MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

RIGORÓZNÍ PRÁCE

Mgr. Filip Konopka

Kurzweilův-Stieltjesův integrál a jeho zobecnění

Kurzweil-Stieltjes integral and its generalization

Katedra didaktiky matematiky, MFF UK

Vedoucí rigorózní práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Studijní program: Učitelství matematiky pro střední školy

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto rigorózní práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Na tomto místě bych chtěl poděkovat především vedoucímu své rigorózní práce docentu Antonínu Slavíkovi za jeho vstřícný přístup v průběhu psaní práce. Výborně se s ním spolupracovalo. Velmi si vážím toho, že mi vždy odpovídal na mé emaily tak rychle, jak mohl - většinou během pár hodin nebo nejdéle do druhého dne. Původní diplomová práce byla obhájena v září 2021 a po nějaké pauze jsme začali pracovat na jejím rozšíření.

Poděkování patří také mým kolegům z MFF Václavu Kryštofovi, Dalimilovi Pešovi a Zdeňkovi Silberovi za přečtení částí práce a inspirace a připomínky.

Práce mě bavila a jsem rád, že jsem měl možnost se tomuto tématu věnovat. Při jejím psaní jsem se sám mnohému naučil. V závěrečné fázi psaní práce vyvstaly zajímavé otázky spadající spíše do L^p prostorů, které ale zároveň úzce souvisejí s tématem HKS^p_α integrálu. Tyto otázky uvádím v závěru práce a zůstávají zatím otevřené. Rád bych se k nim ještě v budoucnu vrátil a zodpověděl je.

Název práce: Kurzweilův-Stieltjesův integrál a jeho zobecnění

Autor: Mgr. Filip Konopka

Katedra: Katedra didaktiky matematiky, MFF UK

Vedoucí rigorózní práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme HKS_α^p integrálem, který je zobecněním HKS integrálu, jeho vlastnostmi a pojmy obyčejná oscilace a p-oscilace, které jsou potřebné k jeho vybudování. Tento integrál je neabsolutně konvergentní a obecnější nežli Lebesgueův integrál. Práce navazuje na nedávné výsledky v oblasti teorie integrálů a jejím cílem je přiblížit tento nový integrál co nejširšímu okruhu zájemců o matematickou analýzu.

Klíčová slova: Integrál, Oscilace, Kurzweilův integrál, HKS_α^p integrál, HKS_α integrál

Title: Kurzweil-Stieltjes integral and its generalization

Author: Mgr. Filip Konopka

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Abstract: The thesis deals with the HKS_α^p integral, which is generalization of the HKS integral, its properties and the concepts of ordinary oscillation and p-oscillation, which are needed for the construction of the integral. This integral is non-absolutely convergent and more general than the Lebesgue integral. This thesis is based on recent results in the theory of integrals and its goal is to introduce this integral to a wide readership interested in mathematical analysis.

Keywords: Integral, Oscillations, Kurzweil integral, HKS_α^p integral, HKS_α integral

Obsah

Úvod

V této práci se zabýváme zejména HKS^p_α integrálem, který je zobecněním Kurzweilova-Stieltjesova integrálu. Tuto jeho novější variantu zavedli J. Malý a K. Kuncová v roce 2019 (publikace [3]). Cílem této práce bylo prozkoumat, které vlastnosti Kurzweilova-Stieltjesova integrálu se zachovávají při přechodu k HKS^p_α integrálu a sepsat příslušné důkazy. Tato práce přirozeně navazuje na [1], [2] a [3]. Dalším cílem bylo prozkoumat a pečlivě dokázat některé základní vlastnosti integrálu, které jsou v [3] jen letmo zmíněny nebo pokládány za zřejmé. Snažili jsme se o to, aby text byl přístupný co nejširšímu okruhu zájemců o matematickou analýzu, zatímco článek [3] je věnován hlavně specialistům v teorii integrálu. Předpokládáme, že čtenář má znalosti matematické analýzy a Lebesgueova integrálu na úrovni bakalářského studia na MFF UK. Naším hlavním přínosem v této práci jsou kapitoly 2 a 3.

V první kapitole připomeneme definici Kurzweilova integrálu jako přirozené zobecnění Riemannova integrálu. Jeho prvním zobecněním je HKS integrál, přičemž toto zobecnění spočívá v tom, že místo integrátoru $G(x) = x$ pracujeme s obecným integrátorem. Ukážeme, že HKS integrál lze definovat dvojím způsobem (klasicky i pomocí neurčitého integrálu), a že tyto definice jsou ekvivalentní.

Ve druhé kapitole se věnujeme pojmu oscilace funkce, což je klíčový pojem v definici HKS^p_α integrálu, a zkoumáme její vlastnosti. Symbolem $\operatorname{osc}_p(F, I)$ rozumíme oscilaci funkce F na intervalu I; přičemž rozlišujeme tzv. obyčejnou oscilaci (případ $p = C$) a p-oscilaci (případ $p \in [1,\infty]$), k jejíž definici potřebujeme Lebesgueův integrál. Ukážeme, že funkcionál

$$F \mapsto \operatorname{osc}_p(F, I)$$

je pseudonorma na prostoru měřitelných funkcí na I. Také ukážeme, že pro libovolnou měřitelnou funkci $F : I \to \mathbb{R}$ je funkce

$$p \mapsto \operatorname{osc}_p(F, I)$$

neklesající pro $p \in [1, +\infty]$ a tento výsledek později využijeme při zkoumání tříd integrovatelných funkcí. Dále ukážeme, že pouze pro $p = C$ je oscilace subaditivní vzhledem k intervalu, ale pro $p \in [1, +\infty]$ subaditivní není. V kapitole 3 ukážeme, že v důsledku toho pak neurčitý HKS^p_α je aditivní vzhledem k integračnímu oboru pouze pro $p = C$, ale není aditivní pro $p \in [1, +\infty]$.

Ve třetí kapitole se v první sekci věnujeme nejprve vlastnostem HKS^p_α integrálu, které jsou společné pro $p \in [1, +\infty]$ i $p = C$. Ve druhé sekci se pak věnujeme pouze vlastnostem HKS_α integrálu, což je jeho speciální případ pro $p = C$.

Ve čtvrté kapitole zmíníme i jiné novější typy integrálů a jejich vztah k HKS^p_α integrálu. První sekce je věnována MC_α integrálu, který zavedli T. Ball a D. Preiss v roce 2017 (publikace [8]) a který je ekvivalentní s HK_α integrálem. Tento integrál je zobecněním MC integrálu, který zavedli H. Bendová a J. Malý v roce 2011 (publikace [9]), a který je ekvivalentní s HK integrálem. Ve druhé a třetí sekci zmíníme Denjoyův-Chinčinův integrál a aproximativní derivaci a jejich vztah s HKS^p_α integrálem, čemuž se věnovali J. Malý a K. Kuncová.

Tento text je rozšířenou verzí diplomové práce (obhájené na Pedf UK), přičemž toto rozšíření spočívá zejména v rozpracování kapitol 2 a 3. Ve druhé kapitole jsme rozšířili podkapitolu 2.2 o vlastnostech oscilace, ve které se zabýváme otázkou minimalizace normy

$$\big|\big|F(x)-c\big|\big|_p$$

pro dané $p \in [1,\infty]$ a pro danou měřitelnou funkci F na omezeném intervalu. Ukážeme, jak v případech $p=1$, $p=2$ a $p=\infty$ najít konstantu $c(p)$ splňující

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} ||F(x)-c||_p = \big|\big|F(x)-c(p)\big|\big|_p.$$

V kapitole 2.2 jsme zobecnili tvrzení 2.2.1, které říká, že pro $p=\infty$ je tou správnou konstantou aritmetický průměr esenciálního suprema a esenciálního infima funkce F a také, že pro všechna $p \in [1,\infty]$ je tato konstanta číslo splňující

$$\operatorname{ess\,inf} F(x) \;\le\; c(p) \;\le\; \operatorname{ess\,sup} F(x).$$

Přibylo tvrzení 2.2.2, které říká, že pro $p=2$ je tou správnou konstantou integrální průměr funkce F na intervalu $[a,b]$, tedy číslo

$$\frac{\int_a^b F(x)\,dx}{b-a}.$$

K tomuto tématu přibyly související příklady 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6, 2.2.7, 2.2.8 a 2.2.9. Dále jsme zobecnili tvrzení 2.2.10, které říká, že pro měřitelnou funkci F na intervalu I platí, že

$$\operatorname{osc}_\infty(F,\,I) \le \operatorname{osc}_C(F,\,I),$$

přičemž za předpokladu spojitosti F zde nastává rovnost.

