



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Tomáš Konečný

Předpovídání výsledků zápasů v šipkách

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Martin Pilát, Ph.D.

Studijní program: Informatika

Studijní obor: Umělá inteligence

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Děkuji Mgr. Martinu Pilátovi, Ph.D. za čas, ochotu a trpělivost při vedení této práce. Dále bych chtěl poděkovat spoluhráčům z TJ Sigma Rodeo za možnost od-reagování mezi etapami psaní a kolegovi Ondrovi za ochotu vysvětlovat a konzultovat problematiku šipek. Konečně patří poděkování také mé rodině a přítelkyni Adrianě za podporu v celém průběhu studia.

Název práce: Předpovídání výsledků zápasů v šípkách

Autor: Tomáš Konečný

Katedra: Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Martin Pilát, Ph.D., Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá různými přístupy k modelování zápasů v šípkách. Porovnáváme ratingové modely, modely založené na statistikách a model, který na stavy hry a náhodné přechody mezi nimi nahlíží jako na Markovův řetězec. Součástí práce navrhujeme způsob výpočtu statistik reflektující jak dlouhodobou, tak krátkodobou formu soutěžících. S využitím detailního datasetu obsahujícího jednotlivé šípky také odvodíme, jak na základě stavu utkání volit cíl. Modely vyhodnocujeme dle standardních kritérií klasifikačních úloh, navíc však s využitím kurzů sázkových kanceláří odhadujeme ziskovost, pokud by dle predikcí modelů probíhalo sázení v praxi.

Klíčová slova: šípky, neuronové sítě, Markovův řetězec, strojové učení, rozhodovací stromy

Title: Predicting the Outcomes of Darts Matches

Author: Tomáš Konečný

Department: Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Supervisor: Mgr. Martin Pilát, Ph.D., Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Abstract: This thesis deals with various approaches to modeling darts matches. We compare rating models, models based on statistics and a model that views the game states and random transitions between them as a Markov chain. As a part of the thesis, we propose a method for calculating statistics reflecting both long-term and short-term form of the players. Using a detailed dataset containing individual darts, we also derive how to choose a target based on the state of the match. The models are evaluated according to standard criteria for classification problems, but in addition, using bookmakers' odds, we estimate the profitability if betting would take place in practice according to the models' predictions.

Keywords: darts, neural networks, Markov chain, machine learning, decision trees

Obsah

Úvod	3
1 Pravidla hry a notace	4
2 Související práce	6
2.1 Optimální strategie	6
2.2 Maximalizace skóre	8
2.3 Další související práce	8
2.3.1 Ostatní sporty	8
3 Data	10
3.1 Struktura vstupních dat	10
3.2 Postup tvorby datasetu	10
3.3 Explorativní analýza	11
3.4 Statistiky ze zápasu	11
3.4.1 Úspěšnost zavírání	13
3.5 Feature engineering	14
3.5.1 Agregované statistiky	16
3.5.2 Feature-setsy	16
3.6 Trénovací, validační a testovací sada	17
4 Modely	18
4.1 Kombinatorická struktura zápasu	18
4.1.1 Nezávislé legy	19
4.2 Vstupy a výstupy	19
4.3 Trénování a ladění hyperparametrů	20
4.4 Bookmaker	20
4.5 Elo	21
4.5.1 Zápas	22
4.5.2 Leg	23
4.5.3 Nedostatky	23
4.6 Logistická regrese (rating)	23
4.6.1 Neznámí soutěžící	25
4.7 Markovův-fyzikální model	26
4.7.1 Pravděpodobnosti přechodů	26
4.7.2 Odhad rozptylu	28
4.7.3 Strategie	30
4.7.4 Predikce	35
4.7.5 Nedostatky	36
4.8 Modely založené na statistikách	37
4.8.1 Rozhodovací stromy	38
4.8.2 Výběr nejlepšího feature-setu	39
4.8.3 Neuronové sítě	39
4.8.4 Logistická regrese, k -NN, SVM	40
5 Výsledky	43

Závěr	47
Seznam použité literatury	49
Seznam obrázků	52
Seznam tabulek	53
Seznam použitých zkratk	54
A Přílohy	55
A.1 Kompletní strategie	55
A.2 Přehled hyperparametrů modelů	57

Úvod

Pokroky ve strojovém učení a dostupná detailní data nám dovolují přistupovat k řešení problémů z mnoha oblastí novými metodami. Jednou z takových oblastí je predikování výsledků sportovních utkání. Ta se pochopitelně těší velkému zájmu sázkového průmyslu, odhady pravděpodobností výsledků však můžeme vídat i v přímých přenosech utkání jen pro účely zlepšení zážitku fanoušků.

V této práci se věnujeme modelování výsledků utkání v šipkách. Cílem práce je navrhnout vlastní modely schopné předpovídat výsledky budoucích zápasů. Experimentujeme se třemi různými přístupy, diskutujeme jejich vlastnosti a následně modely porovnáváme nejen vzájemně, ale i ve vztahu ke kurzům sázkové kanceláře.

První z přístupů výsledek zápasu odhaduje na základě statistik ze zápasů předchozích. S využitím datasetu obsahujícího přibližně 5 000 zápasů ze soutěže Modus Super Series navrhujeme vlastní metody agregace statistik tak, aby reflektovaly jak dlouhodobou, tak krátkodobou formu soutěžících. Provádíme experimenty s různými druhy klasifikátorů, které trénujeme s nejlepší variantou navržených příznaků na vstupu. Modely tohoto typu se ukázaly jako nejúspěšnější. Při simulovaném sázení se nám dokonce s jejich použitím podařilo dosáhnout zisku.

Druhý přístup vychází ze standardních ratingových metod. Pro účely šipek adaptujeme Elo rating tak, aby reflektoval výhodu začínání a experimentujeme také s vlastní ratingovou metodou založenou na logistické regresi.

Poslední z přístupů přímo modeluje jednotlivé šipky a simuluje vývoj zápasu. Používáme standardní model šipky z literatury, který považuje bod dopadu za náhodnou veličinu závislou na zamýšleném cíli. S předpokladem, že soutěžící volí cíl deterministicky na základě aktuálního stavu utkání, odvodíme strategii z dat obsahujících pro jednotlivé zápasy přesnou posloupnost hodů šipek a popíšeme ji snadno interpretovatelnými pravidly. Navrhujeme také způsob, jak jen ze statistik soutěžících odvozovat jejich přesnost vyjádřenou rozptylem. Tyto komponenty pak zkombinujeme v model, který pro budoucí zápasy umí odhadovat distribuce počtu kol obou soutěžících a z nich vypočítat pravděpodobnosti vítězství.

Struktura práce

Práce je dělena do pěti kapitol. V kapitole 1 definujeme základní pojmy a popisujeme pravidla šipek. Kapitola 2 obsahuje přehled související literatury. Nejvíce se zaměřujeme na práce zabývající se modelováním bodu dopadu šipky a hledáním optimální strategie. V kapitole 3 popisujeme datasety a způsoby jejich zpracování. Navrhujeme zde také postup, jak agregovat statistiky ze zápasů. Principy jednotlivých modelů rozebíráme v kapitole 4. Jako důležitou komponentu jednoho z modelů popisujeme v podkapitole 4.7.3 strategii, kterou soutěžící v zápasech ze zkoumaného datasetu dodržují. Kapitola 5 obsahuje výsledky experimentů, způsob vyhodnocení a porovnání modelů.

1. Pravidla hry a notace

V následujícím textu vycházíme ze sbírky pravidel vydané organizací Darts Regulation Authority (2019). Abychom mohli vysvětlit pravidla celé hry, vysvětlíme nejprve, jak funguje přiřazování skóre samostatné šipce. Skóre závisí pouze na tom, na jakou pozici v terči šipka dopadne. Terč je rozdělen do 20 stejně velkých očíslovaných výsečí $V = \{1, 2, \dots, 20\}$, které jsou pomocí soustředných kružnic dále rozčleněny na menší oblasti, které nazýváme buňky. Nazýváme prstencem oblast mezi dvěma soustřednými kružnicemi, jako speciální případy pak za prstence považujeme i střed terče a celý vnější okraj za poslední kružnicí. Prstenců R je tedy celkem 7 a budeme je označovat (postupně od středu, v závorce anglický název):

- DB (*double bull*) – střed
- SB (*single bull*) – vnější střed
- SI (*inner single*) – vnitřní část oblasti, kde se skóre nenásobí
- T (*triple*) – oblast, kde se skóre násobí třemi
- SO (*outer single*) – vnější část oblasti, kde se skóre nenásobí
- D (*double*) – oblast, kde se skóre násobí dvěma
- O (*outside*) – mimo skórovaná pole

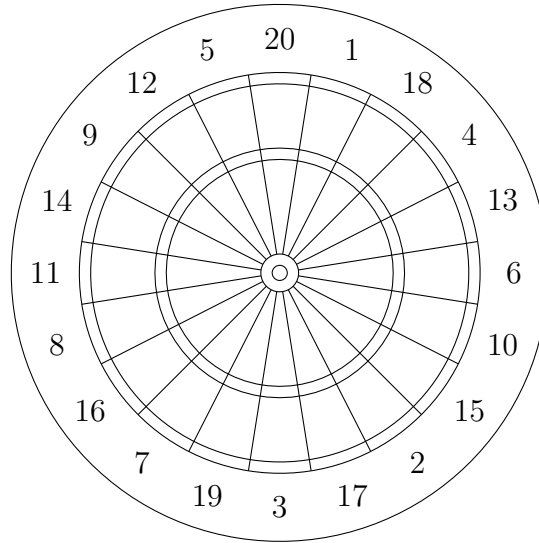
Každá dvojice (v, r) , kde $v \in V$ a $r \in R$, pak odpovídá nějaké buňce. Speciálně platí, že všechny dvojice $(*, \text{DB})$ odpovídají středu, všechny dvojice $(*, \text{SB})$ vnějšímu středu a všechny dvojice $(*, \text{O})$ oblasti mimo terč. Na buňky nahlédneme jako na třídy ekvivalence nad dvojicemi (v, r) , množina všech buněk je tedy $B = \{(v, r) \mid v \in V, r \in R\} / \sim$. Pro snazší čitelnost budeme buňku středovou označovat jen DB, buňku vnější středovou SB, buňku vnější O a zbylé buňky přímo dvojicemi (v, r) bez explicitního značení ekvivalence.

Buňkám (v, r) pro $r \in \{\text{SI}, \text{T}, \text{SO}, \text{D}\}$ přiřazujeme skóre dle funkce

$$f((v, r)) = \begin{cases} v, & r \in \{\text{SI}, \text{SO}\}, \\ 3 \cdot v, & r = \text{T}, \\ 2 \cdot v, & r = \text{D}, \end{cases} \quad (1.1)$$

pro střed je $f(\text{DB}) = 50$, pro vnější střed je hodnota poloviční $f(\text{SB}) = 25$ a trefa mimo nepřináší žádné skóre $f(\text{O}) = 0$. Standardní rozvržení terče znázorňuje obrázek 1.1.

Ve hře šipky spolu soupeří dva soutěžící postupným házením šipek na terč, oba začínají se skóre 501. Střídají se po kolech, která se skládají ze třech hodů. Vždy na konci kola se skóre všech tří šipek sečtou a celkové skóre z počátku kola se o součet sníží. První soutěžící, který dosáhne skóre přesně nula, vyhrává leg. Vítězem zápasu se pak stává ten, kdo jako první dosáhne daného počtu legů. V některých případech zisk daného počtu legů vede pouze k vítězství v setu a celý



Obrázek 1.1: Standardní terč.

zápas se pak skládá z několika z nich. Jelikož házet v legu první je výhodou, pořadí se postupně střídá a v dalším legu tak začíná soutěžící, který v tom předchozím házel druhý.

K zisku legu je nejen nutné dosáhnout skóre přesně nula, ale zároveň jej dosáhnout šípkou trefenou do buňky v prstenci D nebo do DB. Takové buňky souhrnně označujeme jako *double* (podobně buňky v prstenci T jako *triple* a buňky v prstencích SO a SI jako *single*). Situace, kdy se soutěžící pokouší o ukončení legu, se nazývá zavírání (anglicky *checkout*). V případě, že by se po odečtení skóre z aktuálního kola dostal soutěžící do záporných čísel nebo na skóre 1, jeho kolo okamžitě končí a zůstává mu skóre z počátku kola. Taková situace se anglicky nazývá *bust* a může k ní dojít i v případě, kdy se soutěžící sice dostal přesně na nulu, ale nikoliv trefou doublu.

2. Související práce

V této kapitole popíšeme dřívější práce, které se věnovaly tématu modelování šipek nebo sportu obecně. Pro přehlednost dělíme kapitolu na tři podkapitoly dle zaměření, speciálně vyhradzujeme samotnou podkapitolu pro práce zaměřující se na hledání optimální strategie (2.1) a na nejlepší způsob, jak rychle akumulovat skóre (2.2).

2.1 Optimální strategie

Ač se na první pohled mohou šipky zdát jen jako hra přesnosti, jsou to právě faktor náhody a nejistota trefení cíle, které zavádějí nutnost volit cíl strategicky, tedy tak, aby šance na vítězství byla co největší.

Tímto tématem se již zabývalo několik autorů. Jejich přístupy se liší volbou pravidel hry, kritériem pro optimalizování, interakcí s oponentem a metodami.

Již v roce 1982 se Kohler (1982) zabýval hledáním optimální strategie, která minimalizuje střední hodnotu počtu kol, než soutěžící dosáhne skóre nula. Zvolil takovou variantu pravidel, kdy *bust* (viz kapitolu 1) nezpůsobí reset skóre na začátek kola, jen kolo předčasně ukončí, což zjednodušuje strukturu stavového prostoru, skóre je totiž nerostoucí. Místo počátečního skóre 501 volí 301, to však není výrazná odlišnost. Stavový prostor definuje jako dvojice (s, t) , kde s je skóre, $s \in \{0, 1, 2, \dots, 301\} - \{1\}$ (stav se skóre 1 neexistuje), a $t \in \{1, 2, 3\}$ značí, kolikátou šipku v kole se soutěžící chystá házet. Díky monotonii složky skóre lze výpočet provádět po vrstvách od nejnižšího s vzestupně. Uvnitř každé vrstvy je cyklus – *bust* ze stavu $(s, *)$ vede vždy do $(s, 1)$ a trefa mimo všechna bodovaná pole též skóre nemění, jen posouvá druhou složku. Střední hodnotu zbývajících počtu kol lze však pro $(s, 1)$ vyjádřit jen v závislosti na předchozích vrstvách a cílových bodech hodů, které jsou hledanou veličinou. Autor zde používá metodu *Branch and Bound* pro optimalizaci vyhledávání. Tímto způsobem postupně pro každé s a t získává optimální cíl.

Bod dopadu šipky Z podmíněně na (zamýšleném) cíli $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^2$ modeluje jako náhodnou veličinu s normálním rozdělením

$$Z = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I), \quad (2.1)$$

kde $\sigma \in \mathbb{R}$ značí přesnost házejícího. Pro výpočet pravděpodobností přechodů mezi stavy v závislosti na cíli je třeba integrovat hustotu přes jednotlivé buňky terče. Kohler navrhuje vlastní numerickou metodu, která vyhodnotí hustotu v několika bodech buňky, pokud se hodnoty liší jen málo, tak ji považuje za konstantní, jinak rozdělí buňku na čtvrtiny a krok opakuje.

Baird (2020) formuluje šipky jako Markovův rozhodovací proces a využívá metod zpětnovazebního učení taktéž pro hledání optimální strategie, ve svém modelu však počítá i s možným resetem skóre a zkoumá situace, kdy se strategie liší v závislosti na počátečním skóre kola. Stavový prostor je rozšířený na trojice (S_t, t, S_1) . První dvě složky mají stejný význam jako u Kohlera a S_1 značí skóre z počátku kola. Na tuto hodnotu se mění S_t , nastane-li *bust*. Počet zbývajících kol značí T a cílem je najít takovou strategii, která minimalizuje $\mathbb{E}[T|S_t, t, S_1]$, což

Autor	Bust	Soupeř	Kritérium	Metody	Model
Kohler (1982)		Ne	$\min \mathbb{E}[T]$	DP, B&B	$\mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$
Baird (2020)	Reset	Ne	$\min \mathbb{E}[T]$	MDP, VI	$\mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$
Haugh a Wang (2020)	Reset	Ano	$\max P[W]$	ZSG, VI	$\mathcal{N}(0, \Sigma_m)$
Tibshirani a kol. (2011)					různé
Stern (1997)					$\mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$

Význam zkratek:

$\mathbb{E}[T]$ – Střední hodnota počtu kol, $P[W]$ – pravděpodobnost vítězství,

DP – Dynamické programování, B&B – Branch and Bound,

MDP – Markovův rozhodovací proces, VI – value-iteration, ZSG – hra s nulovým součtem

Tabulka 2.1: Přehled souvisejících prací a jejich metod.

je zároveň hodnota *value*-funkce pro stav (S_t, t, S_1) . Na rozdíl od standardní formulace úloh, kde je cílem maximalizace, nepřičítáme stavům odměny (*reward*), ale ceny (*cost*). Cena je nulová pro stavy s $t \in \{2, 3\}$ a je rovná jedné pro $t = 1$, tedy na začátku každého kola. Pro nalezení hodnot *value*-funkce využívá autor metodu *value-iteration*. Model hodu šipky používá Baird totožný jako Kohler, tedy dvourozměrné normální rozdělení s kovarianční maticí $\Sigma = \sigma^2 I$.

Ve výsledné strategii pak popisuje případy, ve kterých je optimální zvolit na první pohled neintuitivní kroky. Takovým je například úmyslný bust, protože skóre z počátku kola je výhodnější než to aktuální, nebo volba začátečníka raději svou poslední šipku v kole zahodit mimo terč než riskovat bust a tím se vrátit na vysoké skóre.

Strategii se věnují i Haugh a Wang (2020). Zabývají se však složitějším problémem – optimální strategii beroucí v potaz skóre oponenta. Dosud zmiňované články zkoumaly strategii izolovaně, nezávisle na něm. Díky zahrnutí oponentova skóre mohou vysvětlit jevy běžně se v profesionálních zápasech vyskytující, např. riskantní pokus o zavření v momentě, kdy oponent v nadcházejícím kole pravděpodobně vyhraje, nebo naopak konzervativní volbu v situaci, kdy soupeř do vítězství potřebuje kol více.

Stavový prostor je pětice, obsahuje navíc skóre oponenta a značku soutěžícího, jenž je právě na řadě. Cílem je pro každý stav maximalizovat pravděpodobnost vítězství. Autoři problém formulují jako hru s nulovým součtem a iterativním způsobem upravují best-response strategii střídavě pro oba soutěžící.

Model hodu šipky též rozšiřují. Nepředpokládají nezávislost a stejný rozptyl v obou osách, nepřesnost tedy formalizují plnou kovarianční maticí. Zároveň zeslabují předpoklad, že hod se chová stejně nezávisle na (zamýšleném) cíli. Argumentují, že soutěžící se při tréninku zaměřují na specifické oblasti terče a jejich přesnost tak nelze reprezentovat jen jednou kovarianční maticí. Dělí proto terč na několik oblastí R_1, R_2, \dots, R_M a bod dopadu Z v závislosti na zamýšleném cíli μ modelují jako

$$Z = \mu + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_m), \quad (2.2)$$

kde $\mu \in R_m$ a Σ_m je kovarianční matice pro region R_m .

2.2 Maximalizace skóre

Jiné úloze, v mnohém však podobné, a to hledání místa, které maximalizuje střední hodnotu hozeného skóre v závislosti na přesnostech házejícího, se věnovali Tibshirani a kol. (2011). Modelů hodu šipky popisují více. Základní model (2.1) s $\Sigma = \sigma^2 I$ rozšiřují na model s plnou kovarianční maticí Σ a navrhují i variantu, kdy složky $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ odchylky ε mají každá jiné rozdělení. Konkrétně tedy

$$\varepsilon_x \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \varepsilon_y \sim \mathcal{SN}(0, \omega^2, \alpha),$$

kde \mathcal{SN} (*skew-normal*) je šikmé normální rozdělení (Azzalini, 1985), ω^2 je analogií rozptylu σ^2 a α ovlivňuje šikmost.

Své výsledky prezentují jako heatmapy znázorňující pro každý bod terče (na milimetrové mřížce) střední hodnotu hodu. Mimo to navrhují metodu, jak měřit přesnost σ^2 jen na základě skóre několika hodů šipkou mířených na střed.

Ještě dříve se otázkou, jak co nejrychleji akumulovat skóre, zabýval Stern (1997). Vychází ze základního modelu (2.1) a v závislosti na σ porovnává, zda je výhodnější mířit na T19 nebo T20.

2.3 Další související práce

Ötting a kol. (2019) se zabývali tzv. hot-hand fenoménem. Zjednodušeně má jít o stav, ve kterém sportovec podává mimořádný výkon – *je v zóně*. Autoři tvrdí, že v šípkách takový stav s krátkým trváním o délce jednoho kola existuje, pauza mezi koly jej však přeruší. To lze vysvětlit jako nutnost recalibrace při první šípce každého kola a naopak snazší trefení cíle v moment, kdy si soutěžící předchozím hodem vytvořil referenční bod.

