Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Úhly, obsahy, objemy: skalární součin a determinant

Angles, areas, volumes: dot product and determinant

Milan Ondič

Vedoucí práce:	JUDr. Mgr. Filip Beran
Studijní program:	Specializace v pedagogice
Studijní obor:	Anglický jazyk se zaměřením na vzdělávání – Matematika se zaměřením na vzdělávání

2023

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Úhly, obsahy, objemy: skalární součin a determinant potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 17. 4. 2023

Tímto bych rád poděkoval JUDr. Mgr. Filipu Beranovi za jeho cenné rady a čas, který mi věnoval. Děkuji také Anetě, rodině a přátelům za neustálou podporu během studia.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá zavedením skalárního součinu a determinantu, které jsou důležitými nástroji analytické geometrie. Náplní práce je paralelně vést výklad těchto dvou klíčových konceptů pokročilejší algebry – skalárního součinu a determinantu – primárně z hlediska geometrického, nikoliv algebraického. Cílem práce je ukázat, jak se dají obě zobrazení odvodit jen na základě řešení geometrických problémů v dvourozměrném prostoru a následně jak je přenést do prostoru trojrozměrného. První část práce je věnována hledání odchylek dvou vektorů v rovině a počítání obsahu trojúhelníku. Oba typy úloh jsou řešeny několika způsoby a na jejich základě se pak odvodí skalární součin a determinant. Druhá část práce je pak věnována trojrozměrného prostoru, zejména pak odchylkám vektorů, přímek a rovin a objemu čtyřstěnu a rovnoběžnostěnu. To je pak doplněno o zavedení některých pojmů lineární algebry, zkoumání algebraických vlastností skalárního součinu i determinantu a zobecnění pojmů do n-rozměrného prostoru. Poslední část práce je věnována analýze vybraných českých středoškolských učebnic matematiky z hlediska výskytu a pojetí výkladu skalárního součinu a determinantu. Všechny úlohy jsou doplněny obrázky vytvořenými v programu GeoGebra. Práce je primárně určena pro středoškolské učitele i žáky a studenty učitelství matematiky, případně kohokoliv dalšího se zájmem o analytickou geometrii.

KLÍČOVÁ SLOVA

analytická geometrie, lineární algebra, skalární součin, determinant

ABSTRACT

This bachelor thesis deals with the introduction of scalar product and determinant, which are important tools of analytic geometry. The purpose of the thesis is to provide a parallel interpretation of these two key concepts of advanced algebra - the dot product and the determinant - primarily from a geometric, not an algebraic, point of view. The aim of the thesis is to show how both representations can be derived just by solving geometric problems in two-dimensional space and then how to transfer them to three-dimensional space. The first part of the work is devoted to finding the angle between two vectors in the plane and to calculating the area of a triangle. Both of problems are solved in several ways and then the scalar product and determinant are derived. The second part of the work is devoted to three-dimensional space, in particular the angle between two vectors, lines and planes and the volume of a tetrahedron and parallelogram. This is then supplemented by the introduction of some notions of linear algebra, an investigation of the algebraic properties of the dot product and determinant, and a generalization of the notions to the n-dimensional space. The last part of the thesis is devoted to the analysis of selected czech high school mathematics textbooks in terms of the occurrence and interpretation of the dot product and determinant. All problems are accompanied by pictures created in GeoGebra. The work is primarily intended for secondary school teachers and students, students of teaching mathematics or anyone else interested in analytical geometry.

KEYWORDS

analytic geometry, linear algebra, dot product, determinant

Obsah

Úvod

Se skalárním součinem jsme se pravděpodobně všichni setkali již na střední škole. Většinou nám bylo řečeno, jak se skalární součin definuje, proč se jmenuje skalární a že slouží k výpočtu odchylky dvou vektorů. Pojem determinantu se na druhou stranu většinou na střední škole nezavádí, ačkoliv ve vysokoškolské matice, zejména v lineární algebře, je to pojem zásadní. Protože v matematice bychom měli nástroje objevovat, nikoliv je pouze bez jakékoliv motivace definovat a následně o nich suše vyslovovat tvrzení, budeme v celé práci postupovat tímto způsobem.

Hlavním cílem této práce je ukázat, jak se dá skalární součin a determinant odvodit již na střední škole pouze na základě řešení nějakého geometrického problému. Náplní práce je paralelně vést výklad těchto dvou klíčových konceptů pokročilejší algebry – skalárního součinu a determinantu – primárně z hlediska geometrického, nikoliv algebraického.

Dalším cílem práce je pak propojit dvě odvětví matematiky, lineární algebru a analytickou geometrii, a ukázat žákům nebo studentům, že pojmy z algebry, které si často neumíme konkrétně představit, můžeme odvodit nástroji geometrickými. Cílem je pak také ukázat, jak se skalární součin a determinant dají přenést do prostoru a vést paralelní výklad těchto dvou konceptů

Práce je určena primárně pro studenty učitelství matematiky, ale také pro žáky středních škol, kteří se o téma zajímají. Bakalářská práce by také mohla sloužit jako pomocný materiál pro středoškolské učitele.

V první kapitole připomeneme některé zásadní pojmy středoškolské analytické geometrie, které budeme dále používat. Budeme využívat převážně středoškolských definic.

Ve druhé kapitole se zaměříme na analytickou geometrii v rovině. Nejdříve se budeme věnovat hledání odchylky dvou vektorů v rovině, přičemž se problém budeme snažit vyřešit více způsoby. Před obecným řešením vždy vyřešíme konkrétní příklad, což nám usnadní následné obecné odvození. Poté budeme definovat skalární součin a prozkoumáme jeho algebraické vlastnosti. V druhé části kapitoly se budeme zabývat obsahem trojúhelníku vymezeného dvěma vektory, kde odvodíme obecný nástroj k jeho počítání.

Takovým nástrojem bude determinant, který opět odvodíme několika způsoby a následně prozkoumáme jeho algebraické vlastnosti.

Třetí kapitola bude věnována trojrozměrnému prostoru. Zabývat se budeme přenesení skalárního součinu a determinantu do prostoru a jejich uplatnění pro řešení stereometrických úloh, tedy hledání odchylek přímek či rovin a výpočet objemu čtyřstěnu, respektive rovnoběžnostěnu.

Poslední kapitola je věnována analýze vybraných českých středoškolských učebnic matematiky z hlediska výskytu a pojetí výkladu skalárního součinu a determinantu. V poslední kapitole se podíváme do několika vybraných středoškolských učebnic, z nichž jedna je internetová. Zde nás bude zejména zajímat, jakým způsobem autoři přistupují k tématu skalárního součinu, zda jeho zavedení nějak motivují, jakým způsobem ho definují, atp.

Ke zvolenému tématu je k nalezení mnoho prací, učebnic i skript, z nichž některé využijeme zejména pro definování pojmů. Vzhledem k povaze práce budeme ale převážně postupovat a odvozovat samostatně. Práce bude doplněna obrázky vytvořenými v programu GeoGebra.

1 Základní pojmy středoškolské analytické geometrie

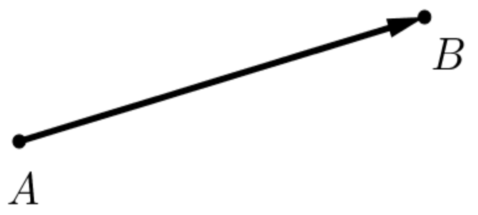
Protože se v celé práci budeme zabývat vektory a jejich využitím, připomeneme si některé základní pojmy, se kterými budeme pracovat. Pojmy budeme definovat středoškolským způsobem.

Vznik a vývoj vektorů v historii matematiky se uskutečnil ve třech základních, vzájemně na sebe navazujících přístupech k jejich pojetí: **geometrickém pojetí** (založeném na operacích s orientovanými úsečkami), **fyzikálním pojetí** (založeném na operacích s vektorovými fyzikálními veličinami) a **algebraickém pojetí** (abstraktním pojetí vektorů jako prvků axiomaticky vytvořeného vektorového prostoru v lineární algebře). (Polák, 2014, s. 333)

V této práci budeme pracovat zejména s pojetím geometrickým, budeme ale i zkoumat algebraické vlastnosti odvozených analytických nástrojů. Vektor zavedeme geometricky pomocí orientované úsečky.

Definice 1: orientovaná úsečka
Orientovaná úsečka je úsečka, u níž je určeno, který její krajní bod je tzv. počáteční bod; druhý krajní bod je jejím koncovým bodem. Orientovanou úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B značíme $\boldsymbol{AB}$. (Pomykalová, 1993, s. 138)

Jako nulovou orientovanou úsečku označíme úsečku, jejíž počáteční a koncový bod splývají. Velikost orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ je stejná jako velikost úsečky AB.



Obr. 1: Orientovaná úsečka

Poznámka: Orientovaná úsečka se někdy značí $\overrightarrow{AB}$, my ji ale budeme v celé práci značit $\boldsymbol{AB}$.

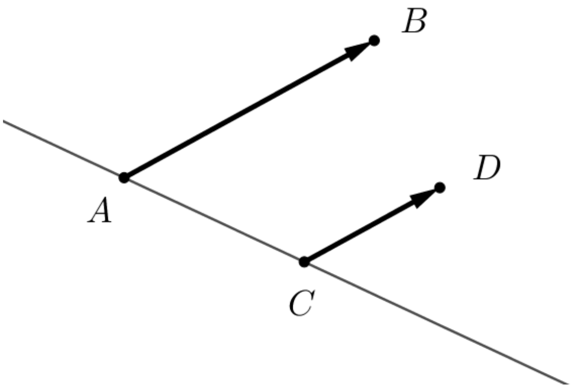
Orientované úsečky využijeme pro zavedení vektorů. Názorně řečeno, dvě orientované úsečky budou určovat stejný vektor, když budou stejně velké a budou mít stejný směr. (Kočandrle, Boček, 1995, s. 22)

Upřesníme nejdříve, co je to směr orientovaných úseček. Všechny následující definice jsou převzaty z učebnice (Kočandrle, Boček, 1995).

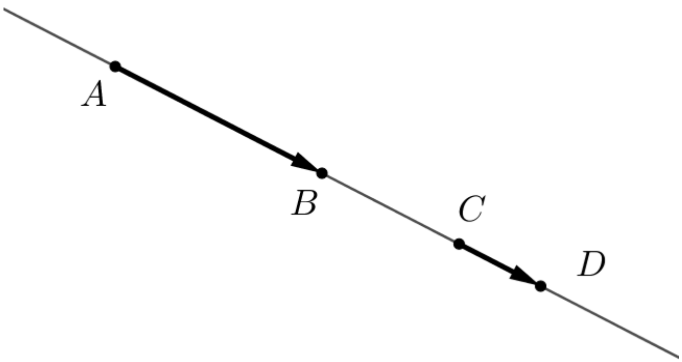
Definice 2: směr

Dvě nenulové orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{CD}$ mají stejný směr, jestliže:

a) buď přímky AB a CD jsou rovnobežné různé a body B, D leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AC (obr. 2).
b) nebo přímky AB a CD jsou totožné a průnikem polopřímek AB a CD je opět polopřímka (obr. 3).



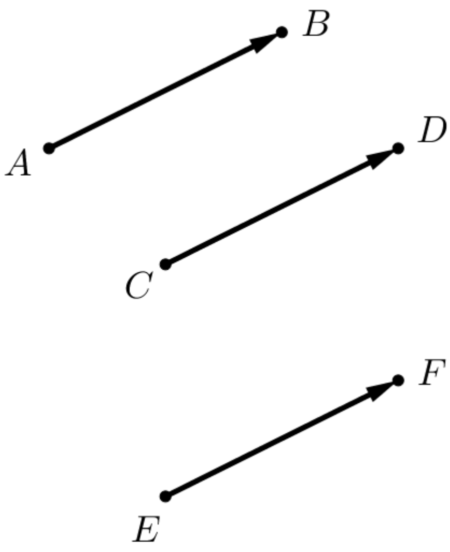
Obr. 2: Orientované úsečky se stejným směrem, varianta a)



Obr. 3: Orientované úsečky se stejným směrem, varianta b)

Definice 3: vektor

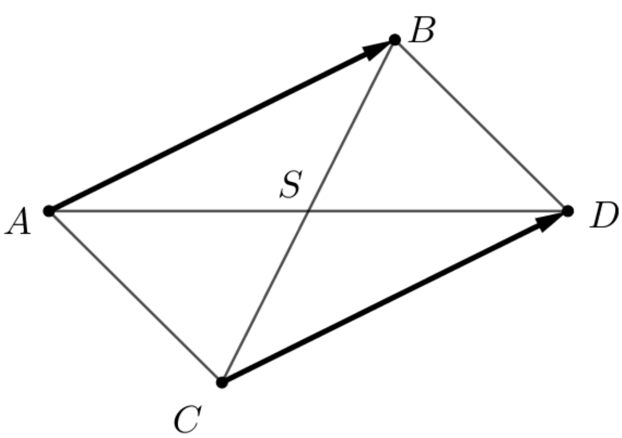
Nenulový vektor je množina všech orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a stejný směr. Nulový vektor je množina všech nulových orientovaných úseček.



Obr. 4: Tři orientované úsečky představující týž vektor

Na obr. 4 vidíme tři orientované úsečky, které představují jeden vektor, neboť mají stejnou velikost i směr.

Poznámka: Jestli dvě různé orientované úsečky představují týž vektor, můžeme ověřit konstrukčně následujícím způsobem. Aby dvě různé orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{CD}$ představovaly jeden vektor, musí mít úsečky AD a CD společný střed. Neboli body A, B, C, D musí tvořit rovnoběžník. (viz obr. 5)



Obr. 5: Ověření, že dvě orientované úsečky tvoří jeden vektor

Definice 4: souřadnice vektoru

Je-li vektor $\boldsymbol{u}$ určen orientovanou úsečkou $\boldsymbol{AB}$, kde $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$, resp. $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, a_3]$, nazývají se čísla $u_1 = b_1 - a_1$ a $u_2 = b_2 - a_2$ (popřípadě v prostoru ještě $u_3 = b_3 - a_3$) souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$. Zapisujeme $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, resp. $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$.

Definice 5: sčítání vektorů

Součet vektorů $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{BC}$ je vektor $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC}$.

Tvrzení: Pro vektory v rovině platí: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$, resp. v prostoru $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$.

Důkaz: Tvrzení dokážeme jen pro vektory v rovině. Protože $\boldsymbol{u} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ a $\boldsymbol{v} = (c_1 - b_1; c_2 - b_2)$, můžeme si rozepsat souřadnice $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ následujícím způsobem:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (c_1 - a_1; c_2 - a_2) = (b_1 - a_1 + c_1 - b_1; b_2 - a_2 + c_2 - b_2)$$

Dostáváme pak, že $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$. Pro vektory v prostoru lze důkaz provést stejným způsobem.

Definice 6: násobení vektoru skalárem

Násobek nulového vektoru číslem k je nulový vektor. Násobek nenulového vektoru $\boldsymbol{u} = B - A$ číslem k je vektor $C - A$, přičemž C je bod, pro který platí:

1) $|AC| = |k| \cdot |AB|$
2) Je-li $k \geq 0$, leží bod C na polopřímce AB; je-li $k < 0$, leží C na polopřímce opačné k AB.

Tvrzení: Souřadnice vektoru $k\boldsymbol{u} = (ku_1; ku_2)$, resp. $k\boldsymbol{u} = (ku_1; ku_2; ku_3)$.

Důkaz: Např. v (Kočandrle, Boček, 1995, s. 35).

Definice 7: lineární kombinace a lineární závislost 2 vektorů

Vektor $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, se nazývá lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. Lineární kombinace jednoho vektoru je jeho násobek.

Dva vektory nazveme lineárně závislé, pokud jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci druhého.

Poznámka: V rovině jsou tedy dva vektory lineárně závislé, pokud je jeden násobkem druhého.

Definice 8: velikost vektoru

Velikost vektoru $\boldsymbol{u}$ je velikost kterékoliv orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ určující vektor $\boldsymbol{u}$. Velikost vektoru $\boldsymbol{u}$ značíme $|\boldsymbol{u}|$.

Tvrzení: Pro vektory v rovině, resp. v prostoru, platí: $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, resp. $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Důkaz: Triviálně pomocí Pythagorovy věty.

Definice 9: odchylka dvou vektorů

Mají-li dva nenulové vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ umístění $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}$, nazývá se velikost konvexního úhlu BAC úhel vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Jsou-li přímky AB, AC navzájem kolmé, říkáme, že i vektory $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}$ jsou kolmé.

Protože budeme odvozené vztahy později aplikovat na přímky a roviny, připomeneme jejich analytické vyjádření.

Definice 10: obecná rovnice přímky

Rovnice $ax + by + c = 0$, kde alespoň jedno z čísel a, b je nenulové, se nazývá obecná rovnice přímky.

Definice 11: obecná rovnice roviny

Rovnice $ax + by + cz + d = 0$, kde alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové, se nazývá obecná rovnice roviny.

Poznámka: Vektor $\boldsymbol{n} = (a; b)$, resp. $\boldsymbol{n} = (a; b; c)$, je vektor kolmý na danou přímku, resp. rovinu, a nazýváme ho normálovým vektorem.

2 Anylytická geometrie v rovině

V této kapitole budeme pracovat s vektory v rovině. Jak víme, že mezi základní metrické úlohy v planimetrii, tedy geometrii v rovině, patří určování velikostí (nebo vzdáleností), úhlů a obsahů. Budeme chtít tyto tři dovednosti vyřešit v souvislosti s vektory. Velikost vektoru jsme již zavedli v první kapitole, víme tedy, že velikost vektoru $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$ se spočítá jako $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Zbývá nám tedy vyřešit dvě úlohy s vektory – určit odchylku mezi nimi a vypočítat obsah trojúhelníku jimi vymezeného, přičemž u obou úloh budeme chtít odvodit obecný vzorec.

Zároveň budeme postupovat opačně než je tomu zvykem, tedy od matematického problému směrem k zavedení nového pojmu. Nebudeme tedy zavádět pojem a teprve potom ukazovat jeho geometrickou interpretaci, jak je tomu často zvykem. Budeme také vždy nejdříve řešit konkrétní příklad, u kterého zjistíme, jak při řešení úlohy postupovat, a až následně budeme provádět obecné odvození.

2.1 Úhly a skalární součin

Budeme nejdříve zkoumat první z uvedených problémů, tedy hledání odchylky dvou vektorů. Dovednost najít odchylku dvou vektorů pro nás bude užitečná například pro řešení obecného trojúhelníku, jehož vrcholy budou zadány pomocí souřadnic. Dále pak budeme pomocí odchylky vektorů počítat i odchylky přímek v rovině a odchylky přímek a rovin v prostoru.

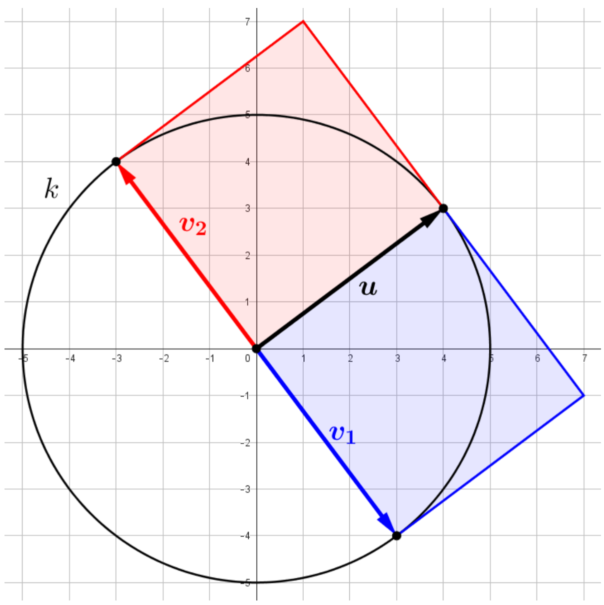
Nejdříve se ale zaměříme na speciální případ odchylky, kterou je kolmost.

Kolmost dvou vektorů

Naším cílem tedy nejdříve bude zjistit, co pro kolmé vektory platí a také jak jednoduše kolmý vektor najít.

Příklad 1: Je dán vektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = (4; 3)$. Nalezněte vektor $\boldsymbol{v} = (v_1; v_1)$, který je k vektoru $\boldsymbol{u}$ kolmý.

Řešení konstrukční: Vektor si zakreslíme do soustavy souřadnic, tak že $A[0,0]$, a zkusíme k němu kolmý vektor najít jen pomocí obrázku. Pokud navíc budeme požadovat, aby $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}|$, je zřejmé, že vektory po doplnění na rovnoběžník tvoří čtverec. Konstrukčně pak dostáváme dvě řešení: $\boldsymbol{v_1} = (3; -4)$ a $\boldsymbol{v_2} = (-3; 4)$ (viz obr. 6).



Obr. 6: Kolmé vektory – konstrukční řešení

Pozorování: Všimneme si, že vektory $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ vzniknou z vektoru $\boldsymbol{u}$ prohozením jeho souřadnic a změnou znaménka u jedné ze souřadnic.

Řešení algebraické: Vektor $\boldsymbol{u}$ označíme $\boldsymbol{AB}$ a hledáme k němu kolmý vektor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC}$. Stačí nám tedy najít takový bod $C[c_1, c_2]$, aby trojúhelník ABC byl pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A. Bod A umístíme opět do počátku, tedy $A[0,0]$ a $B[4,3]$.

Pro vektor $\boldsymbol{v}$ tedy platí:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC} = (c_1 - 0; c_2 - 0) = (c_1; c_2) = (v_1; v_2)$$

Tedy bod C má souřadnice $[v_1; v_2]$.

Protože je hledaný trojúhelník pravoúhlý, použijeme Pythagorovu větu. Nejprve určíme velikosti všech stran trojúhelníku:

$$a = |\boldsymbol{BC}| = \sqrt{(v_1 - 4)^2 + (v_2 - 3)^2}$$

$$b = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$c = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Z Pythagorovy věty pak dostáváme:

$$(v_1 - 4)^2 + (v_2 - 3)^2 = v_1^2 + v_2^2 + 25$$

Rovnost upravíme a vyjádříme např. v_2:

$$\begin{aligned} v_1^2 - 8v_1 + 16 + v_2^2 - 6v_2 + 9 &= v_1^2 + v_2^2 + 25 \\ 8v_1 + 6v_2 &= 0 \\ 4v_1 + 3v_2 &= 0 \\ v_2 &= -\frac{4v_1}{3} \end{aligned}$$

Vektor $\boldsymbol{v}$ má tedy souřadnice $\left(v_1; -\frac{4v_1}{3}\right)$. Vidíme, že naše úloha má nekonečně mnoho řešení, což je zřejmé, protože jsme po vektoru $\boldsymbol{v}$ nepožadovali danou velikost.

