ je hrana délky 1 nebo $\sqrt{2}$ pro každé i. Tyto průniky musí tvořit pokrytí hrany $[a,b]$, tedy $b-a = k(1) + l(\sqrt{2})$ pro nějaká celá čísla k,l, kde $k+l = n$. Protože celé číslo nelze vyjádřit jako nenulový celočíselný násobek $\sqrt{2}$, získáváme rovnosti $l = 0$ a $k = n$. Tedy $\{I_i\}_{i=1}^n$ tvoří dláždění intervalu o rozměrech $(b-a) \times \sqrt{2}$. Označme ho J. Doplněk J do I je interval, který nesmí být násobkem I_0, jinak by I byl násobkem I_0 také. Tudíž doplněk není násobkem a zároveň lze vydláždit menším počtem kopií I_0. Docházíme tedy ke sporu, že k byl nejmenší možný počet prvků $\mathcal{S}$. □

V následující větě dostáváme spojením závěrů z tvrzení 11 a z tvrzení 16 souvislost mezi vlastnostmi být násobkem intervalu a být harmonickým intervalem.

Věta 18. *Nechť I_0 je uzavřený interval v $\mathbb{R}^d$, jehož rozměry jsou celočíselné. Nechť I je uzavřený interval v $\mathbb{R}^d$, pro který existuje dláždění kopiemi I_0. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

i) Interval I_0 je harmonický.

ii) Pro každý uzavřený interval I v $\mathbb{R}^d$ platí: Pokud existuje dláždění I kopiemi I_0, pak I je násobkem I_0.

Seznam použité literatury

de Bruijn, N. G. (1969). Filling boxes with bricks. *American Mathematical Monthly*, **76**, 37–40.

Dehn, M. (1903). Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke. *Mathematische Annalen*, **57**, 314–332.

Robins, S. (2021). A friendly introduction to Fourier analysis on polytopes. *Dostupné online na https://arxiv.org/abs/2104.06407.*

Wagon, S. (1987). Fourteen Proofs of a Result About Tiling a Rectangle. *American Mathematical Monthly*, **94**, 601–617.