Nasu a kol. (2014) zkoumali trajektorii ruky při hodu šipky a porovnávali experty se začátečníky a James a Potts (2018) popsali let šipky z fyzikálního pohledu na základě záznamu z videokamery.

Výkonem soutěžících v rozhodujících momentech a pod tlakem se zabývali Klein Teeselink a kol. (2020). Dospěli k závěru, že u dětí a amatérů dochází v rozhodujících momentech k značnému poklesu výkonnosti, tzv. *choking* (Baumeister a Showers, 1986). U profesionálů takový jev ve velké míře nedetekují.

O téma velmi blízké této práci, tedy predikování výsledků zápasů, se zajímali Liebscher a Kirschstein (2017). Autoři navrhli několik výkonnostních metrik (průměr na kolo a dvě varianty úspěšnosti zavírání) a na datasetu o velikosti přibližně 850 zápasů vyhodnocovali úspěšnosti probit modelu s různými sadami metrik na vstupu. Jako možné zlepšení metrik, které by umožňovalo zachytit změny výkonnosti, zmiňují například využití vážených průměrů v čase, čemuž se v této práci budeme věnovat v kapitole 3.5.

2.3.1 Ostatní sporty

Kromě prací souvisejících přímo s šípkami zmiňme ještě základní modely pro tenis a fotbal. Klaassen a Magnus (2003) ve svém článku, kde se věnují modelování tenisu, nahlíží na zápas jako posloupnost i.i.d. míčků (resp. předpokládají dva různé typy míčků dle podávajícího hráče), z nichž pak následně se znalostí

hierarchické struktury mohou odvodit pravděpodobnosti pro gem, set a nakonec i samotný zápas. Předpoklad nezávislosti používá i Maher (1982) ve svém modelu pro fotbal, kde skóre každého z týmů popisuje jako nezávislá Poissonova rozdělení. Klaassen a Magnus (2001) nezávislost míčků vyvracejí, tvrdí však, že odchylky od i.i.d. jsou malé a předpoklad tak slouží minimálně jako dobrá aproximace. Podobně i Dixon a Coles (1997) mírně modifikují Maherův model, aby lépe odpovídal výchýlkám neodpovídajícím předpokladu nezávislosti.

V obou případech je tedy předpoklad nezávislosti užitečným, ač neodpovídá dokonale. Tato práce při návrhu některých modelů též vychází z nezávislosti šipek a legů a kombinatorické struktury zápasu.

3. Data

Následující část textu práce se věnuje popisu dat použitých pro trénování a vyhodnocování modelů. Abychom při vyhodnocování mohli jako jeden z referenčních bodů využít predikce sázkových kanceláří, neobsahuje vytvořený dataset jen výsledky a statistiky ze zápasů, ale také kurzy.

Pro modelování byla v této práci zvolena soutěž Modus Super Series. Jedná se o nástupce Online Darts Live League, která vznikla v pandemickém období v roce 2021. Utkání se musela odehrávat z domova a soutěž probíhala online, jsou pro ni tak dostupná data obou výše popsanych druhů. Nemohou se účastnit držitelé PDC Tour Card, tedy 128 nejlepších hráčů (Modus Super Series, 2022).

3.1 Struktura vstupních dat

Finální dataset vzniká ze tří dílčích datasetů. První dataset obsahuje kurzy sázkové kanceláře pro 5957 zápasů od března 2021 do září 2022.

Druhý, tzv. hrubý dataset, popisuje průběh každého z 6478 zápasů od dubna 2021 do října 2022 po jednotlivých kolech. Každé kolo se skládá z jedné až tří šipek (z méně než tří např. v situacích, kdy hráč vyhrává leg první či druhou šipkou) a v datech tak bude agregované skóre všech z nich.

Třetí, detailní dataset, je ze všech nejkratší. První data pocházejí z března 2022 a poslední z října 2022, celkem 2904 zápasů. Stejně jako hrubý dataset obsahuje průběh zápasů, nikoli však agregovaný. Každý zápas je reprezentovaný sekvencí jednotlivých šipek.

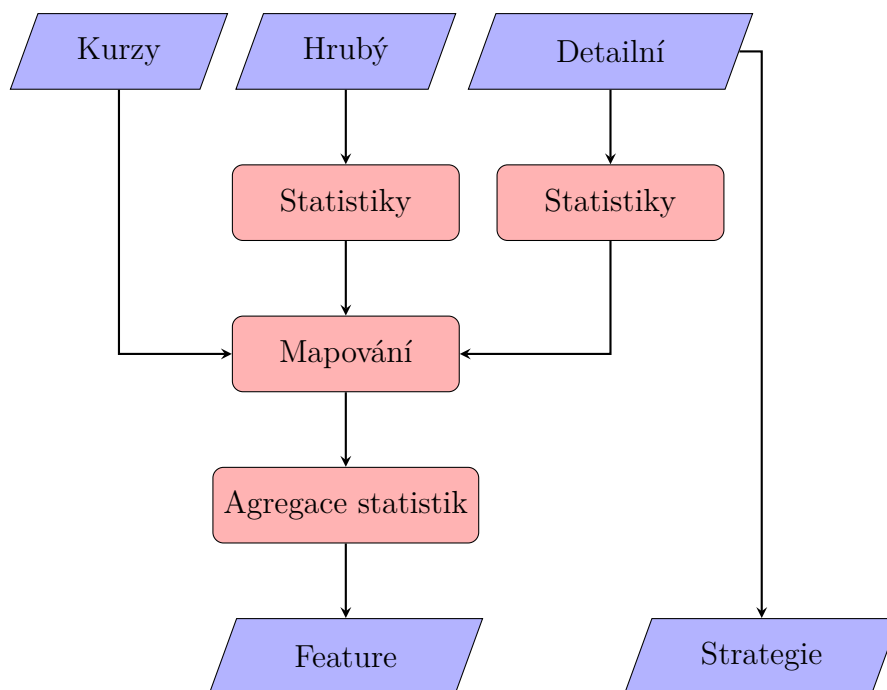
3.2 Postup tvorby datasetu

Datasety je prvně nutno spojit v jeden a provést sérii transformací. Diagram 3.1 znázorňuje postup. Z hrubého i detailního datasetu nejprve spočítáme k zápasům hráčské statistiky, jsou klíčovou částí pro feature-based modely a podrobněji se jimi zabývá kapitola 3.4. Následně spojíme datasety v jeden. Abychom zachovali co nejvíce dat, vychází mapovací procedura z hrubého datasetu. Pokusí se ve zbylých dvou datasetech zápas dohledat a spojit. I při neúspěchu taková utkání ponecháme. Pro účely samotného trénování totiž nejsou kurzy nutnou podmínkou. Až při vyhodnocení zápasy bez kurzů vyřadíme.

Zkombinovaná data tedy jistě obsahují průběh zápasu a statistiky z hrubého datasetu, velká většina z nich i kurzy. Pro zápasy od března 2022 vyžadujeme i průběh a statistiky z detailního datasetu.

Předtím, než mohou data vstoupit do feature-based modelů, agregujeme pro každý zápas statistiky ze zápasů předchozích. Způsoby agregace rozebereme v kapitole 3.5.1, nyní pouze zmiňme, že feature dataset obsahuje všechny navržené varianty, ač všechny modely budou ve výsledku používat jen jednu z nich. Volbou nejlepší varianty se zabývá kapitola 4.8.2.

V boční větvi, nezávislé na dosud zmíněném postupu, se nachází dataset Strategie. Vzniká tak, že procházíme šipku po šipce každý zápas z detailního datasetu, v průběhu si udržujeme aktuální skóre a zbývající počet šipek hráče na řadě



Obrázek 3.1: Diagram konstrukce datasetů.

a k nim poznamenáváme místo dopadu šipky. Tento dataset použijeme v kapitole 4.7.3 k tomu, abychom odvodili strategii, tedy kam mířit za jakého stavu.

3.3 Explorativní analýza

Dataset propojující všechny zdroje obsahuje celkem 5282 zápasů, 167 unikátních soutěžících a 30385 legů. V 52.97 % zápasech zvítězil ten hráč, který zároveň začínal. Jak je zmíněno v kapitole 4.1, začínat v zápase je výhodou.

Histogram 3.2 znázorňuje kurzy ze všech smapovaných zápasů.

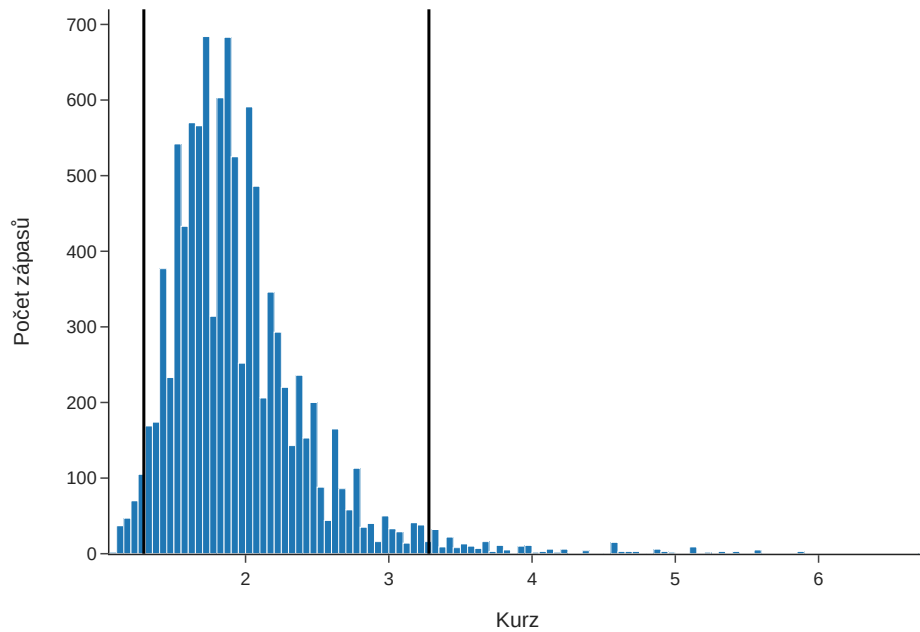
V intervalu mezi kurzy 1.29 a 3.28 (znázorněno černými svislými čarami) je 95 % všech pozorování, můžeme tedy nahlédnout, že naprostá většina zápasů nemá dle bookmakera jasného favorita. Je však nutno zmínit, že kurzy jsou včetně marže, tou se budeme zabývat více v kapitole 4.4.

Obrázek 3.3 znázorňuje kumulativní počet zápasů pro jednotlivé soutěžící. Za povšimnutí stojí postupné přibývání nových soutěžících. Často si model bude muset poradit se situací, kdy má predikovat výsledek zápasu se soutěžícím s malým počtem předchozích zápasů. Rozdělení počtu zápasů mezi soutěžící je k nahlédnutí na histogramu 3.4.

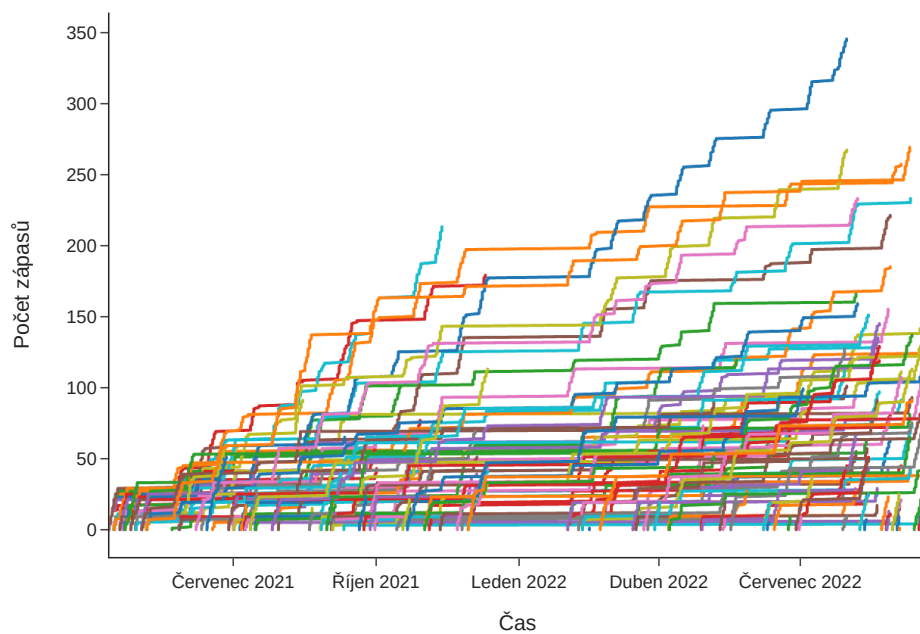
3.4 Statistiky ze zápasu

Kromě výsledného skóre popisují výkon soutěžícího v zápase i jiné veličiny, které v této práci nazýváme statistikami. Těmi nejznámějšími v šipkařském světě jsou **průměr** a **úspěšnost zavírání**.

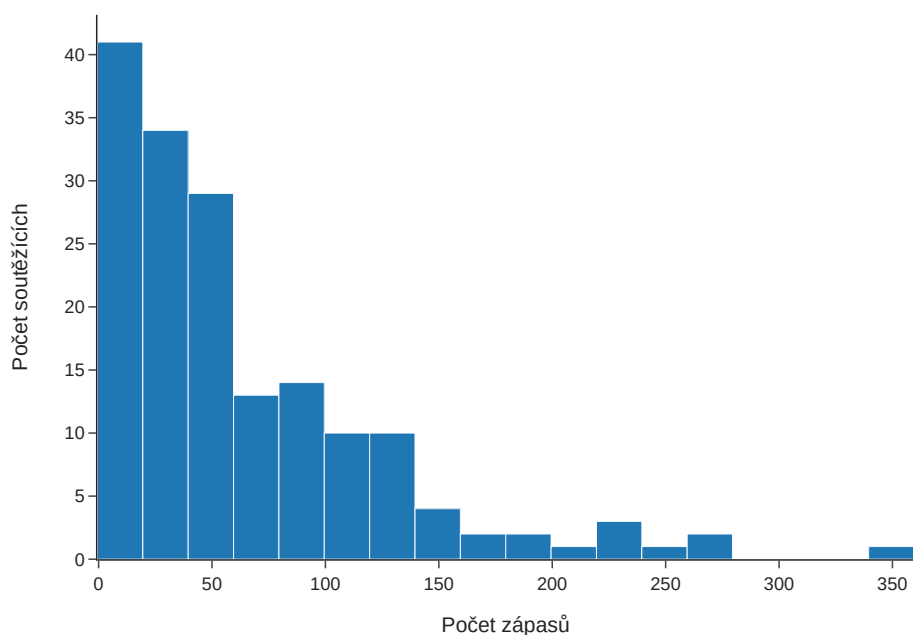
Průměr je podíl celkového dosaženého skóre a počtu šipek. Je zvykem zobrazovat jeho trojnásobek, tedy průměr na kolo, my však pro jednoduchost zvyk



Obrázek 3.2: Histogram kurzů.



Obrázek 3.3: Kumulativní počet zápasů pro jednotlivé soutěží.



Obrázek 3.4: Histogram počtu zápasů na soutěžícího.

porušíme a hodnotu průměru násobit konstantou nebudeme.

Úspěšnost zavírání rozebereme samostatně v Kapitole 3.4.1.

Dalšími pokročilejšími statistikami jsou **průměr z prvních 9 šipek**, **průměr na podání**, **průměr na příjmu** a **průměr v rozhodujícím legu**. Všechny jsou podobně jako samotný **průměr** podílem celkového skóre a počtu šipek. Liší se tím, že se do nich počítá jen podmnožina šipek s určitou vlastností. Průměr z prvních 9 šipek vynechává všechny šipky kromě prvních devíti. Motivací je separovat schopnost zavírat a schopnost trefovat vysoká skóre. Během prvních devíti šipek (až na vzácné situace) se hráči nepokouší o zavírání. Průměry na podání a na příjmu se počítají jen z legů, ve kterých daný hráč začínal, resp. nezačínal. Motivací k průměru v rozhodujícím legu je kvantifikovat schopnost soutěžících podávat dobrý výkon v situaci pod tlakem, počítá se tedy jen ze šipek v legu za stavu 3:3. Ač Klein Teeselink a kol. (2020) u profesionálů výrazný pokles výkonnosti v takových situacích nedetekují, nám může výše popsaná statistika pomoci rozlišit konkrétní soutěžící, kteří by tlaku podléhat mohli.

3.4.1 Úspěšnost zavírání

Tato statistika vyjadřuje poměr počtu úspěšných zavření a celkového počtu pokusů o něj. Definice pokusu o zavření se však ukázala být problematickou.

Hrubý dataset přímo tuto statistiku obsahuje, v tom detailním se však pokoušíme o její výpočet sami, ač i ten pro každou šipku obsahuje oficiální anotaci, zda se o pokus jednalo. Jak zmiňujeme v kapitole 4.7.3, ne ve všech situacích, kdy zavření možné je, se o něj soutěžící pokusí. Navrhli jsme proto heuristiku, která ze skóre, zbývajících počtu šipek a trefené buňky pokus detekuje.

Základem heuristiky je předpoklad, že soutěžící jsou přesní natolik, aby neúspěšné pokusy o zavření skončily v blízkém okolí cílové buňky. Samotná funkce se pak skládá z výčtu pravidel a výjimek. Abychom funkčnost heuristiky ověřili, konfrontovali jsme její výstup s oficiální anotací pro všechny dostupné zápasy. Všechny situace, kdy se výstupy lišily, jsme prozkoumali z videa záznamu zápasu, doplnili heuristiku, a nebo případ označili za chybu v oficiální anotaci. Případů vadné anotace jsme celkem zaznamenali 67, mezi nimi existují dokonce i takové situace, kdy úspěšný pokus o zavření nebyl jako pokus o zavření označen. Mnoho z nich se vyskytovalo ve shlucích, což nás nabádá k hypotéze, že oficiální anotace vytváří člověk, který občas chybuje, případně není k anotování dána jasně definovaná metodologie.

Definice pokusu je samozřejmě obecně diskutabilní. Liebscher a Kirschstein (2017) například definují *možné zavření* jako všechny situace, kdy lze jednou šipkou zavřít, čímž se vyhýbají nutnosti vyhodnocovat úmysl soutěžícího. Jejich statistika tak i strategické rozhodnutí připravit si výhodnější pozici a nezavírat může považovat za negativní skutečnost.

Pro účely modelování jsme se však v této práci rozhodli jít cestou vlastní deterministické funkce se zmiňovanými vstupy, aby byla metoda konzistentní. Ve všech zápasech, kde je dostupný detailní zdroj, používáme napočítané statistiky z něj.

3.5 Feature engineering

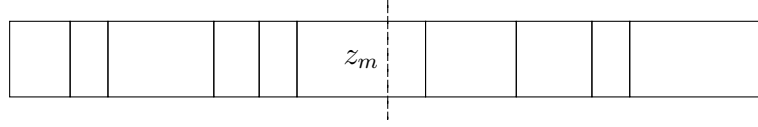
Předchozí kapitola se zabývala vyhodnocením výkonu soutěžícího v daném zápase po jeho konci, pro účely predikování výsledků budoucích zápasů potřebujeme kvalitu soutěžícího kvantifikovat z dlouhodobějšího hlediska. Zavedeme proto několik různých variant, jak pro soutěžící agregovat statistiky z jejich předchozích zápasů. Nejprve zdefinujeme pojmy.

Definice 1. *Zlomková statistika je prvek $[0, \infty)^2$. První složku zlomkové statistiky nazýváme čitatel a druhou jmenovatel. Sčítání zlomkových statistik a násobení skalárem definujeme stejně jako pro vektory.*

Definice 2. *Hodnotou zlomkové statistiky $z = (c, j)$ nazýváme podíl $h(z) = \frac{c}{j}$. V případě, že $j = 0$, je hodnota nedefinovaná.*

Příkladem zlomkové statistiky je například úspěšnost zavírání. Pokud soutěžící v jednom zápase úspěšně zavřel ve 2 ze 3 pokusů a ve druhém zápase úspěšně zavřel jen v 1 ze 4 pokusů, reprezentuje součet zlomkových statistik $(2, 3) + (1, 4) = (3, 7)$ souhrnnou úspěšnost z obou zápasů.

Abychom mohli klást větší důraz na zápasy v nedávné minulosti oproti těm starším, budeme statistikám přiřazovat váhy. Na důležitost vážení upozorňují Liebscher a Kirschstein (2017) a podobně jako Dixon a Coles (1997) navrhují exponenciální vážení. Jako váhovou funkci tedy použijeme exponenciální vážení v čase $w(s, \alpha) = e^{-\alpha s}$, kde $s \in R^+$ je stáří ve dnech a α určuje míru poklesu vah. Pro lepší interpretovatelnost však budeme váhovou funkci parametrizovat *poločasem rozpadu* λ . Tedy takovou hodnotou, pro kterou platí $w(\lambda, \alpha) = \frac{1}{2}$. Odtud lze vyjádřit $\alpha = \frac{\ln 2}{\lambda}$. V následujícím textu tedy budeme psát $w_\lambda(s)$ a budeme tím myslet $w(s, \alpha)$ s odpovídajícím α . Jako speciální případ ještě zavedeme $w_\infty(s) = w(s, 0) = 1$.



Obrázek 3.5: Příklad váženého mediánu.