Ve třetí kapitole přibyl příklad 3.1.2 a s ním související tvrzení 3.1.3, které říká, že pro pevně zvolený integrátor platí inkluze

$$HKS_\alpha^C \subseteq HKS_\alpha^\infty.$$

Ve třetí kapitole jsme dále dokázali tvrzení 3.2.9 o jednoznačnosti HKS_α integrálu pro $\alpha > 1$; a navíc přibylo tvrzení 3.2.10, jehož obdoba pro HKS integrál je známá jako Hakeova věta a lze ji nalézt například v publikaci [2].

1. Kurzweilův integrál

Začátkem 20. století započaly snahy o vybudování teorie neabsolutně konvergentního integrálu, který by byl obecnější nežli Newtonův a zároveň i Lebesgueův integrál. První takový integrál zavedl A. Denjoy v roce 1912. O dva roky později zavedl O. Perron o něco jednodušší integrál, jehož konstrukce byla založena na práci s majorantami a minorantami funkce. Až v roce 1957 J. Kurzweil[1] upravil definici Riemannova integrálu a zkonstruoval tak nový integrál, jehož definice je názornější a podstatně jednodušší než definice těchto přecházejících integrálů. Ukázal, že tento integrál je ekvivalentní s Perronovým integrálem. Nezávisle na něm v roce 1961 tutéž konstrukci integrálu objevil i R. Henstock, proto Kurzweilův integrál nazýváme Henstockův-Kurzweilův integrál neboli HK integrál.

1.1 Přechod od Riemannova integrálu ke Kurzweilovu integrálu

Připomeňme nejprve definici Riemannova integrálu.

Definice 1.1.1. *Dělením intervalu* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *rozumíme konečnou posloupnost intervalů* $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^n$ *takových, že*

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \cdots < b_{n-1} = a_n < b_n = b.$$

Definice 1.1.2. *Nechť* $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^n$ *je dělení intervalu* $[a,b]$ *a* $\{x_i\}_{i=1}^n$ *je posloupnost taková, že pro každé* $i \in \{1, ..., n\}$ *platí*

$$a_i \leq x_i \leq b_i.$$

Pak $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ *nazveme* ***dělení s význačnými body*** x_i *(ang. tagged partition).*

Riemannův integrál můžeme definovat následujícím způsobem.

Definice 1.1.3 (Riemannův integrál). *Řekneme, že* ***omezená*** *funkce* f *na intervalu* $[a,b]$ *je* ***riemannovsky integrovatelná*** *a platí* $\int_a^b f = A$ *právě tehdy, když pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *tak, že pro všechna dělení s význačnými body* $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ *intervalu* $[a, b]$ *splňující* $|b_i - a_i| < \delta$ *pro každé* $i \in \{1,...,n\}$ *platí:*

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(b_i - a_i) \right| < \varepsilon.$$

Poznámka. Definice Riemannova integrálu založená na horních a dolních součtech (Darbouxova definice) je ekvivalentní s definicí 1.1.3.

[1] Kurzweilův integrál byl poprvé publikován v práci [10]. Britský matematik R. Henstock nezávisle na J. Kurzweilovi objevil v roce 1961 stejnou definici tohoto integrálu. O existenci Kurzweilovy práce se dozvěděl až v roce 1963. Jejich motivací pro zavedení nového integrálu bylo především vysvětlení jistých konvergenčních jevů v teorii obyčejných diferenciálních rovnic. Více o historii Kurzewilova integrálu (i jiných integrálů) lze nalézt v publikaci [11].

Rozdíl mezi Riemannovým a Kurzweilovým integrálem je v tom, že v definici Kurzweilova integrálu hledané δ k zadanému ε nemusí být nutně konstanta, ale připustíme, že δ může být funkce.

Definice 1.1.4. ***Kalibrem*** *nazveme jakoukoliv funkci* $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^+$.

Definice 1.1.5. *Nechť* $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. *Řekneme, že dělení intervalu* $[a,b]$ *s význačnými body* $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ *je* ***δ-jemné****, pokud*

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \quad [a_i, b_i] \subset (x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)).$$

Definice 1.1.6 (**Henstockův-Kurzweilův integrál**). *Řekneme, že funkce f na intervalu $[a,b]$ je* ***HK-integrovatelná*** *a platí $\int_a^b f = A$ právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemná dělení} \quad \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\text{platí: } \left| A - \sum_{i=1}^n f(x_i)(b_i - a_i) \right| < \varepsilon.$$

Lemma 1.1.7 (**Cousinovo lemma**). *Pro libovolný kalibr* $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ *je množina všech δ-jemných dělení intervalu $[a,b]$ vždy neprázdná.*

Důkaz lze najít v [2, Lemma 6.2.3].

1.2 Příklady

Příklad 1.2.1. Příkladem omezené funkce, která není riemannovsky integrovatelná, je tzv. **Dirichletova funkce** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definovaná následujícím předpisem.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ukažme nejprve, že Dirichletova funkce není riemannovsky integrovatelná.

Uvažujme libovolné dělení $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ intervalu $[0,1]$ s význačnými body x_i. V případě, že všechny význačné body jsou racionální, tedy $x_i \in \mathbb{Q}$, pak $f(x_i) = 1$ a tedy

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)(b_i - a_i) = 1 \neq 0.$$

V případě, že všechny význačné body jsou iracionální, tedy $x_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pak $f(x_i) = 0$ a tedy

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)(b_i - a_i) = 0.$$

Pro libovolné $\delta > 0$ tedy vždy umíme najít dvě různá dělení intervalu $[0,1]$, $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ a $\{[c_i, d_i], y_i\}_{i=1}^m$ tak, že pro všechna i platí $|b_i - a_i| < \delta$ a $|d_i - c_i| < \delta$ a zároveň

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i)(b_i - a_i) - \sum_{i=1}^m f(y_i)(d_i - c_i) \right| = 1 - 0 = 1,$$

tedy funkce f není riemannovsky integrovatelná.

Ukažme, že Dirichletova funkce je HK-integrovatelná a platí

$$(HK)\int_0^1 f \; = 0.$$

K pevně zadanému $\varepsilon > 0$ musíme najít takový kalibr $\delta_\varepsilon : [0,1] \to (0,\infty)$, aby pro všechna δ_ε-jemná dělení $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ intervalu $[0,1]$ s význačnými body x_i platilo:

$$\Big|\sum_{i=1}^n f(x_i)(b_i - a_i) - 0\Big| < \varepsilon.$$

Jelikož racionální čísla tvoří spočetnou množinu, můžeme její prvky uspořádat do posloupnosti a očíslovat $\{q_1, q_2, q_3, ...\}$. K pevně zadanému $\varepsilon > 0$ definujme kalibr následujícím způsobem:

$$\delta(x) := \begin{cases} \varepsilon/2^{i+1} & x = q_i \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Takto definovaná funkce je jistě kalibr, neboť pro $x \in [0,1]$ nabývá pouze kladných hodnot. Uvažujme libovolné δ-jemné dělení $\{[a_k, b_k], x_k\}_{k=1}^n$. Pro každý iracionální význačný bod x_k je $f(x_k) = 0$. Z každé posloupnosti $(x_k)_{k=1}^n$ tedy lze vybrat podposloupnost racionálních čísel $(x_{kj})_{j=1}^m$ a tedy

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)(b_i - a_i) = \sum_{j=1}^m f(x_{kj})(b_{kj} - a_{kj}).$$

Dirichletova funkce f nabývá v každém racionálním bodě hodnoty 1, tedy

$$f(x_{kj}) = 1, \quad j = 1,...,m.$$

Můžeme tedy odhadovat:

$$\Big|\sum_{i=1}^n f(x_i)(b_i - a_i) - 0\Big| = \sum_{j=1}^m f(x_{kj})(b_{kj} - a_{kj}) = \sum_{j=1}^m (b_{kj} - a_{kj}) < \sum_{j=1}^m 2\delta(x_{kj}) =$$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{2\varepsilon}{2^{k_j+1}} = \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon}{2^{k_j}} \overset{2}{<} 2\sum_{i=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^i} = 2\varepsilon \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} = 2\varepsilon.$$

Tento důkaz je převzat z [6].