Pro $c_1 = \pm 3$ dostáváme $\boldsymbol{v_1} = (3; -4)$ a $\boldsymbol{v_2} = (-3; 4)$, stejně jako při konstrukčním řešení.

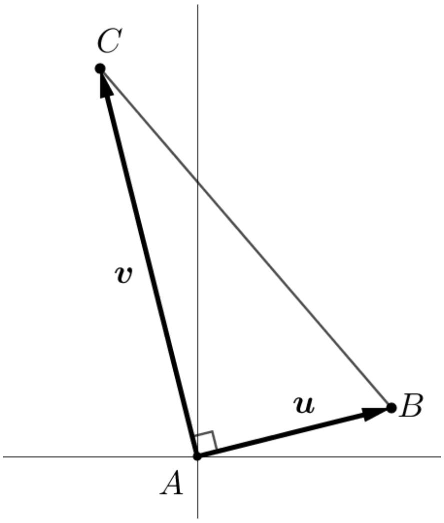
Obecný postup: Provedeme teď stejný postup obecně. Máme tedy vektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = (u_1; u_2)$ s počátečním bodem v počátku souřadnic a hledáme vektor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC} = (v_1; v_2)$, tak aby trojúhelník ABC byl pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A.

Vyjádříme si délky stran:

$$a = |\boldsymbol{BC}| = \sqrt{(c_1 - u_1)^2 + (c_2 - u_2)^2}$$

$$b = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$c = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$



Obr. 7: Obecné určení kolmého vektoru

Použijeme Pythagorovu větu a upravujeme:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(c_1 - u_1)^2 + (c_2 - u_2)^2 = c_1^2 + c_2^2 + u_1^2 + u_2^2$$

$$c_1^2 - 2c_1u_1 + c_1^2 + c_2^2 - 2c_2u_2 + u_2^2 = c_1^2 + c_2^2 + u_1^2 + u_2^2$$

Po odečtení stejných členů a vydělení rovnosti -2 dostáváme:

$$(1)\ u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$

Zjistili jsme tedy, že aby byly vektory $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$ kolmé, musí platit rovnost (1).

Většinou ale budeme chtít nalézt jeden konkrétní kolmý vektor k $\boldsymbol{u}$. Souřadnice vektoru $\boldsymbol{v}$ můžeme pomocí (1) zapsat jako $\left(v_1; -\frac{u_1v_1}{u_2}\right)$. Pro $v_1 = \pm u_2$ pak dostáváme:

$$\boldsymbol{v} = (\pm u_2; \mp u_1)$$

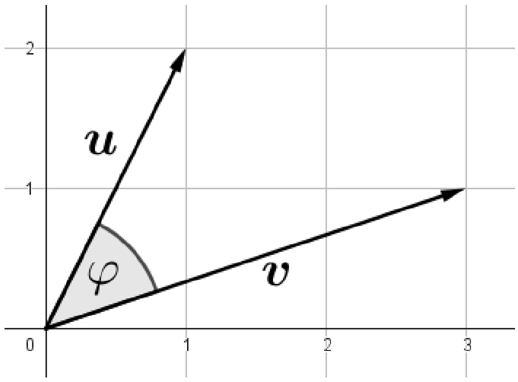
Shrnutí: Potvrdila se tedy naše hypotéza, že k nalezení kolmého vektoru k vektoru $\boldsymbol{u}$ stačí obrátit jeho souřadnice a u jedné z nich změnit znaménko.

Hledání obecné odchylky

Od zkoumání kolmých vektorů se teď přesuneme k obecnějšímu zadání. Naším cílem bude zjistit odchylku mezi dvěma danými vektory v rovině. Nejdříve opět vyřešíme konkrétní příklad a následně odvodíme obecný nástroj pro počítání odchylky dvou vektorů v rovině. Předpokládáme znalost kosinové věty a součtových vzorců.

Příklad 2

Jsou dány dva vektory v rovině $\boldsymbol{u} = (1; 2)$ a $\boldsymbol{v} = (3; 1)$. Zjistěte, jakou mají odchylku.



Obr. 8: Hledání obecné odchylky dvou vektorů

2.1.1 Odvození pomocí kosinové věty

Máme tedy dva vektory v rovině a hledáme jejich odchylku. Zamysleme se tedy, co vše známe. U obou vektorů známe jejich souřadnice, a tedy umíme spočítat jejich velikost. Když spojíme jejich koncové body, vznikne nám trojúhelník, u kterého umíme spočítat i nově vzniklou stranu. Máme tedy trojúhelník, u kterého známe velikosti všech tři stran, a tedy můžeme využít kosinové věty. Věta je pro úplnost a korektnost uvedena i s důkazem na konci kapitoly (Věta 1: kosinová).

Zaměřme se ještě na vzorec, který jsme obdrželi, tedy:

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|u||v|}$$

Všimněme si, že v čitateli jsme obdrželi výraz, který vystupoval u **Kolmost dvou vektorů**.

Ověříme tedy, že vzorec platí i pro kolmé vektory, tedy když $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Protože $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, dostaneme:

$$0 = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|u||v|}$$

Když rovnost vynásobíme $|u||v|$, což můžeme, neboť je to vždy kladné číslo, vyjde nám:

$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$

To je ale přesně podmínka, kterou jsme odvodili u kolmosti. Jak vidíme, výraz $u_1v_1 + u_2v_2$ je pro počítání odchylek zásadní, zavedeme pro něj proto speciální název.

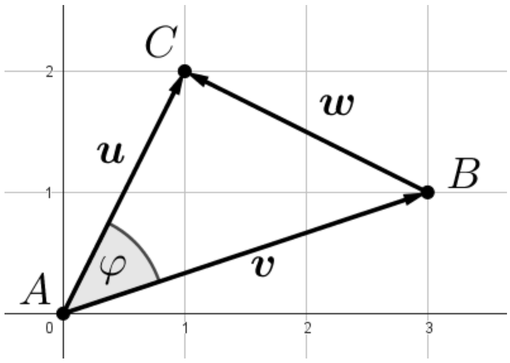
Definice 12: skalární součin

Výraz $u_1v_1 + u_2v_2$ nazveme skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a budeme ho značit $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$.

Shrnutí: Odchylka dvou nenulových vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je tedy takové $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, pro které platí:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Řešení **Příklad 2***:* Vyřešíme příklad pomocí kosinové věty. Vektory si doplníme na trojúhelník a dostaneme vektor $\boldsymbol{w} = (-2; 1)$, případně vektor k němu opačný.



Obr. 9: Příklad 2, řešení pomocí kosinové věty

Spočítáme délky všech stran trojúhelníku:

$a = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$b = |\boldsymbol{w}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$c = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Použijeme kosinovou větu pro náš trojúhelník:

$$5 = 10 + 5 - 2 \cdot \sqrt{50} \cos \varphi$$

$$10\sqrt{2} \cos \varphi = 10$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Poznámka: Můžeme si všimnout, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C a φ jsme tedy mohli vypočítat pomocí goniometrických funkcí, např. takto:

$$\sin \varphi = \frac{|\boldsymbol{w}|}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

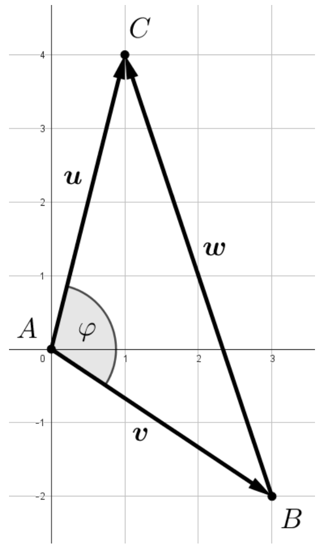
V jiných případech ale takové štěstí mít nebudeme a využití kosinové věty bude nutné. Uveďme ještě jiný příklad, aby bylo zřejmé, že kosinová věta je opravdu potřeba.

Příklad 3

Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (1; 4)$ a $\boldsymbol{v} = (3; -2)$. Určete jejich odchylku.

Určíme souřadnice vektoru $\boldsymbol{w} = (-2; 6)$ a spočítáme velikosti všech stran:

$$a = |\boldsymbol{w}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$
$$b = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$
$$c = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$



Obr. 10: Odchylka dvou vektorů, Příklad 3

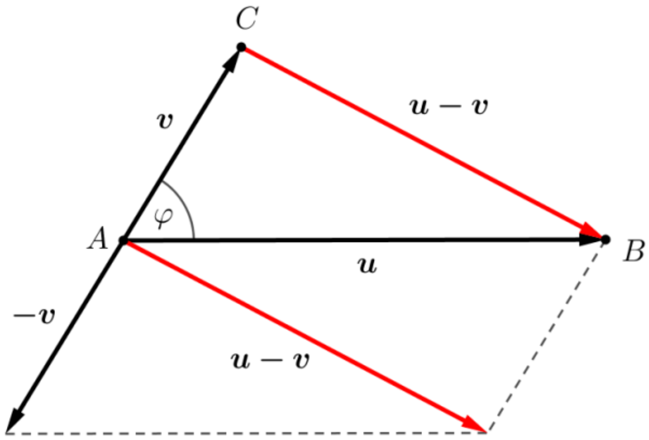
Trojúhelník není jistě pravoúhlý, ani jinak speciální (rovnoramenný či rovnostranný). Nezbývá tedy než použít kosinovou větu:

$$40 = 17 + 13 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{13} \cos\varphi$$
$$\cos\varphi = \frac{-10}{2\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{5}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{15\sqrt{221}}{221}$$
$$\varphi = \arccos\left(-\frac{15\sqrt{221}}{221}\right) \approx 109°39'$$

Obecný postup

Využijeme kosinovou větu pro řešení našeho problému. Chceme získat analytický nástroj, jak vypočítat odchylku φ vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Budeme postupovat stejně jako při řešení **Příklad 2**. Nejdříve potřebujeme vektory doplnit na trojúhelník a vyjádřit velikosti jeho stran. Doplníme-li vektory na trojúhelník ABC (viz obr. 11), je možné si vyjádřit nově vzniklý vektor $\boldsymbol{CB}$ pomocí vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Jak je z obrázku vidět, vektor $\boldsymbol{CB} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$. Tvrzení vyslovíme a dokážeme ještě algebraicky.



Obr. 11: Vyjádření třetí strany trojúhelníku

Tvrzení: V trojúhelníku ABC, kde $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{v}$ platí: $\boldsymbol{CB} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$.

Důkaz: Nechť $A[a_1; a_2], B[b_1; b_2], C[c_1; c_2]$. Pak $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{u} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$,

$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{v} = (c_1 - a_1; c_2 - a_2)$ a $\boldsymbol{CB} = (b_1 - c_1; b_2 - c_2)$.

Určíme souřadnice vektoru $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = (b_1 - a_1 - c_1 + a_1; b_2 - a_2 - c_2 + a_2)$. Vidíme, že souřadnice bodu A se odečtou a získáváme $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = (b_1 - c_1; b_2 - c_2) = \boldsymbol{CB}$. Tvrzení je tedy pravdivé. ■

Vraťme se tedy k jádru věci. Pro trojúhelník ABC použijeme kosinovou větu:

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - 2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos \varphi$$

Protože chceme vypočítat odchylku φ, vyjádříme si $\cos \varphi$:

$$\cos \varphi = \frac{|\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2}{2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Takové vyjádření by nám mohlo již stačit, protože již odchylku φ umíme vypočítat jen pomocí souřadnic $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Zkusme si ale ještě čitatel rozepsat pomocí souřadnic $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$:

$$\cos \varphi = \frac{\left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}\right)^2}{2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Odmocniny a mocniny se vyruší:

$$\cos \varphi = \frac{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (u_1 - v_1)^2 - (u_2 - v_2)^2}{2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Závorky umocníme a dostáváme:

$$\cos\varphi = \frac{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2 - u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2}{2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Stejné členy odečteme a dostaneme:

$$\cos\varphi = \frac{2u_1v_1 + 2u_2v_2}{2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Po zkrácení zlomku 2 získáváme:

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Vidíme, že úprava čitatele se vyplatila, nebudeme tedy muset konstruovat vektor $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ a odchylku spočítáme rovnou pomocí souřadnic zadaných vektorů.

Zkusme ještě předchozí dva příklady vyřešit pomocí odvozeného vzorce:

Příklad 2:

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Příklad 3:

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{1\cdot 3 + 4\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{-5}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{13}} = \frac{-5\sqrt{221}}{221}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{15\sqrt{221}}{221}\right) \approx 109°39'$$

Vidíme, že u obou postupů jsme obdrželi stejné výsledky.

Zaměřme se ještě na vzorec, který jsme obdrželi, tedy:

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Všimněme si, že v čitateli jsme obdrželi výraz, který vystupoval u **Kolmost dvou vektorů**.

Ověříme tedy, že vzorec platí i pro kolmé vektory, tedy když $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Protože $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, dostaneme:

$$0 = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Když rovnost vynásobíme $|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$, což můžeme, neboť je to vždy kladné číslo, vyjde nám:

$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$

To je ale přesně podmínka, kterou jsme odvodili u kolmosti. Jak vidíme, výraz $u_1v_1 + u_2v_2$ je pro počítání odchylek zásadní, zavedeme pro něj proto speciální název.

Definice 12: skalární součin

Výraz $u_1v_1 + u_2v_2$ nazveme skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a budeme ho značit $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$.

Shrnutí: Odchylka dvou nenulových vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je tedy takové $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, pro které platí:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Věta 1: kosinová

Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly jsou α, β, γ, platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Důkaz:

Věta je vyslovena pro obecný trojúhelník, dokážeme ji tedy postupně pro ostroúhlý, tupoúhlý a pravoúhlý trojúhelník. Začneme s pravoúhlým trojúhelníkem.

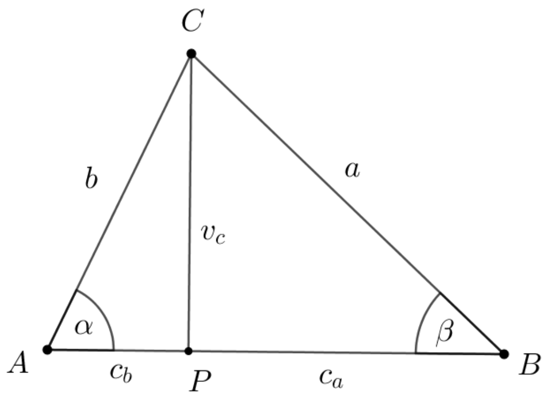
a) pravoúhlý trojúhelník

Pokud by byl trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, chceme pak dokázat rovnost: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{2}$.

Protože ale $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, dostáváme přímo rovnost Pythagorovy věty, a tvrzení tedy platí.

b) ostroúhlý trojúhelník

Jak jsme již viděli, Pythagorova věta je speciálním případem věty kosinové. Budeme tedy chtít Pythagorovu větu využít i ve zbylých případech. Trojúhelník si tedy pomocí výšky rozdělíme na dva trojúhelníky pravoúhlí. Označíme P patu výšky na stranu c, $c_a \equiv PB$ a $c_b \equiv AP$.



Obr. 12: Důkaz kosinové věty

Jelikož jsou trojúhelníky APC a BPC jsou pravoúhlé, platí pro velikosti jejich stran Pythagorova věta:

(1) ${c_b}^2 + {v_c}^2 = b^2$

(2) ${c_a}^2 + {v_c}^2 = a^2$

Pokud od první rovnosti odečteme druhou a dostáváme: (3) ${c_b}^2 - {c_a}^2 = b^2 - a^2$

Navíc platí $c_b = c - c_a$. Dosadíme do (3) a upravíme:

$$(c - c_a)^2 - {c_a}^2 = b^2 - a^2$$
$$c^2 - 2cc_a + {c_a}^2 - {c_a}^2 = b^2 - a^2$$
$$c^2 - 2cc_a = b^2 - a^2$$
$$(4)\ b^2 = a^2 + c^2 - 2cc_a$$

Pro úhel β platí z trojúhelníku BPC: $\cos\beta = \frac{c_a}{a}$, a tedy platí $c_a = a\,cos\,\beta$. Dosadíme do (4) a dostaneme druhou z rovností kosinové věty:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos\,\beta$$

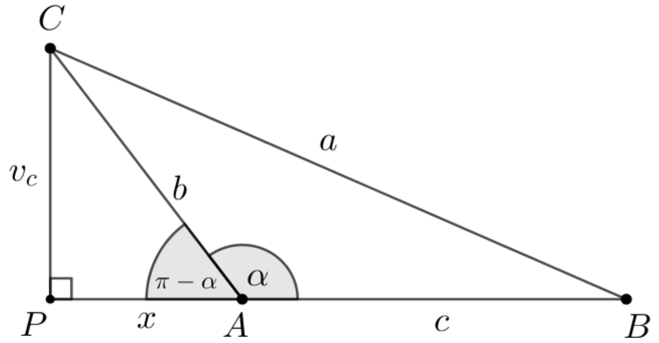
Pokud bychom do (3) dosadili $c_a = c - c_b$ a použili rovnost $\cos\alpha = \frac{c_b}{b}$, dostali bychom první rovnost kosinové věty:

$$\begin{aligned} {c_b}^2 - (c - c_b)^2 &= b^2 - a^2 \\ {c_b}^2 - c^2 + 2cc_b - {c_b}^2 &= b^2 - a^2 \\ -c^2 + 2cc_b &= b^2 - a^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cb\,cos\,\alpha \end{aligned}$$

Zbývá dokázat třetí rovnost, pro kterou bychom si zkonstruovali například výšku v_a a postupovali stejně jako při odvození prvních dvou rovností.

c) tupoúhlý trojúhelník

Pokud by byl např. úhel α tupý, budeme postupovat podobně. Zkonstruujeme výšku v_c a získáme tak pravoúhlý trojúhelník APC.



Obr. 13: Kosinová věta pro tupoúhlý trojúhelník

Protože je trojúhelník PBC pravoúhlý, platí v něm Pythagorova věta:

$$(5)\ a^2 = (x + c)^2 + {v_c}^2$$

Z trojúhelníku APC dostáváme $v_c = b\sin(\pi - \alpha)$ a $x = b\cos(\pi - \alpha)$. Dosadíme do (5):

$$a^2 = (b\cos(\pi - \alpha) + c)^2 + (b\sin(\pi - \alpha))^2$$

Protože $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ a $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, dostáváme:

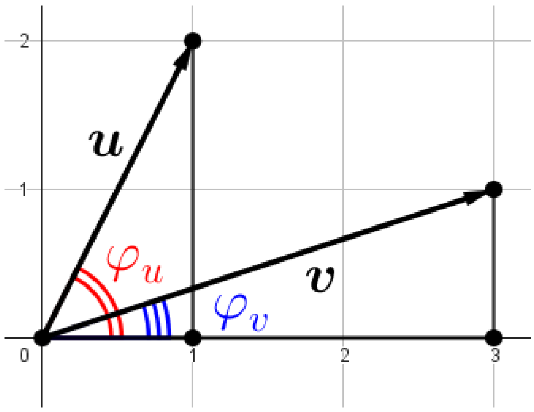
$$a^2 = (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2$$
$$a^2 = c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha$$
$$a^2 = c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Věta tedy platí i pro tupoúhlý trojúhelník. ■

2.1.2 Odvození pomocí součtových vzorců

Odchylku dvou vektorů jsme již odvodili pomocí kosinové věty. Zamysleme se tedy ještě nad dalším způsobem, jak odchylku najít. Naše odchylka φ je vnitřní úhel v obecném trojúhelníku vymezeném vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Víme také, že úhly umíme jednoduše najít v pravoúhlých trojúhelnících, zkusíme tedy náš problém převést na problematiku pravoúhlých trojúhelníků.

Řešení **Příklad 2***:* Jak vidíme na obr. 12, pravoúhlé trojúhelníky můžeme vytvořit tak, že si situaci doplníme o úhly, které vektory svírají s osou x.



Obr. 14: Příklad 2, řešení 2

Z pravoúhlých trojúhelníků dostáváme:

$\cos \varphi_{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, tedy $\varphi_{\boldsymbol{u}} = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \approx 63°26'$

$\sin \varphi_{\boldsymbol{u}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, tedy $\varphi_{\boldsymbol{u}} = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \approx 63°26'$

$\cos \varphi_{\boldsymbol{v}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, tedy $\varphi_{\boldsymbol{v}} = \arccos\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \approx 18°26'$

$\sin \varphi_{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, tedy $\varphi_{\boldsymbol{v}} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \approx 18°26'$

Vidíme, že ani jeden z úhlů není tabulkový. Pokud bychom úhly $\varphi_{\boldsymbol{u}}$ a $\varphi_{\boldsymbol{v}}$ spočítali a odečetli je, dostali bychom přibližný výsledek:

$$\varphi \approx 63°27' - 18°27' \approx 45° = \frac{\pi}{4}$$

Pokud ale chceme přesný výsledek, musíme buď aplikovat vzorec pro rozdíl cyklometrických funkcí, nebo použít součtové vzorce pro funkce goniometrické.