Definice 3. *Historie statistiky H je množina dvojic (s_i, z_i) , kde s_i je stáří ve dnech a z_i zlomková statistika.*

Definice 4. *Nechť, $\mathbf{w} \in [0, \infty)^n$ je vektor vah a \mathbf{z} je n -rozměrný vektor zlomkových statistik. Pak*

- *váženou průměrnou statistikou rozumíme $\sum_{i=1}^n w_i \cdot z_i$,*
- *vážený medián je takový prvek z_m vektoru \mathbf{z} , že*

$$\sum_{\substack{i=1 \\ h(z_i) < h(z_m)}}^n w_i < \frac{1}{2}C$$

a zároveň

$$\sum_{\substack{i=1 \\ h(z_i) \leq h(z_m)}}^n w_i \geq \frac{1}{2}C$$

kde $C = \sum_{i=1}^n w_i$.

Pro výpočet vážené průměrné statistiky z historie H s poločasem rozpadu λ , kterou označujeme $W_\lambda(H)$, získáme vektor vah tak, že aplikujeme váhovou funkci w_λ na stáří prvků z H . Stejně postupujeme i při výpočtu váženého mediánu z historie H s poločasem rozpadu λ , jenž označujeme $M_\lambda(H)$.

Snadno můžeme nahlédnout, že pokud H obsahuje statistiku průměr ze všech zápasů hráče, je $W_\infty(H)$ zlomková statistika s čitatelem celkového skóre ze všech zápasů a jmenovatelem celkového počtu šipek. Alternativou k agregování přes zlomkové statistiky by bylo agregování samotných jejich hodnot, tedy bychom však považovali statistiku z každého zápasu za stejně vypovídající, nezávisle na počtu pozorování (šipek), ze kterých vznikla. Pro definici váženého průměru jsme se proto touto cestou jít nerozhodli.

Obrázek 3.5 znázorňuje výpočet váženého mediánu. Každý z obdélníků reprezentuje jednu zlomkovou statistiku, uspořádání je zleva doprava dle rostoucí $h(z)$. Šířka obdélníku je váha. Svislá čárkovaná čára pak odpovídá $\frac{1}{2}C$.

Poslední důležitou komponentou je *prior*. Jak již bylo zmíněno v kapitole 3.3, často se model bude potýkat se situací, kdy pro hráče má málo dat nebo dokonce data žádná. Ze všech zápasů z trénovací sady (o rozdělení datasetu na splity více v kapitole 3.6) proto spočítáme průměrnou statistiku celé soutěže z_p , nazývanou prior. K tomu potřebujeme historii statistiky (H_p), která pro každý zápas obsahuje statistiku každého ze soutěžících, pro n zápasů je tedy $|H_p| = 2n$. Prior definujeme jako $z_p = W_\infty(H_p)$. Ten pak se zvolenou vahou w_p , kterou lze interpretovat jako (ne nutně celočíselný) počet virtuálních zápasů se stářím nula, můžeme použít při výpočtu (zobecněných variant) vážené průměrné statistiky a váženého mediánu. K tomu stačí po převodu historie H na vektor vah \mathbf{w} a vektor zlomkových statistik \mathbf{z} rozšířit \mathbf{w} o prvek w_p a \mathbf{z} o prvek z_p .

3.5.1 Agregované statistiky

V následující části textu popíšeme, jak výše definované postupy aplikujeme pro jednotlivé statistiky. Při výpočtu se vždy omezuje jen na data až do nějakého času t . Během trénování a vyhodnocování je t vždy v minulosti a omezením tak garantujeme, že používáme jen informace, které bychom v té době měli dostupné. Predikovali-li bychom zápas v budoucnosti, omezení by se neuplatnilo a na vstupu výpočtu by tak byl celý dostupný dataset.

Výsledné agregované statistiky dělíme do tří skupin. Dlouhodobá skupina používá k výpočtům všechny zápasy do času t a je parametrizována poločasem rozpadu λ a silou prioru w_p . Krátkodobá skupina se omezuje jen na zápasy z posledních 30 dní předcházejících času t , poločas rozpadu volí ∞ a prior nepoužívá. Motivací k této skupině je podchycení krátkodobého zlepšení popř. poklesu formy. Dnešní skupina se skládá jen z jednoho prvku – průměru z posledního zápasu uskutečněného týž den před časem t , pokud takový zápas existuje. Myšlenka je podobná jako pro skupinu krátkodobou, jen s cílem reflektovat okamžitou situaci, např. nevolnost soutěžícího. Za zmínku stojí praktická poznámka – počítání dnešní skupiny agregovaných statistik vyžaduje mít k dispozici před každým zápasem aktualizovaný dataset, což může být v praxi těžko splnitelnou podmínkou, pokud např. soutěž zveřejňuje výsledky jen jednou denně.

Dlouhodobá i krátkodobá skupina mají totožnou strukturu. Obsahují váženou průměrnou statistiku pro

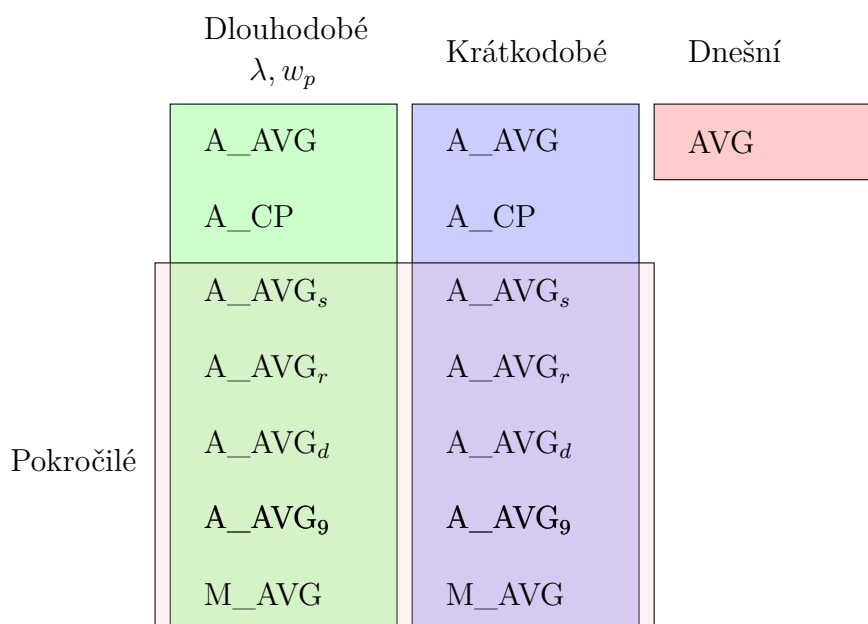
- průměr (A_AVG),
- úspěšnost zavírání (A_CP),
- průměr na podání (A_AVG_s),
- průměr na příjmu (A_AVG_r),
- průměr v rozhodujícím legu (A_AVG_d),
- průměr z prvních devíti šipek (A_AVG₉)

a vážený medián pro statistiku průměr (M_AVG). První dvě jmenované považujeme za základní, zbylých pět budeme nazývat pokročilé. Strukturu znázorňuje také diagram 3.6.

3.5.2 Feature-setsy

Feature-setem rozumíme určitou podmnožinu agregovaných statistik z předchozí kapitoly. Budeme ji popisovat pětici (λ, w_p, A, S, D) , kde λ je poločas rozpadu, w_p síla prioru (oboje parametry dlouhodobé skupiny) a A, S, D jsou přepínače, zda feature-set obsahuje pokročilé statistiky (A), krátkodobou skupinu (S) a dnešní skupinu (D).

Z výpočetních důvodů omezíme prostor všech feature-setů v prvních dvou parametrech jen na $\lambda \in \{30, 180, 365, \infty\}$ a $w_p \in \{0, 2, 10\}$. Poločas rozpadu tak dovolujeme postupně měsíc, půlrok, rok a bez omezení. Prior se buď nepoužívá a nebo má váhu dvou, resp. deseti zápasů. To společně s třemi přepínači čítá celkem $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$ různých variant.



Obrázek 3.6: Struktura agregovaných statistik.

Při přípravě feature datasetu (viz spodní část diagramu 3.1) předpokládáme agregované statistiky tak, abychom mohli libovolnou z variant sestavit.

3.6 Trénovací, validační a testovací sada

Důležitou vlastností našeho datasetu je časová složka. Chceme-li mít možnost modely aplikovat v praxi a porovnávat je např. s bookmakerem, musíme zajistit, že informace, které pro predikování výsledku zápasu používáme, jsou před jeho začátkem dostupné. V našem případě je tak nutno se nejen při výpočtech agregovaných statistik omezit na statistiky ze zápasů předcházejících, ale i dbát na to, že zápasy z testovací sady jsou pozdějšího data než zápasy z trénovací (a validační) sady.

Celý dataset rozdělíme na trénovací, validační a testovací sadu tak, že každá z nich odpovídá všem zápasům v nějakém časovém úseku a zároveň na sebe v tomto pořadí navazují. Konkrétně volíme trénovací sadu jako všechny zápasy od počátku datasetu až do 1. dubna 2022, validační sada obsahuje zápasy od 1. dubna 2022 do 1. července 2022 a testovací sada se skládá ze zbytku. Velikosti jednotlivých sad znázorňuje tabulka 3.1.

Sada	Počet zápasů	od	do
Trénovací	3418	12. dubna 2021	1. dubna 2022
Validační	908	1. dubna 2022	1. července 2022
Testovací	956	1. července 2022	19. září 2022

Tabulka 3.1: Přehled rozdělení datasetu na sady.

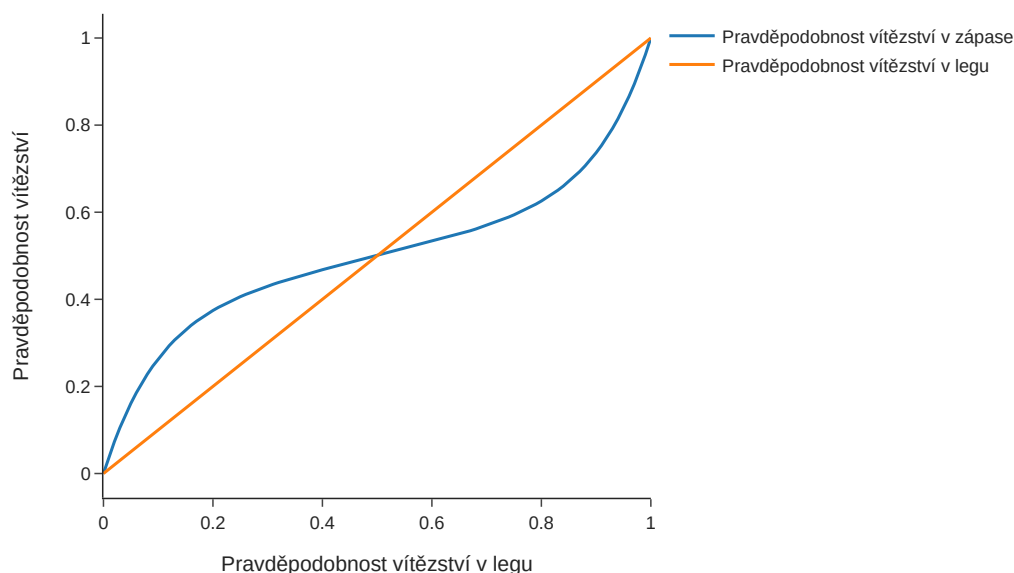
4. Modely

V této kapitole popíšeme všechny vyhodnocované modely. Obecně lze modely rozdělit do čtyř skupin. Jsou to ratingové modely (kapitoly 4.5 a 4.6), model bookmakera (kapitola 4.4), Markovův-fyzikální model (kapitola 4.7) a modely založené na statistikách (kapitola 4.8). Napříč skupinami pak modely dělíme dle toho, zda pracují se zápasem jako celkem, a nebo jej vnímají jen jako nezávislé legy (kapitola 4.1).

4.1 Kombinatorická struktura zápasu

V této práci se k zápasu v šipkách pokusíme přistoupit dvěma způsoby. První z nich aplikuje předpoklad nezávislosti. Vychází z toho, že se zápas skládá z až sedmi nezávislých legů, které se liší jen tím, který z hráčů začíná, a vítězem zápasu se stává ten, kdo jako první vyhraje čtyři legy. Při predikování zápasu tak od modelu požadujeme odhad pro oba druhy legů a ty pak zkombinujeme do pravděpodobnosti vítězství v zápase. Tento postup nám umožňuje odhadovat i jiné veličiny, např. počet legů v zápase nebo celkové skóre, těmi se však tato práce nezabývá.

Druhý způsob strukturu zápasu ignoruje a považuje jej za samostatnou jednotku. Takové modely pak dokážou predikovat pouze celkového vítěze.



Obrázek 4.1: Závislost pravděpodobnosti vítězství v zápase na pravděpodobnosti vítězství v legu pro dva vyrovnané hráče.

4.1.1 Nezávislé legy

Nechť hráč A v zápase začíná, l_a je pravděpodobnost že A vyhraje leg, ve kterém začíná, a l_b je pravděpodobnost, že B vyhraje leg, ve kterém začíná. Vzhledem k tomu, že se hráči střídají, jsou pravděpodobnosti, že A vyhraje jednotlivé legy $l_a, 1 - l_b, l_a, 1 - l_b, l_a, 1 - l_b, l_a$. Spočítat odtud pravděpodobnost vítězství soutěžícího A v celém zápase (m_a) je jen jednoduchá kombinatorická úloha.

Graf 4.1 znázorňuje, jak závisí pravděpodobnost vítězství v zápase (m_a) na pravděpodobnosti vítězství v legu (l_a) pro dva vyrovnané soutěžící ($l_a = l_b$). Jsou-li dva soutěžící vyrovnaní, je $l_a, l_b \geq \frac{1}{2}$ (pokud by snad začínání v legu mělo být nevýhodou, mohl by soutěžící své šipky z prvního kola hodit mimo terč, čímž by nevýhodu převedl na svého oponenta). Můžeme se tak soustředit jen na část grafu, kde je hodnota na ose x větší rovna $\frac{1}{2}$.

Začínat v zápase je výhodou ($m_a > \frac{1}{2}$), nikoli však tak velkou, jako začínat v legu ($m_a \leq l_a$). Výhoda však roste s kvalitou soutěžících – v extrému, ač jsou soutěžící vyrovnaní a legy, ve kterých začínají, vždy vyhrávají, nemůže B vyhrát, jelikož začíná jen ve třech ze sedmi legů.

4.2 Vstupy a výstupy

Abychom mohli modely vyhodnocovat unifikovaně, požadujeme od všech stejnou strukturu vstupů a výstupů. V kapitole 3 jsme již dataset detailně popsali, nyní však nastíníme jaká data a v jakém formátu modelům poskytujeme na úrovni ještě bližší implementaci.

Soutěžící	Soutěžící	Začínající	Vítěz	Ag. statistiky	Legy	
					Začínající	Vítěz
$s_{i,1}$	$s_{i,2}$	z_i	v_i	\mathbf{f}_i	$z_{i,1}^l$	$v_{i,1}^l$
					z_{i,n_i}^l	v_{i,n_i}^l

Tabulka 4.1: Struktura dat k zápasu.

Strukturu zápasu z datasetu (z libovolné sady) popisuje tabulka 4.1. Na úrovni zápasu obsahuje data o soutěžících (identifikátory $s_{i,1}, s_{i,2} \in S$), začínajícího soutěžícího ($z_i \in \{s_{i,1}, s_{i,2}\}$), vítěze zápasu ($v_i \in \{s_{i,1}, s_{i,2}\}$) a strukturu \mathbf{f}_i obsahující agregované statistiky z předchozích zápasů (viz kapitolu 3.5). Pak také pro každý z n_i legů, které se v zápase odehrály, zahrnuje data o začínajícím ($z_{i,j}^l$) a vítězi ($v_{i,j}^l$). Všimněme si, že musí platit $z_{i,1}^l = z_i$ a $v_{i,n_i}^l = v_i$, tedy že začínající v zápase je ten, kdo začíná v prvním legu, a vítěz posledního legu je zároveň vítězem zápasu. Kromě zmíněných informací ještě zápasy obsahují kurzy sázkové kanceláře, ty však využívá pouze model bookmakera, a proto je zde více nepopisujeme.

Pro vyhodnocovanou sadu jsou pak výstupem modelů pravděpodobnosti vítězství prvního soutěžícího v zápasech (značíme p_i) a pravděpodobnosti vítězství prvního soutěžícího v každém z legů (značíme $p_{i,1}^l, \dots, p_{i,n_i}^l$).

Modely, které operují nad legy, vytvářejí predikce pro zápas pomocí postupu popsaného výše v kapitole 4.1. Naopak modely pracující se zápasem jako celkem

nemohou predikce $p_{i,j}^l$ pro legy vytvářet vůbec. Část vyhodnocení, která je na nich závislá, pro takové modely tak neprobíhá.

4.3 Trénování a ladění hyperparametrů

Dříve než začneme rozborem jednotlivých modelů, zmiňme obecné principy trénování. Hlavním cílem je dosáhnout co nejlepších výsledků na testovací sadě (viz kapitolu 3.6), ty mají představovat odhad výkonnosti modelu v praxi na datech, která nezná, např. zápasy v budoucnosti. Testovací sadu proto při trénování a ladění hyperparametrů vůbec nepoužíváme.

Jelikož operujeme s jevy, u kterých je důležitá časová následnost, budeme pracovat s posloupností zápasů seřazených v čase od nejstarších po ty nedávne. Trénovací a validační sada byly úmyslně zvoleny tak, aby na sebe navazovaly (viz kapitolu 3.6), můžeme proto posloupnost všech zápasů z obou sad rozdělit tak, že všechny zápasy $i < v$ pocházejí z sady trénovací a zbytek $i \geq v$ z validační.

Pokud model vyžaduje nastavení hyperparametrů, využíváme k nalezení nejlepších hodnot knihovnu *Optuna* (Akiba a kol., 2019). Jako kritérium k optimalizaci vždy používáme log-loss predikcí zápasů na validační sadě, tedy

$$-\frac{1}{N_v} \sum_{i \geq v} (\mathbb{1}_{v_i=s_{i,1}} \log(p_i) + \mathbb{1}_{v_i \neq s_{i,1}} \log(1-p_i)),$$

kde $\mathbb{1}$ je indikátorová funkce a N_v je počet zápasů ve validační množině.

4.4 Bookmaker

Cílem sázkových kanceláří je vypisovat takové kurzy, které jsou v dlouhodobém horizontu pro sázejícího prodělečné. Nechť A je nějaký jev, např. vítězství soutěžícího v zápase, sázková kancelář jevu přiřazuje kurz K_a a jevu doplňkovému (vítězství druhého soutěžícího, označujeme B) kurz K_b .

Vsadíme-li s_a jednotek na jev A , s pravděpodobností $\mathbb{P}[A]$ získáme $s_a(K_a - 1)$ a s pravděpodobností $1 - \mathbb{P}[A]$ ztratíme s_a . Střední hodnota sázky je tedy

$$\mathbb{P}[A] \cdot s_a \cdot (K_a - 1) - (1 - \mathbb{P}[A]) \cdot s_a = s_a(\mathbb{P}[A] \cdot K_a - 1).$$

Ta je záporná právě tehdy, když $\mathbb{P}[A] \cdot K_a < 1$, tedy když $K_a < \frac{1}{\mathbb{P}[A]}$. Pokud je např. pravděpodobnost (resp. její odhad) $\frac{1}{2}$, sázková kancelář nezvolí $K_a = 2$, což by byl kurz pravděpodobnosti přesně odpovídající, ale $K_a < 2$. Čím je kurz menší, tím je zisk sázkové kanceláře větší. V opačném směru lze na kurzy (resp. jejich převrácené hodnoty) tedy nahlížet jako na horní odhady pravděpodobností.

Abychom mohli kvantifikovat, o kolik jsou kurzy nižší, budeme na ziskovost nahlížet v kontextu obou příležitostí. Předpokládejme, že provedeme sázky na jev A i na jev B tak, že nezávisle na realizované variantě je zisk/ztráta stejná. Toho docílíme například tak, že vsadíme $\frac{1}{K_a}$ jednotek na jev A a $\frac{1}{K_b}$ jednotek na jev B . Celková investice je $I = \frac{1}{K_a} + \frac{1}{K_b}$ a výplata je v obou případech rovna 1. Nezáleží tedy na tom, který z jevů se zrealizuje, sázková kancelář vždy získává rozdíl mezi naším vkladem a výplatou, což je $M = \frac{1}{K_a} + \frac{1}{K_b} - 1$. Tuto hodnotu označujeme *marže* (Buchdahl, 2017).

Naším cílem je z kurzů marži odstranit a získat tak \hat{p}_a , tedy odhad $P[A]$ sázkové kanceláře. Nabízí se přímočará varianta (nazývejme ji naivní) každý z kurzů vynásobit touž konstantou tak, aby součet převrácených hodnot byl roven jedné a ty tak tvořily pravděpodobnostní rozdělení. Snadno můžeme nahlédnout, že takovou konstantou je právě $M + 1$, jelikož

$$\frac{1}{K_a(M+1)} + \frac{1}{K_b(M+1)} = \frac{1}{M+1} \left(\frac{1}{K_a} + \frac{1}{K_b} \right) = \frac{1}{M+1} (M+1) = 1.$$

V praxi se však ukazuje, že rovnoměrné rozložení marže neodpovídá. Buchdahl (2016) zmiňuje, že sázkové kanceláře větší část marže přiřazují velkým kurzům a nazývá tento jev *favorite-longshot bias*. Zároveň navrhuje metody odmaržování, které tuto disproporci kompenzují (Buchdahl, 2017).