[2]Protože význačné body x_k mohly být i krajní body intervalu $[a_k, b_k]$, každý bod se v této posloupnosti může opakovat nanejvýš dvakrát.

Následující příklad je převzat z [2, Example 6.2.14].

Příklad 1.2.2. Uvažujme funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ takovou, že množina

$$M = \{x \in [a,b]; f(x) \neq 0\}$$

má nulovou Lebesgueovu míru. Pak Henstockův-Kurzweilův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje a je roven nule.

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$M_n := \{x \in [a,b];\ n-1 < |f(x)| \leq n\}.$$

Množina M je disjunktním sjednocením množin M_n, tj. $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M$. Z toho plyne, že každá množina M_n má také nulovou Lebesgueovu míru. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje otevřená množina $G_n \subset [a,b]$ taková, že $M_n \subset G_n$ a zároveň

$$\mu(G_n) < \frac{\varepsilon}{n2^n}.$$

Nechť $\delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty)$ je kalibr splňující, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro $x \in M_n$ platí

$$(x - \delta_\varepsilon(x), x + \delta_\varepsilon(x)) \cap [a,b] \subset G_n.$$

Pro libovolné δ_ε-jemné dělení $\{[a_i,b_i], x_i\}_{i=1}^m$ intervalu $[a,b]$ pak platí

$$\Big|\sum_{i=1}^{m} f(x_i)(b_i - a_i) - 0\Big| \leq \sum_{i=1}^{m} |f(x_i)|(b_i - a_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i;\, x_i \in M_n} |f(x_i)|(b_i - a_i)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{i;\, x_i \in M_n} (b_i - a_i) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(G_n) < \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\varepsilon}{n2^n} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

Tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

1.3 Vztah Kurzweilova integrálu k Newtonovu, Riemannovu a Lebesgueovu integrálu

V následujících větách shrneme, že Kurzweilův integrál je obecnější nežli integrál Newtonův, Riemannův a dokonce i Lebesgueův. Důkazy následujících vět lze najít v [5] (věta 4.2, 4.3, 5.1).

Věta 1.3.1 (Vztah Kurzweilova a Newtonova integrálu). *Nechť* $-\infty < a < b < \infty$ *a funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *má Newtonův integrál* $(N) \int_a^b f(x)\,dx$. *Potom existuje Kurzweilův integrál* $(K) \int_a^b f(x)\,dx$ *a platí*

$$(N) \int_a^b f(x)\,dx = (K) \int_a^b f(x)\,dx$$

Věta 1.3.2 (Vztah Kurzweilova a Riemannova integrálu). *Nechť* $-\infty < a < b < \infty$ *a funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *má Riemannův integrál* $(R) \int_a^b f(x)\,dx$. *Potom existuje Kurzweilův integrál* $(K) \int_a^b f(x)\,dx$ *a platí*

$$(R) \int_a^b f(x)\,dx = (K) \int_a^b f(x)\,dx$$

Následující věta uvádí vztah mezi Kurzweilovým a Lebesgueovým integrálem.

Věta 1.3.3 (Vztah Kurzweilova a Lebesgueova integrálu). *Je-li funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *měřitelná, pak má v intervalu* $[a,b]$ *Lebesgueův integrál právě tehdy, když je absolutně integrovatelná v Kurzweilově smyslu*[3] *(tj.* $|f|$ *i* f *jsou integrovatelné). Potom platí*

$$(L) \int_a^b f(x)\,dx = (K) \int_a^b f(x)\,dx$$

Tato věta říká, že třída lebesgueovsky integrovatelných funkcí je podtřídou kurzweilovsky integrovatelných funkcí, přičemž to, o co se liší, jsou pouze neabsolutně integrovatelné funkce v Kurzweilově smyslu.

[3]Přesněji, existuje-li Lebesgueův integrál dané funkce, pak existuje i Kurzweilův integrál; a zároveň nezáporná funkce je lebesgueovsky integrovatelná právě tehdy, je-li kurzweilovsky integrovatelná.

1.4 Stieltjesův integrál

Integrály Stieltjesova[4] typu se vyznačují tím, že zde integrujeme nikoliv vzhledem k integrační proměnné jako dosud, ale k **funkci** integrační proměnné. Funkci f, kterou integrujeme, nazýváme **integrand**, a funkci G, vzhledem ke které integrujeme, nazýváme **integrátor**. Píšeme

$$\int f(x)\,dG(x) = \int f\,dG.$$

Definice 1.4.1 (HKS integrál - klasická definice). *Řekneme, že funkce f na intervalu $[a,b]$ je **HKS-integrovatelná** vzhledem k funkci $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ a platí $\int_a^b f\,dG = A$ právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemná dělení} \quad \{[a_i,b_i],x_i\}_{i=1}^n$$

$$\text{platí: } \Big| A - \sum_{i=1}^n f(x_i)(G(b_i) - G(a_i)) \Big| < \varepsilon.$$

Všimněme si, že v případě, že funkce G je identita, tj. $G(x) = x$, splývá definice HKS integrálu s HK integrálem.

Tvrzení 1.4.2 (Saksovo-Henstockovo lemma). *Nechť $f, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ a existuje Henstockův-Kurzweilův integrál $\int_a^b f dG$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr δ_ε s následující vlastností: Je-li $\{[A_j,B_j],z_j\}_{j=1}^m$ libovolný systém disjunktních intervalů obsažených v intervalu $[a,b]$ splňující, že pro všechna j je $z_j \in [A_j,B_j]$ a zároveň*

$$[A_j,B_j] \subset (z_j - \delta_\varepsilon(z_j), z_j + \delta_\varepsilon(z_j)),$$

potom

$$\sum_{j=1}^m \Big| f(z_j)(G(B_j) - G(A_j)) - \int_{A_j}^{B_j} f\,dG \Big| < \varepsilon.$$

Důkaz lze najít v [2, Lemma 6.5.1], [2, Corollary 6.5.2].

[4]Matematik Stieltjes se věnoval především řetězovým zlomkům a výpočtu momentů pro hmotu rozloženou na přímce - to pro něj bylo motivací pro studium integrálů. Více o jeho práci lze nalézt v [12, kapitola 6].

HKS integrál můžeme definovat klasicky jako v definici 1.4.1 nebo jej také definovat pomocí neurčitého integrálu. Ukážeme, že tyto dvě definice jsou ekvivalentní.

Definice 1.4.3 (HKS integrál, definice pomocí neurčitého integrálu). *Funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je neurčitým HKS integrálem funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vzhledem k funkci $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemná dělení} \quad \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\text{platí: } \sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i) - f(x_i)(G(b_i) - G(a_i))| < \varepsilon.$$

V takovém případě definujeme určitý integrál jako

$$\int_a^b f dG := F(b) - F(a).$$

Tvrzení 1.4.4. *Klasická definice HKS integrálu (definice 1.4.1) je ekvivalentní s definicí HKS integrálu pomocí neurčitého integrálu (definice 1.4.3).*

Důkaz. Je-li $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ neurčitý integrál funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vzhledem k funkci $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, vezměme $I := F(b) - F(a)$. Pak pro všechna δ_ε-jemná dělení $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ intervalu $[a,b]$ je

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(x_i)(G(b_i) - G(a_i)) \right| = \left| \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i) - f(x_i)(G(b_i) - G(a_i))) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \left| F(b_i) - F(a_i) - f(x_i)(G(b_i) - G(a_i)) \right| < \varepsilon.$$

Existuje-li naopak $\int_a^b f dG$ podle klasické definice, pak podle Saksova-Henstockova lemmatu pro každý δ_ε-jemný systém $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ platí

$$\sum_{i=1}^n \left| f(x_i)(G(b_i) - G(a_i)) - \int_{a_i}^{b_i} f\, dG \right| < \varepsilon.$$

Vezmeme-li

$$F(t) \overset{5}{:=} \int_a^t f\, dg,\ t \in [a,b],$$

pak

$$\sum_{i=1}^n \left| f(x_i)(g(b_i) - g(a_i)) - (F(b_i) - F(a_i)) \right| < \varepsilon.$$

$\square$

[5] Je-li $[a,t] \subset [a,b]$, pak existence integrálu na intervalu $[a,b]$ implikuje existenci na intervalu $[a,t]$. Toto tvrzení plyne z [2, Theorem 6.2.9].

