Posudek oponenta bakalářské práce

Název: Random Dynamical Systems
Autor: Tomáš Garaj

Shrnutí obsahu práce

Předložená práce pojednává o diferenciálních rovnicích s náhodým vstupem (RDE) a příslušných náhodných dynamických systémech (RDS). V první části práce jsou připomenuty základní výsledky o existenci a jednoznačnosti (lokálních) řešení obyčejných diferenciálních rovnic (ODE) a tyto jsou dále užity pro řešení RDE jakožto parametrizovaného systému ODE. Následně se autor zabývá neexplozí uvažovaných RDE, a to pomocí metody Lyapunova funkcionálu, přičemž dokazuje větu o neexplozi za potenciálně slabších, než běžně uvažovaných, předpokladů. Druhá část předložené práce je věnována RDS. Úvodem jsou srhnuty základní definice a výsledky o generování RDS řešením autonomní RDE a následně je zkoumána existence náhodných atraktorů, přičemž jsou využity výsledky z předchozích částí práce.

Celkové hodnocení práce

Téma práce. Téma práce je dle mého názoru vhodné, byť se řadí spíše k náročnějším. V předložené práci bylo, dle mého názrou, naplněno.

Vlastní příspěvek a matematická úroveň. Domnívám se, že cílem předložené práce mělo být a) detailní rozpracování důkazu existence a jednoznačnosti lokálního řešení RDE a b) nalezení postačujících podmínek k neexplozi RDE, které by byly slabší než běžně uvažované, což lze následně standardními argumenty zkombinovat k důkazu, že uvažovaná RDE generuje RDS. Pak by bylo možné c) nalézet postačující podmínky pro existenci náhodného atraktoru tohoto RDS, což byl poslední cíl práce.

Co se týče cíle a), myšlenka důkazu existence RDE byla modifikovat standardní důkaz existence a jednoznačnosti lokálního řešení ODR pro pevné ω. Bohužel tato část je nejslabší částí práce - formulace problému obsahuje nejasnosti, důkazy obsahují hodně překlepů, zcela chybí některé části výrazů, část tvrzení není dokázaná a chybí některé argumenty (viz poznámky níže). Pro výsledky v další části práce je navíc zásadní, aby výsledné řešení RDE bylo měřitelné v ω, což z výsledků části a) neplyne a je nutné to úvést jako dodatečný předpoklad. Z tohoto hlediska není z mého pohledu naplněn cíl a). Na druhou stranu, cíle b) a c) se, až na drobnosti, zdají být v pořádku (samozřejmě za předpokladu opravy výsledků z cíle a)) a lze je tedy považovat za hlavní vlastní příspěvek práce, který je jistě užitečný a zajímavý.

Práce se zdroji. Práce se zdroji je dobrá, výsledky převzané z literatury jsou, vyjma částí 3.1 a 3.2, kde citace na zdroj chybí, řádně citovány. Osobně bych ocenil větší zdůraznění nových výsledků a porovnání s existující literaturou.

Formální úprava. Formální úprava práce je obstojná, práce je čitelná a sazba v pořádku.

Připomínky a otázky

1. Thm. 5:

   - V důkazu Thm. 5 je problematická zejména práce s α, β, a a b. V předpokladech věty jsou a a b pevné, nezávislé na ω. V důkazu samotném se pak pracuje s α a β, které na ω závisejí, ale vůbec není jasné, jak jejich existenci získáme, pouze se píše „for some $\beta(\omega) > 0$, where $\alpha(\omega)$ is to be determined“ (ř. 3 důkazu) a „for $\alpha(\omega)$ sufficiently small“ (ř. 2 odspodu str. 7). Jak tedy α a β určíme? Jak se mají k a a b z předpokladů? Může být $\alpha(\omega) < 0$ (zřejmě ne, ale chybí to zde)? Proč platí poslední nerovnost na str. 7? A zejména, jak víme, že je α měřitelné v ω?
   - Ve tvrzení Thm. 5 je dále několik překlepů ($\int_{t_0-a}^{t_0+a} m(t,\omega)\mathbf{dt}$, f má zřejmě být g, v definici množiny M_ω chybí supremum přes t, v integrálu za předposlední nerovností na str. 7 má být zřejmě dt a v supremu na ř. 5, str. 8 má zřejmě být norma místo absolutní hodnoty).

2. Thm. 7:

   - Jak víme, že α je náhodná veličina (tedy měřitelné zobrazení)?
   - Opět je zde několik překlepů: V nerovnosti (2.5) chybí závorky, v první rovnosti důkazu má být norma místo absolutní hodnoty, absolutní hodnota pak neni potřeba v dalších nerovnostech a tvrzení „By extending the method above to all $\omega \in \Omega$ we obtain the proposition of the theorem.“ je zcela nejasné.
   - R_0 zde opět zřejmě závisí na ω. (Nebo je zobrazení α omezené?)

3. Thm. 11:

   - V supremech důkazu chybí, „$t \in$ ...“ (ř. -5, str. 12; ř. 11, str. 13; ř. 15, str. 13) a není jasné, jestli jsou všechny intervaly správně - mají být (zleva i zprava) otevřené nebo uzavřené?

Závěr Domnívám se, že předložená práce splňuje podmínky kladené na práci bakalářou a doporučuji ji jako takovou uznat.

19.1.2023

Petr Čoupek
KPMS MFF UK
coupek@karlin.mff.cuni.cz