V této práci volíme metodu poměrnou (Buchdahl ji v textu označuje *Margin Weights Proportional to the Odds*), kdy kurz bez marže vypočítáme pomocí vzorce

$$K'_a = \frac{2K_a}{2 - MK_a}$$

a odhad pravděpodobnosti sázkové kanceláře je tedy

$$\hat{p}_a = \frac{2 - MK_a}{2K_a} = \frac{1}{K_a} - \frac{M}{2}. \quad (4.1)$$

Metoda je korektní, protože

$$\hat{p}_a + \hat{p}_b = \left(\frac{1}{K_a} - \frac{M}{2} \right) + \left(\frac{1}{K_b} - \frac{M}{2} \right) = \frac{1}{K_a} + \frac{1}{K_b} - M = 1.$$

Dle vzorce 4.1 lze na metodu též nahlížet v jistém smyslu jako na rovnoměrnou. M je totiž nadbytek pravděpodobnosti nad 1 a ten se rovnoměrně rozdělí mezi pravděpodobnosti implikované neodmaržovanými kurzy.

Pro každý zápas s dostupnými kurzy K_a a K_b jsme tedy schopni výše popsanou metodou získat odhad pravděpodobnosti vítězství hráče A (\hat{p}_a).

4.5 Elo

Rating Elo je systém přiřazování číselného ohodnocení výkonnosti hráčů. Původně vznikl pro šachy (Elo, 1978), princip je však obecný a lze využít i pro jiná klání dvou soutěžících. Soutěžícím je přiřazený rating $r_i \in \mathbb{R}^+$. Výsledek zápasu mezi a a b z pohledu soutěžícího a popisujeme číslem $S_{a,b}$, které nabývá hodnot

$$S_{a,b} = \begin{cases} 1, & \text{pokud A vyhrál,} \\ \frac{1}{2}, & \text{pokud nastala remíza,} \\ 0, & \text{pokud A prohrál.} \end{cases}$$

Očekávaný výsledek zápasu (pravděpodobnost vítězství) značíme $E_{a,b}$ a vypočítat lze dle vzorce

$$E_{a,b} = \frac{1}{1 + 10^{\frac{r_b - r_a}{100}}}. \quad (4.2)$$

Na základě očekávaného a realizovaného výsledku zápasu probíhá úprava ratingů obou soutěžících. Vítězi se rating zvyšuje, poraženému snižuje. Matematicky vyjádřeno

$$r'_a = r_a + K(S_{a,b} - E_{a,b}), \quad (4.3)$$

$$r'_b = r_b + K(S_{b,a} - E_{b,a}), \quad (4.4)$$

kde K popisuje maximální možnou změnu ratingu. Pro malé hodnoty K se rating vyvíjí pomalu, pro ty velké naopak může docházet k přehnaným reakcím.

Než využijeme Elo pro šipky, navrheme upravenou variantu, která zahrnuje do výpočtů výhodu začínání (v legu nebo zápase). Výhoda bude reprezentována konstantou D a vzorec 4.2 zobecníme na

$$E_{a,b} = \frac{1}{1 + 10^{\frac{r_b - (r_a + D)}{100}}}, \quad (4.5)$$

pokud začíná soutěžící A, jinak přičítáme D k r_b . Sullivan (2015) aplikoval Elo pro fotbal a navrhuje stejný vzorec, jen D interpretuje jako výhodu domácího prostředí.

Oba způsoby, jak budeme Elo využívat, mají společný postup trénování a vyhodnocování. Princip popíšeme na jednom z nich, kdy operujeme nad celými zápasy. Ten druhý považuje každý výsledek legu za samostatnou jednotku a každý zápas tak skýtá vícero příležitostí k úpravě ratingů. Pseudokód 4.1 a 4.2 platí pro oba z nich.

Data: Trénovací sada

Nalezni D

Inicializuj ratingy na hodnotu 1 000

Pro každý zápas:

 Aktualizuj ratingy

Algoritmus 4.1: Trénování Elo modelu.

Data: Zápasy k predikování

Pro každý zápas i :

 Pokud model predikuje legy:

 Pro každý leg j :

 Odhadni $p_{i,j}^l$

 Odhadni p_i (dle typu modelu přímo nebo kombinací $p_{i,j}^l$)

 Aktualizuj ratingy

Algoritmus 4.2: Predikování pomocí Elo modelu.

4.5.1 Zápas

Na trénovací sadě datasetu nejprve nalezneme hodnotu D . Odhadneme ji tak, že spočítáme poměr zápasů, které vyhrál začínající hráč, vůči celkovému počtu.

Protože zde využíváme jen trénovací sadu, výsledek 53.1 % se liší od hodnoty zmiňované v kapitole 3.3. Nakonec vyřešíme $E_{a,b} = 0.531$ pro dva vyrovnané hráče $r_a = r_b$ (na konkrétních hodnotách r_a a r_b nezáleží) s jedinou neznámou D . V našem případě vychází $D = 21.5$.

Před evaluací napočítáme rating ze zápasů z trénovací sady postupným aplikováním vzorců 4.3 a 4.4. Pak postupně pro každý zápas s využitím aktuálních ratingů spočítáme a uložíme $E_{a,b}$ (odpovídá p_i dle terminologie z 4.2) a na základě výsledku zápasu znovu rating pro další použití upravíme. Legy nijak nepoužíváme.

Abychom vůbec mohli ratingy upravovat, musíme znát konstantu K . Na tu nahlížíme jako na hyperparametr a hledáme takovou hodnotu, jež minimalizuje log-loss na validačním datasetu, jak popisujeme v kapitole 4.3. Prostor k prohledávání volíme $K \in (1, 50)$ a počet iterací pro Optunu nastavujeme na 500. Nejlepší nalezená hodnota je $K = 16.69$.

4.5.2 Leg

Analogicky postupujeme i pro druhou variantu. Pro výpočet D tentokrát nalezneme poměr počtu legů, ve kterých zvítězil začínající hráč, vůči celkovému počtu legů, který nabývá hodnoty 61.42 %, z čehož odvodíme $D = 80.77$. Postup trénování, predikování a ladění hyperparametrů je totožný. Zmíňme jen, že při predikování legů neupravujeme rating po každém z nich (viz algoritmus 4.2), což má reflektovat situaci v praxi, kdy model nemá dostupná data v reálném čase. Nejlepší nalezenou hodnotou K je v tomto případě 2.77.

4.5.3 Nedostatky

V kapitole 4.1 jsme popisovali, že pravděpodobnost vítězství v zápase dvou vyrovnaných hráčů je závislá na jejich výkonnosti. Ani jedna z variant Elo modelu, které jsme v předchozích odstavcích popsali, však tuto vlastnost nemá. Nezávisle na velikosti ratingů $r_a = r_b$ je vždy predikce p_i rovna konstantě.

4.6 Logistická regrese (rating)

Základní myšlenka modelu je shodná s Elo modelem, přiřazovat soutěžícím číselné ohodnocení výkonnosti $r_i \in \mathbb{R}$ a následně transformovat ratingy v pravděpodobnost. Pokud zvolíme transformační funkci jako

$$\sigma(r_a - r_b + D),$$

kde D opět odpovídá výhodě začínání, můžeme k fitování ratingů využít logistickou regresi.

Nejprve zdefinujeme zobrazení OHE : $S \rightarrow \{0,1\}^{|S|}$, které každému soutěžícímu $s \in S$ přiřazuje binární vektor pomocí *one-hot kódování*. Pro každý zápas pak vznikne vstupní vektor $\mathbf{x}_i = \text{OHE}(s_{i,1}) - \text{OHE}(s_{i,2})$ a výstup $y_i = \mathbb{1}_{v_i=s_{i,1}}$. Výhoda podání D do modelu bude vstupovat jako *bias*. Proto v případě, že v zápase začínal druhý hráč, data odpovídajícím způsobem obrátíme.

Nyní ověříme, že výše popsany postup odpovídá zvolené transformační funkci. Necht $\beta \in R^{|\mathcal{S}|}$ jsou váhy logistické regrese, b bias. Ze vzorce

$$P[Y_i = 1] = \sigma(\beta \mathbf{x}_i + b)$$

lze nahlédnout, že skalární součin vektorů β a \mathbf{x}_i je roven $\beta_{s_{i,1}} - \beta_{s_{i,2}}$, váhy logistické regrese lze tedy interpretovat jako ratingy r_i a bias jako D .

Na rozdíl od Elo ratingu, který lze upravovat inkrementálně po každém zápase, je třeba s datasetem rozšířeným o nový zápas model přetrénovat. Abychom snížili časovou náročnost predikování, nebudeme model přetrénovávat po každém zápase, ale dávkově. Velikost dávky reprezentujeme časovým intervalem T , při predikování všech zápasů v jedné dávce používáme rating natrénovaný ze všech zápasů z trénovací sady a všech předchozích dávek z vyhodnocované sady, viz pseudokód 4.3.

Data: Trénovací sada, Validací sada

Pro dávku d z validační sady:

Natrénuj model na datasetu ze zápasů z trénovací sady a dávek

$1, \dots, d - 1$

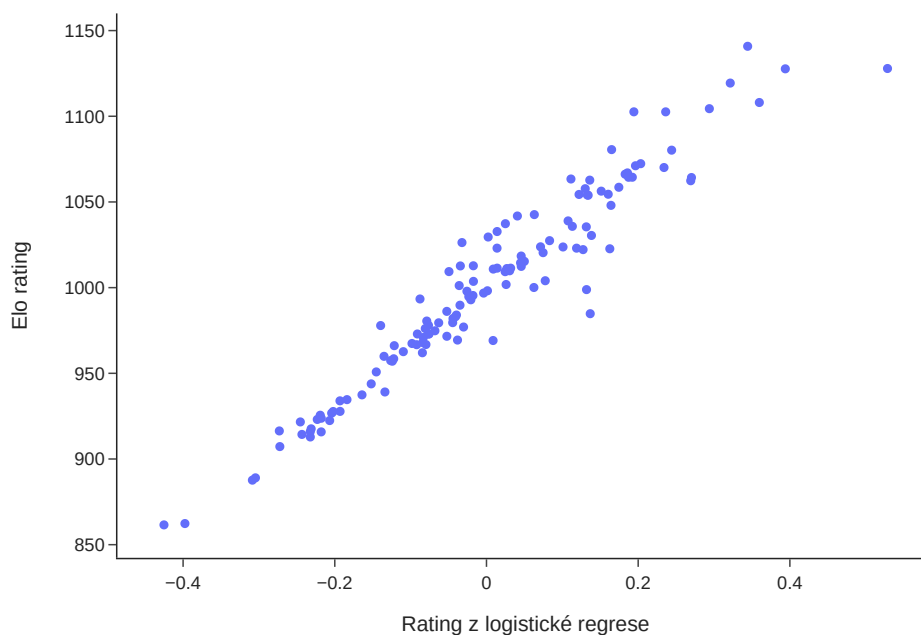
Pokud model predikuje legy:

Pro každý leg j :

Predikuj $p_{i,j}^l$

Predikuj p_i pro zápasy v dávce d (dle typu modelu přímo nebo kombinací $p_{i,j}^l$)

Algoritmus 4.3: Predikování pomocí ratingu z logistické regrese.



Obrázek 4.2: Porovnání Elo ratingu a ratingu z logistické regrese.

Stejně jako u Elo modelu implementujeme jednu variantu pro legy a jednu pro zápasy. Postup trénování je totožný, jen je v případě legů dataset větší a jeho prvky jsou výsledky legů.

Kromě intervalu T má model ještě jako hyperparametr sílu L2 regularizace. Používáme knihovnu *scikit-learn* (Pedregosa a kol., 2011), která při optimalizaci s použitím L2 regularizace minimalizuje hodnotu

$$C \sum -(y_i \log(\mathbb{P}[Y_i] = 1) + (1 - y_i) \log(\mathbb{P}[Y_i] = 0)) + \frac{1}{2} \|\beta\|_2^2, \quad (4.6)$$

kde C je inverzní síla regularizace. Čím je menší, tím je regularizace silnější.

Pro nalezení hyperparametrů jsme nejprve několika běhy ručně zúžili oblast pro vyhledávání a následně použili Optunu s 1 000 iterací. Nejlepší výsledky pro model založený na zápasech dosahovalo nastavení T na 96 minut a C na 0.0486. Pro model pracující s legy pak $T = 115$ minut a $C = 0.0106$. Vyhledávání probíhalo v oblasti T od 1 do 24 hodin a C v intervalu $[0.01, 0.3]$.

Graf 4.2 znázorňuje vztah Elo ratingu a ratingu z logistické regrese. Každý bod odpovídá jednomu soutěžícímu.

4.6.1 Neznámí soutěžící

Pokud se v predikované dávce vyskytuje soutěžící, který se v těch předchozích ani v trénovací sadě nevyskytoval, výše popsaná definice OHE by selhala. Funkci proto dodefinujeme tak, že pro vstupy jiné než z S vrací vektor samých nul. Takové chování lze interpretovat jako přiřazení neznámému soutěžícímu rating 0, z rovnice

$$\beta \mathbf{x}_i + b = \beta(\text{OHE}(s_{i,1}) - \text{OHE}(s_{i,2})) + b$$

totiž vznikne (pro $s_{i,1}$ neznámého) jen

$$0 - \beta_{s_{i,2}} + b.$$

Ve zbytku kapitoly dokážeme, že rating 0 je průměrným ratingem všech známých soutěžících. Taková volba je tedy pro nového soutěžícího, o kterém nemáme žádné informace, přirozená.

Lemma 1. *Pro váhy β logistické regrese, které v naší úloze minimalizují 4.6, platí*

$$\frac{\sum_{i=1}^n \beta_i}{n} = 0.$$

Důkaz. Budeme postupovat sporem a předpokládat, že průměr optimálních vah není nula. Nejprve dokažme, že při posunu všech vah o konstantu se $\mathbb{P}[Y_i = 1]$ nemění. Jak jsme již dříve ukázali, $\beta \mathbf{x}_i + b$ je kvůli volbě konstrukce \mathbf{x}_i rovno $\beta_{s_{i,1}} - \beta_{s_{i,2}} + b$. Přičteme-li ke každému β_i stejnou konstantu m , dostáváme

$$(\beta_{s_{i,1}} + m) - (\beta_{s_{i,2}} + m) + b = \beta_{s_{i,1}} - \beta_{s_{i,2}} + b,$$

z čehož rovnou plyne i stejná hodnota $\mathbb{P}[Y_i = 1]$ a tudíž nezměněná první složka optimalizované funkce 4.6.

Druhá složka nabývá hodnoty

$$\|\boldsymbol{\beta} + m\|_2^2 = \sum_{i=1}^n (\beta_i + m)^2,$$

což je v m kvadratická funkce s minimem pro

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = -n \cdot m,$$

neboli

$$\frac{\sum_{i=1}^n \beta_i}{n} = m.$$

Pokud tedy průměrná váha není rovna nule, existuje takový nenulový posun m , že se hodnota 4.6 zmenší, což je spor s optimalitou původních vah. □

4.7 Markovův-fyzikální model

Model nazýváme Markovův-fyzikální kvůli jeho dvěma klíčovými komponentám. Ve fyzikální části modelujeme bod dopadu šipky v závislosti na zamýšleném cíli a přechody mezi stavy hry pak popisujeme jako Markovův řetězec. Využijeme standardní model bodu dopadu šipky, který v kombinaci s vlastní metodou odvození rozptylu soutěžících a z dat odvozenou strategií umožňuje simulací získat distribuce počtu kol obou soutěžících v utkání a následně odvodit pravděpodobnosti vítězství.

Nejprve charakterizujeme součásti modelu a jejich interakce v obecné rovině. Detailnímu rozboru každé z nich budeme věnovat pozdější části této kapitoly.

Budeme se pohybovat v prostoru stavů (S_0, S, t) , kde S_0 značí stav skóre na začátku kola, $t \in \{1, 2, 3\}$ zbývající počet šipek a S skóre kola po odehrání $3 - t$ šipek. Nemodelujeme tedy interakci se soupeřem. Dále navrhne deterministickou strategii, která dvojici (S, t) přiřadí cíl $\boldsymbol{\mu}$ následující šipky. Náhodným faktorem je však bod dopadu šipky, v této práci jsme se rozhodli použít nejběžnější a zároveň nejjednodušší variantu, kdy bod dopadu šipky Z modelujeme jako náhodnou veličinu s normálním rozdělením a kovarianční maticí $\sigma^2 I$, viz vzorec 2.1. S jeho pomocí pak dokážeme spočítat $p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}(b)$, pravděpodobnost, že šipka trefové buňku $b \in B$ za podmínky, že soutěžící s rozptylem σ^2 mířil na bod $\boldsymbol{\mu}$, a v kombinaci s funkcí f (viz 1.1), která přiřazuje buňkám skóre, umíme popsat pravděpodobnosti přechodů mezi stavy.

Stavy a přechody mezi nimi definují Markovův řetězec. Opakovaně budeme simulovat průchody a sestrojíme distribuci počtu kol, než se soutěžící dostane do vítězného stavu. Pro výpočet pravděpodobnosti výsledků nějakého zápasu stačí pak jen pro oba soutěžící odhadnout σ , vyhodnotit distribuce počtu kol a jednoduchým porovnáním je zredukovat na pravděpodobnost vítězství.

4.7.1 Pravděpodobnosti přechodů

Jak jsme již v úvodu zmiňovali, bod dopadu šipky modelujeme jako

$$Z = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I). \quad (4.7)$$

Pro výpočet $p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}(b)$ musíme integrovat hustotu pravděpodobnosti přes plochy buněk. V této práci používáme stejně jako Baird (2020) metodu Monte Carlo. Pro každé $\boldsymbol{\mu}$ (konečnou množinu přípustných $\boldsymbol{\mu}$ popíšeme později) nasimulujeme celkem 1 000 000 hodů dle distribuce 4.7 a $p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}(b)$ odhadneme jako

$$p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}(b) = \frac{\text{počet hodů, které trefily } b}{1\,000\,000}.$$

Převést souřadnice dopadu šipky na buňku je snadná operace. Při výpočtech klademe počátek soustavy souřadnic do středu terče, všechny nasimulované body převedeme do polárních souřadnic a k určení výšeče a prstence pak jen stačí najít odpovídající intervaly, kam spadají úhel a vzdálenost.

Potenciálních cílů $\boldsymbol{\mu}$ definujeme jen konečně mnoho. Pro každou buňku mimo DB a SB volíme její střed, tedy průnik osy odpovídající výšeče a kružnice vedoucí prostředkem prstence. Navíc ještě čtyři body uvnitř buňky SB (každý ve směru jedné světové strany) a střed DB (viz obrázek 4.3).

Uvažme nyní nějaký stav (S_0, S, t) . Po hodu šipky může dojít buď k snížení S (nejběžnější možnost), k bustu a nebo k vítězství. Množinu všech buněk B proto rozdělíme do tří disjunktních množin $B^b \cup B^- \cup B^w = B$. Množina B^b obsahuje všechny buňky, které způsobí bust, konkrétně tedy

$$B^b = \{b \in B \mid f(b) > S \vee S - f(b) = 1 \vee f(b) = S \wedge (b \text{ není } double)\}.$$

Velikost B^w , množiny všech buněk, jejichž trefení vede k vítězství, je vždy nanejvýš jedna. B^w je neprázdná pro všechna S z množiny $\{2, 4, 6, \dots, 40\}$ a obsahuje buňku $(S/2, D)$. Jediným dalším případem je $S = 50$, kdy $B^w = \{DB\}$. Ve všech ostatních situacích je B^w prázdná množina. Buňky vedoucí ke snížení skóre jsou všechny zbylé.