Pro cyklometrické funkce platí tyto vztahy (obr. 13 a 14), které jsou převzaty z (Bartsch, 1983, s. 377-378):

$$
\begin{aligned}
&\arcsin x_1 - \arcsin x_2 = \\
&= \arcsin\left[x_1 \sqrt{(1 - x_2^2)} - x_2 \sqrt{(1 - x_1^2)}\right] \quad (x_1 x_2 \geqq 0 \text{ nebo } x_1^2 + x_2^2 \leqq 1), \\
&= \quad \pi - \arcsin\left[x_1 \sqrt{(1 - x_2^2)} - x_2 \sqrt{(1 - x_1^2)}\right] \quad (x_1 > 0,\ x_2 < 0,\ x_1^2 + x_2^2 > 1), \\
&= -\pi - \arcsin\left[x_1 \sqrt{(1 - x_2^2)} - x_2 \sqrt{(1 - x_2^2)}\right] \quad (x_1 < 0,\ x_2 > 0,\ x_1^2 + x_2^2 > 1),
\end{aligned}
$$

Obr. 15: Rozdíl arkus sinů

$$
\begin{aligned}
&\arccos x_1 - \arccos x_2 = \\
&\qquad = -\arccos\left\{x_1 x_2 + \left[\sqrt{(1 - x_1^2)}\right] \sqrt{(1 - x_2^2)}\right\} \qquad (x_1 \geqq x_2), \\
&\qquad = \quad \arccos\left\{x_1 x_2 + \left[\sqrt{(1 - x_1^2)}\right] \sqrt{(1 - x_2^2)}\right\} \qquad (x_1 < x_2),
\end{aligned}
$$

Obr. 16: Rozdíl arkus kosinů

Vzorce využijeme a spočítáme odchylku φ, například pomocí arkus sinů:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} - \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}\right)$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{\frac{90}{100}} - \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot \sqrt{\frac{5}{25}}\right) = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{10}\right)$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{5\sqrt{2}}{10}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Vidíme, že jsme obdrželi přesný výsledek, vzhledem ke složitosti vzorce spíš zkusíme použít součtové vzorce, použijme např. vzorec pro kosinus:

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_{\boldsymbol{u}} - \varphi_{\boldsymbol{v}}) = \cos\varphi_{\boldsymbol{u}}\cos\varphi_{\boldsymbol{v}} + \sin\varphi_{\boldsymbol{u}}\sin\varphi_{\boldsymbol{v}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos\varphi = \frac{15\sqrt{2}+10\sqrt{2}}{50} = \frac{25\sqrt{2}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Obecný postup

Zvolme vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ svírající úhel φ tak, že oba vektory leží v prvním kvadrantu. Situaci si můžeme doplníme o úhly $\varphi_{\boldsymbol{u}}$ a $\varphi_{\boldsymbol{v}}$, tedy úhly, které dané vektory svírají s osou x. Převedeme tak úlohu na řešení pravoúhlých trojúhelníků.

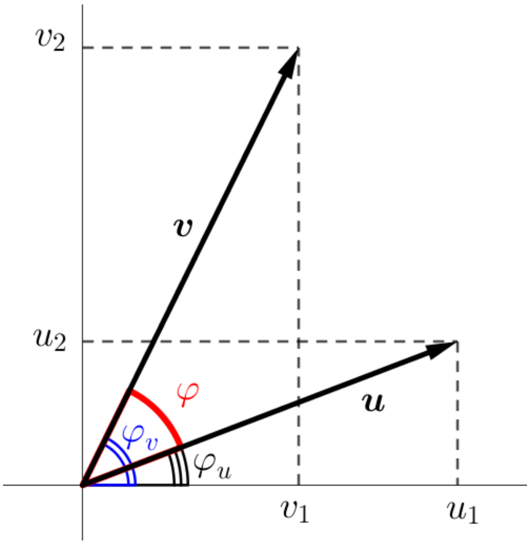
Vyjádřeme si tedy sinus a kosinus úhlů $\varphi_{\boldsymbol{u}}$ a $\varphi_{\boldsymbol{v}}$:

$$\cos\varphi_{\boldsymbol{v}} = \frac{v_1}{|\boldsymbol{v}|}$$

$$\sin\varphi_{\boldsymbol{v}} = \frac{v_2}{|\boldsymbol{v}|}$$

$$\sin\varphi_{\boldsymbol{u}} = \frac{u_2}{|\boldsymbol{u}|}$$

$$\cos\varphi_{\boldsymbol{u}} = \frac{u_1}{|\boldsymbol{u}|}$$



Obr. 17: Odvození pomocí součtových vzorců

My bychom chtěli vyjádřit kosinus, případně sinus samotného úhlu φ.

a) pomocí sinu:

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_{\boldsymbol{u}} - \varphi_{\boldsymbol{v}})$$

$$\sin\varphi = \sin\varphi_{\boldsymbol{u}}\cos\varphi_{\boldsymbol{v}} - \sin\varphi_{\boldsymbol{v}}\cos\varphi_{\boldsymbol{u}}$$

$$\sin\varphi = \frac{u_2}{|\boldsymbol{u}|}\cdot\frac{v_1}{|\boldsymbol{v}|} - \frac{v_2}{|\boldsymbol{v}|}\cdot\frac{u_1}{|\boldsymbol{u}|}$$

$$\sin\varphi = \frac{u_2v_1 - u_1v_2}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

b) pomocí kosinu:

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_{\boldsymbol{u}} - \varphi_{\boldsymbol{v}})$$

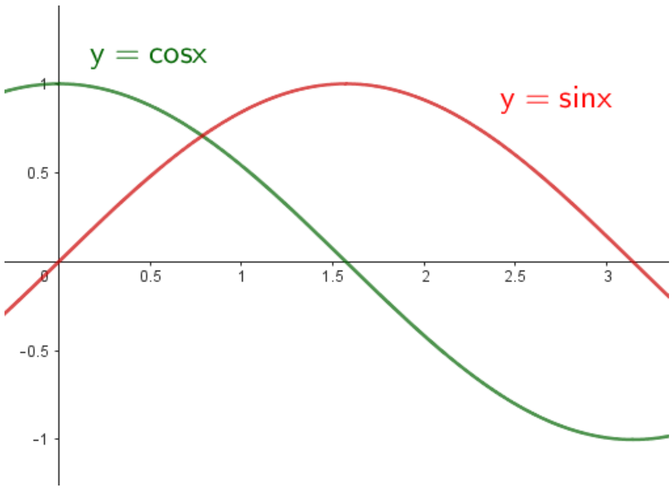
$$\cos\varphi = \cos\varphi_{\boldsymbol{u}}\cos\varphi_{\boldsymbol{v}} + \sin\varphi_{\boldsymbol{u}}\sin\varphi_{\boldsymbol{v}}$$

$$\cos\varphi = \frac{u_1}{|\boldsymbol{u}|}\cdot\frac{v_1}{|\boldsymbol{v}|} + \frac{u_2}{|\boldsymbol{u}|}\cdot\frac{v_2}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Vidíme, že ve vyjádření pomocí kosinu jsme opět obdrželi skalární součin. Ve vyjádření pomocí sinu jsme dostali podobný výraz: $u_2v_1 - u_1v_2$, kterému se však podrobně budeme věnovat až v kapitole o obsazích. Obě vyjádření, tedy pomocí sinu i kosinu, jsou korektní. Je však vhodnější pracovat s funkcí kosinus. Uvědomíme-li si, že hledaná odchylka vždy leží v intervalu $\langle 0;\pi\rangle$ a funkce kosinus je na tomto intervalu prostá (viz obr. 18), budeme při výpočtu úhlu vždy dostávat jednoznačnou odpověď. Naopak pro funkci sinus platí:

$$\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right): \sin x = \sin(\pi - x)$$



Obr. 18: Grafy funkcí sinus a kosinus

Při použití sinu bychom tedy nedostávali jednoznačnou odpověď, nýbrž dvojici úhlů (jeden ostrý a jeden tupý), pouze při kolmosti bychom jednoznačnou odpověď obdrželi.

Všimněme si ještě, jak se obě vyjádření budou měnit, pokud zaměníme pořadí vektorů. Tedy nebudeme-li hledat odchylku $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, ale $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{u}$.

$$\cos \varphi_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

$$\cos \varphi_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}} = \frac{v_1 u_1 + v_2 u_2}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}|}$$

$$\sin \varphi_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} = \frac{u_2 v_1 - u_1 v_2}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

$$\sin \varphi_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}} = \frac{v_2 u_1 - v_1 u_2}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}|}$$

Platí tedy:

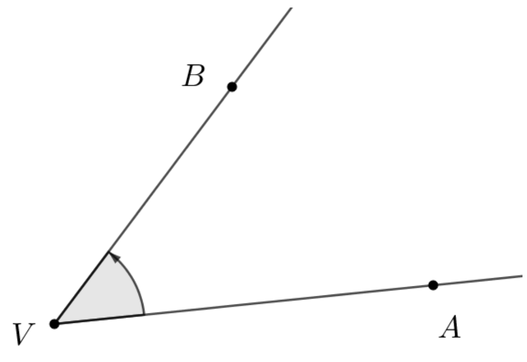
$$\cos \varphi_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} = \cos \varphi_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}}$$

$$\sin \varphi_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} = -\sin \varphi_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}}$$

U vyjádření pomoci sinu tedy záleží na pořadí vektorů. Ze vzorce totiž nedostaneme klasickou odchylku, nýbrž odchylku se znaménkem. Definujme proto tzv. *orientovaný úhel*.

Definice 13: orientovaný úhel

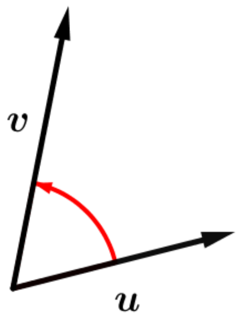
Orientovaný úhel je uspořádaná dvojice polopřímek se společným počátkem. První polopřímka je počáteční rameno a druhá koncové rameno orientovaného úhlu. Orientovaný úhel s počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB zapíšeme $\widehat{AVB}$ a na obr. 19 vyznačíme obloukem. (Pomykalová, 1993, s.145)



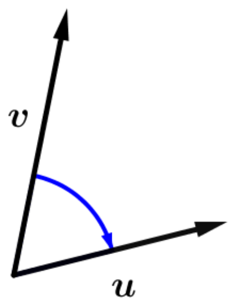
Obr. 19: Orientovaný úhel

Definice 14 (orientace vektorů)

Řekneme, že lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ svírající úhel φ jsou orientovány kladně, pokud φ procházíme od $\boldsymbol{u}$ k $\boldsymbol{v}$ proti směru hodinových ručiček, a jsou orientovány záporně, jestliže jej procházíme ve směru hodinových ručiček. (Plišťáková, 2013, s. 11)



Obr. 20: Kladná orientace

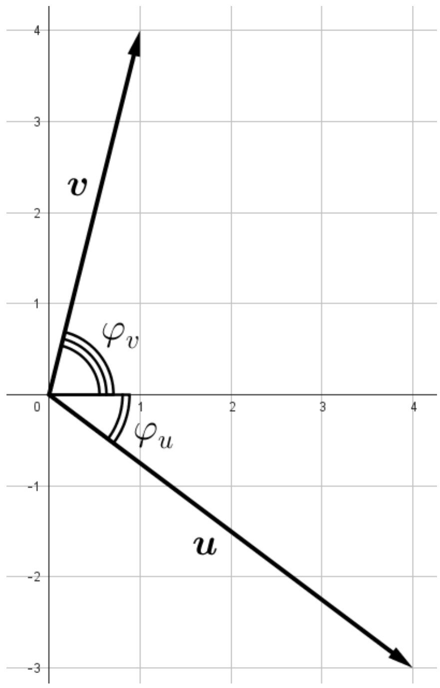


Obr. 21: Záporná orientace

Poznámka: Nabízí se ještě otázka, jak by se řešila úloha, kde by jeden vektor ležel v prvním kvadrantu a druhý např. ve čtvrtém. Pak bychom jednotlivé odchylky od osy x neodečítali, ale sčítali. Ilustrujme si to na příkladu.

Příklad 4

Mějme vektory $\boldsymbol{u} = (4; -3)$ a $\boldsymbol{v} = (1; 4)$. Určete jejich odchylku.



Obr. 22: Odchylka vektorů z jiných kvadrantů

Řešení: Odchylku vypočítáme pomocí součtových vzorců. Využijeme kosinu, protože ten nám odchylku vypočítá jednoznačně:

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_{\boldsymbol{u}} + \varphi_{\boldsymbol{v}}) = \cos\varphi_{\boldsymbol{u}}\cos\varphi_{\boldsymbol{v}} - \sin\varphi_{\boldsymbol{u}}\sin\varphi_{\boldsymbol{v}}$$

$$\cos\varphi = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{-8}{5\sqrt{17}} = -\frac{8\sqrt{17}}{85}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{8\sqrt{17}}{85}\right) \approx 112°50'$$

Zkusme také dosadit do vzorce, který jsme odvodili, a uvidíme, jestli dostaneme stejný výsledek:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{4\cdot 1 + (-3)\cdot 4}{5\sqrt{17}} = \frac{-8}{5\sqrt{17}} = -\frac{8\sqrt{17}}{85}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{8\sqrt{17}}{85}\right) \approx 112°50'$$

Vzorec tedy patrně funguje i pro případ, kdy odchylku dostaneme jako rozdíl odchylek vektorů s osou x, ale i v případě, kdy odchylky sčítáme.

Obecný postup

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_{\boldsymbol{u}} + \varphi_{\boldsymbol{v}}) = \cos\varphi_{\boldsymbol{u}}\cos\varphi_{\boldsymbol{v}} - \sin\varphi_{\boldsymbol{u}}\sin\varphi_{\boldsymbol{v}}$$

$$\cos\varphi = \frac{u_1}{|\boldsymbol{u}|}\cdot\frac{v_1}{|\boldsymbol{v}|} - \frac{|u_2|}{|\boldsymbol{u}|}\cdot\frac{v_2}{|\boldsymbol{v}|}$$

A protože je u_2 v tomto případě záporné, můžeme místo $|u_2|$ napsat $-u_2$:

$$\cos\varphi = \frac{u_1}{|\boldsymbol{u}|}\cdot\frac{v_1}{|\boldsymbol{v}|} - \frac{-u_2}{|\boldsymbol{u}|}\cdot\frac{v_2}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{u_1}{|\boldsymbol{u}|}\cdot\frac{v_1}{|\boldsymbol{v}|} + \frac{u_2}{|\boldsymbol{u}|}\cdot\frac{v_2}{|\boldsymbol{v}|}$$

Dostáváme pak stejný vzorec jako pro dva vektory v prvním kvadrantu:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Poznámka: Vektory mohou ležet i v jiných kombinacích kvadrantů, nebudeme ale tyto možnosti již zkoumat, neboť stejným způsobem se vždy dopracujeme ke stejnému závěru.

Věta 2: součtové vzorce

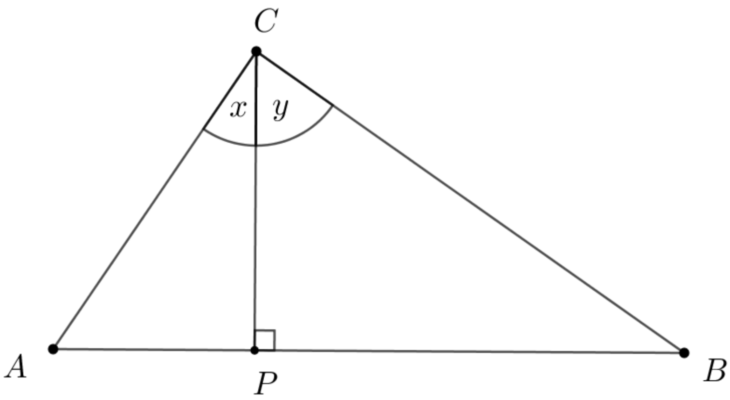
Pro libovolné úhly $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ platí:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Poznámka: Věta se dá vyslovit i pro $x, y \in \mathbb{R}$ a platí. Protože ale v našem případě x a y představují odchylky vektorů od horizontální osy, stačí větu vyslovit a dokázat v této formě.

Důkaz: Mějme trojúhelník ABC, kde P je pata výšky na stranu c a označíme

$|\measuredangle ACP| = x, |\measuredangle BCP| = y.$



Obr. 23: Důkaz součtových vzorců

Vyjádřeme si obsah trojúhelníku pomocí úhlu $(x + y)$:

$$S = \frac{|BC| \cdot |AC| \cdot \sin(x + y)}{2}$$

Obsah trojúhelníku ABC ale dostaneme i jako součet obsahů APC a PBC:

$$S_{APC} = \frac{|AP| \cdot |PC|}{2}$$
$$S_{BPC} = \frac{|PB| \cdot |PC|}{2}$$

Protože $\sin x = \frac{|AP|}{|AC|}$ a $\cos y = \frac{|PC|}{|BC|}$, rozšíříme si zlomky ve vyjádření S_{APC} vhodně tak, aby nám tam tyto podíly vznikly:

$$S_{APC} = \frac{|AP| \cdot |PC|}{2} \cdot \frac{|BC||AC|}{|BC||AC|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AP|}{|AC|} \cdot \frac{|PC|}{|BC|} \cdot |BC||AC| = \frac{1}{2}|BC||AC| \sin x \cos y$$

Podobně budeme postupovat u S_{BPC}, platí $\sin y = \frac{|PB|}{|BC|}$ a $\cos x = \frac{|PC|}{|AC|}$:

$$S_{BPC} = \frac{|PB| \cdot |PC|}{2} \cdot \frac{|BC||AC|}{|BC||AC|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|PB|}{|BC|} \cdot \frac{|PC|}{|AC|} \cdot |BC||AC| = \frac{1}{2}|BC||AC| \sin y \cos x$$

Víme, že $S = S_{APC} + S_{BPC}$, platí tedy:

$$\frac{|BC| \cdot |AC| \cdot \sin(x+y)}{2} = \frac{1}{2}|BC||AC| \sin x \cos y + \frac{1}{2}|BC||AC| \sin y \cos x$$

Obě strany vynásobíme výrazem $\frac{2}{|BC||AC|}$ a získáváme:

$$(1)\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

Pro $-y$ pak dostaneme:

$$\sin(x-y) = \sin x \cos(-y) + \sin(-y) \cos x$$
$$(2)\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

Zbývá vyjádřit $\cos(x+y)$. Využijeme sudosti funkce kosinus a následně použijeme definici kosinu pomocí sinu:

$$(3)\ \cos x = \cos(-x) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Pokud přiřadíme $x = \frac{\pi}{2} - z$, dostaneme ještě:

$$\sin z = \cos\left(-z + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$(4)\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

Pro $\cos(x+y)$ aplikujeme (3) a následně použijeme (2):

$$\cos(x+y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right)$$
$$\cos(x+y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos y - \sin y \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Použijeme (3) a (4):

$$(5)\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Pro $\cos(x-y)$ postupujeme stejně jako u $\sin(x-y)$:

$$\cos(x-y) = \cos\big(x+(-y)\big) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$$
$$(5)\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Tvrzení je tedy pravdivé. ■

2.1.3 Odchylka přímek – řešené příklady

Protože již víme, jak počítat odchylky dvou vektorů v rovině, přirozeně přejdeme k hledání odchylky dvou přímek. Nejdříve připomeneme definici odchylky dvou přímek v rovině.

Definice 15: odchylka dvou přímek

Odchylkou φ dvou přímek p, q v rovině nazýváme:

a) v případě různoběžných přímek velikost ostrého nebo pravého úhlu, který přímky svírají
b) v případě rovnoběžných přímek velikost nulového úhlu

Chceme-li tedy spočítat odchylku dvou přímek pomocí odchylky vektorů, musíme zajistit, aby nám vždy vycházel ostrý nebo pravý úhel, tedy aby $\cos\varphi \geq 0$. Jsou-li tedy dány přímka p se směrovým vektorem $\boldsymbol{s_p}$ a přímka q se směrovým vektorem $\boldsymbol{s_q}$, odchylku těchto vektorů spočítáme podle již známého vzorce:

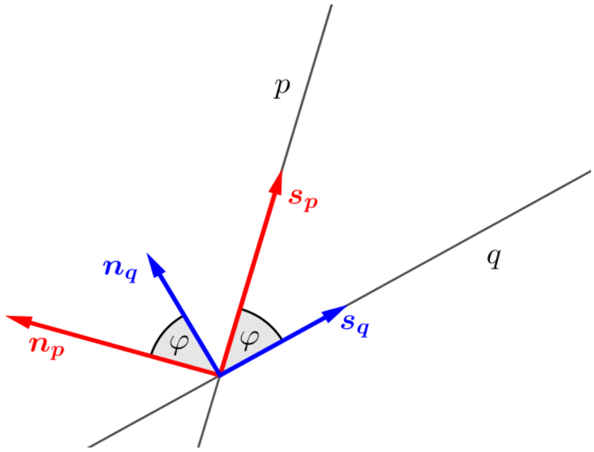
$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{s_p} \cdot \boldsymbol{s_q}}{|\boldsymbol{s_p}||\boldsymbol{s_q}|}$$

My ale chceme, aby celý zlomek vycházel vždy nezáporný. Protože je jmenovatel vždy kladné číslo, stačí zajistit, aby i čitatel byl vždy nezáporný. Proto přidáme absolutní hodnotu a odchylku dvou přímek budeme počítat podle vzorce:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{s_p} \cdot \boldsymbol{s_q}|}{|\boldsymbol{s_p}||\boldsymbol{s_q}|}$$

Poznámka: Místo směrových vektorů můžeme použít vektory normálové. Tedy:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n_p} \cdot \boldsymbol{n_q}|}{|\boldsymbol{n_p}||\boldsymbol{n_q}|}$$



Obr. 24: Odchylka dvou přímek

Příklad 5

Určete odchylku přímek $p: x + 2y - 1 = 0$ a $q: 4x + 3y + 3 = 0$.

Řešení: Určíme si normálové vektory: $n_p = (1; 2)$ a $n_q = (4; -3)$ a dosadíme do vzorce:

$$\cos\varphi = \frac{|1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{25}\right) \approx 79°42'$$

Poznámka: Pokud bychom vypočítali přímo odchylku vektorů, dostali bychom úhel tupý, tedy $\pi - \varphi$.

Příklad 6

Určete všechny přímky q, které s přímkou $p: x + 2y + 1 = 0$ svírá úhel $\frac{\pi}{3}$.