Stieltjesovy integrály v teorii pravděpodobnosti

Je-li X náhodná veličina se **spojitým** rozdělením a $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je její distribuční funkce; a je-li $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pak střední hodnota transformované náhodné veličiny $g(X)$ je dána vztahem

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dF(x), \tag{1.1}$$

existuje-li integrál vpravo. Tento integrál je Stieltjesův, přičemž integrátor je zde distribuční funkce náhodné veličiny. Ta musí být neklesající, zprava spojitá a navíc musí splňovat, že $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ a $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
Podle *Radonovy-Nikodymovy věty*[6] existuje nezáporná měřitelná funkce f, kterou nazýváme hustota, taková, že pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{1.2}$$

Díky tomu můžeme tento Stieltjesův integrál, jehož integrátorem je distribuční funkce F, převést na „klasický“ integrál, jehož integrátorem je identická funkce $G(x) = x$ a ten už dovedeme spočítat (umíme-li najít primitivní funkci k $g(x)f(x)$ v uzavřeném tvaru), tedy

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dF(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\, dx.$$

Má-li náhodná veličina diskrétní rozdělení, tento integrál nemůžeme přepsat pomocí „klasického“ integrálu a je nutné pracovat se Stieltjesovým integrálem (1.1) V teorii pravděpodobnosti pracujeme obvykle s Lebesgueovým-Stieltjesovým integrálem, který je absolutně konvergentní. V případě, že integrál (1.1) neexistuje, řekneme, že náhodná veličina nemá střední hodnotu. Pokud bychom však tímto vztahem definovali střední hodnotu pro Kurzweilův-Stieltjesův integrál, který je neabsolutně konvergentní a obecnější nežli Lebesgueův-Stieltjesův integrál, rozšířili bychom tak pojem střední hodnota náhodné veličiny i pro případy, že integrál (1.1) je neabsolutně konvergentní.

[6] Rozdělení spojité náhodné veličiny X s distribuční funkcí F je pravděpodobnostní míra μ_F, která je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře μ (píšeme $\mu_F << \mu$). To znamená, že pro libovolnou měřitelnou množinu A platí, že je-li $\mu(A) = 0$, pak také $\mu_F(A) = 0$. Podle Radonovy-Nikodymovy věty existuje nezáporná měřitelná funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že pro každou borelovsky měřitelnou množinu A platí:

$$\mu_F(A) = \int_A dF(x) = \int_A f(x)\, d\mu(x). \tag{1.3}$$

Takovou funkci nazýváme hustota (též Radonovy-Nikodymova derivace) a je určena jednoznačně až na množinu nulové Lebesgueovy míry. Tedy pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = \frac{d\mu_F}{d\mu}(x). \tag{1.4}$$

Příklad 1.4.5 (Spojité rozdělení). Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu (0,1), tedy rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

a nechť

$$g(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Potom transformovaná náhodná veličina $g(X)$ nemá střední hodnotu ve smyslu Lebesgueova-Stieltjesova integrálu, ale má střední hodnotu ve smyslu HKS integrálu. Získáme totiž

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dF(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Tento integrál je neabsolutně konvergentní a jeho hodnota je přibližně 0,62, ale $\int_0^1 |\frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x})|\, dx$ diverguje.

Příklad 1.4.6 (Diskrétní rozdělení). Nechť X je náhodná veličina nabývající kladných celočíselných hodnot, která má rozdělení určené pravděpodobnostní funkcí

$$P[X = k] = \frac{1}{k(k+1)},\ k \in \mathbb{N}.$$

Tedy je to nezáporná funkce a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} P[X = k] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \overset{7}{=} 1.$$

Nechť

$$g(n) = (n+1) \cdot (-1)^n.$$

Potom transformovaná náhodná veličina $g(X)$ nemá střední hodnotu ve smyslu Lebesgueova-Stieltjesova integrálu, ale má střední hodnotu ve smyslu HKS integrálu.

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dF(x) \overset{8}{=} \sum_{k=1}^{\infty} g(k)\, P[X = k] =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(-1)^k \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Tato řada je neabsolutně konvergentní a lze ukázat, že má součet $-\log 2$, ale není absolutně konvergentní.

[7] Obecný člen řady můžeme rozložit na parciální zlomky $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ a dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - ... = 1.$$

[8] Má-li náhodná veličina X diskrétní rozdělení, tak existuje konečná nebo spočetná posloupnost $\{x_n, p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ taková, že $x_n \in \mathbb{R}$ a čísla $p_n > 0$ splňují $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} p_n = 1$; přičemž pro distribuční funkci veličiny X platí $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0, x_n \leq x} p_n$. V takovém případě je pravděpodobnostní míra μ_F sčítací a platí $\mu_F(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0, x_n\in A} p_n$ pro libovolnou měřitelnou množinu $A \subset \mathbb{R}$.

2. Oscilace

V této kapitole zavedeme pojem oscilace funkce, což je klíčový pojem, pomocí něhož definujeme HKS_α^p integrál v kapitole 3, a budeme zkoumat její vlastnosti.

2.1 Oscilace a medián

Připomeňme nejprve definici normy v L^p prostoru.

Definice 2.1.1. *Nechť $X \subset \mathbb{R}$ je libovolná množina a $f : X \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná funkce. Pro $p \in [1, \infty)$ definujeme normu f jako*

$$||f||_p = \Big(\int_X |f(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Pro $p = \infty$ definujeme

$$||f||_\infty = \inf \Big\{ \alpha \geq 0; \, |f(x)| \leq \alpha \quad \text{pro skoro všechna } x \in X \Big\},$$

tedy infimum čísel $\alpha \geq 0$ takových, že množina $\{x; |f(x)| \geq \alpha\}$ má nulovou Lebesgueovu míru. Tuto normu nazýváme esenciální supremum. Dále definujeme

$$L^p(X) = \{ f : X \to \mathbb{R}^*; \quad ||f||_p < +\infty \}.$$

Definice 2.1.2 (Oscilace). *Nechť $p \in [1, \infty]$ a $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je omezený uzavřený interval. Pak **p-oscilaci** měřitelné funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definujeme jako*

$$\operatorname{osc}_p(F, \, [a, b]) := (b - a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c \in \mathbb{R}} ||F - c||_{L^p}.$$

Pro $p = \infty$ položíme $\frac{1}{p} = 0$.

***Obyčejnou oscilací** (C-oscilací) budeme rozumět*

$$\operatorname{osc}(F, \, [a, b]) = \operatorname{osc}_C(F, \, [a, b]) := \frac{1}{2} \sup_{x, y \in [a, b]} \big| F(y) - F(x) \big|.$$

Definice je převzata z [3, Definition 2.3].

Značení. Obyčejnou oscilaci budeme častěji značit $\operatorname{osc}(F, \, [a, b])$ a symbol C, který můžeme vynechávat, budeme považovat za možnou hodnotu parametru p.

Poznámka. Obyčejnou oscilaci funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ lze ekvivalentně definovat jako

$$\operatorname{osc}_C(F, \, [a, b]) \stackrel{1}{:=} \frac{1}{2} \Big(\sup_{x \in [a, b]} F(x) - \inf_{x \in [a, b]} F(x) \Big).$$

[1] Z vlastností suprema plyne:

$$\sup_{x, y \in [a, b]} |F(y) - F(x)| = \sup_{x, y \in [a, b]} (F(y) - F(x)) =$$

$$= \sup_{y \in [a, b]} F(y) + \sup_{x \in [a, b]} (-F(x)) = \sup_{y \in [a, b]} F(y) - \inf_{x \in [a, b]} F(x).$$

Poznámka. Multiplikativní konstanta $(b-a)^{-\frac{1}{p}}$ v definici oscilace zajišťuje, že oscilace $\operatorname{osc}_p(F, [a,b])$ je neklesající funkce v proměnné p, jak bude zřejmé z důkazu tvrzení 2.2.13.

Poznámka. Zatímco v definici p-oscilace vyžadujeme, aby funkce F byla měřitelná, obyčejnou oscilaci lze definovat i pro neměřitelné funkce.