Pokud zadefinujeme speciální koncový stav W , který značí vítězství (dosáhnutí doublem skóre nula), pravděpodobnosti přechodů mezi stavy popisují vzorce

$$p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}((S_0, S, 3), (S_0, S - s, 2)) = \sum_{\substack{b \in B^- \\ f(b)=s}} p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}(b), \quad s \in \{f(b) \mid b \in B\}, \quad (4.8)$$

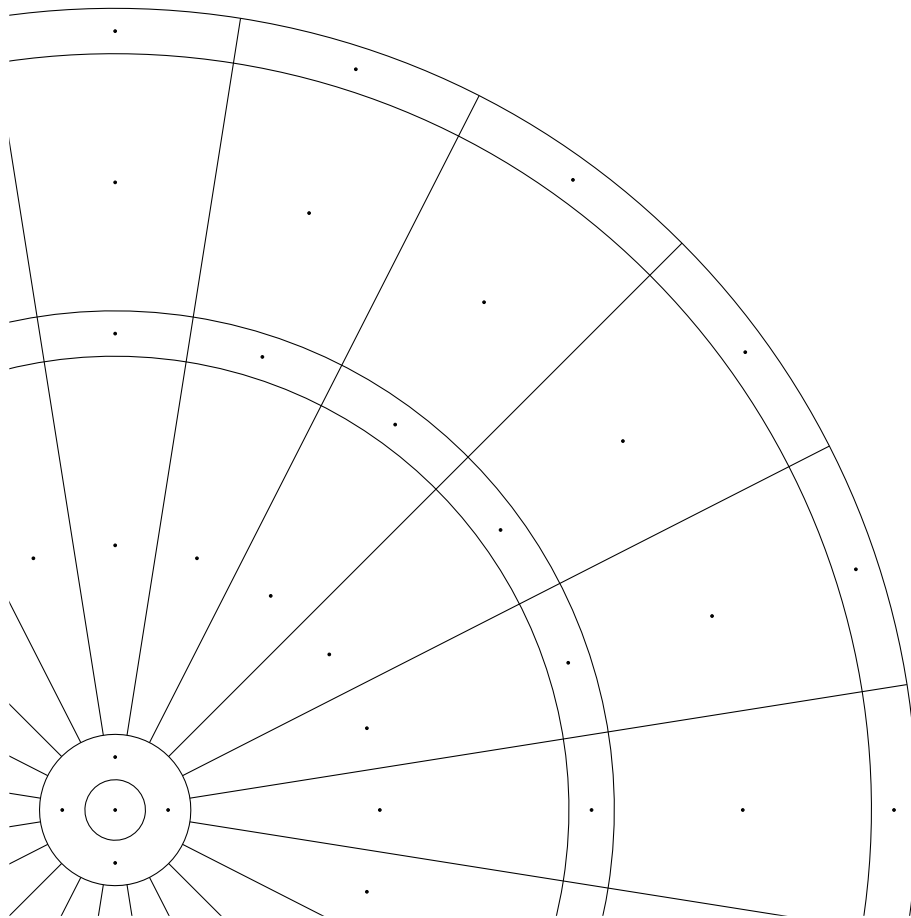
$$p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}((S_0, S, 2), (S_0, S - s, 1)) = \sum_{\substack{b \in B^- \\ f(b)=s}} p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}(b), \quad s \in \{f(b) \mid b \in B\}, \quad (4.9)$$

$$p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}((S_0, S, 1), (S - s, S - s, 3)) = \sum_{\substack{b \in B^- \\ f(b)=s}} p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}(b), \quad s \in \{f(b) \mid b \in B\}, \quad (4.10)$$

$$p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}((S_0, S, t), (S_0, S_0, 3)) = \sum_{b \in B^b} p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}(b), \quad (4.11)$$

$$p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}((S_0, S, t), W) = \sum_{b \in B^w} p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}(b), \quad (4.12)$$

$$p_{\boldsymbol{\mu}}^{\sigma}(W, W) = 1. \quad (4.13)$$



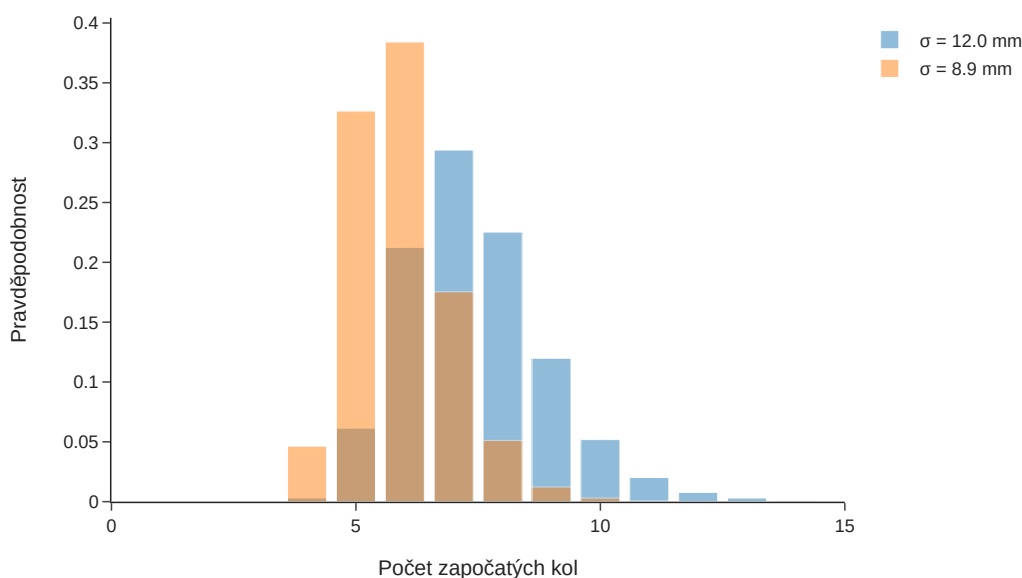
Obrázek 4.3: Množina přípustných cílů μ .

První dva vzorce odpovídají poklesu skóre po hodu první a druhé šipky, složka S_0 se nemění, jelikož kolo stále probíhá. Pokud při hodu třetí šipkou (vzorec 4.10) nedojde k bustu ani k vítězství, začíná další kolo, soutěžící má znovu k dispozici tři šipky a první složka stavu (záchytný bod při bustu) je stejná jako aktuální skóre. Vzorec 4.11 počítá pravděpodobnost bustu součtem přes všechny buňky z B_b , vzorec 4.12 odpovídá pravděpodobnosti vítězství a 4.13 reflektuje koncový stav.

Pro účely odhadnutí distribuce počtu kol, než se soutěžící dostane do stavu W, volíme v této práci simulaci. Začneme ve stavu (501, 501, 3), dle pravděpodobností přechodů náhodně vygenerujeme další stav a postup opakujeme do té doby, než se dostaneme do stavu W. Při průchodu si udržujeme počítadlo započatých kol, které zvyšujeme vždy, když vstupujeme do stavu (*, *, 3). Počet opakování simulace byl zvolen 100 000. Pravděpodobnost, že soutěžící s rozptylem σ^2 dosáhne skóre 0 po k započatých kolech, pak odhadneme jako

$$p^\sigma(k) = \frac{\text{počet iterací simulace, které skončily po } k \text{ započatých kolech}}{100\,000}.$$

Distribuci k pro dvě různé hodnoty σ znázorňuje obrázek 4.4.



Obrázek 4.4: Distribuce počtu započatých kol.

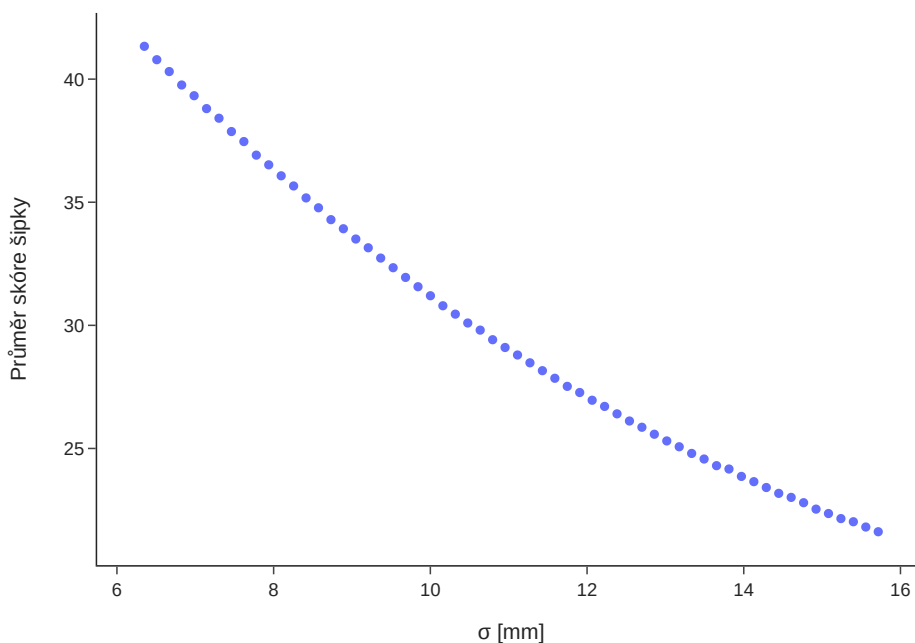
4.7.2 Odhad rozptylu

Výkonnost hráče je v modelu reprezentována jen pomocí rozptylu σ^2 , ten však v datech ze zápasů přímo nepozorujeme. Pozorujeme ale průměrné skóre na šipku, ze kterého transformaci na rozptyl navrhujeme.

Začneme proto v opačném směru. Budeme předpokládat, že soutěžící s rozptylem σ^2 míří na prostředek buňky (20, T), a spočítáme střední hodnotu skóre šipky dle vzorce

$$\mathbb{E}[s_\sigma] = \sum_{b \in B} f(b) \cdot p_{(20, T)}^\sigma(b).$$

Na $\mathbb{E}[s_\sigma]$ lze nahlížet jako na funkci σ , graf 4.5 zobrazuje její hodnoty pro různé volby $\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$. Stejný vztah pro několik hodnot σ zkoumal také Stern (1997).



Obrázek 4.5: Vztah standardní odchylky σ a průměrné hodnoty skóre šípky mířené na (20, T).

Vzhledem k výpočetní náročnosti budeme $\mathbb{E}[s_\sigma]$ nadále považovat jen za počátek lineární funkce procházející body

$$\{(\sigma_1, \mathbb{E}[s_{\sigma_1}]), (\sigma_2, \mathbb{E}[s_{\sigma_2}]), \dots, (\sigma_n, \mathbb{E}[s_{\sigma_n}])\},$$

kde $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$. Tyto body využijeme i k výpočtu inverze. Chceme-li získat σ odpovídající dané hodnotě $\mathbb{E}[s_\sigma]$, nalezneme takové i , že

$$\mathbb{E}[s_{\sigma_i}] \leq \mathbb{E}[s_\sigma] < \mathbb{E}[s_{\sigma_{i+1}}]$$

a σ spočítáme jako

$$\sigma = (1 - \alpha)\sigma_i + \alpha\sigma_{i+1}, \quad (4.14)$$

kde

$$\alpha = \frac{\mathbb{E}[s_\sigma] - \mathbb{E}[s_{\sigma_i}]}{\mathbb{E}[s_{\sigma_{i+1}}] - \mathbb{E}[s_{\sigma_i}]}.$$

Vzorce popisují lineární interpolaci.

Pro odhad σ daného soutěžícího tedy stačí získat odhad střední hodnoty skóre šípky, pokud by mířil na (prostředek) (20, T). Považovat statistiku průměr (A_AVG) za odhad $\mathbb{E}[s_\sigma]$ by byla chyba, ve finální fázi legu se soutěžící totiž snaží o zavření a nikoli o maximalizování skóre mířením na (20, T). Volíme proto statistiku průměr z prvních devíti šipek (A_AVG₉), která reflektuje jen počáteční část legu.

4.7.3 Strategie

Dosud jsme předpokládali znalost cílového bodu μ další šipky pro každý stav legu. Hledáním takového zobrazení (tzv. strategie) se již zabývala řada autorů a jejich přístupy jsme popsali v kapitole 2.1. Existuje několik úrovní toho, jak přesnou informaci o stavu hry obdrží strategie na vstupu. V této práci jsme se jako strategii rozhodli zvolit zobrazení $(S, t) \mapsto \mu$, které je pro všechny soutěžící stejné. Strategie tedy bere v potaz jen aktuální skóre a zbývající počet šipek, nikoli skóre oponenta ani skóre ze začátku kola.

Na rozdíl od zmiňovaných přístupů k hledání strategie, jejichž cílem je najít tu optimální, jsme se v této práci rozhodli postupovat jinak, deskriptivně. Detailní dataset (viz kapitolu 3.1) obsahuje pro každý ze zápasů posloupnost šipku po šipce a umožňuje nám tedy vyhodnotit, kam soutěžící reálně za jakých situací míří. Budeme tedy postupovat tak, že z dat pro každou dvojici (S, t) nalezneme cíl μ , pokusíme se volby interpretovat a výslednou strategii pak popíšeme jako kombinaci podmínek a výčtů.

Budeme pracovat s datasetem s celkovým počtem 436 544 záznamů. Každý z nich odpovídá jednomu hodu šipkou. Skládá se ze skóre S , zbývajícího počtu šipek t (oboje před hodem) a trefené buňky $b \in B$. Dataset rozdělíme dle (S, t) a pro každý stav tak získáme pozorování b_1, b_2, \dots, b_n . Tabulka 4.2 je příkladem pozorování pro $(S, t) = (32, 1)$, je zřejmé, že soutěžící v této situaci míří na $(16, D)$ a pokoušejí se tak o zavření. Všechny ostatní trefené buňky jsou bezprostředními sousedy $(16, D)$, viz obrázek terče 1.1. Všimněme si, že $(16, D)$ však není nejčastěji trefenou buňkou.

Buňka	Počet	Podíl
O	853	40.46 %
(16, D)	756	35.86 %
(16, SO)	454	21.54 %
(7, D)	22	1.04 %
(8, D)	9	0.43 %
(8, SO)	8	0.38 %
(7, SO)	6	0.28 %

Tabulka 4.2: Empirická distribuce trefených buněk při skóre 32 s jednou zbývající šipkou.

Abychom dokázali najít zamýšlený cíl obecně, zdefinujeme věrohodnostní funkci

$$\mathcal{L}_1(\mu | b_1, b_2, \dots, b_n) = \prod_{i=1}^n p_\mu^\sigma(b_i). \quad (4.15)$$

Funkci vyhodnotíme pro všechna přípustná μ (viz kapitolu 4.7.1) a tu hodnotu, která \mathcal{L}_1 maximalizuje, označíme za zamýšlený cíl.

Takový postup předpokládá, že všichni soutěžící vskutku dodržují stejnou strategii, která je zároveň nezávislá na ostatních veličinách mimo S a t . To v praxi jistě neplatí, Baird (2020) například popisuje situace, kdy se v závislosti na S_0 může soutěžící rozhodnout pro úmyslný bust. Dalším důvodem může být šikmo

zapíchnutá předchozí šipka, která fyzicky zabírá prostor v optimálním cíli a soutěží se tak raději rozhodne házet jinam.

Při hledání cíle proto v této práci volíme jinou věrohodnostní funkci

$$\mathcal{L}_2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \pi_1 | b_1, b_2, \dots, b_n) = \prod_{i=1}^n (\pi p_{\boldsymbol{\mu}_1}^\sigma(b_i) + (1 - \pi) p_{\boldsymbol{\mu}_2}^\sigma(b_i)). \quad (4.16)$$

Model odpovídá tomu, že si soutěžíci s pravděpodobností π volí cíl $\boldsymbol{\mu}_1$ a s pravděpodobností $1 - \pi$ cíl $\boldsymbol{\mu}_2$. Počet cílů bychom samozřejmě mohli zvyšovat, volbu dvou však považujeme již za dostatečně flexibilní. Opět hledáme takové $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \pi_1$, které \mathcal{L}_2 maximalizují. BÚNO předpokládáme, že $\pi_1 \geq \frac{1}{2}$.

Pro výpočet \mathcal{L}_2 chybí dodefinovat distribuci $p_{\boldsymbol{\mu}}^\sigma$. Ta je parametrizována rozptylem σ^2 . Jelikož má strategie být společná pro všechny soutěžíci, nastavíme hodnotu σ tak, aby odpovídala průměrnému soutěžicímu z datasetu. K výpočtu využijeme postup popsany v předchozí kapitole a jako střední hodnotu skóre šipky volíme prior statistiky průměr z prvních devíti šipek, jehož výpočet popisujeme v kapitole 3.5. Výsledné hodnoty jsou $\mathbb{E}[s_\sigma] = 31.52$ a $\sigma = 9.86$ mm.

V literatuře (Baird, 2020; Kohler, 1982) se strategie typicky dělí na dvě fáze. Na začátku hry, kdy je skóre vysoké, soutěžíci volí cíl tak, aby maximalizoval skóre každé šipky a co nejrychleji se tak přibližoval nule. V druhé fázi musí soutěžíci brát ohled na zavírání a na riziko bustu, volba cíle je proto komplikovanější. Baird (2020) potvrzuje, že takové dělení strategie je možné, a v závislosti na σ soutěžicího popisuje bod, kdy dochází ke změně mezi fázemi strategie funkcí

$$208.2 \cdot e^{-0.04171\sigma} + 59.94.$$

Pro volbu $\sigma = 9.86$ odpovídající průměrnému soutěžicímu je výsledek 197.9. Budeme proto v této práci pro všechna skóre $S \geq 200$ volit první fázi strategie, díky čemuž si můžeme dovolit pozorování pro všechny stavy (S, t) s $S \geq 200$ sloučit a maximalizací \mathcal{L}_2 hledat jedny společné hodnoty $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \pi_1$. Výsledkem optimalizace je $\pi_1 = 86\%$, $\boldsymbol{\mu}_1 = (20, T)$ a $\boldsymbol{\mu}_2 = (19, T)$, což odpovídá očekávání. Ve skóre maximalizující fázi strategie míří soutěžíci v naprosté většině případů na buňku s nejvyšším skóre (20, T).

Na základě $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \pi_1$ pro ostatní stavy ($S \in \{2, 3, \dots, 199\}$ a $t \in \{1, 2, 3\}$) jsme navrhli strategii, kterou popíšeme v následujících odstavcích. Při návrhu bylo hlavním cílem strategii formulovat pomocí interpretovatelných pravidel, nemusí tak nutně ve všech případech platit, že zvolený cíl je shodný s tím, který z dat vychází. Porovnání strategie a dat je k dispozici na konci kapitoly.

Výsledná strategie aplikuje pravidla v následujícím pořadí:

- $S \in \{2, 4, \dots, 40\}$ a libovolná hodnota t
Mířit na buňku $(S/2, D)$ s motivací zavřít.
- $S = 50$ a $t \in \{2, 3\}$
Mířit na (10, SO).

Ačkoli jde tento stav zavřít trefením DB, soutěžíci raději volí konzervativnější strategii a připraví si snadným hodem na single se skóre 10 příjemnější skóre na zavření.

- $S = 50$ a $t = 1$
Mířit na DB s motivací zavřít poslední šípkou v kole.
Vyplatí se zariskovat, o zavření se pokusit a nedat soupeři šanci v nadcházejícím kole.
- $S \leq 52$ a libovolná hodnota t
Mířit na takovou buňku (v, SO) , pro kterou je $S - v$ co nejvyšší mocnina dvojky.
Takové skóre je pak jistě menší rovno 32, lze jednou šípkou zavřít a zároveň opakovaná dělitelnost dvěma připouští další pokusy o zavření v případě, že soutěžící double mine a zasáhne single s polovičním hodnotou.
- $S \leq 60$ a libovolná hodnota t
Mířit na buňku $(S - 40, SO)$.
Důvod je stejný jako pro případ výše. Skóre 40 je dělitelné 2^3 a umožňuje tak tři pokusy o zavření.
- $S \in \{61, 62, \dots, 70\}$ a $t = 2$
Mířit na buňku $(S - 50, T)$.
Pokud soutěžící triple mine a trefí jen single $S - 50$, bude mít stále poslední šípkou v kole šanci zavřít ze skóre 50. Pokud triple trefí, bude mít šanci zavřít ze skóre $S - 3 \cdot (S - 50) = 2 \cdot (75 - S)$ standardním doublem na obvodu terče.
- $S \in \{61, 62, \dots, 80\}$ a $t \in \{1, 3\}$ nebo $S \in \{71, 72, \dots, 80\}$ a $t = 2$
Mířit na takovou buňku (v, T) , aby $S - v \leq 60$ (minutí triple a trefení single) vedlo na skóre, které lze zavřít kombinací šípky na single (≤ 20) a na double z obvodu terče (≤ 40).
Je-li možností více, mířit na tu z nich, jejíž trefení vede na skóre dělitelné co nejvyšší mocninou dvou. Výjimkou je navíc skóre $S = 68$, kdy soutěžící volí $(20, T)$ vedoucí na 8 místo $(16, T)$ vedoucí na 32. Domníváme se, že preference vyplývá z toho, že trefování $(20, T)$ soutěžící extenzivně trénují.
- $S \in \{81, 82, \dots, 98\}$ a libovolná hodnota t
Mířit na takovou buňku (v, T) , pro kterou platí $S - 3v \leq 40$.
Je-li možností více, mířit na tu z nich, jejíž trefení vede na skóre dělitelné co nejvyšší mocninou dvou.
- $S = 99$ a libovolná hodnota t
Pro toto skóre neexistuje žádná kombinace dvou šipek, která vede k zavření. Soutěžící volí mířit na $(19, T)$.
- $S = 100$ a libovolná hodnota t
Mířit na $(20, T)$.
Úspěch umožňuje rovnou další šípkou zavírat ze skóre 40.

- $S \in \{101, 104, 107, 110\}$, $t = 2$

Mířit na $((S - 50)/3, T)$.

Jediná možnost k zavření na dvě šipky je první šipkou snížit skóre na 50 a druhou trefit DB. Zároveň si všimněme, že skóre 102, 103, 105, 106, 108 a 109 na dvě šipky zavřít nelze. Jednou šipkou žádné z nich nelze snížit na 40 nebo méně a zbytkové třídy po dělení třemi všech zmíněných skóre se liší od zbytkové třídy 50, takže neexistuje ani triple, který by na 50 vedl.

- $S \in \{119, 122, 123, 125, 126, 128, 129\}$, $t = 3$

Mířit na buňku (v, T) s co nejvyšším v , aby $S - v$ bylo možné zavřít dvěma šipkami. Pokud by soutěžící mířili na $(20, T)$, minutí by vedlo na skóre zmíněná v předchozím odstavci. Pro 119, 123, 126 a 129 je tedy $v = 19$ a pro 122, 125 a 128 je $v = 18$.