Řešení: Normálový vektor přímky p je $\boldsymbol{n_p} = (1; 2)$. Hledáme tedy normálový vektor $\boldsymbol{n_q} = (a; b)$ přímky q tak, aby platilo:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{|\boldsymbol{n_p} \cdot \boldsymbol{n_q}|}{|\boldsymbol{n_p}||\boldsymbol{n_q}|}$$

Do rovnice dosadíme a řešíme:

$$\frac{1}{2} = \frac{|a + 2b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Protože jsou obě strany nezáporné, můžeme rovnici umocnit:

$$\frac{1}{4} = \frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{5 \cdot (a^2 + b^2)}$$

Zbavíme se zlomků a upravíme:

$$5a^2 + 5b^2 = 4a^2 + 16ab + 16b^2$$
$$a^2 - 16ab = 11b^2$$

Pravou stranu můžeme upravit na čtverec:

$$(a - 8b)^2 - 64b^2 = 11b^2$$
$$(a - 8b)^2 = 75b^2$$

Odmocníme a vyjádříme a:

$$a - 8b = \pm 5\sqrt{3}b$$
$$a = \left(8 \pm 5\sqrt{3}\right)b$$

Např. pro $b = 1$ dostáváme dvě možnosti:

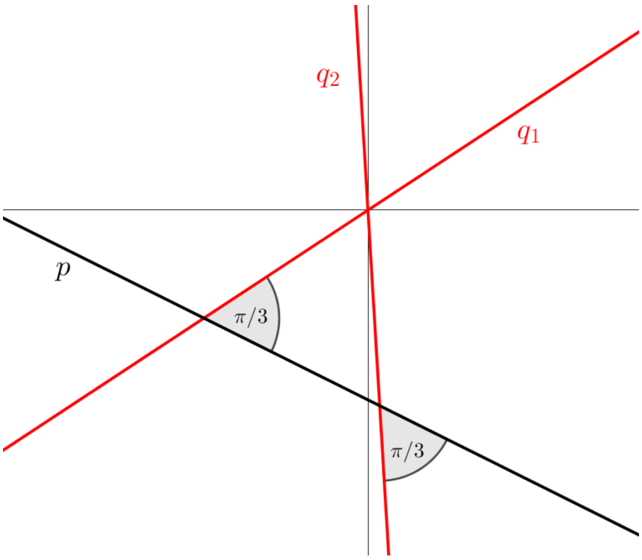
$$\boldsymbol{n_q} = \left(8 + 5\sqrt{3}; 1\right) \vee \boldsymbol{n_q} = \left(8 - 5\sqrt{3}; 1\right)$$

Přímky jsme tedy obdrželi dvě, přesněji řečeno jsme obdrželi dva směry. Všechny přímky q mají tedy tyto rovnice:

$$\left(8 + 5\sqrt{3}\right)x + y + c_1 = 0, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\left(8 - 5\sqrt{3}\right)x + y + c_2 = 0, c_2 \in \mathbb{R}$$

Zvolíme-li $c_1 = c_2 = 0$, a tedy obě přímky budou procházet počátkem soustavy souřadnic, situace vypadá následovně (viz obr. 22).



Obr. 25: Dvě přímky svírající s přímkou p daný úhel

Příklad 7

Jsou dány dvě přímky $p: ax + y - 4 = 0, q: x + 2y + 8 = 0$. Určete hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby:

a) přímky byly kolmé
b) odchylka přímek byla $\frac{\pi}{4}$

(Petáková, 1998, s. 108)

Řešení:

a) Přímky mají normálové vektory $\boldsymbol{n_p} = (a; 1)$ a $\boldsymbol{n_q} = (1; 2)$. Aby byly přímky kolmé, musí platit:

$$\cos\frac{\pi}{2} = \frac{|(a; 1) \cdot (1; 2)|}{|(a; 1)||(1; 2)|}$$

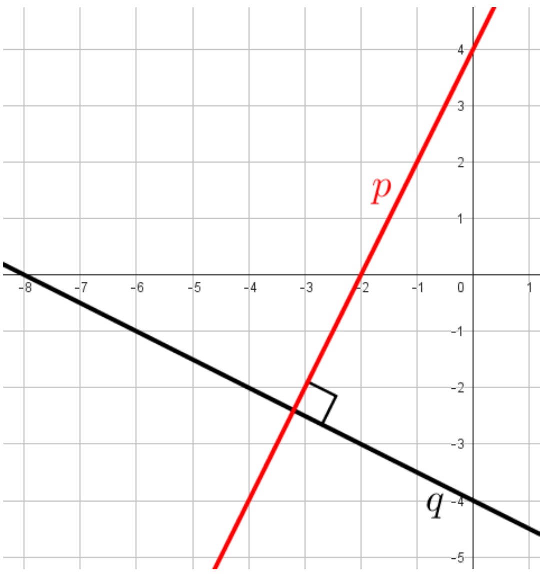
Výrazy v rovnici si rozepíšeme podle definice:

$$0 = \frac{|a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1} \cdot \sqrt{5}}$$

Protože je jmenovatel zlomku na pravé straně vždy nenulový, můžeme jím rovnici vynásobit. Dostaneme pak:

$$0 = |a + 2|$$

Jediným řešením je tedy $a = -2$ a přímka p má rovnici $-2x + y - 4 = 0$.



Obr. 26: Příklad 7a

b) Aby přímky svíraly úhel $\frac{\pi}{4}$, musí platit:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|a+2|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{5}}$$

Zbavíme se zlomků, tedy vynásobíme rovnici $2\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2+1}$:

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2+1} = 2 \cdot |a+2|$$

Rovnici umocníme. Protože jsou obě strany rovnice nezáporné, bude to ekvivalentní úprava:

$$10(a^2+1) = 4(a+2)^2$$

Rovnici vydělíme dvěma, závorky roznásobíme a umocníme a všechny členy převedeme na levou stranu:

$$5a^2 + 5 = 2a^2 + 8a + 8$$

$$3a^2 - 8a - 3 = 0$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici:

$$a = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6}$$

Dostáváme $a_1 = 3$ a $a_2 = -\frac{1}{3}$.

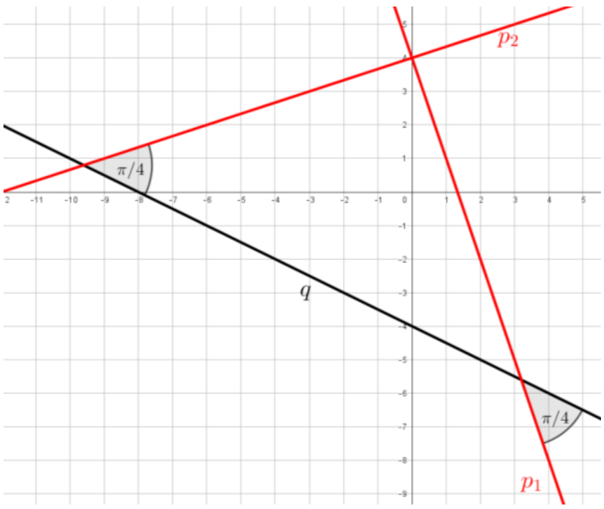
Řešením jsou tedy dvě přímky:

$$p_1\colon 3x + y - 4 = 0$$

$$p_2\colon -\frac{1}{3}x + y - 4 = 0$$

Rovnici přímky p_2 můžeme ještě vynásobit -3:

$$p_2\colon x - 3y + 12 = 0$$



Obr. 27: Příklad 7b

2.1.4 Algebraické vlastnosti skalárního součinu v rovině

V této kapitole se budeme věnovat skalárnímu součinu z vysokoškolského pohledu. Skalární součin dvou nenulových vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jsme definovali jako $u_1v_1 + u_2v_2$. Nenulové vektory jsme zvolili, protože jsme vzorec odvozovali skrze geometrický problém hledání jejich odchylky. Definici můžeme však bez problému rozšířit i o nulové vektory.

Bude pak platit:

$$(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \vee \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}) \Rightarrow \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Skalární součin je tedy funkce, která dvěma vektorům přiřazuje reálné číslo. Označíme-li V množinu všech vektorů v rovině, řekneme, je skalární součin zobrazení z $V \times V$ do $\mathbb{R}$. Prozkoumejme tedy jeho algebraické vlastnosti, na které se budeme snažit nahlížet i geometricky.

Již ze střední školy známe pojmy jako komutativita, asociativita či distributivita. Mohlo by nás tedy napadnout tyto vlastnosti zkoumat u skalárního součinu. Problémem ale je, že tyto vlastnosti se týkají operací, tedy zobrazení $V \times V \to V$. Skalární součin ale dvěma vektorům nepřiřazuje vektor, ale reálné číslo, jak jsme již uvedli. Zavedeme proto několik pojmů, abychom algebraické vlastnosti skalárního součinu, a později i determinantu, mohli popsat.

Před samotným zkoumáním vlastností skalárního součinu připomeneme, resp. zavedeme, několik pojmů z lineární algebry, abychom vlastnosti mohli pojmenovat a zkoumat.

Definice 16: těleso

Tělesem rozumíme každou uspořádanou trojici $(T,*,\circ)$, kde T je alespoň dvouprvková množina, $*$ a $\circ$ jsou operace na T a platí $(a, b, c \in T)$:

a) $a * b = b * a$
b) $a \circ b = b \circ a$
c) $(a * b) * c = a * (b * c)$
d) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
e) $\exists 0 \in T \forall a \in T: 0 * a = a$
f) $\exists 1 \in T \forall a \in T: 1 \circ a = a$
g) $\forall a \in T \exists - a \in T: a * (-a) = 0$
h) $\forall a \neq 0 \exists a^{-1} \in T: a \circ a^{-1} = 1$
i) $(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$

Poznámka: Operace $*$, resp. $\circ$, se nazývá sčítání, resp. násobení, 0 je tzv. nulový prvek tělesa T a 1 jeho jednotkový prvek.

Poznámka: Množiny všech racionálních, reálných a komplexních čísel s operacemi $+$ a $\cdot$ tvoří tělesa $(\mathbb{Q},+,\cdot), (\mathbb{R},+,\cdot), (\mathbb{C},+,\cdot)$. Nulovým prvkem je číslo 0 a jednotkovým prvkem číslo 1. Množiny $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ s operacemi $+$ a $\cdot$ netvoří tělesa, neboť neobsahují inverzní prvky vzhledem k násobení (tedy nesplňují podmínku h)).

Definice 17: vektorový prostor

Nechť T je těleso a V je množina. Uspořádanou trojici $(V,+,\cdot)$, kde $+$ je vnitřní operace na V, tedy zobrazení $V \times V \to V$, a $\cdot$ je vnější operace na V v T, tedy zobrazení $T \times V \to V$, nazveme *vektorovým prostorem nad tělesem* T, jestliže:

a) $\forall u, v, w \in V: (u + v) + w = u + (v + w)$
b) $\exists n \in V \forall u \in V: n + u = u = u + n$
c) $\forall u \in V \exists - u \in V: u + (-u) = n = (-u) + u$
d) $\forall u, v \in V: u + v = v + u$
e) $\forall a, b \in T \forall x \in V: (a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$
f) $\forall a, b \in T \forall u \in V: (ab) \cdot u = a \cdot (b \cdot u)$
g) $\forall u \in V: 1 \cdot u = u$, kde 1 je jednotkový prvek v T

Prvky z množiny V nazýváme vektory, prvky z tělesa T skaláry.

Poznámka:

a) Množina všech vektorů v rovině, tedy množina uspořádaných dvojic reálných čísel $\mathbb{R}^2$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.
b) Samotná množina $\mathbb{R}$ nad tělesem $\mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor. Dokonce platí obecně, že libovolné těleso T nad tělesem T tvoří vektorový prostor.

Definice 18: lineární zobrazení

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad tělesem T. Zobrazení f prostoru V do prostoru W se nazývá *lineární zobrazení*, jestliže platí:

a) $\forall u, v \in V: f(u+v) = f(u) + f(v)$
b) $\forall u \in V\ \forall a \in T: f(au) = a \cdot f(u)$

Poznámka: První vlastnost nazýváme *aditivita* a druhou *homogenita*.

Definice 19: lineární forma

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. *Lineární formou* na prostoru V budeme rozumět každé zobrazení f prostoru V do tělesa T, pro které platí:

a) $\forall u, v \in V: f(u+v) = f(u) + f(v)$
b) $\forall u \in V \forall a \in T: f(au) = af(u)$

Poznámka: Všimněme si, v čem se **Definice 18**: lineární zobrazení a **Definice 19**: lineární forma liší. Zaměníme-li v definici lineárního zobrazení vektorový prostor W za těleso T, dostaneme definice lineární formy. Protože každé těleso T je vektorovým prostorem nad stejným tělesem T, můžeme říct, že lineární forma je jen speciálním případem lineárního zobrazení, kde $W = T$. Vrátíme-li se tedy k prostoru všech vektorů v rovině, je každá lineární forma v něm zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Příklad 8

Ověřte, jestli zobrazení, které vektoru přiřadí jeho velikost, je lineární formou.

Řešení: Ověříme první podmínku pro konkrétní vektory $\boldsymbol{u} = (3; 4), \boldsymbol{v} = (5; 12)$.

$$|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}| = |(8; 16)| = \sqrt{8^2 + 16^2} = \sqrt{320}$$

$|\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25} + \sqrt{169} = 18 = \sqrt{324} \neq |\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|$, nejedná se tedy o lineární formu.

Definice 20: bilineární forma

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. *Bilineární formou* na prostoru V budeme rozumět každé zobrazení f kartézského součinu $V \times V$ do tělesa T, pro které platí:

a) $\forall u, v, w \in V: f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)$
b) $\forall u, v \in V\ \forall a \in T: f(au, v) = a \cdot f(u, v)$
c) $\forall u, v, w \in V: f(u, v + w) = f(u, v) + f(u, w)$
d) $\forall u, v \in V\ \forall a \in T: f(u, av) = a \cdot f(u, v)$

Poznámka: První dvě vlastnosti představují linearitu formy f v první složce, druhé dvě linearitu formy f v druhé složce. (Bečvář, s. 326, 2005)

Definice 21: vlastnosti bilineární formy

Mějme bilineární formu $f: V \times V \to T$. Řekneme, že f je:

a) Symetrická forma,
   pokud $\forall u, v \in V: f(u, v) = f(v, u)$
b) Antisymetrická forma,
   pokud $\forall u, v \in V: f(u, v) = -f(v, u)$
c) Pozitivně definitní forma, resp. negativně definitní forma
   pokud $\forall u \in V: f(u, u) \geq 0$, resp. $\forall u \in V: f(u, u) \leq 0$

Vlastnosti skalárního součinu

Věta 3

Skalární součin je symetrická pozitivně definitní bilineární forma.

Poznámka: Symbol $\oplus$ budeme používat pro dokázanou podmínku.

Důkaz:

1) Dokažme nejdříve, že je skalární součin bilineární forma.

$$\underline{(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} \overset{?}{=} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}$$

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = (u_1+v_1, u_2+v_2)\cdot(w_1,w_2) =$$

$$= (u_1+v_1)\cdot w_1 + (u_2+v_2)\cdot w_2 = u_1w_1+v_1w_1+u_2w_2+v_2w_2$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = (u_1w_1+u_2w_2)+(v_1w_1+v_2w_2) = u_1w_1+v_1w_1+u_2w_2+v_2w_2 \;\oplus$$

$$\underline{(a\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} \overset{?}{=} a(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})}$$

$$(a\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} = (au_1, au_2)\cdot(v_1,v_2) = au_1v_1+au_2v_2$$

$$a(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = a(u_1v_1+u_2v_2) = au_1v_1+au_2v_2 \;\oplus$$

$$\underline{\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \overset{?}{=} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = (u_1,u_2)\cdot(v_1+w_1, v_2+w_2) = u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2) =$$

$$= u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} = (u_1v_1+u_2v_2)+(u_1w_1+u_2w_2) = u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2 \;\oplus$$

$$\underline{\boldsymbol{u}\cdot(a\boldsymbol{v}) \overset{?}{=} a(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot(a\boldsymbol{v}) = (u_1,u_2)(av_1,av_2) = u_1av_1+u_2av_2 = au_1v_1+au_2v_2$$

$$a(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = a(u_1v_1+u_2v_2) = au_1v_1+au_2v_2 \;\oplus$$

Skalární součin je tedy bilineární forma.

2) Dokažme, že je skalární součin symetrická bilineární forma.

$$\underline{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \overset{?}{=} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1+u_2v_2$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} = v_1u_1+v_2u_2 = u_1v_1+u_2v_2 \;\oplus$$

3) Na závěr ještě dokažme, že skalární součin je pozitivně definitní forma.

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \cdot (u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$$

Protože $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$, pak i $u_1^2 \geq 0$ a $u_2^2 \geq 0$. A jelikož součet dvou nezáporných čísel je také nezáporné číslo, platí $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq 0$. ■

Věta 4

$\forall \boldsymbol{u} \in V: \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$

Důkaz: Začneme důkazem implikace " ⇒ ":

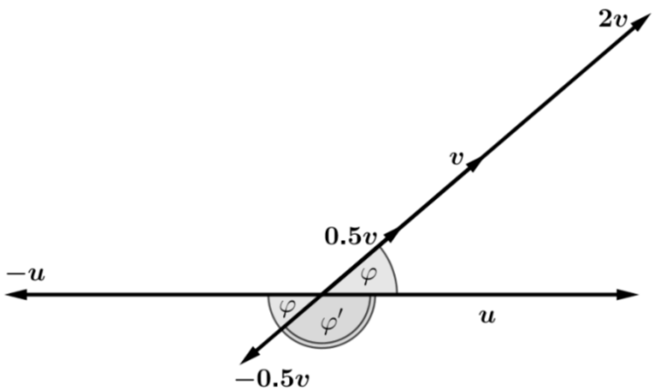
Vycházíme tedy z předpokladu, že $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0$.

Z předpokladu dostáváme $u_1^2 + u_2^2 = 0$, a tedy $u_1^2 = -u_2^2$. Pak ale jsou jistě u_1 i u_2 nulové. Protože pokud by nulové nebyly, pak by na levé straně bylo vždy číslo kladné, na pravé straně číslo záporné, a ta se rovnat nemohou.

Důkaz "⇐" je ještě jednodušší. Vycházíme z předpokladu, že $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, tedy

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$, a tvrzení platí. ■

Všimněme si ještě, že se odchylka vektorů nezmění, pokud oba vektory budeme násobit reálnými čísly se stejným znaménkem. (obr. 25)



Obr. 28: Odchylka násobku vektorů

Tvrzení: $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\ \forall a, b \in \mathbb{R}: (ab > 0) \Rightarrow \varphi_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \varphi_2(a\boldsymbol{u}, b\boldsymbol{v})$

Důkaz:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{a\boldsymbol{u}\cdot b\boldsymbol{v}}{|a\boldsymbol{u}||b\boldsymbol{v}|} = \frac{(au_1, au_2)\cdot(bv_1, bv_2)}{\sqrt{(au_1)^2+(au_2)^2}\cdot\sqrt{(bv_1)^2+(bv_2)^2}}$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{au_1bv_1 + au_2bv_2}{|a||b|\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \frac{ab(u_1v_1+u_2v_2)}{|a||b||\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Protože $ab > 0$, můžeme ab nahradit výrazem $|ab|$, a tedy i výrazem $|a||b|$:

$$\cos\varphi_2 = \frac{|a||b|(u_1v_1+u_2v_2)}{|a||b||\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{u_1v_1+u_2v_2}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \cos\varphi_1$$

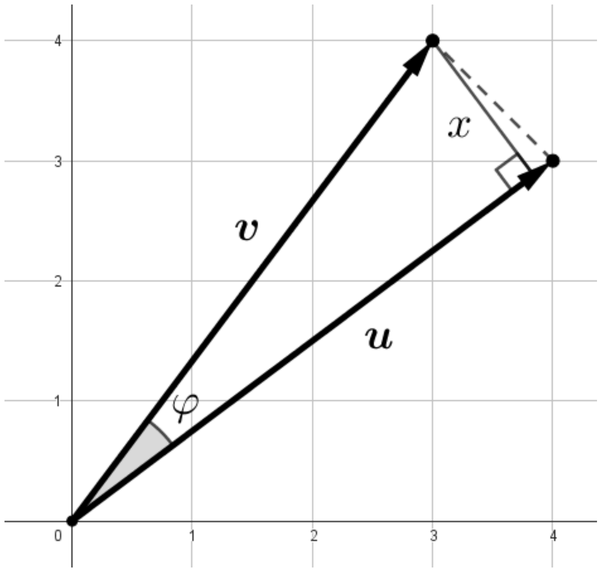
Dokázali jsme tedy, že $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$. Obecně by se úhly φ_1 a φ_2 přímo rovnat nemusely, např. úhly $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ a $\varphi_2 = \frac{11\pi}{6}$ se nerovnají, ale jejich kosiny ano. Protože ale pro odchylku dvou vektorů platí $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$,a pak jistě $\varphi_1 = \varphi_2$. ■

2.2 Obsahy a determinant

V této části se budeme věnovat obsahům, konkrétně v souvislosti s vektory obsahu trojúhelníku vymezeného dvěma vektory v rovině. Budeme postupovat stejně jako při hledání odchylky, tedy vždy nejdříve vyřešíme konkrétní příklad a následně nástroj odvodíme obecně. Takovým nástrojem bude v tomto případě determinant, o kterém na závěr podkapitoly vyslovíme a dokážeme některé vlastnosti. Předpokládáme znalosti o různých způsobech výpočtu trojúhelníku z planimetrie.

Příklad 9

Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (4; 3)$ a $\boldsymbol{v} = (3; 4)$. Vypočítejme obsah trojúhelníku, který z vektorů vznikne spojením koncových bodů.