Poznámka. Obyčejná oscilace se od oscilace pro $p = \infty$ liší v tom, že nezanedbává množiny nulové Lebesgueovy míry.

Definice 2.1.3 (Medián)**.** *Nechť $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Řekneme, že číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ je* ***medián*** *funkce F na $[a,b]$, pokud existuje měřitelná množina $M \subset [a,b]$ taková, že $\mu(M) = \frac{1}{2}(b-a)$ a zároveň*

$$\forall x \in M: \; F(x) \leq \lambda \quad \wedge \quad \forall x \in [a,b] \setminus M: \; F(x) \geq \lambda.$$

Definice je převzata z [3, Definition 2.5].

Tvrzení 2.1.4 (Existence mediánu)**.** *Každá měřitelná funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ má medián.*

Důkaz. Označme

$$S_1 := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}; \quad \mu(F^{-1}((-\infty, \lambda))) \leq \frac{b-a}{2} \right\}$$

$$S_2 := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}; \quad \mu(F^{-1}((\lambda, +\infty))) \leq \frac{b-a}{2} \right\}$$

Z monotonie míry plyne, že funkce $H_1(\lambda) := \mu(F^{-1}((-\infty, \lambda)))$ je neklesající a funkce $H_2(\lambda) := \mu(F^{-1}((\lambda, +\infty)))$ je nerostoucí a pro $i \in \{1, 2\}$ platí:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad 0 \leq H_i(\lambda) \leq b-a,$$

přičemž

$$\mu(F^{-1}(\mathbb{R})) = \lim_{\lambda \to +\infty} H_1(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} H_2(\lambda) = b - a \in \mathbb{R}.$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$A_k := F^{-1}((-\infty, k)).$$

Tato posloupnost množin splňuje $A_k \subseteq A_{k+1}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, proto z věty o spojitosti míry plyne:

$$\lim_{k \to +\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = b - a.$$

Proto musí existovat nějaké $k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\mu(F^{-1}((-\infty, k))) > \frac{b-a}{2},$$

tedy S_1 je shora omezená množina. Ukažme, že je neprázdná. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$B_k := F^{-1}((-\infty, -k)).$$

Tato posloupnost množin splňuje $B_{k+1} \subseteq B_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a všechny tyto množiny mají konečnou míru, proto podle věty o spojitosti míry platí:

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(B_k) = \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) = 0.$$

Proto musí existovat nějaké $k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\mu(F^{-1}((-\infty, -k))) < \frac{b-a}{2},$$

tedy S_1 je neprázdná množina. Analogicky dokážeme, že množina S_2 je neprázdná a zdola omezená.

Protože množina S_1 je shora omezená neprázdná, musí existovat její supremum, a protože množina S_2 je zdola omezená a neprázdná, musí existovat její infimum. Označme

$$\lambda_1 := \sup S_1$$

$$\lambda_2 := \inf S_2$$

Pak musí platit, že

$$\lambda_2 \leq \lambda_1.$$

Kdyby to neplatilo, mohli bychom najít čísla c_1, c_2 taková, že

$$\lambda_1 < c_1 < c_2 < \lambda_2,$$

a v takovém případě by platilo

$$\mu(F^{-1}((-\infty, c_1))) > \frac{b-a}{2} \quad \wedge \quad \mu(F^{-1}((c_2, +\infty))) > \frac{b-a}{2}$$

a to by byl spor, neboť $I_1 := F^{-1}((-\infty, c_1))$ a $I_2 := F^{-1}((c_2, +\infty))$ jsou disjunktní množiny a $I_1 \cup I_2 \subseteq [a,b]$. Musí tedy nastat případ $\lambda_2 < \lambda_1$ nebo $\lambda_2 = \lambda_1$.
V případě, že $\lambda_2 < \lambda_1$, je každé číslo $\xi \in (\lambda_2, \lambda_1)$ mediánem funkce F, neboť pro něj existují $\xi_1 \in S_1$ a $\xi_2 \in S_2$ taková, že

$$\xi_2 < \xi < \xi_1,$$

a tedy

$$\mu(F^{-1}((-\infty, \xi])) \leq \mu(F^{-1}((-\infty, \xi_1))) \leq \frac{b-a}{2},$$

$$\mu(F^{-1}((\xi, +\infty))) \leq \mu(F^{-1}((\xi_2, +\infty))) \leq \frac{b-a}{2},$$

a protože

$$F^{-1}((-\infty, \xi]) \cup F^{-1}((\xi, +\infty)) = [a,b],$$

musí v obou případech nastávat všude rovnost.
V případě, kdy $\lambda_1 = \lambda_2$, platí

$$[a,b] = F^{-1}((-\infty, \lambda_1)) \cup F^{-1}(\{\lambda_1\}) \cup F^{-1}((\lambda_1, +\infty)),$$

přičemž

$$\mu(F^{-1}(-\infty, \lambda_1)) \leq \frac{b-a}{2} \quad \wedge \quad \mu(F^{-1}(\lambda_1, +\infty)) \leq \frac{b-a}{2}, \tag{2.1}$$

neboť z věty o spojitosti míry máme:

$$\mu(F^{-1}((-\infty,\lambda_1)) = \lim_{\lambda\to\lambda_{1\_}} \mu(F^{-1}((-\infty,\lambda))$$

Pro každé $\lambda < \lambda_1$. platí $\lambda \in S_1$, a tedy $\mu(F^{-1}((-\infty,\lambda)) \leq \frac{b-a}{2}$. Limitní přechod $\lambda \to \lambda_{1\_}$ pak tuto nerovnost zachová. Druhá nerovnost v (2.1) se ukáže analogicky. Předpokládejme, že obě nerovnosti (2.1) jsou ostré (nastane-li v jednom případě rovnost, pak je ihned vidět, že λ_1 je medián F). Protože funkce

$$h(t) := \mu([a,t] \cap F^{-1}(\{\lambda_1\}))$$

je spojitá na intervalu $[a,b]$, podle věty o nabývání mezihodnot[2] najdeme $t_0 \in [a,b]$ takové, že

$$h(t_0) = \mu([a,t_0] \cap F^{-1}(\{\lambda_1\})) = \frac{b-a}{2} - \mu(F^{-1}(-\infty, \lambda_1)).$$

V takovém případě označme

$$A := [a,t_0] \cap F^{-1}(\{\lambda_1\}),$$

$$B := (t_0, b] \cap F^{-1}(\{\lambda_1\}).$$

Množinu $F^{-1}(\{\lambda_1\})$ lze tedy rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny A, B tak, že

$$F^{-1}(\{\lambda_1\}) = A \cup B$$

a zároveň

$$\mu(A \cup F^{-1}(-\infty, \lambda_1)) = \frac{b-a}{2},$$

$$\mu(B \cup F^{-1}((\lambda_1, +\infty))) = \frac{b-a}{2},$$

přičemž platí

$$\forall x \in A \cup F^{-1}((-\infty, \lambda_1)) : \quad F(x) \leq \lambda_1,$$

$$\forall x \in B \cup F^{-1}((\lambda_1, +\infty)) : \quad F(x) \geq \lambda_1.$$

Tedy λ_1 je medián funkce F.

□

Poznámka. Medián nemusí být určen jednoznačně.

Příklad 2.1.5. Mediánem funkce $F : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

může být jakékoliv číslo z intervalu [0,1]. Množina M nechť je interval $[0, 1)$. Potom pro libovolné $\lambda \in [0,1]$ platí, že $F \leq \lambda$ na M a $F \geq \lambda$ na $[0, 2] \setminus M$.

[2] Je-li $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ **spojitá** funkce, pak na $[a,b]$ nabývá všech hodnot mezi $F(a)$ a $F(b)$.

