UNIVERZITA KARLOVA – PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Autor práce	*Milan Ondič*
Název práce	*Úhly, obsahy, objemy: skalární součin a determinant*
Autor posudku	*Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.*

Cíle (stanovení, splnění, reflexe splnění)

Cílem práce je vybudovat skalární součin a determinant na základě geometrického náhledu. Základní myšlenka předložené práce je zajímavá, cíl je dobře stanoven a autor se ho v textu důsledně drží. S níže uvedenými výhradami cíle naplňuje.

Obsahové části (úplnost, relevance, řazení)

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole jsou shrnuty středoškolské pojmy týkající se daného tématu. Další dvě kapitoly se věnují odvozování skalárního součinu a determinantu. V poslední kapitole je poměrně stručná analýza učebnic a autor zde hodnotí motivace k zavedení skalárního součinu. Řazení kapitol je v logické návaznosti. Rozsah textu překračuje požadavky kladené na bakalářskou práci.

Odborná část (matematika/didaktika: náročnost, správnost, výstavba, konzistence apod.)

Cílem textu je vysvětlovat základní principy, po matematické stránce tedy není náročný. Matematické vyjadřování by v některých místech mělo být na vyšší úrovni. Obecně mi chybí důslednější diskuze vztahů mezi geometrickou a analytickou reprezentací. Například, hned v první úloze se konstruuje vektor kolmý k danému vektoru. Zkonstruuje se však orientovaná úsečka vycházející z počátku. Dle zavedení vektoru jde však jenom o jednoho reprezentanta vektoru. V úvodních úlohách by bylo přínosné být opatrnější, aby to nevedlo k chybným konceptům (v tomto případě rozdíl mezi vázaným a volným vektorem), které by mohl čtenář, je-li to například žák střední školy, nabýt. V řešení této úlohy také chybí jakýkoliv postup konstrukce. Autor pouze píše, že se pokusíme najít kolmý vektor jen pomocí obrázku, řešení by však bylo i po definování počátku vektoru nekonečně mnoho. Následně tedy přidá podmínku pro velikost. Pro čtenáře, který se s tématem nesetkal, je zde zamlčených příliš moc detailů. Kapitola o odvozování determinantu se mim jeví zdařilejší. Na konci každé kapitoly jsou uvedeny ještě algebraické vlastnosti zavedeného pojmu. Ty se už ale většinou geometricky neinterpretují, jsou tedy podle mého názoru vzhledem k cílům práce nadbytečné. Níže přidávám komentáře k některým částem:

- V první kapitole chybí definice soustavy souřadnic, která se používá k zavádění dalších pojmů.
- Zavedení vzorce pro odchylku vektorů na str. 19 je nekonzistentní. Vzorec patří až na konec kapitoly, téměř celý text se opakuje na str. 24.
- Str. 31: Tvrzení pro sinus nedává smysl vzhledem k tomu, co chce autor ukázat, zřejmě má být taky na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- Není mi celkem zřejmé, jaké definice funkcí sinus a kosinus autor používá. V kapitole 2 se pracuje s neorientovanými konvexními úhly, s orientovanými úhly, s úhly na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Chtělo by to přehlednější uchopení.

- Str. 39: V Příkladu 5 je nesprávně určen normálový vektor. Řešení tudíž není správně.
- Definice a znění vět jsou někdy vágní, chybí kvantifikátory, definiční obory apod. Vybírá se z různých zdrojů, kde nejsou psané stejným stylem.
- Kapitola 2.1.4, kde se definuje skalární součin algebraicky, by si zasloužila víc příkladů.
- Str. 55–58: K odvození determinantu se používá Hérónův vzorec, jeho znění mělo být na začátku této části. Taky nerozumím poznámce o zavedení pro zajímavost, je to přeci cíl práce.
- Str. 56: Za poslední závorkou nemá být druhá mocnina.
- Chybí mi diskuze k orientovanému úhlu v prostoru, autor se věnuje jenom orientovanému objemu.
- Str. 68–69, Příklad 17: Výsledkem má být celý prostor, to není nikde uvedeno. Je uvedeno jenom řešení pro speciální volbu. V této části navíc chybí úloha o odchylce přímky a roviny.
- Str. 72: Definice 26, b) je chybně, jednou tam má být $v = o$.
- Str. 77, i jinde: Značení vektorových prostorů je nekonzistentní.
- Str. 82–83: V obecném odvození objemu se předpokládá $n_3 \neq 0$. Chybí podmínky.
- Str. 87, Příklad 22, řešení: V první větě má být jehlanu, ne hranolu.

Přínos (originalita, použitelnost apod.)

Přínosem práce je snaha o vybudování algebraických konceptů přes elementární příklady středoškolské analytické a syntetické geometrie. Je však potřeba říct, že výklad pojmů skalární součin a determinant přes jejich geometrické významy je poměrně běžný, dokonce z něj obyčejně vychází. Po odstranění nedostatků by práce mohla být použitelna pro žáky středních škola a studenty učitelství jako motivace ke studiu algebraických zobecnění odchylek, obsahů a objemů v analytické geometrii.

Formální náležitosti (gramatika, styl, typografie, grafické části, odkazy a citace, celková úprava)

Po formální stránce by si práce zasloužila další revizi. Na některých stránkách jsou nesprávně prázdná místa (18, 27, 37, 58, ...). Definice, věty atp. by bylo vhodné oddělit podle konvencí matematicky zaměřených prací. Obrázky jsou čitelné a dobře připravené. Zarovnání obrázku je mnohdy nesprávné. Definice jsou obyčejně dobře citované, avšak většina odvození a příkladů neodkazuje na žádný zdroj. V seznamu zdrojů je nesprávně uveden zdroj od Z. Halase, v textu se na něj navíc, bohužel, nikde neodkazuje.

Zdroje (reprezentativnost, relevance, použití)

Autor vychází z několika učebnic a základních zdrojů vhodných pro zavedení základních pojmů. Bylo by vhodné odkázat taky na materiály, které podporují stejný pohled na zavedení uvedených pojmů. Nepoužívá žádnou cizojazyční literaturu. Vzhledem k tématu by bylo vhodné udělat si přehled o geometrickém způsobu zavedení i ze zahraničních zdrojů. K tomuto tématu existuje z geometrického náhledu dokonce mnoho online nástrojů a videí, které by byly vhodnou inspirací pro autora i čtenáře. Skalární součin je navíc dobře zaveden v uvedeném, avšak v textu neodkazovaném článku od Halase.

Vyjádření ke kontrole na plagiáty: Nalezených 22 podobných dokumentů. Maximální podobnost 5 %.

Hodnocení: Práce i přes četné připomínky splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci. Práci **doporučuji** k obhajobě.

Otázky k obhajobě:

1. V práci chybí zavedení orientovaného úhlu v prostoru. Jak by se zavedl? Je to nepotřebné?
2. Znáte nějaké další příklady geometrických interpretací lineárních a multilineárních forem, které se vyskytují v středoškolské geometrii?

Datum a podpis autora posudku: 07. 05. 2023