Obr. 29: Obsah trojúhelníku vymezeného dvěma vektory

2.2.1 Odvození pomocí funkce sinus

Řešme tedy **Příklad** . Základním způsobem, jak vypočítat obsah trojúhelníku, je určit ho jako polovinu ze součinu libovolné strany a její výšky. Problémem ale je, že my žádnou výšku přímo zadanou nemáme. Když si ale výšku x na stranu $|\boldsymbol{u}|$ vyjádříme pomocí $\sin\varphi$, dostáváme $\sin\varphi = \frac{x}{|\boldsymbol{u}|}$, a tudíž $x = |\boldsymbol{u}|\sin\varphi$. Můžeme tedy psát:

$$S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}|\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2}\sin\varphi = \frac{25}{2}\sin\varphi$$

Protože již máme odvozený skalární součin, víme, že:

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{12+12}{25} = \frac{24}{25}$$

Dopočítáme $\sin\varphi$, a protože víme, že φ je ostrý úhel, je $\sin\varphi > 0$:

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{25^2-24^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{25}$$

Obsah trojúhelníku je tedy:

$$S = \frac{25}{2}\cdot\frac{7}{25} = \frac{7}{2}$$

Obecný postup

Stejný algoritmus provedeme teď obecně. Obsah trojúhelníku tedy spočítáme podle vzorce:

$$S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}|\sin\varphi$$

Protože už máme odvozený skalární součin, víme, že platí:

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_1v_2}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Využijeme základního vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, odkud vyjádříme sinus:

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

Protože $0 \le \varphi \le \pi$, a tedy $\sin\varphi \ge 0$, za $\sin\varphi$ dosadíme výraz $+\sqrt{1-\cos^2 x}$:

$$S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}|\sqrt{1-\cos^2 x}$$

Za kosinus dosadíme $\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$ a upravujeme:

$$S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}|\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right)^2}$$

$$S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}|\sqrt{\frac{(|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|)^2-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2}{(|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|)^2}}$$

$$S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}|\frac{\sqrt{(|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|)^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 - u_1^2 v_1^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2 - u_2^2 v_2^2}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 v_2^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2 + u_2^2 v_1^2}$$

$$S = \frac{\sqrt{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2}}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}|u_1 v_2 - u_2 v_1|$$

Získali jsme tedy, že obsah trojúhelníku lze počítat podle vzorce:

$$S = \frac{1}{2}|u_1 v_2 - u_2 v_1|$$

Všimněme si, že na výraz $u_1 v_2 - u_2 v_1$ jsme již narazili v **Odvození pomocí součtových vzorců**. Výraz opět pojmenujeme a budeme na závěru podkapitoly zkoumat jeho vlastnosti.

Definice 22: determinant

Výraz $u_1 v_2 - u_2 v_1$ nazveme determinant vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a píšeme:

$$\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_2 v_1 - u_1 v_2$$

Poznámka: Obsah trojúhelníku daného dvěma vektory je tedy $S = \frac{1}{2}|\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|$.

Důsledek: Obsah rovnoběžníku daného dvěma vektory je $S = |\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|$.

Příklad 10

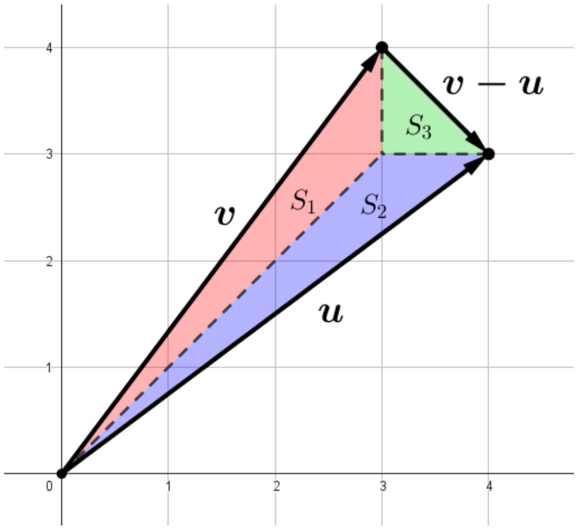
Jsou dány body $A[-2,1], B[1,0], C[-1,5]$. Určete obsah S trojúhelníku ABC.

Řešení:. Určíme souřadnice vektorů $\boldsymbol{AB} = (3; -1), \boldsymbol{AC} = (1; 4)$ a obsah spočítáme pomocí determinantu:

$$S = \frac{1}{2}|\det(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC})| = \frac{1}{2}\left|\det\big((3; -1), (1; 4)\big)\right| = \frac{1}{2}(3 \cdot 4 - (-1) \cdot 1) = \frac{13}{2}$$

2.2.2 Odvození pomocí rozdělení na menší trojúhelníky

Trojúhelník v **Příklad** si také můžeme rozdělit na tři menší trojúhelníky, jejichž obsah dokážeme snadno spočítat.



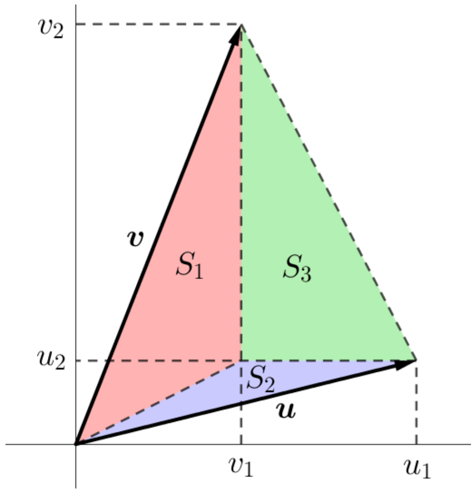
Obr. 30: Rozdělení na menší trojúhelníky

Dostáváme:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1 \cdot 3}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{7}{2}$$

Obecný postup

Provedeme teď stejný algoritmus obecně. Převedeme si problém na jednodušší úlohu tak, že si vytvoříme tři menší trojúhelníky, jejichž obsah dokážeme pomocí součinu stran a výšek spočítat.



Obr. 31: Obecné odvození determinantu pomocí rozdělení na menší trojúhelníky

Obsah S trojúhelníku vymezeného vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ se bude rovnat součtu obsahů tří barevných trojúhelníků z obr. 28. Tedy:

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$
$$S = \frac{v_1(v_2 - u_2)}{2} + \frac{u_2(u_1 - v_1)}{2} + \frac{(u_1 - v_1)(v_2 - u_2)}{2}$$
$$S = \frac{v_1v_2 - v_1u_2 + u_2u_1 - u_2v_1 + u_1v_2 - u_1u_2 - v_1v_2 + v_1u_2}{2}$$

Po sečtení členů v čitateli zlomku dostáváme:

$$S = \frac{u_1v_2 - u_2v_1}{2}$$
$$S = \frac{1}{2}\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

Poznámka: V tomto případě jsme dostali obsah jako polovinu determinantu bez absolutní hodnoty. Je to způsobeno volbou vektorů. Oba vektory jsou v našem případě v prvním kvadrantu a navíc svírají ostrý úhel, což obecně samozřejmě platit nemusí. První odvození je v tomto směru obecnější a elegantnější. Jak jsme si již všimli u skalárního součinu, $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\det(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$. Samotný determinant bez absolutní hodnoty nám tedy nepočítá obsah, ale tzv. *orientovaný obsah*.

Takový obsah se znaménkem známe i např. z integrálního počtu, kdy obsah mezi grafem funkce a osou x získáme z určitého integrálu kladný, pokud je graf nad osou x, a záporný, pokud je graf pod ní.

Definice 23: orientovaný obsah

Orientovaný obsah trojúhelníku o obsahu S, který je určený vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, označíme $\boldsymbol{S}$ a definujeme:

$\boldsymbol{S} = S$, pokud jsou $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ orientovány kladně

$\boldsymbol{S} = -S$, pokud jsou $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ orientovány záporně

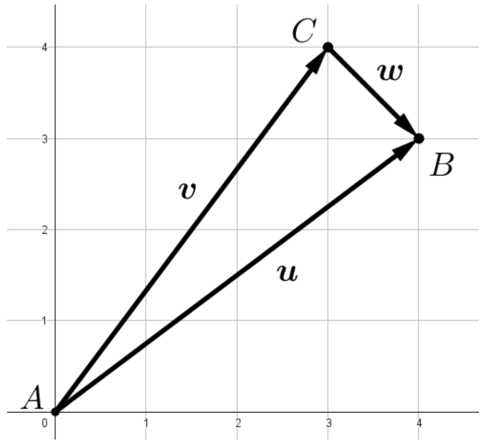
2.2.3 Odvození pomocí Heronova vzorce

Z planimetrie víme, že obsah trojúhelníku se dá také vypočítat pomocí Heronova vzorce, známe-li velikosti všech tří stran trojúhelníku.

V našem případě máme velikosti všech tří stran k dispozici, proto Heronův vzorec využijeme pro odvození determinantu. Zavedení je ale časově i početně nejnáročnější, přesto jej pro zajímavost uvedeme.

Znění a důkaz Heronova vzorce opět připomeneme na konci této podkapitoly (**Věta 5: Heronův vzorec**).

Řešení **Příklad** *:* Vyřešíme tedy příklad ještě pomocí Heronova vzorce.



Obr. 32: Řešení Příkladu 10 pomocí Heronova vzorce

Vypočítáme všechny tři strany trojúhelníku:

$$a = |\boldsymbol{w}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$b = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$c = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Velikosti dosadíme do Heronova vzorce:

$$S = \sqrt{\frac{10 + \sqrt{2}}{2}\left(\frac{10 + \sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{10 + \sqrt{2}}{2} - 5\right)\left(\frac{10 + \sqrt{2}}{2} - 5\right)}$$

Výrazy v závorkách převedeme na společný jmenovatel a dopočítáme:

$$S = \sqrt{\frac{10+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{10-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$S = \sqrt{\frac{100-2}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$$

Obecný postup

Využijeme důkazu Věta 5: Heronův vzorec a rovnost (4), kterou vynásobíme 16:

$$16S^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$

Pravou stranu upravíme tak, abychom mohli použít vzorec $A^2 - B^2$:

$$16S^2 = -(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)$$
$$16S^2 = -((b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2)$$
$$16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

Závorku umocníme a pravou stranu upravíme:

$$16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2)^2 + 2a^2(b^2 + c^2) - a^4$$
$$16S^2 = 4b^2c^2 - b^4 - 2b^2c^2 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4$$

Dostáváme rovnost:

$$(5)\ 16S^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2$$

Vyjádříme si velikosti stran trojúhelníku:

$$a = |\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$
$$b = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$
$$c = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Velikosti dosadíme do výrazu (5) a dostáváme:

$$16S^2 = -(u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2)^2 - (u_1^2 + u_2^2)^2 - (v_1^2 + v_2^2)^2$$

$$+2(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) + 2(u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2)(u_1^2 + u_2^2)$$

$$+2(u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2)(v_1^2 + v_2^2)^2$$

Po velmi dlouhé úpravě výrazu na pravé straně dostaneme:

$$16S^2 = 4(u_1v_2 - u_2v_1)^2$$

Rovnost vydělíme 16 a následně odmocníme:

$$S = \frac{1}{2}|u_1v_2 - u_2v_1|$$

Věta 5: Heronův vzorec

Obsah trojúhelníku ABC je $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde s je polovina obvodu trojúhelníku.

Důkaz: Vycházejme ze základního vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku:

$$(1)\ S = \frac{cb\sin\alpha}{2}$$

Rovnost (1) umocníme:

$$(2)\ S^2 = \frac{c^2b^2(\sin\alpha)^2}{4}$$

Využijme kosinovou větu:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Vyjádříme $\cos^2\alpha$ a pomocí něj $\sin^2\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2$$

$$(3)\ \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2$$

Do rovnosti (2) dosadíme za $\sin^2\alpha$ pravou stranu rovnosti (3) a následně upravíme:

$$S^2 = \frac{c^2b^2\left(1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right)}{4}$$

$$S^2 = \frac{1}{4}c^2b^2 \cdot \frac{4c^2b^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2b^2}$$

$$(4)\ S^2 = \frac{1}{16}(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$

$$S^2 = \frac{1}{16}((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)$$

$$S^2 = \frac{(b+c+a)}{2} \cdot \frac{(b+c-a)}{2} \cdot \frac{(a+b-c)}{2} \cdot \frac{(a-b+c)}{2}$$

$$S^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b+c-2a}{2} \cdot \frac{a+b+c-2c}{2} \cdot \frac{a+b+c-2b}{2}$$

$$S^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - c\right) \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)$$

Když místo $\frac{a+b+c}{2} = \frac{o}{2}$ dosadíme s a rovnost odmocníme, dostáváme Heronův vzorec:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-c)(s-b)}\ \blacksquare$$

2.2.4 Algebraické vlastnosti determinantu v rovině

Věta 6

Determinant je antisymetrická pozitivně definitní bilineární forma.

Důkaz:

1) Dokážeme nejdříve, že je determinant bilineární forma.

$$\underline{\det(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \stackrel{?}{=} \det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})+\det(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}$$

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) &= \det\big((u_1+v_1;u_2+v_2),(w_1;w_2)\big) = \\
&= (u_1+v_1)w_2-(u_2+v_2)w_1 \\
&= u_1w_2+v_1w_2-u_2w_1-v_2w_1 \\
\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})+\det(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) &= (u_1w_2-u_2w_1)+(v_1w_2-v_2w_1) \\
&= u_1w_2+v_1w_2-u_2w_1-v_2w_1 \oplus
\end{aligned}$$

$$\underline{\det(a\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \stackrel{?}{=} a\cdot\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$$

$$\begin{aligned}
\det(a\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= \det\big((au_1;au_1),(v_1;v_2)\big) = au_1v_2-au_1v_1 \\
a\cdot\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= a(u_1v_2-au_1v_1) = au_1v_2-au_1v_1 \oplus
\end{aligned}$$

$$\underline{\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \stackrel{?}{=} \det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})}$$

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) &= \det\big((u_1;u_2),(v_1+w_1;v_2+w_2)\big) \\
&= u_1(v_2+w_2)-u_2(v_1+w_1) \\
&= u_1v_2+u_1w_2-u_2v_1-u_2w_1 \\
\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) &= (u_1v_2-u_2v_1)+(u_1w_2-u_2w_1) \\
&= u_1v_2+u_1w_2-u_2v_1-u_2w_1 \oplus
\end{aligned}$$

$$\underline{\det(\boldsymbol{u},a\boldsymbol{v}) \stackrel{?}{=} a\cdot\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$$

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{u},a\boldsymbol{v}) &= \det\big((u_1;u_2),(av_1;av_2)\big) = u_1av_2-u_2av_1 \\
&= au_1v_2-au_2v_1 \\
a\cdot\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= a(u_1v_2-u_2v_1) = au_1v_2-au_2v_1 \oplus
\end{aligned}$$

Determinant je tedy bilineární forma.

2) Dokážeme, že je determinant antisymetrická forma.

$$\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \stackrel{?}{=} -\det(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$$

$$\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = u_1v_2 - u_2v_1$$

$$-\det(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = -(v_1u_2 - v_2u_1) = -v_1u_2 + v_2u_1 = u_1v_2 - u_2v_1 \oplus$$

3) Dokážeme, že je determinant pozitivně definitní forma, tedy že $\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \geq 0$.

$$\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = u_1u_2 - u_2u_1 = 0 \geq 0 \blacksquare$$

Poznámka: Zjistili jsme, že determinant není pouze pozitivně definitní forma, ale že platí silnější tvrzení: $\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = 0$

Zamysleme se, co taková vlastnost vyjadřuje geometricky. Vlastnost nám říká, že pokud je trojúhelník určen dvěma stejnými vektory, pak je jeho obsah nulový. Přesněji řečeno takové vektory trojúhelník vůbec netvoří. Vyslovíme ještě trochu poněkud obecnější tvrzení.

Tvrzení: $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V\ \exists k \in \mathbb{R}: (\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}) \Rightarrow \det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0$

Tvrzení nám říká, že determinant bude nulový, pokud zvolené vektory budou lineárně závislé.

Důkaz: $\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \det(\boldsymbol{u},k\boldsymbol{u}) = \det\big((u_1;u_2),(ku_1,ku_2)\big) = u_1ku_2 - u_2ku_1 = 0 \blacksquare$

Tvrzení je tedy pravdivé a je poměrně významné. Budeme-li totiž chtít zjistit, jestli tři body A,B,C v rovině tvoří trojúhelník, bude stačit např. vypočítat determinant vektorů $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{AC}$. Pokud determinant vyjde nenulový, vektory jsou pak jistě lineárně nezávislé, a body A,B,C tedy tvoří trojúhelník.

Příklad 11

Jsou dány body $A[-2{,}0], B[4,-3], C[-6{,}2]$. Určete, jestli tvoří trojúhleník. (Krynický, 2010)

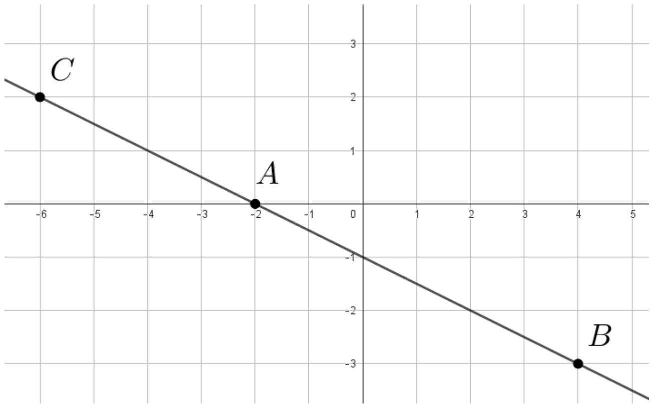
Řešení: Určíme souřadnice dvou vektorů:

$$\boldsymbol{AB} = (6,-3), \boldsymbol{AC} = (-4{,}2)$$

Vypočítáme determinant:

$$\det(\boldsymbol{AB},\boldsymbol{AC}) = 6 \cdot 2 - (-3) \cdot (-4) = 12 - 12 = 0$$

Vektory $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}$ jsou tedy lineárně závislé a body A, B, C netvoří trojúhelník, protože leží v přímce, jak můžeme vidět na obr. 33.



Obr. 33: Kolineární body

Vztah mezi skalárním součinem a determinantem

Na závěr kapitoly uvedeme vzájemný vztah mezi skalárním součinem a determinantem. Již víme, že obě bilineární formy lze použít k výpočtu odchylky φ dvou vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, neboť:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

$$\sin\varphi = \frac{\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Využijeme-li rovnosti $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, dostaneme:

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right)^2 + \left(\frac{\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right)^2 = 1$$

Když rovnost vynásobíme $|\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2$, dostáváme vztah mezi skalárním součinem a determinantem:

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2 + \big(\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\big)^2 = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2$$

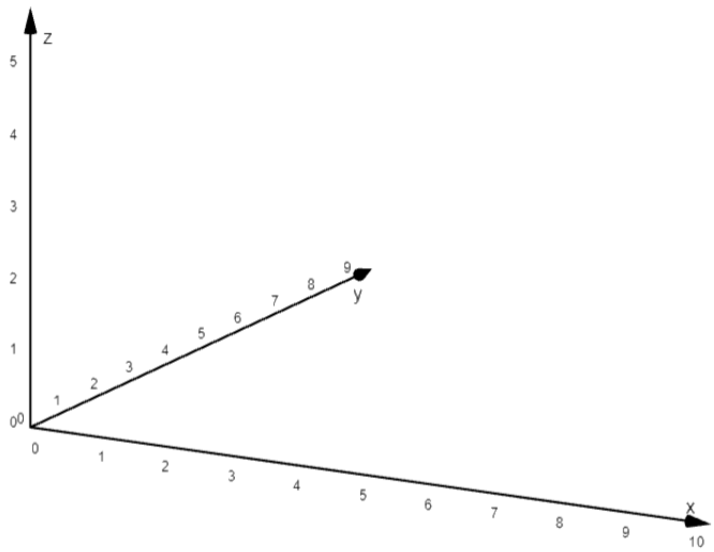
Poznámka: Stejně jako místo $(\sin\varphi)^2$ píšeme $\sin^2\varphi$, budeme namísto $\big(\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\big)^2$ psát $\det^2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$. Vlastnost tedy zapíšeme takto:

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2 + \det^2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2$$

3 Analytická geometrie v prostoru

V této kapitole budeme zkoumat vektory v prostoru a budeme postupovat podle stejného plánu jako v druhé kapitole. Nejdříve prozkoumáme odchylku dvou vektorů a obsah trojúhelníku vymezeného dvěma vektory v prostoru. Následně situaci rozšíříme o další vektor a bude nás zajímat, jak spočítat objem čtyřstěnu vymezeného třemi vektory v prostoru. Zároveň budeme opět nejdřív řešit konkrétní příklady a až potom budeme odvozovat. Nejvíce nás pak bude zajímat, jak se definice skalárního součinu a determinantu dají přenést do prostoru a k čemu se dají využít.

Poznámka: V celé kapitole budeme používat kartézskou soustavu souřadnic na obr. 34.



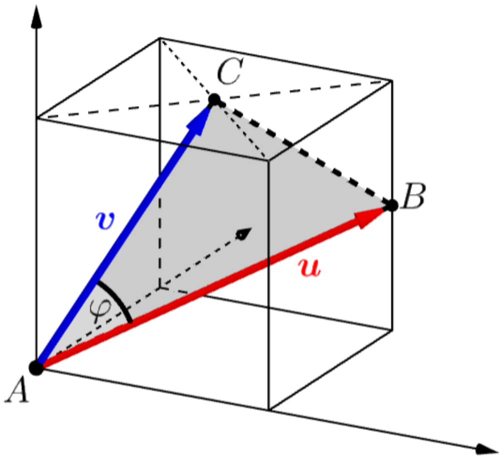
Obr. 34: Kartézská soustava souřadnic

3.1 Úhly a skalární součin

Naším cílem nejdříve bude zjistit odchylku dvou vektorů v prostoru. Vyřešme tedy následující příklad.

Příklad 12

Jsou dány body $A[0; 0; 0], B[4; 4; 2], C[2; 2; 4]$. Určete odchylku vektorů $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC}$.



Obr. 2: Odchylka dvou vektorů v prostoru

Řešení: Jak můžeme vidět na obr. 35, oba vektory leží v jedné rovině ABC. Odchylku φ tedy spočítáme pomocí kosinové věty pro trojúhelník ABC. Spočítáme nejdřív velikosti všech stran:

$$a = |\boldsymbol{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$b = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$c = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$$

Dosadíme do kosinové věty:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi$$

$$12 = 24 + 36 - 24\sqrt{6}\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 35°16'$$

Obecný postup

Když budeme postupovat obecně, z kosinové věty dostaneme:

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - 2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\varphi$$

$$2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\varphi = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2$$

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2}{2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Výraz na pravé straně rozepíšeme pomocí definice velikosti vektoru. Odmocniny a mocniny se vyruší a dostáváme:

$$\cos\varphi = \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - (u_1 - v_1)^2 - (u_2 - v_2)^2 - (u_3 - v_3)^2}{2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Závorky umocníme a členy sečteme, dostáváme pak:

$$\cos\varphi = \frac{2u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3}{2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Vidíme, že v čitateli zlomku jsme obdrželi výraz připomínající skalární součin v rovině, je tedy smysluplné definici skalárního součinu rozšířit i pro vektory v prostoru.