Tvrzení 2.1.6 (Jednoznačnost mediánu). *Medián **spojité** funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ je určen jednoznačně.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existují dva různé mediány λ_1, λ_2 takové, že

$$\lambda_1 < \lambda_2.$$

K nim přísluší z definice mediánu měřitelné množiny $M_1, M_2 \subset [a,b]$, které mají míru $\frac{b-a}{2}$ a platí, že

$$\forall x \in M_1 : F(x) \leq \lambda_1 \quad \wedge \quad \forall x \in [a, b] \setminus M_1 : F(x) \geq \lambda_1$$

$$\forall x \in M_2 : F(x) \leq \lambda_2 \quad \wedge \quad \forall x \in [a, b] \setminus M_2 : F(x) \geq \lambda_2.$$

S využitím těchto vlastností dostáváme:

$$\frac{b-a}{2} = \mu(M_2) \geq \mu(F^{-1}((-\infty,\lambda_2))) \geq \mu(M_1) + \mu(F^{-1}((\lambda_1,\lambda_2))) =$$

$$= \frac{b-a}{2} + \mu(F^{-1}((\lambda_1,\lambda_2))).$$

Z toho plyne, že

$$\mu(F^{-1}((\lambda_1, \lambda_2))) = 0.$$

Vzor otevřeného intervalu (λ_1, λ_2) při spojitém zobrazení F musí být otevřená množina. Z toho plyne, že $F^{-1}((\lambda_1, \lambda_2))$ je otevřená množina nulové míry, tedy musí to být prázdná množina. Tedy pro obor hodnot funkce F musí platit

$$H_F \subset [0, \lambda_1] \cup [\lambda_2, \infty].$$

Protože obraz intervalu $[a,b]$ při spojitém zobrazení F musí být interval, dostáváme, že nutně $H_F \subset [0, \lambda_1]$ nebo $H_F \subset [\lambda_2, \infty]$. Ani jedna z těchto možností ale nemůže nastat, neboť v prvním případě by $\forall x \in [a,b] : F(x) \leq \lambda_1$, tedy λ_2 nemůže být mediánem funkce F; a ve druhém případě by $\forall x \in [a,b] : F(x) \geq \lambda_2$, tedy λ_1 nemůže být mediánem funkce F. Tím získáváme spor s naším předpokladem. □

Příklad 2.1.7. Medián funkce $\sin x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ je roven 0.

Příklad 2.1.8. Medián funkce $\sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ je roven $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Měřitelnou množinou M, jejíž Lebesgueova míra je rovna polovině délky intervalu $[0, \pi]$, je sjednocení intervalů $M = [0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4},\pi]$, přičemž

$$\forall x \in M : \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] : \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Následující věta je i s důkazem převzata z [3, Proposition III.6].

Tvrzení 2.1.9 (Vztah oscilace a mediánu). *Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$ je medián funkce F na intervalu $[a, b]$ a $p \in [1, \infty] \cup \{C\}$. Potom*

$$\operatorname{osc}_p(F, [a, b]) \leq (b-a)^{-\frac{1}{p}} \, ||F - \lambda||_p \leq 2^{1-\frac{1}{p}} \operatorname{osc}_p(F, [a, b])$$

Speciálně pro $p = 1$ dostáváme

$$\operatorname{osc}_1(F, [a, b]) = (b-a)^{-1} \, ||F - \lambda||_1.$$

Poznámka. Určit medián funkce může být jednodušší úkon než určit její oscilaci pro dané $p \in [1, \infty]$. V situaci, kdy známe medián funkce a neznáme její oscilaci, můžeme využít odhadu

$$2^{-1+\frac{1}{p}}\, ||F - \lambda||_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \operatorname{osc}_p(F, [a,b]) \leq ||F - \lambda||_p.$$

Důkaz. První nerovnost je zřejmá a plyne z definice infima, neboť jakékoliv číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ splňuje

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F - c||_p \leq ||F - \lambda||_p.$$

Dokažme druhou nerovnost. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\lambda = 0$. (pokud by byl medián nenulový, přičteme k funkci $-\lambda$ a nezmění to hodnotu oscilací). Nechť $M_+ \subset [a,b]$ je měřitelná množina taková, že $\mu(M_+) = \frac{1}{2}(b-a)$ a zároveň

$$F \geq 0 \text{ na } M_+ \quad \wedge \quad F \leq 0 \text{ na } [a,b] \setminus M_+.$$

Označme $M_- := [a,b] \setminus M_+$. Zvolme $c \geq 0$. Protože funkce $t \mapsto |t|^p$ je pro $p \geq 1$ konvexní, získáváme následující odhady

$$\forall x \in M_+ : |F(x)|^p = |F(x) - c + c|^p = 2^p \left| \frac{F(x)-c}{2} + \frac{c}{2} \right|^p \leq$$

$$\leq 2^p \Big(\frac{1}{2}|F(x) - c|^p + \frac{1}{2}c^p \Big) = 2^{p-1}(|F(x) - c|^p + c^p).$$

Pro libovolná čísla $A, B \in \mathbb{R}^+$ a $p \in [1, \infty)$ platí odhad

$$(A+B)^p \geq A^p + B^p,$$

neboť $f(x) = x^p$ je konvexní funkce (pro $p \geq 1$) splňující $f(0) = 0$ a tedy je tzv. superaditivní, to znamená, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí: $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$. Proto

$$|c + |F(x)||^p \geq c^p + |F(x)|^p.$$

Z toho získáváme odhad

$$\forall x \in M_- : \quad |F(x)|^p \leq |c + |F(x)||^p - c^p \leq 2^{p-1}(|c - F(x)|^p - c^p).$$

Integrací přes $[a,b]$ dostaneme

$$\int_a^b |F(x)|^p \, dx = \int_{M_+} |F(x)|^p \, dx + \int_{M_-} |F(x)|^p \, dx \leq$$

$$\leq 2^{p-1} \Big(\int_{M_+} (|F(x) - c|^p + c^p) dx + \int_{M_-} (|F(x) - c|^p - c^p) dx \Big)$$

$$= 2^{p-1} \Big(\int_{M_+} (|F(x) - c|^p) dx + c^p \mu(M_+) + \int_{M_-} (|F(x) - c|^p) dx - c^p \mu(M_-) \Big) =$$

$$= 2^{p-1} \int_a^b |F(x) - c|^p dx,$$

protože množiny M_+ a M_- mají stejnou míru. Tedy

$$\forall c \geq 0 : \int_a^b |F(x)|^p \, dx \leq 2^{p-1} \int_a^b |F(x) - c|^p dx. \tag{2.2}$$

Protože nerovnost (2.2) platí pro každou funkci F, která má nulový medián, můžeme místo ní uvažovat funkci $-F$ a tedy získáme odhad

$$\forall c \geq 0: \int_a^b |F(x)|^p \, dx \leq 2^{p-1} \int_a^b |-F(x)-c|^p dx = 2^{p-1} \int_a^b |F(x)+c|^p dx. \quad (2.3)$$

Z odhadů (2.2) a (2.3) tedy plyne:

$$\forall c \in \mathbb{R}: \int_a^b |F(x)|^p \, dx \leq 2^{p-1} \int_a^b |F(x)-c|^p dx.$$

Proto

$$||F||_p^p \leq 2^{p-1} \left(\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F-c||_p \right)^p$$

Protože funkce $t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$ je pro $p > 1$ rostoucí, můžeme obě strany nerovnice umocnit na $\frac{1}{p}$ a nerovnost se zachová. Tedy

$$||F||_p \leq 2^{\frac{p-1}{p}} \inf_{c \in \mathbb{R}} ||F-c||_p = 2^{\frac{p-1}{p}} (b-a)^{\frac{1}{p}} \operatorname{osc}_p(F, [a,b]).$$

□

2.2 Vlastnosti oscilace

Chceme-li počítat oscilaci nějaké měřitelné funkce $F \in L^p$ na omezeném intervalu, nabízí se otázka, jak pro dané $p \in [1, \infty]$ volit konstantu $c \in \mathbb{R}$, aby norma

$$||F(x)-c||_p$$

byla minimální. Pro $p = 1$ již známe odpověď - z tvrzení 2.1.9. víme, že pro $p = 1$ je tou správnou konstantou medián; ten však nemusí být určen jednoznačně, tudíž ani tato volba nemusí být jednoznačná. Nyní ukážeme, že pro $p = 2$ je tou správnou konstantou integrální průměr funkce F na intervalu $[a, b]$, tedy číslo

$$\frac{\int_a^b F(x) \, dx}{b-a}$$

a pro $p = \infty$ je tou správnou konstantou aritmetický průměr esenciálního suprema a esenciálního infima funkce F, tedy číslo

$$\frac{\operatorname{ess\,sup} F(x) + \operatorname{ess\,inf} F(x)}{2}.$$

Je zřejmé, že tyto konstanty budou v případě $p = 2$ a $p = \infty$ určeny jednoznačně. Ukážeme navíc, že pro každé $p \in [1, \infty]$ bude tato hledaná konstanta vždy číslo z oboru hodnot funkce F, dokonce z „esenciálního“ oboru hodnot, tedy číslo c splňující

$$\operatorname{ess\,inf} F(x) \leq c \leq \operatorname{ess\,sup} F(x).$$

Tvrzení 2.2.1. *Nechť $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je* ***esenciálně omezená***[3] *měřitelná funkce. Označme*

$$A := \operatorname{ess\,inf}_{x\in[a,b]} F(x) \quad a \quad B := \operatorname{ess\,sup}_{x\in[a,b]} F(x)$$

