

Důkazové systémy: forma a složitost

Tato disertační práce obsahuje tři části. První dvě části spolu souvisí. V [1] a [2], Iemhoff objevila souvislost mezi existencí terminujícího sekvenčního kalkulu určitého druhu a uniformní interpolační vlastností superintuicionistické logiky, kterou tento kalkulus zachycuje. Ve druhé části budeme tento vztah zobecňovat tak, aby pokrýval také substrukturální nastavení na jedné straně a silnější typ systémů nazývaných semi-analytické kalkuly na straně druhé. Abychom byli přesnější, ukážeme, že jakákoli dostatečně silná substrukturální logika se semi-analytickým kalkulem má Craigovu interpolační vlastnost a v případě, že je kalkulus terminující, má uniformní interpolaci. Tento vztah pak vede k některým konkrétním aplikacím. Pozitivním výsledkem je, že poskytuje jednotnou metodu k prokázání uniformní interpolační vlastnosti pro logiky \mathbf{FL}_e , \mathbf{FL}_{ew} , \mathbf{CFL}_e , \mathbf{CFL}_{ew} , \mathbf{IPC} , \mathbf{CPC} a některá z jejich modálních rozšíření \mathbf{K} a \mathbf{KD} . Další aplikací je negativní výsledek, že mnohé substrukturální logiky, včetně L_n , G_n , BL , R a RM^e , téměř všechny superintuicionistické logiky (kromě nejvýše sedmi z nich) a téměř všechna rozšíření $\mathbf{S4}$ (kromě třiceti sedmi z nich) nemají semi-analytický kalkulus. Výsledek také ukazuje, že logika $\mathbf{K4}$ a téměř všechna rozšíření logiky $\mathbf{S4}$ (kromě šesti z nich) nemají terminující semianalytický kalkulus.

Ve druhé části pak věnujeme pozornost pouze systémům Iemhoff upředstaveným v [2], tj. zaměřeným kalkulům. Zde Iemhoff ukázala, že téměř žádné superintuicionistické logiky nemohou mít zaměřené důkazové systémy. V této části poskytneme složitostní analogii tohoto negativního výsledku, abychom ukázali, že i v případech, kdy tyto systémy existují, by jejich důkazová délka rostla mimo únosnou mez. Přesněji řečeno, nejprve představíme dvě přirozené podtřídy zaměřených pravidel, která se nazývají pravidla PPF a MPF. Potom představíme několik \mathbf{CPC} -validních (\mathbf{IPC} -validních) sekvencí s polynomiálně krátkými stromovými důkazy v obvyklém systému Hilbertova stylu pro klasickou logiku, nebo ekvivalentně $\mathbf{LK} + \mathbf{Cut}$, které mají exponenciálně dlouhé důkazy v systémech sestávající pouze z pravidel PPF (MPF).

V závěrečné části pak zkoumáme složitost důkazů u široké škály substrukturálních systémů. Ukážeme exponenciální dolní odhad na délky důkazů pro jakýkoli důkazový systém \mathbf{P} alespoň tak silný jako úplný Lambekův kalkulus \mathbf{FL} a polynomiálně simulovaný rozšířeným systémem Frege pro nějakou superintuicionistickou logiku s nekonečným větvením. Přesněji řečeno, ukážeme posloupnost \mathbf{P} -dokazatelných formulí $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že délka nejkratších \mathbf{P} -důkazů pro A_n je exponenciální v délce A_n . Dolní odhad také rozšíříme na počet řádků důkazů (délky důkazů) v libovolném systému Frege (rozšířeném

systemu Frege) pro jakoukoli logiku mezi **FL** a superintuicionistickou logikou s nekonečným větvením. Podobné výsledky dokážeme také pro důkazové systémy a logiky rozšiřující základní výrokový Visserův kalkulus **BPC** a jeho logiku **BPC**. V klasické substrukturální oblasti nakonec dokážeme exponenciální dolní odhad na počet důkazových řádků v jakémkoli důkazovém systému, který je polynomiálně simulován bezřezovou verzí **CFL_{ew}**.

Klíčová slova: Výroková důkazová složitost, Superintuicionistická logika, Substrukturální logika, Modální logika, Craigova interpolace, Uniformní interpolace, Realizovatelná interpolace, Zaměřené kalkuly.

References

- [1] Iemhoff, Rosalie. “Uniform interpolation and sequent calculi in modal logic.” *Archive for Mathematical Logic* 58.1-2 (2019): 155-181.
- [2] Iemhoff, Rosalie. “Uniform interpolation and the existence of sequent calculi.” *Annals of Pure and Applied Logic* 170.11 (2019): 102711.