Definice 24: skalární součin dvou vektorů v prostoru

Skalárním součin vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ v prostoru nazveme výraz $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ a píšeme:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Poznámka:

1) Pro odchylku dvou vektorů v prostoru platí, stejně jako v rovině:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

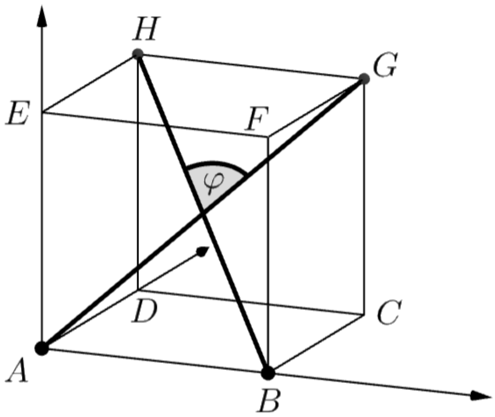
2) V rovině jsme skalární součin odvodili dvojím způsobem – pomocí kosinové věty a pomocí součtových vzorců. Druhý způsob se v prostoru obecně provést nedá. I kdybychom vypočítali odchylky vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ od roviny xy, k nalezení odchylky $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ bychom se nedostali.

3.1.1 Odchylka přímek a rovin – řešené příklady

Protože jsme odvodili nástroj pro hledání odchylek dvou vektorů v prostoru, přirozeně teď můžeme řešit úlohy, kde budeme hledat odchylky dvou přímek či rovin, případně přímky a roviny.

Příklad 13

Nalezněte odchylku dvou tělesových úhlopříček v krychli.



Obr. 36: Odchylka tělesových úhlopříček v krychli

Řešení: Krychli $ABCDEFGH$ si zvolíme tak, že $A[0;0;0], B[1;0;0], C[1;1;0]$ a $G[1;1;1]$. Zapišme si ještě souřadnice vrcholu H: $H[0;1;1]$. Vypočítáme souřadnice vektorů $\boldsymbol{AG}$ a $\boldsymbol{BH}$:

$$\boldsymbol{AG} = \mathrm{G} - \mathrm{A} = (1;1;1)$$

$$\boldsymbol{BH} = \mathrm{H} - \mathrm{B} = (-1;1;1)$$

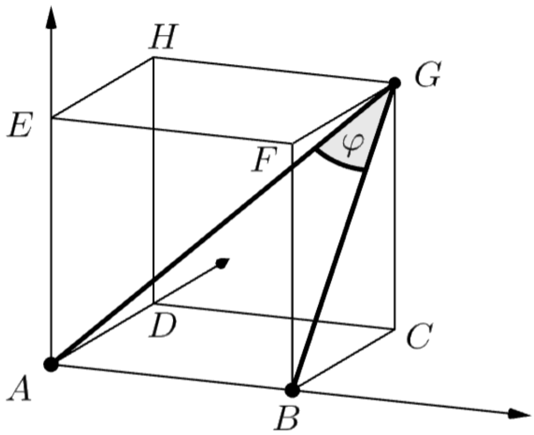
Spočítáme úhel φ:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{AG}\cdot\boldsymbol{BH}|}{|\boldsymbol{AG}||\boldsymbol{BH}|} = \frac{|-1+1+1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

Dostáváme tedy, že $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70°32'$.

Příklad 14

Nalezněte odchylku tělesové a stěnové úhlopříčky v krychli.



Obr. 37: Odchylka tělesové a stěnové úhlopříčky

Řešení: Budeme pracovat ve stejné krychli jako v Příklad 1. Zapíšeme si nejdříve souřadnice potřebných vrcholů: $A[0;0;0], B[1;0;0], G[1;1;1]$. Vypočítáme souřadnice vektorů $\boldsymbol{AG}$ a $\boldsymbol{BG}$:

$$\boldsymbol{AG} = (1;1;1)$$

$$\boldsymbol{BG} = (0;1;1)$$

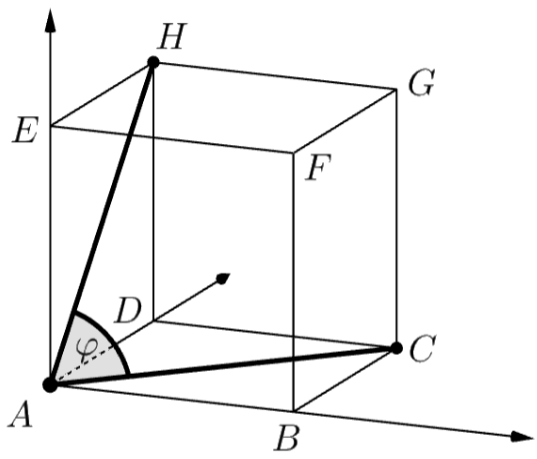
Spočítáme úhel φ:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{AG}\cdot\boldsymbol{BG}|}{|\boldsymbol{AG}||\boldsymbol{BG}|} = \frac{|0+1+1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Dostáváme tedy, že $\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 35°16'$.

Příklad 15

Určete odchylku dvou stěnových úhlopříček v krychli.



Obr. 38: Odchylka dvou stěnových úhlopříček v krychli

Řešení: Krychli opět zvolíme stejně jako v předchozích příkladech. Určeme si vrcholy A, C a H.Tedy $A[0,0,0], C[1,1,0], H[0,1,1]$.

Určíme souřadnice vektorů $\boldsymbol{AC}$ a $\boldsymbol{AH}$:

$$\boldsymbol{AC} = (1,1,0)$$

$$\boldsymbol{AH} = (0,1,1)$$

Určíme odchylku φ:

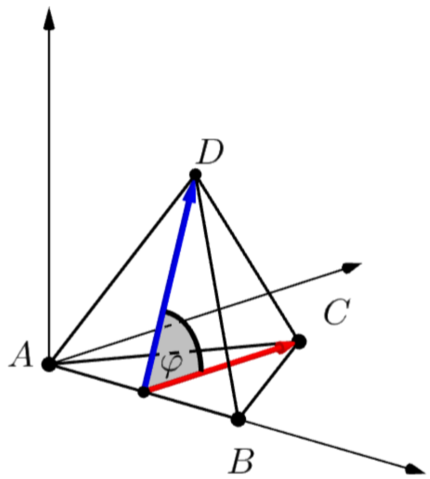
$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{AC} \cdot \boldsymbol{AH}|}{|\boldsymbol{AC}||\boldsymbol{AH}|} = \frac{0+1+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Poznámka: Úlohu lze vyřešit i bez využití vektorů. Pokud bychom spojili ještě body C a H, dostaneme trojúhelník ACH, jehož každá strana má velikost stěnové úhlopříčky, a je tudíž rovnostranný. Úhel φ je tudíž $\frac{\pi}{3}$.

Příklad 16

Nalezněte odchylku dvou stěn pravidelného čtyřstěnu.



Obr. 39: Odchylka stěn čtyřstěnu

Řešení: Čtyřstěn jsme zvolíme tak, že $A[0;0;0]$ a $B[1;0;0]$. Protože výška rovnostranného trojúhelníku má velikost $\frac{\sqrt{3}}{2}$, vrchol C má souřadnice $\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right]$.

Souřadnice vrcholu D pak dostaneme z pravoúhlého trojúhelníku ATD, kde T je těžiště podstavy. Protože $|AT| = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ a $|AD| = 1$, dostáváme $|TD| = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Vrchol D má tedy souřadnice $\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$.

Určíme souřadnice vektoru $\boldsymbol{S_{AB}C}$ a $\boldsymbol{S_{AB}D}$, kde $S_{AB}\left[\frac{1}{2};0;0\right]$:

$$\boldsymbol{S_{AB}C} = C - S_{AB} = \left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

$$\boldsymbol{S_{AB}D} = D - S_{AB} = \left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Spočítáme úhel φ:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{S_{AB}C}\cdot\boldsymbol{S_{AB}D}|}{|\boldsymbol{S_{AB}C}||\boldsymbol{S_{AB}D}|} = \frac{\left|0+\frac{1}{4}+0\right|}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70°32'$$

Příklad 17

Určete všechny přímky q, které s osou z svírají úhel $\frac{\pi}{3}$.

Řešení: Směrový vektor osy z je např. $\boldsymbol{u} = (0; 0; 1)$. Hledáme tedy všechny takové přímky q s normálovými vektory $\boldsymbol{v} = (x; y; z)$, aby platilo:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{|0x + 0y + 1z|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Po úpravě dostáváme:

$$\frac{1}{2} = \frac{|z|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

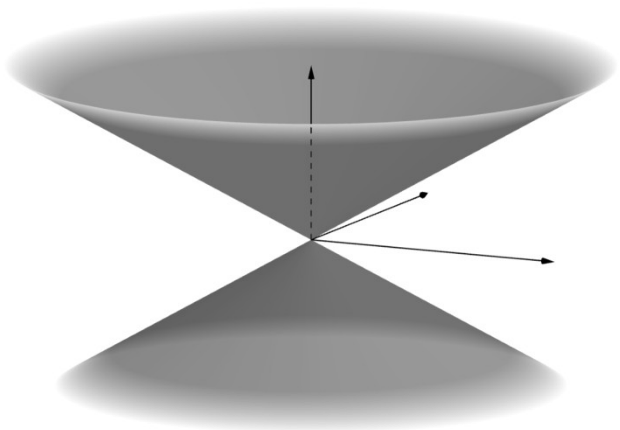
Rovnost umocníme, čímž se zbavíme absolutní hodnoty i odmocniny:

$$\frac{1}{4} = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Zbavíme se zlomků a dostaneme:

$$x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$$

Pokud rovnost zadáme do grafického programu, např. GeoGebra, vidíme, že vznikla kuželová plocha. Všechny přímky q, pro které $[0,0] \in q$, leží v této kuželové ploše.



Obr. 40: Kuželová plocha

3.1.2 Algebraické vlastnosti skalárního součinu v prostoru

Na závěr povídání o skalárním součinu ještě ověříme, že skalární součin v prostoru má stejné vlastnosti jako skalární součin v rovině.

Věta 7

Skalární součin v prostoru je symetrická pozitivně definitní bilineární forma.

Důkaz:

1) Nejdříve dokážeme, že se jedná o bilineární formu.

$$\underline{(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} \stackrel{?}{=} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} &= (u_1+v_1;u_2+v_2;u_3+v_3)\cdot(w_1;w_2;w_3) = \\ &= (u_1+v_1)\cdot w_1+(u_2+v_2)\cdot w_2+(u_3+v_3)\cdot w_3 = \\ &= u_1w_1+v_1w_1+u_2w_2+v_2w_2+u_3w_3+v_3w_3 \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} &= (u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3)+(v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3) = \\ &= u_1w_1+v_1w_1+u_2w_2+v_2w_2+u_3w_3+v_3w_3 \oplus\end{aligned}$$

$$\underline{(a\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} \stackrel{?}{=} a(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})}$$

$$\begin{aligned}(a\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} &= (au_1;au_2;au_3)\cdot(v_1;v_2;v_3) = au_1v_1+au_2v_2+au_3v_3 \\ a(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) &= a(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3) = au_1v_1+au_2v_2+au_3v_3 \oplus\end{aligned}$$

$$\underline{\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \stackrel{?}{=} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) &= (u_1;u_2;u_3)\cdot(v_1+w_1;v_2+w_2;v_3+w_3) = \\ &= u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2)+u_3(v_3+w_3) = \\ &= u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2+u_3v_3+u_3w_3 = \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} &= (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)+(u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3) = \\ &= u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2+u_3v_3+u_3w_3 \oplus\end{aligned}$$

$$\underline{\boldsymbol{u}\cdot(a\boldsymbol{v}) \stackrel{?}{=} a(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot(a\boldsymbol{v}) &= (u_1;u_2;u_3)\cdot(av_1;av_2;av_3) = u_1av_1+u_2av_2+u_3av_3 = \\ &= au_1v_1+au_2v_2+au_3v_3 \\ a(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) &= a(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3) = au_1v_1+au_2v_2+au_3v_3 \oplus\end{aligned}$$

Skalární součin dvou vektorů v prostoru je tedy bilineární forma.

2) Dokážeme, že je skalární součin v prostoru symetrická forma.

$$\underline{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \stackrel{?}{=} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \oplus$$

3) Zbývá ještě dokázat, že skalární součin v prostoru je pozitivně definitní forma, budeme tedy dokazovat, že $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} \geq 0$.

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)\cdot(u_1; u_2; u_3) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Protože součet tří nezáporných čísel je vždy číslo nezáporné, tvrzení platí. ■

Věta 8

$\forall\boldsymbol{u} \in V: \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$

Důkaz: " $\Rightarrow$ ": Vycházíme tedy z předpokladu, že $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 0$.

Z předpokladu dostáváme $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$, odkud plyne, že $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$. Kdyby totiž vektor nebyl nulový, na pravé straně bychom dostali kladné číslo.

Důkaz "$\Leftarrow$" je ještě triviálnější. Vycházíme z předpokladu, že $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, tedy

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0$ a tvrzení platí.

Zjistili jsme tedy, že všechny vlastnosti skalárního součinu v rovině platí i pro skalární součin v prostoru.

3.1.3 Skalárního součin v n-rozměrném prostoru

Na závěr ještě definici skalárního součinu zobecníme. Stejně jako jsme definici skalárního součinu zobecnili z roviny do prostoru, můžeme definovat skalární součin v libovolném prostoru dimenze n.

Definice 25: skalární součin v prostoru dimenze $\boldsymbol{n}$

Skalární součin vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1; u_1; \dots; u_n)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1; v_1; \dots; v_n)$v prostoru dimenze n definujeme následovně:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

Definice 26: délka vektoru a velikost úhlu v prostoru dimenze $\boldsymbol{n}$

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, tzv. euklidovský vektorový prostor. Délkou vektoru $\boldsymbol{u}$ nazýváme reálné číslo $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}$.

Velikost φ úhlu mezi vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ definujeme takto:

a) $\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$ pro $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}, \varphi \in \langle 0; \pi \rangle$

b) $\cos\varphi = 0$ pro $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ nebo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$

Jestliže platí $\cos\varphi = 0$, nazýváme vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ kolmými. (Novotná, Trch, 1989, s. 110)

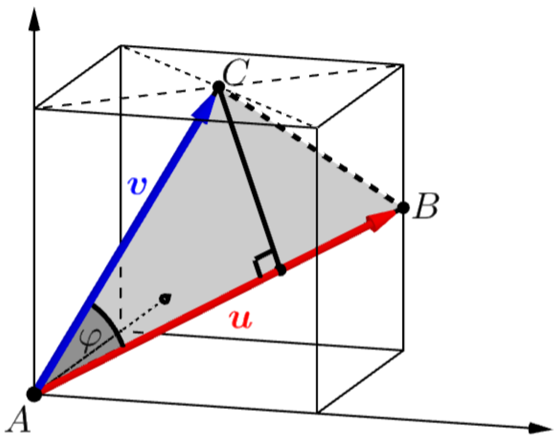
3.2 Obsahy a vektorový součin

Stejně jako jsme v předchozí podkapitole zkoumali hledání odchylek v prostoru, budeme se teď zabývat výpočtem obsahu trojúhelníku, který je vymezený dvěma vektory v prostoru. Opět začneme příkladem.

3.2.1 Odvození pomocí funkce sinus

Příklad 18

Jsou dány body $A[0;0;0], B[4;4;2], C[2;2;4]$. Určete obsah trojúhelníku vymezeného vektory $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC}$.



Obr. 41: Obsah trojúhelníku vymezeného vektory v prostoru

Řešení: Obsah trojúhelníku spočítáme pomocí vzorce $S = \frac{1}{2}bc\sin\varphi$. Velikosti stran spočítáme jako velikosti vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$:

$$b = |\boldsymbol{v}| = |(2;2;4)| = 2\sqrt{6}$$
$$c = |\boldsymbol{u}| = |(4;4;2)| = 6$$

Protože máme zavedený v prostoru skalární součin, spočítáme $\cos\varphi$ a následně dopočítáme $\sin\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{4\cdot 2 + 4\cdot 2 + 2\cdot 4}{12\sqrt{6}} = \frac{24}{12\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Tudíž můžeme dopočítat obsah S:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{2}$$

Obecný postup

Proveďme stejný postup obecně. Mějme v prostoru dva vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a chceme vyjádřit obsah trojúhelníku vymezeného danými vektory. Postupujme stejně jako při řešení předchozího příkladu:

$$S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\varphi = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right)^2}$$

Po úpravě dostáváme:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|)^2 - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2}$$

Velikosti vektorů a skalární součin rozepíšeme podle definice, odmocniny a mocniny se vyruší a dostaneme:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2}$$

Výraz pod odmocninou označme P a upravme ho:

$P = u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2 - u_3^2v_3^2 - 2u_1v_1u_2v_2 - 2u_1v_1u_3v_3 - 2u_2v_2u_3v_3$

Po odečtení stejných členů dostaneme:

$$P = u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 - 2u_1v_1u_2v_2 - 2u_1v_1u_3v_3 - 2u_2v_2u_3v_3$$

Vidíme, že výraz P se nedá zapsat jako druhá mocnina nějakého součtu či rozdílu, jako tomu bylo v rovině. Definici determinantu tedy nebudeme rozšiřovat pro dva vektory v prostoru. Později si ukážeme, že determinant má smysl definovat až pro tři vektory v prostoru.

Výraz ale obsahuje 9 sčítanců, které můžeme sdružit a zapsat pomocí druhé mocniny:

$P = (u^2{}_2 v^2{}_3 - 2u_2v_2u_3v_3 + u^2{}_3 v^2{}_2) + (u^2{}_1 v^2{}_3 - 2u_1v_1u_3v_3 + u^2{}_3 v^2{}_1) +$
$(u^2{}_1 v^2{}_2 - 2u_1v_1u_2v_2 + u^2{}_2 v^2{}_1)$

$P = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$

Pro obsah S tedy platí:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2}$$

Všimněme si, že obsah S se spočítá jako polovina velikosti vektoru $\boldsymbol{z}$, kde:

$$\boldsymbol{z} = (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$$

Definice 27: vektorový součin

Vektorovým součin vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_2)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_2)$ definujeme jako

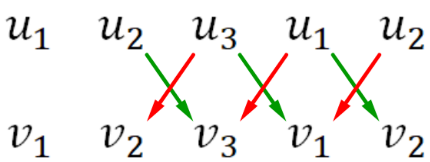
$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$$

Poznámka:

1) Libovolným prohozením souřadnic vektoru $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ by se obsah trojúhelníku nezměnil. Později si však ukážeme, že vektor s tímto pořadím souřadnic má i další využití.
2) Všimněme si, že souřadnice vektoru $\boldsymbol{z}$ jsou determinanty dvousložkových vektorů, které vzniknou z vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{z} = \Big(\det\big((u_2; u_3), (v_2; v_3)\big); \det\big((u_3; u_1), (v_3; v_1)\big); \det\big((u_1; u_2), (v_1; v_2)\big)\Big)$$

3) Obsah S rovnoběžníku daného vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je $S = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$.
4) Pro výpočet vektorového součinu můžeme použít jako pomůcku použít diagram na obr. 21, kde zelené šipky směřující doprava bereme s kladným

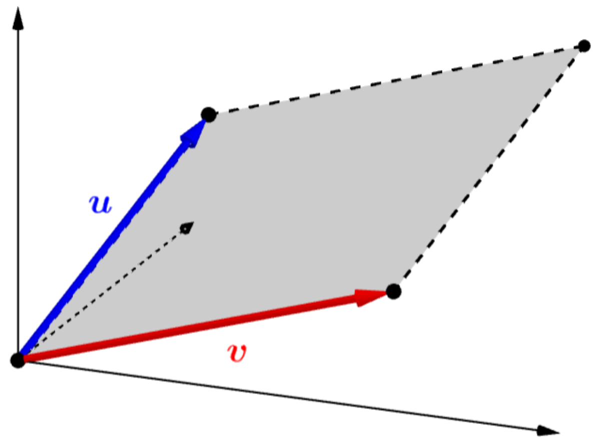


Obr. 42: Pomůcka pro výpočet vektorového součinu

znaménkem a červené šipky směřující doleva se znaménkem záporným.

Příklad 19

Určete obsah rovnoběžníku vymezeného vektory $\boldsymbol{u} = (1; 3; 2)$ a $\boldsymbol{v} = (4; 1; 1)$.



Obrázek 43: Příklad 20

Řešení: Určíme souřadnice vektoru $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ a následně vypočítáme jeho velikost.

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1; 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1; 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4) = (1; 7; -11)$$

$$S = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \sqrt{1^2 + 7^2 + (-11)^2} = \sqrt{171} \approx 13{,}08$$

3.2.2 Algebraické vlastnosti vektorového součinu

Zjistili jsme, že pro obsah trojúhelníku, resp. rovnoběžníku, v prostoru se počítá pomocí vektorového součinu. Prozkoumejme tedy jeho vlastnosti.

Nejdříve se zamysleme, jaká zobrazení jsme již zavedli. Skalární součin i determinant v rovině jsou bilineární formy, tedy zobrazení $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, skalární součin v prostoru je pak zobrazení $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a je to také bilineární forma.

Vektorový součin přiřazuje dvojici vektorů v prostoru vektor, je to tedy zobrazení $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, a tudíž to není bilineární forma, která vždy zobrazuje vektory do tělesa. Mohlo by nás tedy napadnout zkoumat, jestli vektorový součin není lineární zobrazení. Do lineárního zobrazení ale vždy vstupuje jen jeden vektor, který se zobrazí na jiný. Do vektorového součinu vstupují ale vektory dva a výsledkem je jeden jiný vektor. Zavedeme tedy pojem analogický, který rozšiřuje definici lineárního zobrazení právě na případ, že zobrazujeme dva vektory.

Definice 28: bilineární zobrazení

Nechť V je vektorový prostory nad tělesem T. Zobrazení $f: V \times V \to V$ nazveme bilineární, pokud $\forall\, u, v, w \in V\ \forall\, a, b \in T$ platí:

a) $f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w)$
b) $f(u, av + bw) = af(u, v) + bf(u, w)$ (Řepík, 2014, s. 14)

Poznámka: Bilineární zobrazení se dá obecně definovat jako zobrazení $U \times V \to W$.