Pak pro každé $p \in [1, \infty]$ platí

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} ||F(x) - c||_p = \inf_{c\in[A,B]} ||F(x) - c||_p$$

a pro $p = \infty$ platí

$$\operatorname{osc}_\infty(F,\, [a, b]) = \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F(x) - c||_\infty = \left|\left|F(x) - \frac{A + B}{2}\right|\right|_\infty = \frac{B - A}{2}.$$

Důkaz. Dokažme nejprve první část tvrzení, tedy, že hledaná konstanta c bude vždy ležet v intervalu $[A, B]$. Chceme tedy ukázat, že

$$\forall c \in (-\infty, A) \cup (B, \infty) : \inf_{z\in[A,B]} ||F(x) - z||_p \leq ||F(x) - c||_p.$$

Je-li $c \in (B, \infty)$, potom pro skoro všechna $x \in [a, b]$ platí:

$$|F(x) - c| = c - F(x) > B - F(x) = |F(x) - B|.$$

Protože funkce $t \mapsto t^p$ je pro $p \in [1, \infty)$ rostoucí, platí implikace

$$x > y \implies x^p > y^p.$$

Proto platí skoro všude:

$$|F(x) - c|^p > |F(x) - B|^p.$$

Z monotonie integrálu dostaneme

$$\int_a^b |F(x) - c|^p \, dx \geq \int_a^b |F(x) - B|^p \, dx.$$

Protože funkce $t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$ je pro $p \in [1, \infty)$ rostoucí, získáváme

$$\left(\int_a^b |F(x) - c|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_a^b |F(x) - B|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tedy pro všechna $c \in (B, \infty)$ platí:

$$||F(x) - c||_p \geq ||F(x) - B||_p.$$

Tím pádem

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} ||F(x) - c||_p = \inf_{c\leq B} ||F(x) - c||_p.$$

[3]Říkáme, že funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **esenciálně omezená**, pokud

$$\operatorname{ess\,sup} |F(x)| < +\infty.$$

Je-li $c \in (-\infty, A)$, postupujeme analogicky. Pro skoro všechna $x \in [a, b]$ platí:

$$|F(x) - c| = F(x) - c > F(x) - A = |F(x) - A|.$$

Tedy

$$||F(x) - c||_p \geq ||F(x) - A||_p.$$

V případě $p = \infty$ platí pro $c > B$ nerovnost

$$||F(x) - c||_\infty \geq ||F(x) - B||_\infty$$

a pro $c < A$ platí nerovnost

$$||F(x) - c||_\infty \geq ||F(x) - A||_\infty.$$

Celkem tedy získáváme

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F(x) - c||_p = \inf_{c \in [A,B]} ||F(x) - c||_p.$$

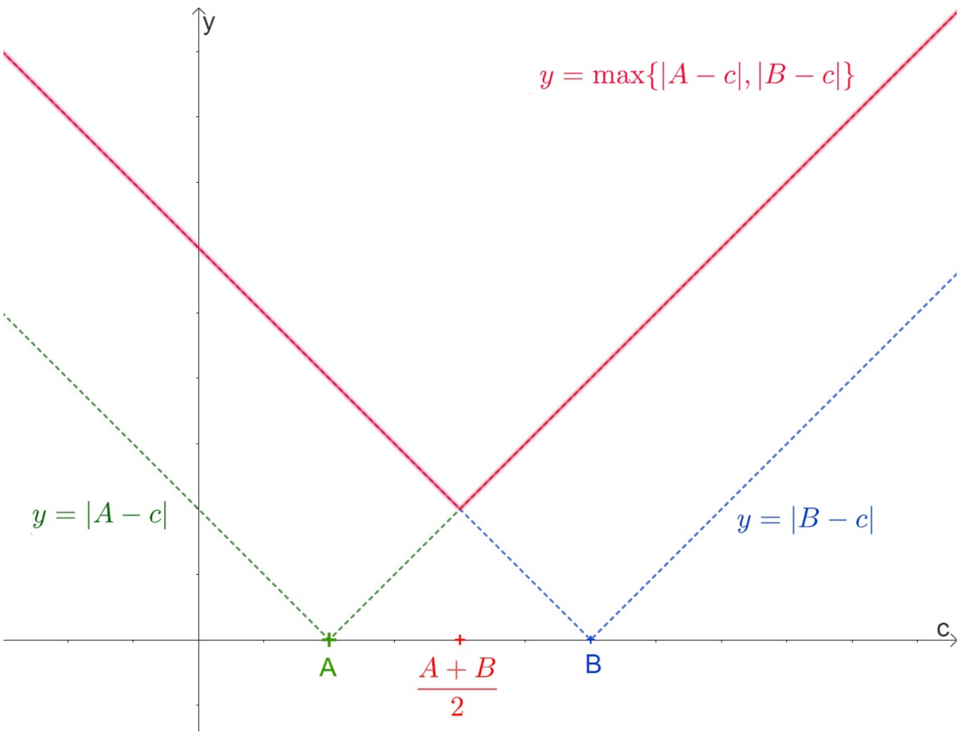
Dokažme nyní druhou část tvrzení, tedy, že v případě $p = \infty$ je hledaná konstanta rovna aritmetickému průměru esenciálního suprema a esenciálního infima funkce F. Je-li $c \in \mathbb{R}$ libovolná konstanta, pak

$$\operatorname{ess\,inf}(F(x) - c) = A - c$$

$$\operatorname{ess\,sup}(F(x) - c) = B - c$$

Proto

$$||F(x) - c||_\infty = \max\{|A - c|, |B - c|\}.$$



Funkce $y = \max\{|A - c|; |B - c|\}$ nabývá minima pro $c = \frac{A+B}{2}$ a tedy platí

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F(x) - c||_\infty = \max\left\{\left|A - \frac{A+B}{2}\right|, \left|B - \frac{A+B}{2}\right|\right\} = \frac{B-A}{2}.$$

$\square$

Tvrzení 2.2.2. *Nechť I je omezený interval a $F \in L^2(I)$. Pak*

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} ||F(x) - c||_2 = \left|\left|F(x) - \frac{\int_I F(t)\,dt}{\mu(I)}\right|\right|_2.$$

Důkaz. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Předpokládáme, že $F \in L^2(I)$ a interval I je omezený, proto také $F \in L^1(I)$. Oba integrály $\int_I F(x)\,dx$ a $\int_I F^2(x)\,dx$ tedy musí existovat a být konečné. Využitím linearity integrálu tedy dostáváme:

$$||F(x) - c||_2^2 = \int_I \big(F(x) - c\big)^2\,dx = \int_I \big(F^2(x) - 2cF(x) + c^2\big)\,dx =$$
$$= \int_I F^2(x)\,dx - 2c\int_I F(x)\,dx + c^2\mu(I).$$

Toto je kvadratická funkce v proměnné c s kladným vedoucím koeficientem a tedy musí mít minimum. Označme ji $g(c)$. Její derivace je

$$g'(c) = -2\int_I F(x)\,dx + 2c\,\mu(I)$$

a položíme-li ji rovnu nule, získáme

$$g'(c) = 0 \iff c = \frac{\int_I F(x)\,dx}{\mu(I)}.$$

Toto je tedy její stacionární bod a funkce g v něm nabývá vždy minima. Tím pádem jde také o minimum funkce $||F(x) - c||_2$.