- $S \in \{135\}$, $t = 3$

Mířit na střed. Pokud šipka trefí SB, stále je možné 110 zavřít dvěma šipkami.

- $S \in \{119\}$, $t = 1$

Mířit na $(19, T)$ raději než na $(20, T)$.

V případě minutí je skóre 100 na rozdíl od skóre 99 možné v příštím kole zavřít dvěma šipkami pomocí $(20, T)$ a $(20, D)$. Neúspěšný pokus o double trefený do $(20, SO)$ stále umožní poslední šipkou zavřít trefou do $(10, D)$.

- $S \in \{170, 171, \dots, 190\}$, $t = 1$

Mířit na takovou buňku (v, T) , aby $S - v$ bylo možné zavřít pomocí tří šipek v následujícím kole.

Třemi šipkami lze zavřít všechna skóre od 2 do 158 (včetně) a skóre 160, 161, 164, 167 a 170. Hodnota v je ve většině případů rovna 20. Výjimkami jsou ty situace, kdy by minutí vedlo na jiné než zmíněné skóre. Konkrétně tedy soutěžící volí $(18, T)$ pro 182 a 188, $(19, T)$ pro 179, 183, 186 a 189 a $(20, T)$ pro zbytek.

- $S \in \{195\}$, $t = 1$

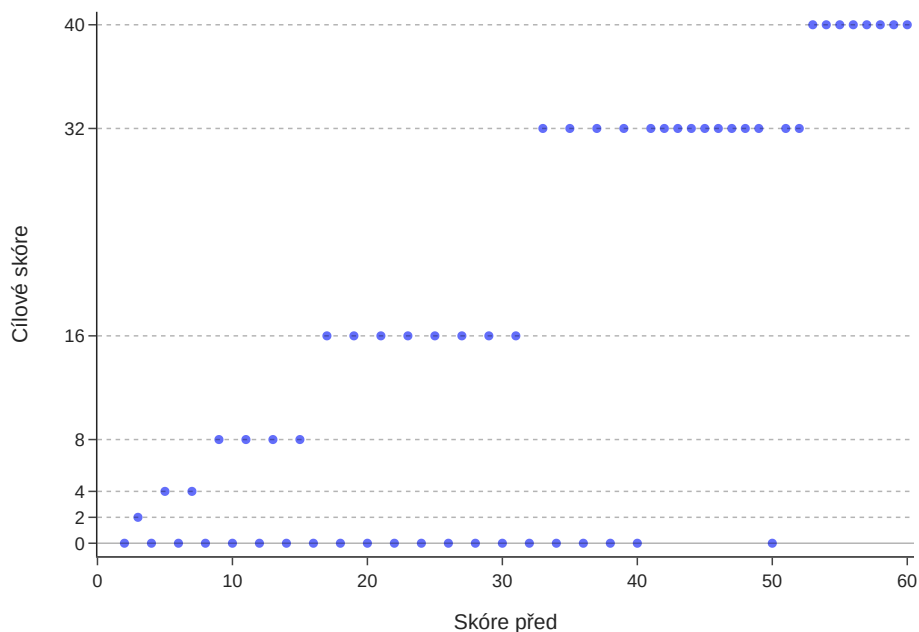
Mířit na DB. V případě trefení SB lze stále 170 v příštím kole třemi šipkami zavřít.

- Jinak

Mířit na $(20, T)$.

Slovy mířit na buňku myslíme volit μ jako její střed. Konkrétní cíl pro každý stav zobrazuje tabulka v příloze A.1. Alternativně lze strategii znázornit také tak, že pro stavy místo cíle μ zobrazíme skóre, kterého by soutěžící dosáhl, pokud by cíl trefil. Příkladem je obrázek 4.6 pro skóre $S \leq 60$ a jednu zbývající šipku. Ze všech sudých skóre do 40 včetně a skóre 50 soutěžící míří na nulu. Zbytek je rozdělený do intervalů určených nejbližší nižší mocninou dvou nebo 40.

Při navrhování strategie jsme vycházeli z hodnot μ_1, μ_2, π_1 nalezených pro jednotlivé stavy metodou maximální věrohodnosti, snažili jsme se však zároveň



Obrázek 4.6: Cílové skóre dle strategie pro $t = 1$.

pravidla volit co nejobecněji. V některých situacích se tak strategie od dat odchyluje. Strategii považujeme za přesnou, pokud určuje mířit na μ_1 , a přípustnou, pokud určuje mířit na μ_2 a zároveň $1 - \pi_2 \geq 30\%$. Celkem pracujeme s 594 stavy (skóre od 2 do 199 a tři varianty zbývajícího počtu šipek, tedy $198 \cdot 3$). Strategie je přesná v 527 případech, přípustná v 34 případech, pro 15 stavů je vzorek příliš malý (méně pozorování než 50) a pro 18 stavů není strategie přesná ani přípustná, viz tabulku 4.3.

4.7.4 Predikce

V této kapitole shrneme kompletní postup, jak model využíváme pro předpovídání pravděpodobnosti vítězství v legu. Jako první krok předpočítáme $\mathbb{E}[s_\sigma]$ a distribuci počtu kol $p^\sigma(k)$ pro 60 hodnot σ v intervalu 6 mm až 16 mm ($\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$). Ze zápasů předcházejících tomu, který chceme predikovat, pak postupem popsaným v kapitole 3.5 spočítáme agregovanou statistiku průměr z prvních devíti šipek (A_AVG_9) pro oba soutěžící a získáme tak odhady $\mathbb{E}[s_{\sigma_A}]$, $\mathbb{E}[s_{\sigma_B}]$ (A značí prvního a B druhého soutěžícího). Volíme poločas rozpadu $\lambda = 180$ dní a sílu prioru $w_p = 10$ zápasů. Postupem z kapitoly 4.7.2 pak odhady střední hodnoty skóre šipky převedeme na rozptyly σ_A^2 a σ_B^2 . Podobnou lineární interpolací pak aproximujeme i distribuce $p^{\sigma_A}(k)$ a $p^{\sigma_B}(k)$. Pokud například

$$\sigma_A = (1 - \alpha)\sigma_i + \alpha\sigma_{i+1},$$

pak

$$p^{\sigma_A}(k) = (1 - \alpha)p^{\sigma_i}(k) + \alpha p^{\sigma_{i+1}}(k), \quad 3 \leq k < 50.$$

S	t	Cíl dle strategie	μ_1	μ_2	π_1
61	3	(15, T)	DB	(15, T)	80 %
65	1	(11, T)	DB	(19, T)	84 %
65	3	(11, T)	DB	(11, T)	90 %
66	1	(14, T)	(10, T)	DB	63 %
66	3	(14, T)	(10, T)	(14, T)	77 %
75	2	(17, T)	SB	(17, T)	70 %
82	1	(14, T)	DB	(20, T)	83 %
82	3	(14, T)	SB	(14, SO)	97 %
88	3	(16, T)	(20, T)	(16, T)	92 %
90	3	(18, T)	(20, T)	DB	80 %
108	3	(20, T)	(19, T)	(20, T)	72 %
125	3	(18, T)	SB	(20, T)	91 %
132	3	(20, T)	DB	(20, T)	80 %
137	3	(20, T)	(19, T)	(20, T)	79 %
139	1	(20, T)	(19, T)	(20, T)	79 %
149	1	(20, T)	(19, T)	(20, T)	72 %
159	1	(20, T)	(19, T)	(20, T)	71 %

Tabulka 4.3: Stavy, kdy strategie neodpovídá datům.

Samozřejmě bychom mohli přímo pro odhady σ_A a σ_B distribuce nasimulovat, výrazně by se však zvýšila výpočetní náročnost.

Pravděpodobnost, že A porazí B v legu, ve kterém A začíná, lze pak dopočítat snadno jako

$$l_a = \sum_{\substack{k \leq l \\ 3 \leq k < 50 \\ 3 \leq l < 50}} p^{\sigma_A}(k)p^{\sigma_B}(l).$$

Kdykoli A dosáhne skóre nula v dřívějším nebo stejném kole jako B (výhoda začínání), tak vítězí. Pro pravděpodobnost, že B porazí A v legu, ve kterém B začíná, je výpočet analogický

$$l_b = \sum_{\substack{l \leq k \\ 3 \leq k < 50 \\ 3 \leq l < 50}} p^{\sigma_A}(k)p^{\sigma_B}(l).$$

Ač kol může být teoreticky i více než 50, pro průměrného hráče z datasetu vychází $\sum_{k=3}^{15} p^{\sigma}(k) = 99.9998 \%$, hodnotu 50 proto považujeme za dostatečně vysokou mez. Minimální počet kol je 3, za dvě kola lze totiž dosáhnout jen skóre větších či rovných $501 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 20 = 141$.

Pravděpodobnost vítězství v zápase pak z l_a a l_b dopočítáme dle postupu v kapitole 4.1.

4.7.5 Nedostatky

Tento model na rozdíl od obou předchozích ratingových modelů netrpí neschopností reflektovat absolutní úroveň výkonnosti. Pro dva vyrovnané soutěžící

se predikce l_a a l_b liší dle σ tak, že s rozptylem jdoucím k nule roste pravděpodobnost vítězství v legu k jedné. V extrému totiž oba soutěžící vždy dosáhnou skóre nula po třech kolech a tak ten, který začíná první, vždy zvítězí.

Za nedostatky by se daly považovat téměř všechny předpoklady. V kapitole 4.7.1 předpokládáme jednoduchý model šipky nezávislý na tom, kam soutěžící míří. Argumentem proti je skutečnost, že soutěžící se při tréninku soustředí na některá místa více (například (20, T)), a lze se tak domnívat, že se přesnost dle cíle liší. Za cenu většího množství parametrů by tento problém šlo vyřešit složitějším modelem 2.2 (Haugh a Wang, 2020).

Při návrhu strategie předpokládáme, že se všichni soutěžící chovají stejně. Takový předpoklad pravděpodobně v praxi také neplatí. Mohou existovat situace s několika téměř ekvivalentními možnostmi volby cíle a soutěžící se tak mohou rozhodovat i podle toho, kterou z variant mají lépe natrénovanou. Někteří soutěžící například volí cíl (10, SO) při skóre 50, zatímco jiní preferují cíl (18, SO). Obě možnosti vedou na skóre, která lze jednou šipkou zavřít, a zároveň jsou obě dělitelná vysokou mocninou dvou. Pokud bychom měli pro každého soutěžícího speciální model hodů šipky (viz předchozí odstavec), mohli bychom i strategii soutěžícím přizpůsobovat.

V kapitole 4.7.1 jsme zvolili konečnou množinu potenciálních cílů. Cíle jsou voleny jako středy buněk. Při zavírání skóre, jejichž polovina je lichá (např. 22), budou však soutěžící typicky mířit na vnější stranu dublu, protože je výhodnější minout a moci zavřít dalším pokusem než trefit single a dostat se na liché skóre. Haugh a Wang (2020) volí členění výrazně jemnější.

Konečně strategie vůbec neuvažuje skóre z počátku kola a skóre oponenta, která mohou mít na optimální volbu vliv. V praxi běžně existují situace, kdy soutěžící volí cíl jinak v závislosti na tom, zda oponent v nadcházejícím kole může zavřít.

4.8 Modely založené na statistikách

Nejpočetnější skupinou modelů jsou modely založené na statistikách. Jedná se o různé typy klasifikátorů odhadujících pravděpodobnost vítězství na základě agregovaných statistik na vstupu. U takových modelů pak typicky nedokážeme predikce snadno odůvodnit, protože vznikají složitou kombinací vstupních příznaků, na rozdíl od modelů z předchozích kapitol však mohou postihnout komplexnější interakce soutěžících a jejich schopností. Ratingové modely například vynucují lineární uspořádání a relace „být lepší než“ je tak nutně tranzitivní.

Všechny modely pracují nad stejným datasetem, liší se tedy jen typ klasifikátoru. Dataset vychází ze struktury popsané v kapitole 4.2, agregované statistiky f_i se liší dle zvoleného feature-setu. Jeho konkrétní volba není pro popis principu důležitá a budeme se jí zabývat v kapitole 4.8.2.

Předpokládejme volbu feature-setu obsahující jak pokročilé tak krátkodobé a dnešní agregované statistiky (viz kapitolu 3.5.2). Před kódy krátkodobých statistik přidáváme prefix $S_$, abychom je odlišili od těch dlouhodobých, zbytek značení odpovídá tomu v kapitole 3.5.2. Vstupní příznaky modelů většinou přesně odpovídají definicím agregovaných statistik, v případě statistiky z dnešní skupiny však ještě provádíme jednoduchou transformaci podílem s dlouhodobým průměrem.

Dlouhodobé

- průměr (A_AVG),
- úspěšnost zavírání (A_CP),
- průměr na podání (A_AVG_s),
- průměr na příjmu (A_AVG_r),
- průměr v rozhodujícím legu (A_AVG_d),
- průměr z prvních devíti šipek (A_AVG₉),

Krátkodobé

- průměr (S_A_AVG),
- úspěšnost zavírání (S_A_CP),
- průměr na podání (S_A_AVG_s),
- průměr na příjmu (S_A_AVG_r),
- průměr v rozhodujícím legu (S_A_AVG_d),
- průměr z prvních devíti šipek (S_A_AVG₉),

Dnešní

- poměr dnešního a dlouhodobého průměru ($\frac{\text{AVG}}{\text{A_AVG}}$).

Výše popsané příznaky vstupují do modelu jednou pro každého soutěžícího v zápase ($s_{i,1}$ a $s_{i,2}$ v tomto pořadí, dle notace z kapitoly 4.2). Pokud se jedná o model založený na zápasech, je vstupním příznakem ještě binární hodnota, zda soutěžící $s_{i,1}$ v zápase začínal ($z_i = s_{i,1}$). Alternativou pro modely pracující s legy je binární hodnota, zda začínal v legu ($z_{i,j}^l = s_{i,1}$). Vstupních příznaků pro nejširší feature-set je tedy celkem $2 \cdot 15 + 1 = 31$.

Na výstupu očekáváme hodnotu v intervalu $(0, 1)$ reprezentující odhad pravděpodobnosti, že soutěžící $s_{i,1}$ zápas (resp. leg) vyhraje.

Jako klasifikátory jsme vyzkoušeli rozhodovací stromy, neuronové sítě, logistickou regresi, k -nejbližších sousedů (k -NN) a *support vector machines* (SVM).

4.8.1 Rozhodovací stromy

Knihoven implementujících rozhodovací stromy existuje více, v této práci jsme se rozhodli zvolit *LightGBM* (Ke a kol., 2017), konkrétně model `LGBMClassifier` s prostorem hyperparametrů

- `max_depth`
Maximální hloubka stromu, od 1 do 10.

- `min_data_in_leaf`
Minimální počet vzorků v listu, od 100 do 10 000 po 100.
- `feature_fraction`
Jak velkou část příznaků každý strom používá, od 0.1 do 1 po 0.1.
- `bagging_fraction`
Jak velkou část dat každý strom používá, od 0.1 do 0.9 po 0.1.
- `bagging_freq`
Jak často při trénování omezujeme použitá data (viz `bagging_fraction`), nastaveno na hodnotu 1.
- `min_gain_to_split`
Omezuje dělení uzlů stromu, od 0 do 15.
- `learning_rate`
Váha každého nově přidávaného stromu (Friedman, 2001).
- `num_leaves`
Maximální počet listů stromu, od 8 do 2000 po 10.
- `lambda_1`
Váha L1 regularizace, od 0 do 100 po 5.
- `lambda_2`
Váha L2 regularizace, od 0 do 100 po 5.
- `early_stopping_round`
Kolik iterací bez zlepšení vyhodnocovaného kritéria je dovoleno před přerušením trénování, nastaveno na hodnotu 10.

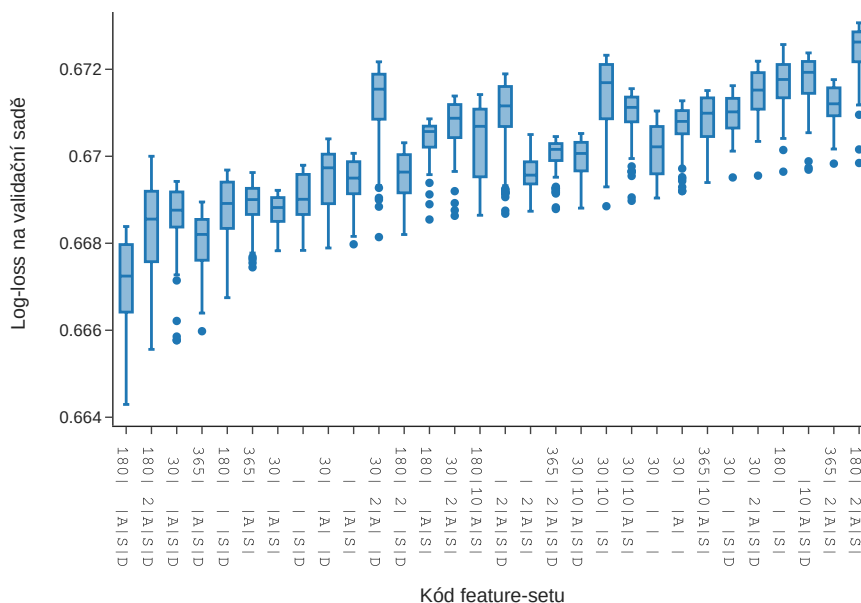
Zbytek parametrů ponecháváme na jejich přednastavených hodnotách. Jako kritérium k přerušení tréninku (*early stopping*) volíme log-loss vyhodnocenou na validační sadě.

4.8.2 Výběr nejlepšího feature-setu

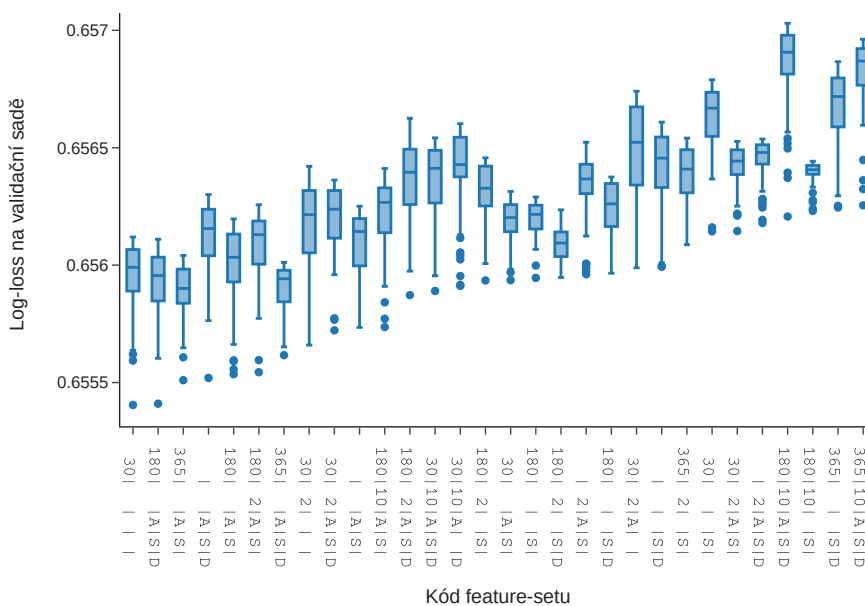
Model popisujeme jako první proto, že jej využíváme k nalezení nejlepšího feature-setu, který budeme ve zbytku práce používat. Postupujeme tak, že pro všech 96 feature-setů popsaných v kapitole 3.5.2 provedeme 1 000 iterací prohledávání hyperparametrů pomocí Optuna s cílem minimalizovat log-loss na validační sadě při predikování zápasů (u modelů založených na legu používáme transformaci z kapitoly 4.1). Výsledky ze všech 96 000 iterací rozdělených dle feature-setu pro model založený na zápasu zobrazuje graf 4.7. Jak nejlepšího průměrného výsledku, tak nejlepšího absolutního výsledku dosáhly modely z feature-setu využívajícího všechny skupiny statistik s poločasem rozpadu 180 dní bez prioru. Volbu všech statistik a půlročního poločasu rozpadu považujeme za nepřekvapivou, zajímavou

je však absence prioru, která se zdá být mezi nejlepšími feature-sety systematickou. Domníváme se, že v agregovaných statistikách se schopnosti hráče rychle projeví již po malém množství zápasů a prior tak model zbytečně vychyluje.

Tentýž postup jsme aplikovali i pro model založený na legu a výsledky zobrazuje graf 4.8. Ač se pořadí oproti předchozím výsledkům mírně liší, rozdíly jsou jen malé a pro jednoduchost tak pro obě varianty modelů volíme tentýž feature-set obsahující jak pokročilé, tak krátkodobé a dnešní agregované statistiky s parametry $\lambda = 180$ a $w_p = 0$.