Věta 9

Vektorový součin je bilineární zobrazení.

Důkaz:

a) $(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = a(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$

Označíme $\boldsymbol{m} = (a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w}$ a $\boldsymbol{n} = a(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$

$$m_1 = (au_2 + bv_2)w_3 - (au_3 + bv_3)w_2 = au_2w_3 + bv_2w_3 - au_3w_2 - bv_3w_2$$

$$m_2 = (au_3 + bv_3)w_1 - (au_1 + bv_1)w_3 = au_3w_1 + bv_3w_1 - au_1w_3 - bv_1w_3$$

$m_3 = (au_1 + bv_1)w_2 - (au_2 + bv_2)w_1 = au_1w_2 + bv_1w_2 - au_2w_1 - bv_2w_1$

$n_1 = a(u_2w_3 - u_3w_2) + b(v_2w_3 - v_3w_2) = au_2w_3 - au_3w_2 + bv_2w_3 - bv_3w_2 = m_1$

$n_2 = a(u_3w_1 - u_1w_3) + b(v_3w_1 - v_1w_3) = au_3w_1 - au_1w_3 + bv_3w_1 - bv_1w_3 = m_2$

$n_1 = a(u_1w_2 - u_2w_1) + b(v_1w_2 - v_2w_1) = au_1w_2 - au_2w_1 + bv_1w_2 - bv_2w_1 = m_3$

Platí tedy $(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = a(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$. ⊕

b) $\boldsymbol{u} \times (a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}) = a(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})$

Opět označíme $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{u} \times (a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w})$ a $\boldsymbol{n} = a(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})$.

$m_1 = u_2(av_3 + bw_3) - u_3(av_2 + bw_2) = au_2v_3 + bu_2w_3 - au_3v_2 - bu_3w_2$

$m_2 = u_3(av_1 + bw_1) - u_1(av_3 + bw_3) = au_3v_1 + bu_3w_1 - au_1v_3 - bu_1w_3$

$m_3 = u_1(av_2 + bw_2) - u_2(av_1 + bw_1) = au_1v_2 + bu_1w_2 - au_2v_1 - bu_2w_1$

$n_1 = a(u_2v_3 - u_3v_2) + b(u_2w_3 - u_3w_2) = au_2v_3 - au_3v_2 + bu_2w_3 - bu_3w_2 = m_1$

$n_2 = a(u_3v_1 - u_1v_3) + b(u_3w_1 - u_1w_3) = au_3v_1 - au_1v_3 + bu_3w_1 - bu_1w_3 = m_2$

$n_3 = a(u_1v_2 - u_2v_1) + b(u_1w_2 - u_2w_1) = au_1v_2 - au_2v_1 + bu_1w_2 - bu_2w_1 = m_3$

Platí tedy $\boldsymbol{u} \times (a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}) = a(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})$. ■

Vektorový prostor je tedy bilineární zobrazení.

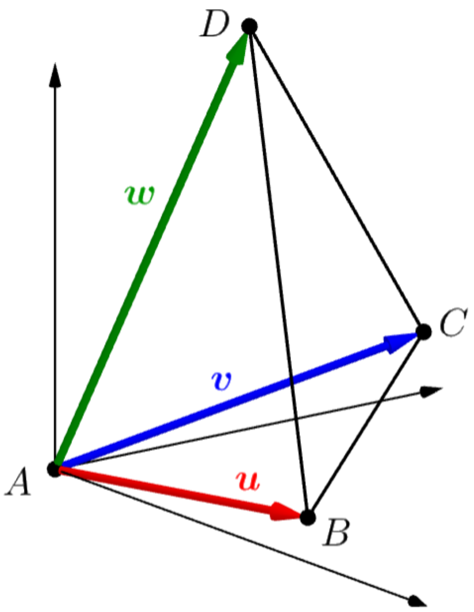
3.3 Objemy a determinant

Od hledání obsahu trojúhelníku se teď logicky přesuneme ke zkoumání objemů. V rovině jsme zkoumali obsah trojúhelníku vymezeného dvěma vektory a analogickou úlohou v prostoru je výpočet objemu čtyřstěnu vymezeného třemi vektory.

Vyřešíme opět nejdříve konkrétní příklad a dále odvodíme obecný vzorec pro výpočet objemu čtyřstěnu.

Příklad 20

Vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCD$, kde $A[0,0,0], B[3,1,0], C[1,4,1], D[2,1,5]$.



Obr. 44: Objem čtyřstěnu

Řešení: Vypočítáme nejdříve souřadnice vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = (3; 1; 0)$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC} = (1; 4; 1)$$
$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{AD} = (2; 1; 5)$$

Objem čtyřstěnu se počítá podle vzorce $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$. Obsah podstavy spočítáme pomocí vektorového součinu:

$$S_p = \frac{1}{2} |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})| = \frac{1}{2} |(1 \cdot 1 - 0 \cdot 4; 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1; 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1)|$$

$$S_p = \frac{1}{2} |(1; -3; 11)| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 11^2} = \frac{\sqrt{131}}{2}$$

Pro výpočet objemu potřebujeme ještě získat velikost výšky, budeme proto hledat vektor $\boldsymbol{n} = (n_1; n_2; n_3)$, který je kolmý k vektorům $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$**.** Pro vektor $\boldsymbol{n}$ tedy platí:

$$(1)\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

$$(2)\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

Z podmínek dostáváme:

$$(1)\ 3n_1 + n_2 = 0$$

$$(2)\ n_1 + 4n_2 + n_3 = 0$$

Z kombinace obou rovnic vyjádříme druhou a třetí souřadnici pomocí první souřadnice. Když označíme $n_1 = t$, dostáváme:

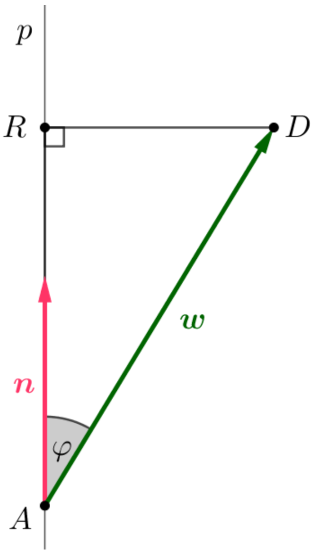
$$\boldsymbol{n} = (t; -3t; 11t)$$

Nám stačilo najít jeden kolmý vektor, proto za t můžeme zvolit libovolné nenulové číslo, např. $t = 1$:

$$\boldsymbol{n} = (1; -3; 11)$$

Dále označíme p přímku procházející bodem A a kolmou k rovině ABC (vektor $\boldsymbol{n}$ leží na přímce p). Z bodu D vedeme kolmici k přímce p, patu této kolmice označíme R. Velikost hledané výšky v je pak $v = |AR| = |\boldsymbol{w}| \cdot \cos\theta$, kde θ je odchylka $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{w}$. (Kočandrle, Boček, 1995, s. 60)

Vztah $v = |AR| = |\boldsymbol{w}| \cdot \cos\theta$ plyne z pravoúhlého trojúhelníku ARD (viz obr. 45).



Obr. 45: Velikost výšky ve čtyřstěnu

Spočítáme $\cos\theta$ pomocí skalárního součinu:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{w}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{w}|} = \frac{1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 11 \cdot 5}{\sqrt{1 + 9 + 121} \cdot \sqrt{4 + 25 + 1}} = \frac{54}{\sqrt{131} \cdot \sqrt{30}}$$

Dopočítáme objem:

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot |\boldsymbol{w}| \cdot \cos\theta$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{131}}{2} \cdot \sqrt{30} \cdot \frac{54}{\sqrt{131} \cdot \sqrt{30}} = 9$$

Obecný postup

Postupujme teď obecně. Mějme tři vektory $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$ a $\boldsymbol{w} = (w_1; w_2; w_3)$, které určují čtyřstěn $ABCD$. Chceme odvodit nástroj, jak počítat jeho objem.

Již víme, že obsah podstavy spočítáme jako $S_p = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$. Musíme tedy odvodit souřadnice vektoru $\boldsymbol{n}$, který je kolmý na vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Musí tedy platit dvě podmínky:

$$(1)\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$$
$$(2)\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

Podmínky si rozepíšeme:

$$(1)\ u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 = 0$$
$$(2)\ v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 = 0$$

Všechny souřadnice vektoru si vyjádříme např. pomocí n_3. Od $v_1 \cdot (1)$ odečteme $u_1 \cdot (2)$. Dostáváme pak:

$$v_1 u_2 n_2 - u_1 v_2 n_2 + v_1 u_3 n_3 - u_1 v_3 n_3 = 0$$
$$n_2(v_1 u_2 - u_1 v_2) + n_3(v_1 u_3 - u_1 v_3) = 0$$
$$(4)\ n_2 = -\frac{v_1 u_3 - u_1 v_3}{v_1 u_2 - u_1 v_2} n_3$$

Když od $v_2 \cdot (1)$ odečteme $u_2 \cdot (2)$, obdržíme:

$$v_2 u_1 n_1 - u_2 v_1 n_1 + v_2 u_3 n_3 - u_2 v_3 n_3 = 0$$
$$n_1(v_2 u_1 - u_2 v_1) + n_3(v_2 u_3 - u_2 v_3) = 0$$
$$(5)\ n_1 = -\frac{v_2 u_3 - u_2 v_3}{v_2 u_1 - u_2 v_1} n_3$$

Zvolíme-li $n_3 = 1$, získáme jeden z vektorů kolmých na vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{n}' = \left(\frac{u_2 v_3 - v_2 u_3}{v_2 u_1 - u_2 v_1}; \frac{u_1 v_3 - v_1 u_3}{v_1 u_2 - u_1 v_2}; 1\right)$$

Pokud pro vektor $\boldsymbol{m}$ platí, že $\boldsymbol{m} = (v_2u_1 - u_2v_1)\boldsymbol{n}'$, je vektor $\boldsymbol{m}$ také jistě jedním z vektorů kolmých na $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Souřadnice vektoru $\boldsymbol{m}$ jsou pak:

$$\boldsymbol{m} = (u_2v_3 - v_2u_3; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$$

Vidíme, že vektor $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. Zjistili jsme tedy, že vektorový součin $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ má dvě důležité vlastnosti:

1. $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$ je obsah rovnoběžníku daného vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$
2. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ je vektor kolmý k $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$

Vrátíme se k hledání vektoru $\boldsymbol{n}$. Již jsme zjistili, že vektor $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ je kolmý k oběma vektorům $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$.

Jak jsme již zjistili při řešení předchozího příkladu, pro výšku v platí: $v = |\boldsymbol{w}| \cdot \cos\theta$, kde θ je odchylka $\boldsymbol{n}$, resp. $\boldsymbol{m}$, a $\boldsymbol{w}$. Určíme tedy výšku a $\cos\theta$ vyjádříme pomocí skalárního součinu:

$$v = |\boldsymbol{w}| \cdot \cos\theta = |\boldsymbol{w}| \cdot \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{w}|} = |\boldsymbol{w}| \cdot \frac{(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{w}|} = \frac{(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|}$$

Platí tedy:

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| \cdot \frac{(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|}$$

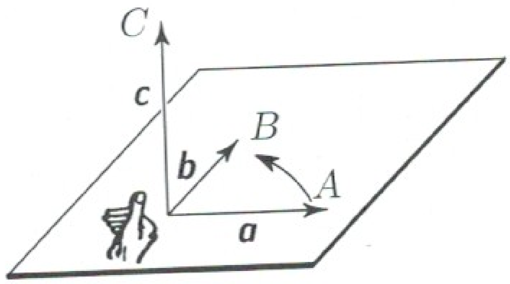
$$V = \frac{1}{6} (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$$

Definice 29: smíšený součin

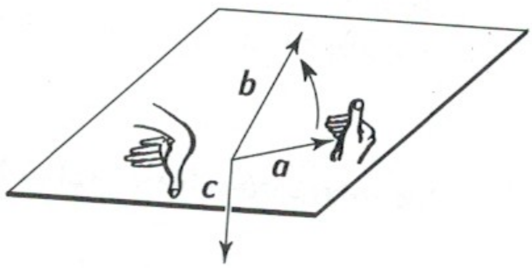
Výraz $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$ nazveme smíšeným součinem vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$.

Protože $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$ je skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$, a ten může nabývat i záporných hodnot, neobdržíme klasický objem. Analogicky jako jsme u determinantu v rovině zavedli orientovaný obsah, u smíšeného součinu zavedeme tzv. *orientovaný objem*. A podobně jako v rovině jsme před zavedením orientovaného obsahu zavedli orientaci vektorů, uvedeme teď pojem *pravotočivé a levotočivé báze* podle (Kočandrle, Boček, 1995).

„Mějme v prostoru tři vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *určené orientovanými úsečkami* $\boldsymbol{PA}, \boldsymbol{PB}, \boldsymbol{PC}$. *Představme si, že položíme pravou ruku na rovinu* $\boldsymbol{PAB}$ *tak, že pokrčené prsty této ruky udávají směr otáčení, které polopřímku PA převede do polopřímky PB (samozřejmě nejkratším možným směrem, tj. vnitřkem konvexního úhlu APB). Jestliže při této poloze ruky směřuje vztyčený palec do stejného poloprostoru s hraniční rovinou PAB jako vektor* $\boldsymbol{c}$, *nazývá se báze* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ ***pravotočivá báze****. V případě, že vztyčený palec směřuje do opačného poloprostoru než vektor* $\boldsymbol{c}$, *nazývá se báze* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ ***levotočivá báze****.“*



Obr. 46: Pravotočivá báze
(Kočandrle, Boček, 1995, s. 55)



Obr. 47: Levotočivá báze
(Kočandrle, Boček, 1995, s. 56)

Pomocí pravotočivé a levotočivé báze pak definujeme orientovaný objem.

Definice 30: orientovaný objem

Řekneme, že orientovaný objem $\boldsymbol{V}$ čtyřstěnu daného vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ je záporný, pokud je báze $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ pravotočivá, a kladný, pokud je báze $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ levotočivá. Označíme-li V objem čtyřstěnu, pak můžeme napsat:

$\boldsymbol{V} = V$ pro pravotočivou bázi

$\boldsymbol{V} = -V$ pro levotočivou bázi

Poznámka: Protože budeme chtít počítat klasický objem, nikoliv orientovaný, budeme pro objem čtyřstěnu daného třemi vektory psát:

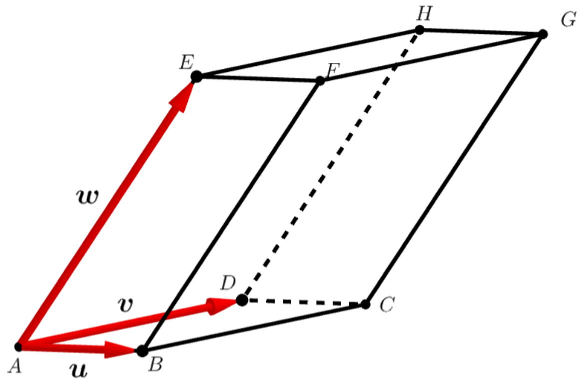
$$V = \frac{1}{6}|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}|$$

Poznámka: Protože objem rovnoběžnostěnu se vypočítá podle vzorce $V = S_p \cdot v$, kde S_p je obsah rovnoběžníku, jeho objem bude:

$$V = |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}|$$

Příklad 21

Rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ je dán třemi vektory $\boldsymbol{u} = (3; 0; 0), \boldsymbol{v} = (5; 4; 0)$ a $\boldsymbol{w} = (4; 3; 6)$. Určete jeho objem a povrch.



Obr. 48: Rovnoběžnostěn

Řešení: Spočítáme nejdříve objem V. Víme, že platí $V = |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}|$, dosadíme tedy:

$$V = \left|\big((3; 0; 0) \times (5; 4; 0)\big) \cdot (4; 3; 6)\right|$$
$$V = |(0 \cdot 0 - 0 \cdot 4; 0 \cdot 5 - 3 \cdot 0; 3 \cdot 4 - 0 \cdot 5) \cdot (4; 3; 6)|$$
$$V = |(0; 0; 12) \cdot (4; 3; 6)| = |0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 12 \cdot 6| = 72$$

Povrch S spočítáme jako součet obsahů všech stěn, každé dvě protější stěny jsou ale stejné, což nám trochu usnadní práci.

$$S = 2 \cdot |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})| + 2 \cdot |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})| + 2 \cdot |(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})|$$

Spočítáme obsahy jednotlivých stěn pomocí vektorového součinu:

$$|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})| = 12$$
$$|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})| = |(0 \cdot 6 - 0 \cdot 3; 0 \cdot 4 - 3 \cdot 6; 3 \cdot 3 - 0 \cdot 4)| = |(0; -18; 9)| = \sqrt{405}$$
$$|(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})| = |(4 \cdot 6 - 0 \cdot 3; 0 \cdot 4 - 5 \cdot 6; 5 \cdot 3 - 4 \cdot 4)| = |(24; -30; -1)| = \sqrt{1477}$$

Dostáváme tak povrch:

$$S = 2 \cdot 12 + 2 \cdot \sqrt{405} + 2 \cdot \sqrt{1477} = 24 + 18\sqrt{5} + \sqrt{1477} \approx 141{,}11$$

3.3.1 Determinant v prostoru

Zaměříme se ještě na výraz $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$. Rozepíšeme si ho pomocí souřadnic vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ a upravíme:

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = (u_2v_3 - v_2u_3; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1) \cdot (w_1; w_2; w_3)$$
$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = w_1(u_2v_3 - v_2u_3) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)$$
$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = u_2v_3w_1 - u_3v_2w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 + u_1v_2w_3 - u_2v_1w_3$$

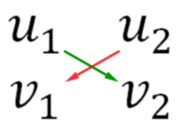
Pokud členy výrazu přeskupíme, získáváme:

$$(1)\ (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = u_1v_2w_3 - u_3v_2w_1 + v_1w_2u_3 - v_3w_2u_1 + w_1u_2v_3 - w_3u_2v_1$$

Všimněme si, že výraz, který jsme obdrželi, připomíná determinant dvou vektorů v rovině, jen se výraz rozšířil o souřadnice třetího vektoru. Zapišme si nejdříve determinant dvou vektorů v rovině pomocí matice, tedy tabulky, jejíž řádky tvoří naše vektory:

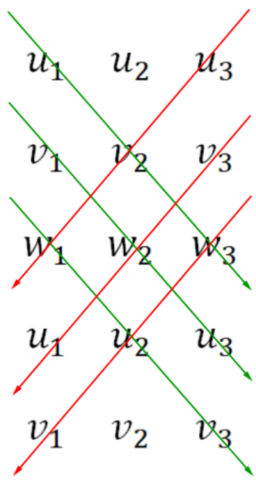
$$\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1$$

Vidíme, jakým způsobem volíme prvky matice, abychom determinant získali.



Obr. 49: Pomůcka pro výpočet determinantu v rovině

Zapišme si do tabulky i tři vektory v prostoru a znázorněme, jak pomocí jejich souřadnic dostaneme výraz (1).



Obr. 50: Znázornění výpočtu výrazu (1)

Z obr. 46 vidíme, že výraz (1) je jen rozšířením výpočtu determinantu dvou vektorů v rovině, s rozdílem, že teď pracujeme se třemi vektory o třech souřadnicích. Má tedy smysl rozšířit definici determinantu i pro tři vektory v prostoru.

Definice 31: determinant tří vektorů v prostoru

Determinantem vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ v prostoru je výraz:

$$u_1v_2w_3 - u_3v_2w_1 + v_1w_2u_3 - v_3w_2u_1 + w_1u_2v_3 - w_3u_2v_1$$

Determinant vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ značíme třemi způsoby:

$$\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Důsledek: Objem čtyřstěnu tedy počítáme podle vzorce

$$V = \frac{1}{6}|\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})|$$

Příklad 22

Vypočítejte objem čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, znáte-li souřadnice bodů $A[2,3,4], B[-1,4,-2], D[0,2,-5], V[3,2,1]$. (Petáková, 1998, s. 104)

Řešení: Objem čtyřbokého hranolu se spočítá jako třetina objemu rovnoběžnostěnu. Vypočítejme souřadnice vektorů, které jehlan určují:

$$\boldsymbol{AB} = (-3; 1; -6), \boldsymbol{AD} = (-2; -1; -9), \boldsymbol{AV} = (1; -1; -3)$$

Objem pak spočítáme pomocí determinantu:

$$V = \frac{1}{3}\left|\det\big((-3; 1; -6), (-2; -1; -9), (1; -1; -3)\big)\right|$$

Spočítáme determinant:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & -9 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)\cdot(-3) - 1\cdot(-1)\cdot(-6) + (-2)\cdot(-1)\cdot(-6) -$$

$$(-3)\cdot(-1)\cdot(-9) + 1\cdot 1\cdot(-9) — 2\cdot 1\cdot 3 =$$

$$= -9 - 6 - 12 + 27 - 9 - 6 = -15$$

Dopočítáme objem:

$$V = \frac{1}{3}|-15| = \frac{15}{3} = 5$$

Příklad 23

Na ose z určete bod Z tak, aby objem čtyřstěnu $ABCZ$, kde $A[2,-3,1], B[1,0,3], C[3,1,-1]$, byl 14. (Petáková, 1998, s. 104)

Řešení: Bod Z má souřadnice $[0,0,c]$. Vypočítáme nejdřív souřadnice vektorů, které čtyřstěn určují:

$$\boldsymbol{AB} = (-1;3;2), \boldsymbol{AC} = (1;4;-2), \boldsymbol{AZ} = (-2;3;c-1)$$

Víme, že objem má vyjít 14. Tedy platí:

$$\frac{1}{6}\left|\det\big((-1;3;2),(1;4;-2),(-2;3;c-1)\ \big)\right| = 14$$

Určíme nejdříve determinant:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & c-1 \end{vmatrix} = -4(c-1) + 16 + 6 - 6 + 12 - 3(c-1) = -4c + 4 + 28 - 3c + 3$$

Tedy $\det\big((-1;3;2),(1;4;-2),(-2;3;c-1)\ \big) = 35 - 7c$. Dosadíme do rovnice a dostáváme:

$$\frac{1}{6}|35 - 7c| = 14$$

Rovnici vynásobíme $\frac{6}{7}$:

$$|5 - c| = 12$$

Tudíž $5 - c = 12$, nebo $5 - c = -12$. Řešením je tedy $c_1 = -7$ a $c_2 = 17$.

Řešením jsou tedy body:

$$Z_1[0,0,-7], Z_2[0,0,17]$$

3.3.2 Algebraické vlastnosti determinantu v prostoru

Abychom mohli zkoumat vlastnosti determinantu v prostoru, musíme si nejdříve uvědomit, co je to za zobrazení. Determinant v rovině je zobrazení, které dvěma vektorům přiřazuje reálné číslo, a dokázali jsme, že se jedná o tzv. *bilineární formu*. Determinant tří vektorů v prostoru je zobrazení, které třem vektorům přiřazuje reálné číslo, nemůže se tedy jednat o bilineární formu. Analogicky jako jsme lineární zobrazení zobecnili na bilineární zobrazení, bilineární formu zobecníme pro tři a více vektorů a zavedeme tzv. *multilineární formu*.

Definice 32: multilineární forma

Zobrazení $f: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{R}$ nazveme *multilineární formou*, pokud platí:

a) $f(u + v_1, v_2, \ldots, v_n) = f(u, v_2, \ldots, v_n) + f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$
b) $f(av_1, v_2, \ldots, v_n) = af(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

a obdobné rovnosti pro ostatní proměnné. (Motl, Zahradník, 1994, s. 259)

Věta 10

Determinant v prostoru je multilineární forma. Neboli platí:

a) $\det(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) = \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) + \det(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z})$
b) $\det(a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = a\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$
c) $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) = \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) + \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z})$
d) $\det(\boldsymbol{u}, a\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = a\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$
e) $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{z}) = \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z})$
f) $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, a\boldsymbol{w}) = a\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

Před ověřováním podmínek obecně si nejdříve na konkrétním příkladě ukážeme, že platí první dvě podmínky. Mějme tedy vektory $\boldsymbol{u} = (4; -3; 2), \boldsymbol{v} = (1; 3; -5)$, $\boldsymbol{w} = (2; 3; 4), \boldsymbol{z} = (1; 1; 2)$ a konstantu $a = 2$.

$\underline{\det(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) \stackrel{?}{=} \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) + \det(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z})}$

$$\det(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 5 \cdot 3 \cdot 2 — 3 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 0 \cdot 4 - 2 \cdot 0 \cdot 2 =$

$= 30 + 9 - 6 - 20 =$

$= 13$

$$\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) + \det(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 4 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 +$

$1 \cdot (-3) \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 \cdot (-5) - 1 \cdot 1 \cdot 4 +$

$1 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 =$

$= 24 - 6 + 4 - 16 - 12 + 12 + 6 + 15 - 10 - 4 + 12 - 12 =$

$= 13$

$\underline{\det(a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \stackrel{?}{=} a\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})}$

$$\det(a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$= 8 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 - 8 \cdot 3 \cdot (-5) + 2 \cdot (-6) \cdot (-5) - 1 \cdot (-6) \cdot 4 =$

$= 96 - 24 + 12 + 120 + 60 + 24 =$

$= 288$

$$a\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 2 \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$= 2(4 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) + 2 \cdot (-3) \cdot (-5) - 1 \cdot (-3) \cdot 4) =$

$= 2(48 - 12 + 6 + 60 + 30 + 12) = 2 \cdot 144 = 288$

Vidíme, že tvrzení pro námi zvolenou konstantu a vektory platí. Obecný důkaz provedeme také pouze pro první dvě podmínky. Důvod je jednoduchý, důkaz by byl velice dlouhý a pouze bychom opakovali stejné mechanismy, neboť každá další podmínka je jen obdobou jednou z prvních dvou podmínek.

Důkaz: Dokážeme tedy linearitu pro první dvě složky.

a) $\det(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) = \det\big((u_1+v_1;u_2+v_2;u_3+v_3),(w_1;w_2;w_3),(z_1;z_2;z_3)\big) =$

$= (u_1+v_1)w_2z_3 - (u_3+v_3)w_2z_1 + (u_3+v_3)w_1z_2 - (u_1+v_1)w_3z_2$

$+(u_2+v_2)w_3z_1 - (u_2+v_2)w_1z_3 =$

$$= u_1w_2z_3 + v_1w_2z_3 - u_3w_2z_1 - v_3w_2z_1 + u_3w_1z_2 + v_3w_1z_2 - u_1w_3z_2$$
$$-v_1w_3z_2 + u_2w_3z_1 + v_2w_3z_1 - u_2w_1z_3 - v_2w_1z_3$$

$\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) + \det(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) =$

$= u_1w_2z_3 - u_3w_2z_1 + w_1z_2u_3 - w_3z_2u_1 + z_1u_2w_3 - z_3u_2w_1 + v_1w_2z_3 - v_3w_2z_1$

$+w_1z_2v_3 - w_3z_2v_1 + z_1v_2w_3 - z_3v_2w_1$

Tudíž $\det(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) = \det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}) + \det(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z})$

$$\begin{aligned}\det(a\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) &= au_1v_2w_3 - au_3v_2w_1 + av_1w_2u_3 - av_3w_2u_1 + aw_1u_2v_3 - aw_3u_2v_1\\ &= a(u_1v_2w_3 - u_3v_2w_1 + v_1w_2u_3 - v_3w_2u_1 + w_1u_2v_3 - w_3u_2v_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) &= a(u_1v_2w_3 - u_3v_2w_1 + v_1w_2u_3 - v_3w_2u_1 + w_1u_2v_3 - w_3u_2v_1)\\ &= au_1v_2w_3 - au_3v_2w_1 + av_1w_2u_3 - av_3w_2u_1 + aw_1u_2v_3 - aw_3u_2v_1\end{aligned}$$

Tudíž $\det(a\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = a\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ ■

Řekneme, že determinant tří vektorů v prostoru je multilineární forma.

3.3.3 Determinant v n-rozměrném prostoru

Na závěr kapitoly o determinantu tří vektorů uvedeme, jak se determinant definuje obecně v lineární algebře. Nejdříve ale musíme definovat několik pojmů. Všechny definice jsou převzaty z (Novotná, Trch, 1989).

Definice 33: matice

Nechť T je těleso. Obdélníkovou tabulku prvků z T sestavených do m řádků a n sloupců nazýváme *maticí typu* (m, n) nad tělesem T. Je-li $m = n$, hovoříme o čtvercové matici řádu n.

Definice 34: pořadí

Nechť n je přirozené číslo. *Pořadím prvků* $1,2, \dots, n$ rozumíme každou uspořádanou n-tici $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ prvků $1,2, \dots, n$, kde se každý z prvků $1,2, \dots, n$ vyskytuje právě jednou.

Definice 35: inverze v pořadí

Inverzí v pořadí $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ rozumíme každou dvojici čísel i_r, i_s takovou, že $r < s$ a zároveň $i_r > i_s$ (tj. větší číslo se v pořadí vyskytuje před menším číslem).

Definice 36: permutace

Permutací π množiny $\{1,2, \dots, n\}$ rozumíme každou bijekci množiny $\{1,2, \dots, n\}$. Permutaci π zapisujeme pomocí matice typu $(2, n)$ ve tvaru $\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_n \\ j_1, j_2, \dots, j_n \end{pmatrix}$, ve které první řádek nazýváme *pořadím vzorů*, druhý řádek *pořadím obrazů* a pro každé $x \in \{1,2, \dots, n\}$ je $\pi(i_X) = j_X$. Množinu všech permutací množiny $\{1,2, \dots, n\}$ značíme S_n.

Definice 37: znaménko permutace

Znaménkem permutace π rozumíme celé číslo $(-1)^{k+m}$, kde k je počet všech inverzí v pořadí vzorů a m počet všech inverzí v pořadí obrazů. Znaménko permutace π značíme $\operatorname{sign}(\pi)$.

Definice 38: obecná definice determinantu

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad tělesem T. *Determinantem matice A* rozumíme prvek det A z tělesa T, pro který platí:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \begin{pmatrix} 1 \ 2 \cdots n \\ s_1 s_2 \cdots s_n \end{pmatrix} a_{1s_1} a_{2s_2} \dots a_{ns_n}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \ 2 \cdots n \\ s_1 s_2 \cdots s_n \end{pmatrix}$$

4 Analýza středoškolských učebnic

V této kapitole nahlédneme do několika vybraných českých středoškolských učebnic matematiky a budeme zkoumat jejich přístup k zavedení skalárního součinu. Téma determinantu se ani v jedné učebnici nevyskytuje, ačkoliv svou náročností nijak nepřevažuje téma skalárního součinu. Naším hlavním cílem bude zjistit, jak autoři zavedení skalárního součinu motivují. Budeme zkoumat 4 středoškolské učebnice, z toho jedna je učebnice internetová.

4.1 Prometheus: Matematika pro gymnázia

V učebnici je skalárnímu součinu věnována kapitola 2.5. Nejdříve se zde definuje velikost vektoru v rovině i prostoru, jednotkový a nulový vektor.

Skalární součin se zavádí bezprostředně poté, viz obr. 51.

Skalární součin, který teď zavedeme, je velmi důležitý. Jeho názorný význam ukážeme později.

Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$ v rovině je číslo

$$u_1v_1 + u_2v_2.$$

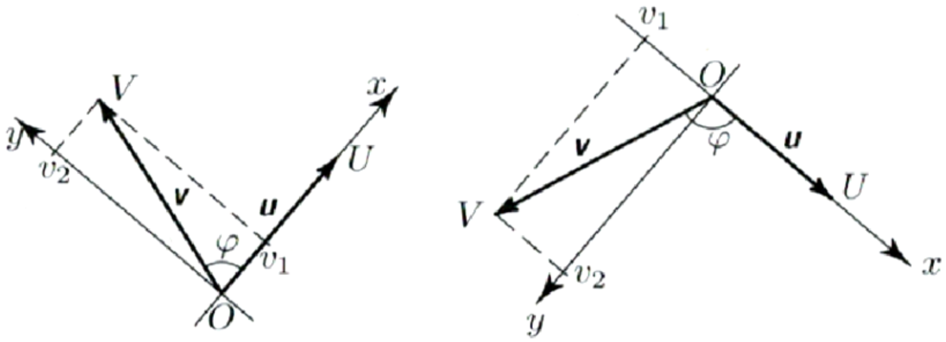
Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$ v prostoru je číslo

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Obr. 51: Matematika pro gymnázia (Kočandrle, Boček, 1995, s. 40)

Jedinou motivací pro zavedení skalárního součinu je tedy přesvědčení autorů o důležitosti pojmu. Po definici následují řešený příklad a věta o algebraických vlastnostech skalárního součinu, která je následně dokázána.

Autoři dále definují úhel dvou vektorů v rovině a pro speciální polohu vektorů odvozují vztah $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos \varphi$ a následně uvádí vzorec $\cos \varphi = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$.



Obr. 52: Matematika pro gymnázia: geometrický význam skalárního součinu (Kočandrle, Boček, 1995, s. 43)

V učebnici tedy nenalezneme odvození skalárního součinu, případně jeho odvození. Autoři skalární součin definují a následně ukazují jeho vlastnosti.

4.2 Prometheus: Přehled středoškolské matematiky

V učebnici je skalárnímu součinu věnována kapitola 10.8. Autor nejdříve definuje velikost vektoru a úhel dvou vektorů, následně pak hned zavádí skalární součin (viz obr. 32).

Skalárním součinem $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ dvou nenulových vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ nazýváme reálné číslo, které dostaneme jako součin velikostí vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a kosinu velikosti úhlu φ těchto vektorů (obr. 10.32):

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cos \varphi$$

Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, z nichž **alespoň jeden je nulový**, se klade roven nule:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Obrázek 53: Přehled středoškolské matematiky (Polák, 2008, s. 558)

V učebnici tedy nalezneme jiné zavedení než v předchozí učebnici. Autor definuje skalární součin pomocí odchylky dvou úhlů, ačkoliv ještě nemáme k dispozici analytický nástroj jeho počítání.

Na rozdíl od předchozí učebnice zde nalezneme poznámku k názvu skalárního součinu.

Název skalární součin pochází z toho, že fyzikálním veličinám, které jsou určeny jednoznačně svou číselnou hodnotou, se říká skaláry nebo skalární veličiny. Operaci, jíž každé dvojici vektorů z daného vektorového prostoru V přiřazujeme jejich skalární součin, nazýváme *skalárním násobením vektorů*. (Polák, 2008, s. 558)

Následně jsou v učebnici uvedeny algebraické vlastnosti a vyjádření skalárního součinu pomocí souřadnic vektorů.

Ačkoliv tedy v učebnici nalezneme definici skalárního součinu, ze které je vidět jeho geometrická interpretace, není jasné, proč bychom takové zobrazení měli definovat a proč tímto způsobem. V učebnici tedy nenalezneme motivaci k zavedení skalárního součinu, stejně jako v učebnici předchozí.

4.3 Didaktis: Matematika pro střední školy

V této učebnici nalezneme skalární součin ve třetí kapitole. Každá kapitola v učebnici začíná krátkým motivačním textem, který nalezneme i zde (viz obr. 50).

Úvodní motivační text má přinést studentům zdůvodnění, proč se dané problematice věnují, příp. jak dále získané vědomosti a dovednosti využijí. (Vondra, 2016)

Mayday

Na letištním radaru jsou vyznačeny soustředné kružnice a stále se zde otáčí paprsek nebo chcete-li polopřímka. Proč tam nejsou dvě na sebe kolmé osy? Rádiový signál používaný k určení polohy letadla a ke sledování jeho pohybu umožňuje určit, kterým směrem a jak daleko se objekt nachází. Přitom „jak daleko" se měří od jediného bodu. Pomocné soustředné kružnice pak pomáhají v rozhodování, které z letadel blížících se z různých směrů je blíže. Tento způsob popisu bodu v rovině se používá i v matematice, říká se tomu polární souřadnice. V kartézských souřadnicích je bod určen dvěma čísly, první říká, o kolik se máme z počátku posunout ve směru osy x, a druhé, o kolik se máme posunout ve směru osy y. Polární souřadnice jsou také dvě čísla. První udává vzdálenost bodu od počátku a druhá velikost úhlu sevřeného kladnou poloosou x a polopřímkou určenou počátkem a popisovaným bodem. Odchylka polopřímek je vlastně odchylka jistých vektorů, o které bude řeč v této kapitole.

Obr. 3: Didaktis, úvodní text (Vondra, 2016, s. 22)

Z úvodního textu se dozvíme o důležitosti polárních souřadnic, které každému bodu přiřazují vzdálenost a úhel. Úvodní text tedy splňuje svůj účel, neboť se v kapitola věnuje úhlům.

Samotný skalární součin se ale definuje bez jakékoliv motivace (viz obr. 51).

Dva vektory je možné také násobit. Přitom je potřeba mít na paměti, že součinů dvou vektorů je více, a proto budeme důsledně používat přívlastky, zde budeme mluvit o skalárním součinu vektorů.

SKALÁRNÍ SOUČIN

SKALÁRNÍ SOUČIN dvou vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2)$ je reálné číslo $a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ se označuje $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

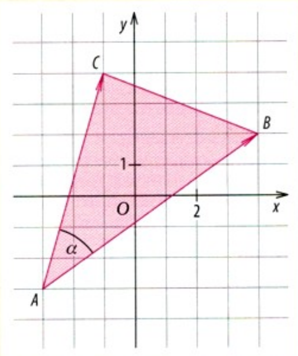
Je-li jeden z vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ nulový, platí $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

Obr. 55: Didaktis, zavedení skalárního součinu (Vondra, 2016, s. 22)

Následně pak v učebnici nalezneme algebraické vlastnosti skalárního součinu a jeho geometrický význam. Odchylka dvou vektorů se zde odvozuje stejně jako v první učebnici.

Za zmínku pak jistě stojí příklad na konci kapitoly, kde mají žáci za úkol spočítat obsah trojúhelníku (viz obr. 52).

Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, kde $A[-3; -3]$, $B[4; 2]$, $C[-1; 4]$.



K výpočtu obsahu trojúhelníku podle uvedeného vzorce potřebujeme souřadnice dvou vektorů s počátečním bodem v jednom vrcholu trojúhelníku a koncovými body ve zbylých dvou vrcholech trojúhelníku, např. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$
$$\overrightarrow{AB} = (7; 5)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A$$
$$\overrightarrow{AC} = (2; 7)$$

$$S = \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin\alpha}{2}$$

Ve vzorci pro výpočet obsahu trojúhelníku vystupují délky dvou stran trojúhelníku – v našem případě velikosti vektorů určených vrcholy trojúhelníku.

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7\cdot 2 + 5\cdot 7}{\sqrt{7^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+7^2}}\right)^2}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{49}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{53}}\right)^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{74\cdot 53 - 49^2}}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{53}}$$

Využijeme vztah $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, z něhož vyjádříme sinus, přitom víme, že $\alpha < 180°$.
Hodnotu funkce kosinus vypočítáme podle vzorce pro výpočet odchylky dvou vektorů.

$$S = \frac{\sqrt{7^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+7^2}\cdot\sin\alpha}{2}$$

$$S = \frac{\cancel{\sqrt{74}}\cdot\cancel{\sqrt{53}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{74\cdot 53 - 49^2}}{\cancel{\sqrt{74}}\cdot\cancel{\sqrt{53}}} = \frac{\sqrt{74\cdot 53 - 49^2}}{2} = \frac{39}{2}$$

$$S = \frac{39}{2}\ \mathrm{j}^2$$

Obsah trojúhelníku ABC je $\frac{39}{2}\ \mathrm{j}^2$.

Obr. 4: Didaktis, obsah trojúhelníku

Je tedy škoda, že se na základě výpočtu tohoto příkladu v učebnici neodvozuje obecný postup, jak pomocí souřadnic dvou vektorů spočítat obsah trojúhelníku, a tedy že se nedefinuje determinant.

4.4 realisticky.cz

Zavedení skalárního součinu nalezneme v kapitole 7.2.7. Autor konstatuje, že umíme násobit číslo a vektor, ale nikoliv dva vektory mezi sebou. Následně autor srovnává vzorec pro výpočet velikosti vektoru, absolutní hodnoty reálného čísla a velikosti komplexního čísla (viz obr.) a na základě této úvahy definuje skalární součin.

Vzpomínka: velikost vektoru $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Vzorec připomíná vzorce pro velikost (absolutní hodnoty) čísel:

- reálné číslo $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{x \cdot x}$,
- komplexní číslo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

V obou případech jsme získali velikost jako odmocninu ze součinu (čísla se sebou samým nebo s číslem komplexně sdruženým) $\Rightarrow$ zkusíme zavést násobení vektoru s vektorem tak, aby předchozí postřeh platil i pro vektory.

$$|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = (u_1; u_2) \cdot (u_1; u_2) = u_1^2 + u_2^2 = u_1 u_1 + u_2 u_2$$

Jak by vypadal vzorec pro součin dvou různých vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$?

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (u_1; u_2) \cdot (v_1; v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Obr. 57: realisticky.cz (Krynický, 2020)

Zavedení je odlišné od všech předchozích a pro žáky je jistě přínosné si všímat analogií mezi různými matematickými strukturami, nicméně definice jako taková motivována není. Bylo by vhodnější skalární součin definovat, podobně jako jsme to udělali my, na základě hledání odchylky, a na závěr zmínit tuto analogii. Není totiž ani jasné, proč bychom takové násobení dvou vektorů měli zavádět.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo zejména představit zavedení dvou pojmů z analytické geometrie – skalárního součinu a determinantu, a to na základě řešení geometrických problémů. Myslím, že tento cíl se podařil a čtenář má možnost pomocí řešení úloh a odvození si samostatně oba pojmy odvodit.

Práce je členěna do čtyř kapitol. V první kapitole se podařilo přehledně uvést základní definice středoškolské analytické geometrie, které se dále v práci využívá. Nejdůležitější část práce tvoří druhá a třetí kapitola, ve kterých se skalární součin i determinant podařilo několika způsoby odvodit a prezentovat jejich vlastnosti. Zároveň se podařilo druhou a třetí kapitolu vést podobným způsobem, tedy stejnou posloupností řešených úloh, případně úloh analogických. Poslední kapitola je věnována středoškolským učebnicím, přičemž ani v jedné z nich se při zavedení skalárního součinu nepostupovalo stejně jako v této bakalářské práci, tedy od řešení úloh k zavedení nového pojmu.

Práce by se jistě dala rozšířit v mnoha směrech, zejména asi s ohledem na poslední kapitolu, ve které se analyzují pouze čtyři, nicméně často používané, učebnice. Jistě by se tedy dalo pracovat s větším množstvím učebnic, případně nejen tuzemskými. Dalším přirozeným rozšířením práce by pak byla sbírka úloh, případně popis historického vývoje skalárního součinu a determinantu.

Seznam použitých informačních zdrojů

BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*. Přeložil Zdeněk TICHÝ. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1983.

HALAS, Zdeněk. Cesta ke skalárnímu součinu [online]. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Temp/skal_soucin.pdf.

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 9788071963905

KRYNICKÝ, Martin. (2010). Matematika SŠ. Realisticky.cz [online]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice.php?id=4.

MOTL, Luboš a Miloš ZAHRADNÍK. *Pěstujeme lineární algebru*. Praha: Karolinum, 1995. ISBN 80-7184-186-2.

NOVOTNÁ, Jarmila a Milan TRCH. Algebra a teoretická aritmetika. 1989. ISBN 17-253-89.

PETÁKOVÁ, Jindra. Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.

PLIŠŤÁKOVÁ, Veronika. *Determinant jako orientovaný objem* [online]. Brno, 2013 [cit. 2023-04-13]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/icgng/. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Martin ČADEK.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 9788071963561

POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia: planimetrie. Dot. 3. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-85849-07-0.

ŘEPÍK, Michal. Tenzorové součiny vektorových prostorů. Praha, 2014. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

VONDRA, Jan, Jana KALOVÁ a Václav ZEMEK. *Matematika pro střední školy*. Brno: Didaktis, [2016-2020]. ISBN 9788073582364