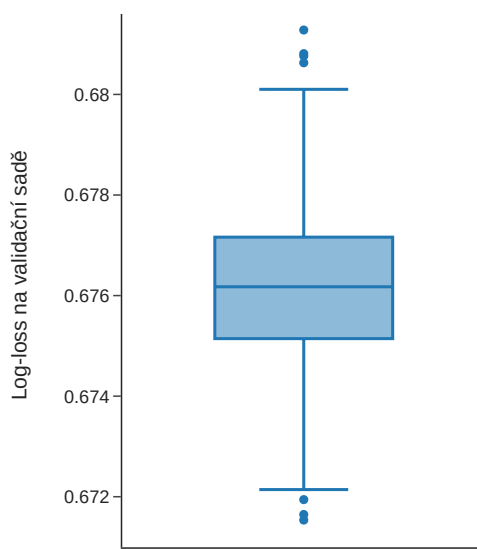
Obrázek 4.7: Hodnoty log-loss dle feature-setu pro modely založené na zápasu.



Obrázek 4.8: Hodnoty log-loss dle feature-setu pro modely založené na legu.

4.8.3 Neuronové sítě

Oblast neuronových sítí je obecně široká, v této práci však používáme pouze neuronové sítě dopředné. Síť implementujeme s použitím knihoven *PyTorch* a *PyTorch Lightning* (Paszke a kol., 2019; Falcon a kol., 2020). Experimentovali jsme s počtem vrstev, počtem neuronů, hodnotou *dropout*, *learning rate* a *batch size*. Ve výsledcích se však ve velké míře projevovala náhodná inicializace a modely s téměř identickými hyperparametry dosahovaly diametrálně odlišných výsledků. Rozhodli jsme se proto všechny parametry zafixovat a jen opakovaně trénovat tentýž model s různými volbami seedu, abychom vliv náhodné inicializace lépe prozkoumali.



Obrázek 4.9: Boxplot hodnot log-loss na validační sadě neuronových sítí se stejnými hyperparametry a různými hodnotami seedu.

Zvolili jsme architekturu s

- transformací všech příznaků na vstupu odečtením průměru a vydělením standardní odchylkou (`sklearn.StandardScaler`),
- jednou skrytou vrstvou s 64 neurony,
- bez dropoutu,
- aktivační funkcí ReLU za skrytou vrstvou,
- *learning rate* 0.0001,
- *batch size* 64,
- aktivační funkcí sigmoid na výstupu

a vyhodnotili log-loss predikcí výsledků zápasů z validační sady pro 1 000 běhů s náhodnými seedy. Stejně jako pro rozhodovací stromy jsme využívali *early stopping* přerušující trénování po 10 epochách bez zlepšení log-loss na validační množině (knihovna *PyTorch Lightning* tento parametr nazývá `patience`). Nejlepší model dosáhl hodnoty 0.672, ten nejhorší hodnoty 0.681 a medián všech je 0.676,

viz boxplot 4.9. Interpretovat tento rozsah bude snazší po přečtení kapitoly 5 s vyhodnocením všech modelů. Vzhledem k časové náročnosti trénování a neuspokojivým výsledkům jsme experiment provedli pouze pro model založený na zápasu.

4.8.4 Logistická regrese, k -NN, SVM

Pro všechny zbylé modely jsme využívali implementace z knihovny *scikit-learn* (Pedregosa a kol., 2011), konkrétně `linear_model.LogisticRegression`, `neighbors.KNeighborsClassifier` a `svm.SVC`. Díky unifikovanému rozhraní pro trénování a predikování je práce s modely jednoduchá. Pro každý typ modelu je třeba jen specificky definovat prostor hyperparametrů k prohledávání.

Jediným hyperparametrem logistické regrese je konstanta C reprezentující inverzní sílu L2 regularizace (již jsme zmiňovali i v kapitole 4.6). Interval prohledávání volíme od 0.01 do 2. Pro k -nejbližších sousedů hledáme hodnotu k od 2 do 500 a způsob jejich vážení (parametr `weights`). *Scikit-learn* umožňuje dvě předdefinované varianty. Při volbě `uniform` mají všichni sousedé stejnou váhu a při volbě `distance` je váhou převrácená hodnota vzdálenosti. Stejně jako u logistické regrese i u SVM hledáme hodnotu C (se stejným významem) v intervalu od 0.01 do 2. Umožňujeme navíc volit kernel (lineární, polynomiální, rbf) a v případě polynomiálního kernelu také stupeň polynomu od 1 do 3.

Pro každý typ modelu a každou variantu (založenou na zápasu, resp. legu) provádíme 100 iterací prohledávání pomocí *Optuna*.

5. Výsledky

V této kapitole představíme výsledky a porovnání modelů z předchozích kapitol. Vyhodnocení provedeme na testovací sadě, kterou jsme během trénování modelů a optimalizace hyperparametrů nevyužívali. Výsledky jsou tak odhadem chování modelů na nových, neznámých datech. Současně s nimi budeme prezentovat i výsledky na sadě validační, což nám umožní vyhodnotit schopnost generalizace. Výsledky z validační sady jsou však pro modely, u kterých na základě nich probíhala volba hyperparametrů, silně zkreslené.

Označme y_i binární hodnotu, zda soutěžící $s_{i,1}$ vyhrál v i -tém zápase vyhodnocovaného datasetu, tedy (dle notace z kapitoly 4.2)

$$y_i = \mathbb{1}_{s_{i,1}=v_i}$$

a podobně $y_{i,j}^l$ pro leg

$$y_{i,j}^l = \mathbb{1}_{s_{i,1}=v_{i,j}^l}.$$

Modely vyhodnocujeme na metrikách reflektujících kvalitu predikcí výsledků zápasů (pro všechny modely) a výsledků legů (nelze pro modely založené na zápasech). Také definujeme strategii sázení a zpětně spočítáme, jak by si modely vedly, pokud by strategii aplikovaly vůči kurzům sázkové kanceláře.

Metrikami pro zápasy jsou log-loss (LL) a přesnost (*accuracy*, ACC) definované jako

$$\begin{aligned} \text{LL} &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i \log(p_i) + (1 - y_i) \log(1 - p_i)), \\ \text{ACC} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \mathbb{1}_{p_i > 0.5}. \end{aligned}$$

Analogicky definujeme log-loss (LL_l) a přesnost (ACC_l) pro legy

$$\begin{aligned} \text{LL}_l &= -\frac{1}{\sum_{i=1}^n n_i} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (y_{i,j}^l \log(p_{i,j}^l) + (1 - y_{i,j}^l) \log(1 - p_{i,j}^l)), \\ \text{ACC}_l &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n n_i} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j}^l = \mathbb{1}_{p_{i,j}^l > 0.5}. \end{aligned}$$

Strategie sázení pro každý zápas rozhoduje zda sázet (na jakého soutěžícího) a kolik sázet. V kapitole 4.4 jsme spočítali střední hodnotu sázky (EV) s vkladem s na kurz K pro jev, který nastane s pravděpodobností p , jako

$$\text{EV} = s(pK - 1).$$

Střední hodnota návratnosti (RoI, poměr zisku a vkladu) je tedy $\text{RoI} = pK - 1$. Pro každý zápas vyhodnotíme RoI sázky na každého ze soutěžících dle pravděpodobnosti určené modelem a sázku provedeme právě tehdy, když $\text{RoI} > 0.01$. Všimněme si, že v jednom zápase může mít kladnou hodnotu RoI sázka na nejvýše jednoho soutěžícího. Opak by implikoval, že sázková kancelář nabízí kurzy se zápornou marží, tedy jistý zisk bez rizika při sázkách na oba soutěžící. Důkaz je snadný, pokud $pK_a - 1 > 0$ a $(1 - p)K_b > 0$, pak $K_a > \frac{1}{p}$ a $K_b > \frac{1}{1-p}$, tedy

$\frac{1}{K_a} < p$ a $\frac{1}{K_b} < 1 - p$, což implikuje $\frac{1}{K_a} + \frac{1}{K_b} - 1 < 0$, kde levá strana je přesně definice marže. Vklad sázky volíme konstantní, vždy sázíme 1 jednotku. Pokud soutězíci, na kterého jsme vsadili, zvítězil, je zisk $s(K - 1)$, v opačném případě ztrácíme s .

Výsledkem simulace sázení jsou pak veličiny

- celkový počet sázek,
- celkový vklad (suma s přes všechny sázky),
- celková realizovaná návratnost RoI_r (suma zisků a ztrát vydělená celkovým vkladem),
- celková očekávaná návratnost RoI_e (suma EV vydělená celkovým vkladem).

V předchozích kapitolách jsme popsali různé modely a postupy jejich trénování. U většiny z nich byla součástí i optimalizace hyperparametrů pomocí nástroje Optuna. Cílem bylo vždy najít takové hyperparametry, pro které model dosahuje nejlepších výsledků na metrice LL vyhodnocené na validační sadě. Každý model budeme tedy na testovací sadě vyhodnocovat jen s nejlepšími nalezenými hyperparametry. Jejich hodnoty obsahuje tabulka v příloze A.2. Celkem tedy vyhodnotíme model bookmakera, dva Elo ratingové modely, dva ratingové modely pomocí logistické regrese, jeden Markovův-fyzikální model a devět modelů založených na statistikách (různé klasifikátory). Vyhodnotíme také model predikující pravděpodobnost začínajícího soutězíciho jako průměr datasetu, tedy poměr zápasů, které vyhrál začínající soutězíci, a celkového počtu zápasů (viz kapitolu 4.5.1).

Tabulka 5.1 poskytuje přehled výsledků všech modelů, tedy hlavní výsledek této práce. Pro všechny modely s výjimkou modelu prvního (tedy včetně modelu bookmakera) platí, že log-loss na validační sadě je vyšší než na sadě testovací, ačkoli na validační sadě pro většinu z modelů probíhal výběr hyperparametrů a testovací sada je pro modely neznámá. Tuto skutečnost si vysvětlujeme tím, že skladba zápasů ve validační sadě je v určitém smyslu obtížnější predikovat. S rostoucím počtem zápasů bychom pro model bookmakera očekávali srovnání obou hodnot a pro modely, u kterých probíhala optimalizace hyperparametrů, obrácení nerovnosti.

Nejlepším modelem dle všech kritérií (LL, ACC, Val LL, RoI_r , v tabulce 5.1 hodnoty tučně) jsou rozhodovací stromy založené na legu. Společně s variantou založenou na zápasu jde o jediné dva modely, které dosáhly mírně lepší log-loss na testovací sadě než model bookmakera. Obecně lze říci, že modely vycházející z agregovaných statistik dosahují výrazně lepších výsledků než modely ratingové. Jedinou výjimkou je neuronová síť, která na validační sadě dosáhla výsledků velmi dobrých, na testovací sadě však ze všech modelů skončila druhá nejhorší.

Oba typy ratingových modelů jsou z pohledu výsledků srovnatelné, Elo model je jen mírně lepší. Vzhledem k tomu, že je jeho používání implementačně i časově výrazně méně náročné, považujeme jej z celkového pohledu za vhodnější.

Mírně lepších než očekávaných výsledků dosáhl Markovův-fyzikální model. Díky tomu, že využívá statistiku průměr (resp. průměr z prvních devíti šipek), stačí pro odhadnutí schopností soutězíciho menší počet zápasů než pro modely ratingové, které vycházejí jen z celkových výsledků zápasů (resp. legů). Model je

Model	Typ	LL	ACC	Val LL	Sázek	Vklad	RoI _e	RoI _r
STROM	L	0.666	60.4 %	0.665	578	578	12.9 %	4.5 %
STROM	Z	0.666	60.3 %	0.668	522	522	13.2 %	3.4 %
BOOK	Z	0.668	59.2 %	0.681	0	0	0.0 %	0.0 %
SVM	Z	0.668	60.3 %	0.675	474	474	12.4 %	1.6 %
SVM	L	0.671	58.6 %	0.676	503	503	12.2 %	-0.4 %
KNN	Z	0.671	59.1 %	0.675	534	534	14.4 %	-2.3 %
MARK	L	0.672	58.9 %	0.688	535	535	11.6 %	-4.0 %
KNN	L	0.672	59.3 %	0.689	609	609	15.8 %	0.8 %
LR _{stat}	L	0.673	60.0 %	0.677	509	509	12.7 %	1.5 %
LR _{stat}	Z	0.675	59.2 %	0.676	525	525	13.0 %	-0.9 %
ELO	L	0.678	58.6 %	0.689	472	472	13.0 %	-4.8 %
LR _{rat}	L	0.679	57.1 %	0.691	478	478	17.1 %	-7.1 %
ELO	Z	0.680	56.9 %	0.690	502	502	14.0 %	-7.5 %
LR _{rat}	Z	0.681	58.6 %	0.691	501	501	18.9 %	-7.5 %
NEUR	Z	0.682	57.7 %	0.671	550	550	14.0 %	0.7 %
KONST	Z	0.690	53.9 %	0.693	637	637	22.8 %	-6.3 %

Význam zkratek:

LL a ACC – metriky LL a ACC vyhodnocené na testovací sadě,

Val LL – metrika LL vyhodnocená na validační sadě,

RoI_e – celková očekávaná návratnost, RoI_r – celková realizovaná návratnost,

Sázek – celkový počet sázek, Vklad – celkový vklad,

Typ L – model založený na legu, Typ Z – model založený na zápasu,

STROM – rozhodovací stromy, BOOK – model bookmakera,

MARK – Markovův-fyzikální model, NEUR – neuronová síť,

KONST – model s konstantní pravděpodobností,

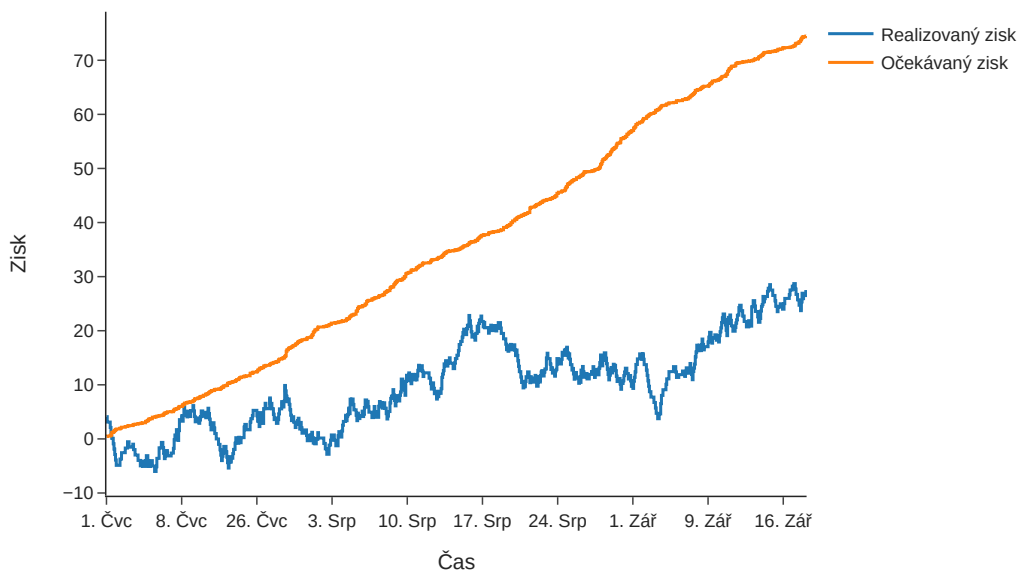
LR_{stat} – logistická regrese (statistiky), LR_{rat} – logistická regrese (rating).

Tabulka 5.1: Přehled výsledků všech modelů.

tak dle očekávání ve všech statistikách lepší než modely ratingové. Nad naše očekávání si však vede v porovnání s modely založenými na statistikách, dosahuje totiž mírně lepších výsledků než logistická regrese a srovnatelných hodnot LL jako k -NN. Domníváme se tedy, že velké množství v praxi neplatných předpokladů modelu není pro účely předpovídání výsledku zápasu před jeho začátkem problematické. Problémy se však mohou projevit, pokud bychom model nechali předpovídat pravděpodobnost vítězství v nějakém stavu zápasu, kdy naše strategie, která nebere ohled na skóre oponenta, navrhuje špatný cíl šipky.

Úspěšným výsledkem této práce jsou kladné hodnoty realizované ziskovosti pro některé z modelů. Ten nejlepší vsadil celkem na 578 z 932 zápasů v testovací sadě (menší počet oproti číslu v tabulce 3.1 vyplývá z vyřazení zápasů bez kurzů) a jeho ziskovost je 4.5 %. Vysoký počet sázek indikuje, že se názor bookmakera a modelu liší velmi často. Všimněme si, že všechny modely s kladnou ziskovostí jsou založené na statistikách, hodnota realizované ziskovosti je však obecně výrazně nižší než hodnota očekávané ziskovosti, modely jsou tedy vůči svým sázkám přehnaně optimistické.

Graf 5.1 znázorňuje vývoj realizovaného a očekávaného zisku v čase pro nejlepší model STROM (typ L). Pro modely schopné odhadovat pravděpodobnosti výsledků legů jsme vyhodnotili také metriky LL_l a ACC_l , výsledky obsahuje tabulka 5.2. Nejlepších výsledků dle LL_l dosahuje Markovův-fyzikální model, rozdílly oproti modelům těsně za ním jsou však zanedbatelné.



Obrázek 5.1: Kumulativní zisk v čase.

Model	Typ	LL	LL_l	ACC_l	Val LL_l
MARK	L	0.672	0.655	62.6 %	0.661
SVM	L	0.671	0.655	62.5 %	0.658
LR _{stat}	L	0.673	0.656	62.7 %	0.659
STROM	L	0.666	0.656	62.5 %	0.656
LR _{rat}	L	0.679	0.658	62.6 %	0.662
ELO	L	0.678	0.659	62.7 %	0.664
KNN	L	0.672	0.682	57.7 %	0.685

Význam zkratk:

LL_l a ACC_l – metriky LL_l a ACC_l vyhodnocené na testovací sadě,
Val LL_l – metrika LL_l vyhodnocená na validační sadě.

Tabulka 5.2: Přehled výsledků modelů založených na legu.

Závěr

Cílem této práce bylo porovnat několik přístupů k modelování pravděpodobností výsledků zápasů v šipkách. Nejprve jsme se zabývali ratingovými modely, které soutěžícím přiřazují číselné ohodnocení na základě výsledků předchozích zápasů. Aplikovali jsme přizpůsobenou variantu Elo ratingu a navrhli vlastní ratingový model založený na logistické regresi.

Dále jsme popsali model vycházející z předpokladu, že soutěžící volí cíl jen v závislosti na aktuálním skóre a zbývajícím počtu šipek. Bod dopadu šipky je náhodnou veličinou, kterou stejně jako v literatuře modelujeme pomocí normálního rozdělení se střední hodnotou v zamýšleném cíli a rozptylem dle konkrétního soutěžícího. Pro odvození rozptylu jsme navrhli vlastní postup vycházející ze statistik agregovaných z minulých zápasů. Volbu cíle v závislosti na stavu utkání popisujeme snadno interpretovatelnými pravidly, která byla navržena na základě dat ze zápasů. Z datasetu obsahujícího jednotlivé šipky jsme pomocí metody maximální věrohodnosti získali k jednotlivým stavům zápasu nejčastější cíle a typické vzorce pak do pravidel zobecnili. Výsledek tak může sloužit jako návod pro začínající hráče, jehož hlavním přínosem oproti veřejně dostupným návodům je popis motivace k volbám cílů. Přechody mezi stavy hry popisujeme jako Markovův řetězec, model proto nazýváme Markovův-fyzikální. Pro odhad pravděpodobnosti vítězství využíváme distribuce počtu kol obou soutěžících získané opakovanými simulacemi průchodů hrou.

Posledním typem jsou modely založené na statistikách. Statistiku soutěžícího popisují jeho souhrnný výkon v daném zápase. Na základě dat po šipkách (resp. po kolech) jsme pro každý zápas vyhodnotili několik druhů průměrů skóre šipky (celkem, z prvních devíti šipek, v rozhodujících momentech apod.) a úspěšnost zavírání. Abychom úspěšnost zavírání počítali konzistentní metodou, navrhli jsme také vlastní heuristiku, která na základě stavu hry a bodu dopadu šipky odhaduje, zda se soutěžící o zavření pokoušel. Ta se ukázala jako vhodnější než oficiální anotace s chybami.

Při odhadování pravděpodobností výsledků zápasu provádíme pro oba soutěžící agregaci statistik ze zápasů minulých s cílem podchytit jak dlouhodobou, tak krátkodobou výkonnost. Navrhli jsme několik způsobů jak statistiky agregovat s důrazem na klesající váhu dle stáří dat. Pro rozsáhlou sadu různých variant a parametrizací agregovaných statistik jsme následně provedli analýzu výsledků natrénovaných modelů a vybrali variantu nejúspěšnější. Ta dle očekávání obsahuje nejširší sadu typů agregací a přiřazuje poloviční váhu půl roku starým zápasům.

S agregovanými statistikami na vstupu a výsledkem zápasu na výstupu jsme natrénovali rozhodovací stromy, neuronovou síť, k -nejbližších sousedů, logistickou regresi a *support vector machines* a u všech modelů byla provedena optimalizace hyperparametrů.

Všechny přístupy byly následně vyhodnoceny na testovací množině. Jako speciální model pro porovnání byl zahrnut model bookmakera, jehož odhady pravděpodobností odvozujeme z kurzů. Kromě vyhodnocení standardních metrik jsme modely podrobili simulovanému sázení.

Potvrdil se předpoklad, že nejlepších výsledků budou dosahovat modely založené na statistikách. Některým z nich se dokonce povedlo dosáhnout při simulo-

vaném sázení zisku a i v ostatních vyhodnocovaných kritériích model bookmakera porazit. Nejhuře dopadly ratingové modely. Jejich slabinou je nízká granularita využívané informace skládající se jen z výsledku zápasu. V datasetu často přibývají noví soutěžící a nelze tak předpokládat, že by dat bylo dostatečné množství, aby se rating stabilizoval. Markovův-fyzikální model dosáhl dle log-loss lepších výsledků než všechny ratingové modely a několik nejslabších modelů založených na statistikách. Na rozdíl od všech ostatních popsaných modelů lze však snadno využít i na odhadování pravděpodobností jiných veličin, například distribuce počtu kol celkem, nebo počtu kol soutěžícího, ve kterých dosáhl maximálního možného skóre 180. Odhady by model dokonce dokázal produkovat i během zápasu.

Seznam použité literatury

- AKIBA, T., SANO, S., YANASE, T., OHTA, T. a KOYAMA, M. (2019). Optuna: A next-generation hyperparameter optimization framework. URL <https://arxiv.org/abs/1907.10902>.
- AZZALINI, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**(2), 171–178. ISSN 03036898, 14679469.
- BAIRD, G. (2020). Optimising darts strategy using markov decision processes and reinforcement learning. *Journal of the Operational Research Society*, **71**(6), 1020–1037. doi: 10.1080/01605682.2019.1610341. URL <https://doi.org/10.1080/01605682.2019.1610341>.
- BAUMEISTER, R. F. a SHOWERS, C. J. (1986). A review of paradoxical performance effects: Choking under pressure in sports and mental tests. *European Journal of Social Psychology*, **16**(4), 361–383. doi: <https://doi.org/10.1002/ejsp.2420160405>.
- BUCHDAHL, J. (2016). *Squares & Sharps, Suckers & Sharks: The Science, Psychology & Philosophy of Gambling*. Oldcastle Books. ISBN 9781843448594.
- BUCHDAHL, J. (2017). Wisdom of the crowd. https://www.football-data.co.uk/wisdom_of_crowd_bets. Online; navštíveno 2022-11-23.
- DARTS REGULATION AUTHORITY (2019). Rulebook. URL <http://www.thedra.co.uk/dra-rulebook>. Online; navštíveno 2022-12-25.
- DIXON, M. a COLES, S. (1997). Modelling association football scores and inefficiencies in the football betting market. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C*, **46**, 265 – 280. ISSN 0035-9254.
- ELO, A. E. (1978). *The Rating of Chessplayers, Past and Present*. Arco Pub., New York. ISBN 0668047216 9780668047210.
- FALCON, W., BOROVEC, J., WÄLCHLI, A., EGGERT, N., SCHOCK, J., JORDAN, J., SKAFTE, N., IR1DXD, BEREZNYUK, V., HARRIS, E., MURRELL, T., YU, P., PRÆSIUS, S., ADDAIR, T., ZHONG, J., LIPIN, D., UCHIDA, S., BAPAT, S., SCHRÖTER, H., DAYMA, B., KARNACHEV, A., KULKARNI, A., KOMATSU, S., MARTIN.B, SCHIRATTI, J.-B., MARY, H., BYRNE, D., EYZAGUIRRE, C., CINJON a BAKHTIN, A. (2020). Pytorchlightning/pytorchlightning: 0.7.6 release. URL <https://doi.org/10.5281/zenodo.3828935>.
- FRIEDMAN, J. H. (2001). Greedy function approximation: A gradient boosting machine. *The Annals of Statistics*, **29**(5), 1189 – 1232. doi: 10.1214/aos/1013203451. URL <https://doi.org/10.1214/aos/1013203451>.
- HAUGH, M. a WANG, C. (2020). Play like the pros? solving the game of darts as a dynamic zero-sum game.

- JAMES, D. a POTTS, J. (2018). Experimental validation of dynamic stability analysis applied to dart flight. *Sports Engineering*, **21**. doi: 10.1007/s12283-018-0279-9.
- KE, G., MENG, Q., FINLEY, T., WANG, T., CHEN, W., MA, W., YE, Q. a LIU, T.-Y. (2017). Lightgbm: A highly efficient gradient boosting decision tree. In *Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems, NIPS'17*, page 3149–3157, Red Hook, NY, USA, 2017. Curran Associates Inc. ISBN 9781510860964.
- KLAASSEN, F. a MAGNUS, J. (2001). Are points in tennis independent and identically distributed? evidence from a dynamic binary panel data model. *Journal of the American Statistical Association*, **96**, 500–509. doi: 10.1198/016214501753168217.
- KLAASSEN, F. a MAGNUS, J. (2003). Forecasting the winner of a tennis match. *European Journal of Operational Research*, **148**, 257–267. doi: 10.1016/S0377-2217(02)00682-3.
- KLEIN TEESELINK, B., POTTER VAN LOON, R., VAN DEN ASSEM, M. a DOLDER, D. (2020). Incentives, performance and choking in darts. *Journal of Economic Behavior & Organization*, **169**, 38–52. doi: 10.1016/j.jebo.2019.10.026.
- KOHLER, D. (1982). Optimal strategies for the game of darts. *Journal of the Operational Research Society*, **33**(10), 871–884. doi: 10.1057/jors.1982.191. URL <https://doi.org/10.1057/jors.1982.191>.
- LIEBSCHER, S. a KIRSCHSTEIN, T. (2017). Predicting the outcome of professional darts tournaments. *International Journal of Performance Analysis in Sport*, **17**, 1–18. doi: 10.1080/24748668.2017.1372162.
- MAHER, M. J. (1982). Modelling association football scores. *Statistica Neerlandica*, **36**(3), 109–118. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1467-9574.1982.tb00782.x>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1467-9574.1982.tb00782.x>.
- MODUS SUPER SERIES (2022). O soutěži. URL <https://modussuperseries.com/about>. Online; navštíveno 2022-11-03.
- NASU, D., MATSUO, T. a KADOTA, K. (2014). Two types of motor strategy for accurate dart throwing. *PLOS ONE*, **9**(2), 1–9. doi: 10.1371/journal.pone.0088536. URL <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0088536>.
- PASZKE, A., GROSS, S., MASSA, F., LERER, A., BRADBURY, J., CHANAN, G., KILLEEN, T., LIN, Z., GIMELSHEIN, N., ANTIGA, L., DESMAISON, A., KOPF, A., YANG, E., DEVITO, Z., RAISON, M., TEJANI, A., CHILAMKURTHY, S., STEINER, B., FANG, L., BAI, J. a CHINTALA, S. (2019). Pytorch: An imperative style, high-performance deep learning library. In WALLACH, H., LAROCHELLE, H., BEYGEZIMER, A., D'ALCHÉ-BUC, F., FOX, E. a GARNETT, R., editors, *Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 32. Curran Associates, Inc. URL <https://proceedings.neurips.cc/paper/2019/file/bdbca288fee7f92f2bfa9f7012727740-Paper.pdf>.

- PEDREGOSA, F., VAROQUAUX, G., GRAMFORT, A., MICHEL, V., THIRION, B., GRISEL, O., BLONDEL, M., PRETTENHOFER, P., WEISS, R., DUBOURG, V., VANDERPLAS, J., PASSOS, A., COURNAPEAU, D., BRUCHER, M., PERROT, M. a DUCHESNAY, E. (2011). Scikit-learn: Machine learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, **12**, 2825–2830.
- STERN, H. S. (1997). A statistician reads the sports pages. *CHANCE*, **10**(3), 16–19. doi: 10.1080/09332480.1997.10542036. URL <https://doi.org/10.1080/09332480.1997.10542036>.
- SULLIVAN, C. (2015). Improving elo rankings for sports experimenting on the english premier league.
- TIBSHIRANI, R. J., PRICE, A. a TAYLOR, J. (2011). A statistician plays darts. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, **174** (1), 213–226. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1467-985X.2010.00651.x>.
- ÖTTING, M., DEUTSCHER, C., LANGROCK, R. a BARAJAS, V. (2019). The hot hand in professional darts.

Seznam obrázků

1.1	Standardní terč.	5
3.1	Diagram konstrukce datasetů.	11
3.2	Histogram kurzů.	12
3.3	Kumulativní počet zápasů pro jednotlivé soutěžící.	12
3.4	Histogram počtu zápasů na soutěžícího.	13
3.5	Příklad váženého mediánu.	15
3.6	Struktura agregovaných statistik.	17
4.1	Závislost pravděpodobnosti vítězství v zápase na pravděpodobnosti vítězství v legu pro dva vyrovnané hráče.	18
4.2	Porovnání Elo ratingu a ratingu z logistické regrese.	24
4.3	Množina přípustných cílů μ	27
4.4	Distribuce počtu započatých kol.	29
4.5	Vztah standardní odchylky σ a průměrné hodnoty skóre šipky mířené na $(20, T)$	30
4.6	Cílové skóre dle strategie pro $t = 1$	34
4.7	Hodnoty log-loss dle feature-setu pro modely založené na zápasu.	40
4.8	Hodnoty log-loss dle feature-setu pro modely založené na legu.	41
4.9	Boxplot hodnot log-loss na validační sadě neuronových sítí se stejnými hyperparametry a různými hodnotami seedu.	42
5.1	Kumulativní zisk v čase.	46

Seznam tabulek

2.1	Přehled souvisejících prací a jejich metod.	7
3.1	Přehled rozdělení datasetu na sady.	17
4.1	Struktura dat k zápasu.	19
4.2	Empirická distribuce trefených buněk při skóre 32 s jednou zbývající šipkou.	31
4.3	Stavy, kdy strategie neodpovídá datům.	35
5.1	Přehled výsledků všech modelů.	45
5.2	Přehled výsledků modelů založených na legu.	46
A.1	Kompletní strategie, cílový bod pro každé skóre a zbývající počet šipek. Tučně jsou zvýrazněná skóre, pro která se cíl liší v závislosti na zbývajícím počtu šipek.	57
A.2	Přehled hyperparametrů všech vyhodnocovaných modelů.	58

Seznam použitých zkratek

A. Přílohy

A.1 Kompletní strategie

Tabulka A.1 obsahuje kompletní přehled cílových bodů dle strategie pro stavy hry až do skóre 199.

S	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	S	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
2	(1, D)	(1, D)	(1, D)	101	(20, T)	(17, T)	(20, T)
3	(1, SO)	(1, SO)	(1, SO)	102	(20, T)	(20, T)	(20, T)
4	(2, D)	(2, D)	(2, D)	103	(20, T)	(20, T)	(20, T)
5	(1, SO)	(1, SO)	(1, SO)	104	(20, T)	(18, T)	(20, T)
6	(3, D)	(3, D)	(3, D)	105	(20, T)	(20, T)	(20, T)
7	(3, SO)	(3, SO)	(3, SO)	106	(20, T)	(20, T)	(20, T)
8	(4, D)	(4, D)	(4, D)	107	(20, T)	(19, T)	(20, T)
9	(1, SO)	(1, SO)	(1, SO)	108	(20, T)	(20, T)	(20, T)
10	(5, D)	(5, D)	(5, D)	109	(20, T)	(20, T)	(20, T)
11	(3, SO)	(3, SO)	(3, SO)	110	(20, T)	(20, T)	(20, T)
12	(6, D)	(6, D)	(6, D)	111	(20, T)	(20, T)	(20, T)
13	(5, SO)	(5, SO)	(5, SO)	112	(20, T)	(20, T)	(20, T)
14	(7, D)	(7, D)	(7, D)	113	(20, T)	(20, T)	(20, T)
15	(7, SO)	(7, SO)	(7, SO)	114	(20, T)	(20, T)	(20, T)
16	(8, D)	(8, D)	(8, D)	115	(20, T)	(20, T)	(20, T)
17	(1, SO)	(1, SO)	(1, SO)	116	(20, T)	(20, T)	(20, T)
18	(9, D)	(9, D)	(9, D)	117	(20, T)	(20, T)	(20, T)
19	(3, SO)	(3, SO)	(3, SO)	118	(20, T)	(20, T)	(20, T)
20	(10, D)	(10, D)	(10, D)	119	(19, T)	(20, T)	(19, T)
21	(5, SO)	(5, SO)	(5, SO)	120	(20, T)	(20, T)	(20, T)
22	(11, D)	(11, D)	(11, D)	121	(20, T)	(20, T)	(20, T)
23	(7, SO)	(7, SO)	(7, SO)	122	(20, T)	(20, T)	(18, T)
24	(12, D)	(12, D)	(12, D)	123	(20, T)	(20, T)	(19, T)
25	(9, SO)	(9, SO)	(9, SO)	124	(20, T)	(20, T)	(20, T)
26	(13, D)	(13, D)	(13, D)	125	(20, T)	(20, T)	(18, T)
27	(11, SO)	(11, SO)	(11, SO)	126	(20, T)	(20, T)	(19, T)
28	(14, D)	(14, D)	(14, D)	127	(20, T)	(20, T)	(20, T)
29	(13, SO)	(13, SO)	(13, SO)	128	(20, T)	(20, T)	(18, T)
30	(15, D)	(15, D)	(15, D)	129	(20, T)	(20, T)	(19, T)
31	(15, SO)	(15, SO)	(15, SO)	130	(20, T)	(20, T)	(20, T)
32	(16, D)	(16, D)	(16, D)	131	(20, T)	(20, T)	(20, T)
33	(1, SO)	(1, SO)	(1, SO)	132	(20, T)	(20, T)	(20, T)
34	(17, D)	(17, D)	(17, D)	133	(20, T)	(20, T)	(20, T)
35	(3, SO)	(3, SO)	(3, SO)	134	(20, T)	(20, T)	(20, T)
36	(18, D)	(18, D)	(18, D)	135	(20, T)	(20, T)	DB
37	(5, SO)	(5, SO)	(5, SO)	136	(20, T)	(20, T)	(20, T)
38	(19, D)	(19, D)	(19, D)	137	(20, T)	(20, T)	(20, T)
39	(7, SO)	(7, SO)	(7, SO)	138	(20, T)	(20, T)	(20, T)
40	(20, D)	(20, D)	(20, D)	139	(20, T)	(20, T)	(20, T)

41	(9, SO)	(9, SO)	(9, SO)	140	(20, T)	(20, T)	(20, T)
42	(10, SO)	(10, SO)	(10, SO)	141	(20, T)	(20, T)	(20, T)
43	(11, SO)	(11, SO)	(11, SO)	142	(20, T)	(20, T)	(20, T)
44	(12, SO)	(12, SO)	(12, SO)	143	(20, T)	(20, T)	(20, T)
45	(13, SO)	(13, SO)	(13, SO)	144	(20, T)	(20, T)	(20, T)
46	(14, SO)	(14, SO)	(14, SO)	145	(20, T)	(20, T)	(20, T)
47	(15, SO)	(15, SO)	(15, SO)	146	(20, T)	(20, T)	(20, T)
48	(16, SO)	(16, SO)	(16, SO)	147	(20, T)	(20, T)	(20, T)
49	(17, SO)	(17, SO)	(17, SO)	148	(20, T)	(20, T)	(20, T)
50	DB	(18, SO)	(18, SO)	149	(20, T)	(20, T)	(20, T)
51	(19, SO)	(19, SO)	(19, SO)	150	(20, T)	(20, T)	(20, T)
52	(20, SO)	(20, SO)	(20, SO)	151	(20, T)	(20, T)	(20, T)
53	(13, SO)	(13, SO)	(13, SO)	152	(20, T)	(20, T)	(20, T)
54	(14, SO)	(14, SO)	(14, SO)	153	(20, T)	(20, T)	(20, T)
55	(15, SO)	(15, SO)	(15, SO)	154	(20, T)	(20, T)	(20, T)
56	(16, SO)	(16, SO)	(16, SO)	155	(20, T)	(20, T)	(20, T)
57	(17, SO)	(17, SO)	(17, SO)	156	(20, T)	(20, T)	(20, T)
58	(18, SO)	(18, SO)	(18, SO)	157	(20, T)	(20, T)	(20, T)
59	(19, SO)	(19, SO)	(19, SO)	158	(20, T)	(20, T)	(20, T)
60	(20, SO)	(20, SO)	(20, SO)	159	(20, T)	(20, T)	(20, T)
61	(15, T)	(11, T)	(15, T)	160	(20, T)	(20, T)	(20, T)
62	(10, T)	(12, T)	(10, T)	161	(20, T)	(20, T)	(20, T)
63	(13, T)	(13, T)	(13, T)	162	(20, T)	(20, T)	(20, T)
64	(16, T)	(14, T)	(16, T)	163	(20, T)	(20, T)	(20, T)
65	(11, T)	(15, T)	(11, T)	164	(20, T)	(20, T)	(20, T)
66	(14, T)	(16, T)	(14, T)	165	(20, T)	(20, T)	(20, T)
67	(17, T)	(17, T)	(17, T)	166	(20, T)	(20, T)	(20, T)
68	(20, T)	(18, T)	(20, T)	167	(20, T)	(20, T)	(20, T)
69	(15, T)	(19, T)	(15, T)	168	(20, T)	(20, T)	(20, T)
70	(18, T)	(20, T)	(18, T)	169	(20, T)	(20, T)	(20, T)
71	(13, T)	(13, T)	(13, T)	170	(20, T)	(20, T)	(20, T)
72	(16, T)	(16, T)	(16, T)	171	(20, T)	(20, T)	(20, T)
73	(19, T)	(19, T)	(19, T)	172	(20, T)	(20, T)	(20, T)
74	(14, T)	(14, T)	(14, T)	173	(20, T)	(20, T)	(20, T)
75	(17, T)	(17, T)	(17, T)	174	(20, T)	(20, T)	(20, T)
76	(20, T)	(20, T)	(20, T)	175	(20, T)	(20, T)	(20, T)
77	(19, T)	(19, T)	(19, T)	176	(20, T)	(20, T)	(20, T)
78	(18, T)	(18, T)	(18, T)	177	(20, T)	(20, T)	(20, T)
79	(19, T)	(19, T)	(19, T)	178	(20, T)	(20, T)	(20, T)
80	(20, T)	(20, T)	(20, T)	179	(19, T)	(20, T)	(20, T)
81	(19, T)	(19, T)	(19, T)	180	(20, T)	(20, T)	(20, T)
82	(14, T)	(14, T)	(14, T)	181	(20, T)	(20, T)	(20, T)
83	(17, T)	(17, T)	(17, T)	182	(18, T)	(20, T)	(20, T)
84	(20, T)	(20, T)	(20, T)	183	(19, T)	(20, T)	(20, T)
85	(15, T)	(15, T)	(15, T)	184	(20, T)	(20, T)	(20, T)
86	(18, T)	(18, T)	(18, T)	185	(18, T)	(20, T)	(20, T)
87	(17, T)	(17, T)	(17, T)	186	(19, T)	(20, T)	(20, T)
88	(16, T)	(16, T)	(16, T)	187	(20, T)	(20, T)	(20, T)

89	(19, T)	(19, T)	(19, T)	188	(18, T)	(20, T)	(20, T)
90	(18, T)	(18, T)	(18, T)	189	(19, T)	(20, T)	(20, T)
91	(17, T)	(17, T)	(17, T)	190	(20, T)	(20, T)	(20, T)
92	(20, T)	(20, T)	(20, T)	191	(20, T)	(20, T)	(20, T)
93	(19, T)	(19, T)	(19, T)	192	(20, T)	(20, T)	(20, T)
94	(18, T)	(18, T)	(18, T)	193	(20, T)	(20, T)	(20, T)
95	(19, T)	(19, T)	(19, T)	194	(20, T)	(20, T)	(20, T)
96	(20, T)	(20, T)	(20, T)	195	DB	(20, T)	(20, T)
97	(19, T)	(19, T)	(19, T)	196	(20, T)	(20, T)	(20, T)
98	(20, T)	(20, T)	(20, T)	197	(20, T)	(20, T)	(20, T)
99	(19, T)	(19, T)	(19, T)	198	(20, T)	(20, T)	(20, T)
100	(20, T)	(20, T)	(20, T)	199	(20, T)	(20, T)	(20, T)

Tabulka A.1: Kompletní strategie, cílový bod pro každé skóre a zbývající počet šipek. Tučně jsou zvýrazněná skóre, pro která se cíl liší v závislosti na zbývajícím počtu šipek.

A.2 Přehled hyperparametrů modelů

Tabulka A.2 obsahuje přehled hyperparametrů všech vyhodnocovaných modelů.

Typ	Z	L
STROM		
bagging_fraction	0.5	0.9
bagging_freq	1	1
early_stopping_round	10	10
feature_fraction	1.0	0.9
lambda_l1	5	0
lambda_l2	75	100
learning_rate	0.1578	0.2646
max_depth	9	5
min_data_in_leaf	100	1900
min_gain_to_split	0.6607	1.3907
num_leaves	748	118
LR _{stat}		
C	0.7677	0.1986
SVM		
C	1.9596	1.8011
kernel	rbf	rbf
KNN		
n_neighbors	255	266
weights	distance	distance
NEUR		
batch_size	64	
layer_sizes	64	
learning_rate	0.0001	
seed	49793	
Elo		
elo_update_k	16.69	2.77
LR _{rat}		
evaluation_batch_size_days	0.067	0.081
inverse_regularization_strength_C	0.0486	0.0106

Tabulka A.2: Přehled hyperparametrů všech vyhodnocovaných modelů.