□

Příklad 2.2.3. Uvažujme funkci $F(x) = \sin x$ na intervalu $[0, 2\pi]$. Medián této funkce je 0, a stejně tak i její integrální průměr a aritmetický průměr jejího suprema a infima. Proto pro $p = 1$, $p = 2$ a $p = \infty$ platí:

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} ||\sin x - c||_p = \Big|\Big|\sin x - 0\Big|\Big|_p.$$

V příkladu 2.3.2 ukážeme, že pro všechna $p \in [1, \infty]$ nastává infimum pro $c = 0$.

Příklad 2.2.4. Uvažujme funkci $F(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$.

- Medián této funkce je $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (příklad 2.1.8), proto pro $p = 1$ je

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} ||\sin x - c||_1 = \left|\left|\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right|_1$$

- Aritmetický průměr jejího suprema a infima je $\frac{1}{2}$, proto pro $p = \infty$ je

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} ||\sin x - c||_\infty = \left|\left|\sin x - \frac{1}{2}\right|\right|_\infty$$

- Integrální průměr této funkce je

$$\frac{\int_0^\pi \sin x\,dx}{\pi - 0} = \frac{[-\cos x]_0^\pi}{\pi} = \frac{-\cos\pi - (-\cos 0)}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

  Proto pro $p = 2$ je

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} ||\sin x - c||_2 = \Big|\Big|\sin x - \frac{2}{\pi}\Big|\Big|_2.$$

Povšimněme si, že čísla $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{2}{\pi}$, $\frac{1}{2}$ jsou vždy z oboru hodnot funkce F, tedy z intervalu [0,1].

Příklad 2.2.5. Uvažujme funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1], \\ 1 & x \in (1,2]. \end{cases}$$

Medián této funkce není určen jednoznačně a může jím být jakékoliv číslo z intervalu [0,1], tedy pro $p = 1$ platí pro libovolné $\lambda \in$ [0,1]:

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} ||F(x) - c||_1 = \Big|\Big|F(x) - \lambda\Big|\Big|_1.$$

Ukažme, že pro $p \in (1,\infty]$ je daná konstanta určena jednoznačně a platí

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} ||F(x) - c||_p = \Big|\Big|F(x) - \frac{1}{2}\Big|\Big|_p.$$

Víme, že hledaná konstanta c, která minimalizuje normu $||F(x) - c||_p$, musí být číslo z oboru hodnot funkce F, tedy z intervalu [0,1]. Můžeme se při integraci tedy zbavit absolutních hodnot a platí:

$$||F(x) - c||_p^p = \int_0^2 \big|F(x) - c\big|^p\,dx = \int_0^1 c^p\,dx + \int_1^2 \big|1 - c\big|^p\,dx = c^p + \big(1 - c\big)^p$$

Označme $g(c) := c^p + \big(1 - c\big)^p$ a hledejme minimum této funkce. Její derivace je

$$g'(c) = p\,c^{p-1} - p\,\big(1 - c\big)^{p-1}$$

$$g'(c) = 0 \iff c^{p-1} = \big(1 - c\big)^{p-1} \iff c = \frac{1}{2}$$

Tedy stacionární bod funkce g je $\frac{1}{2}$. Ze znaménka druhé derivace určeme typ extrému.

$$g''(c) = p\,(p-1)\,c^{p-2} + p\,(p-1)\,\big(1 - c\big)^{p-2}$$

$$g''\Big(\frac{1}{2}\Big) = p\,(p-1)\,\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-2} + p\,(p-1)\,\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-2} > 0$$

Pro každé $p \in (1,\infty)$ je $g''\big(\frac{1}{2}\big) > 0$, proto funkce g nabývá v tomto stacionárním bodě svého minima.

Následující příklad 2.2.6 zobecňuje příklad 2.2.5.

Příklad 2.2.6. Uvažujme funkci

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \in J \\ 0 & x \in I \setminus J, \end{cases}$$

kde $I \subset \mathbb{R}$ je omezený interval a $J \subset I$ jeho podinterval.

Pro dané $p \in [1, \infty]$ ukážeme, že existuje konstanta $c(p)$ splňující

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F(x) - c||_p = \big|\big|F(x) - c(p)\big|\big|_p \tag{2.4}$$

a navíc funkce $p \mapsto c(p)$ je

- rostoucí pro $p \in [1, \infty]$ v případě, že $\mu(I \setminus J) > \mu(J)$,
- klesající pro $p \in [1, \infty]$ v případě, že $\mu(I \setminus J) < \mu(J)$,
- konstantní pro $p \in (1, \infty]$ v případě, že $\mu(I \setminus J) = \mu(J)$, přičemž pro $p = 1$ není hodnota této konstanty určena jednoznačně.

Hledaná konstanta c, která minimalizuje normu $||F(x) - c||_p$ musí být číslo z oboru hodnot funkce F, tedy z intervalu [0,1]. Můžeme se tedy při integraci zbavit absolutních hodnot a dostáváme

$$||F(x) - c||_p^p = \int_I \big|F(x) - c\big|^p \, dx = \int_J \big|1 - c\big|^p \, dx + \int_{I \setminus J} |c|^p \, dx =$$

$$= \mu(J) \big(1 - c\big)^p + \mu(I \setminus J) \, c^p =: g(c)$$

Hledejme minimum této funkce g. Její derivace je

$$g'(c) = -\mu(J) \, p \big(1 - c\big)^{p-1} + \mu(I \setminus J) \, p \, c^{p-1}.$$

Tedy platí

$$g'(c) = 0 \iff \frac{\big(1 - c\big)^{p-1}}{c^{p-1}} = \frac{\mu(I \setminus J)}{\mu(J)} \iff c = \frac{1}{\big(\frac{\mu(I \setminus J)}{\mu(J)}\big)^{\frac{1}{p-1}} + 1} \in (0, 1).$$

Snadno se přesvědčíme, že v tomto stacionárním bodě skutečně funkce $g(c)$ nabývá svého minima. Stačí např. nahlédnout, že

$$g'(0) = -\mu(J) < 0 \implies g \text{ je klesající na intervalu } \left[0, \frac{1}{\big(\frac{\mu(I \setminus J)}{\mu(J)}\big)^{\frac{1}{p-1}} + 1}\right],$$

$$g'(1) = \mu(I \setminus J) > 0 \implies g \text{ je rostoucí na intervalu } \left[\frac{1}{\big(\frac{\mu(I \setminus J)}{\mu(J)}\big)^{\frac{1}{p-1}} + 1}, \ 1\right],$$

neboť g' je spojitá, tudíž mění znaménko jen ve výše uvedeném bodě c. Jde tedy o minimum funkce g a tím pádem i o minimum funkce $(g(c))^{\frac{1}{p}}$.

Tedy funkce $c(p)$ definovaná vztahem (2.4) má pro $p \in (1, \infty)$ předpis

$$c(p) = \frac{1}{\left(\frac{\mu(I \setminus J)}{\mu(J)}\right)^{\frac{1}{p-1}} + 1}$$

a pro $p = 1$ je její hodnotou medián funkce F na intervalu I, tedy

$$c(1) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } \mu(J) > \mu(I \setminus J), \\ 0 & \text{je-li } \mu(J) < \mu(I \setminus J). \end{cases}$$

V případě, že $\mu(I \setminus J) = \mu(J)$, není medián funkce F určen jednoznačně a může jím být libovolné číslo z intervalu $[0, 1]$. V tomto případě je funkce $c(p)$ konstantní na intervalu $(1, \infty)$ a hodnota této konstanty je $\frac{1}{2}$.

Všimněme si, že v případě, kdy $\mu(J) > \mu(I \setminus J)$, je

$$\lim_{p \to 1_+} c(p) = \lim_{p \to 1_+} \frac{1}{\left(\frac{\mu(I \setminus J)}{\mu(J)}\right)^{\frac{1}{p-1}} + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

a v případě, kdy $\mu(J) < \mu(I \setminus J)$ je

$$\lim_{p \to 1_+} c(p) = \lim_{p \to 1_+} \frac{1}{\left(\frac{\mu(I \setminus J)}{\mu(J)}\right)^{\frac{1}{p-1}} + 1} = \frac{1}{\infty + 1} = 0.$$

V obou těchto případech je tedy funkce $c(p)$ zprava spojitá v bodě $p = 1$.

Aritmetický průměr esenciálního suprema a esenciálního infima funkce F je ve všech případech stejný, tedy $c(\infty) = \frac{1}{2}$. Povšimněme si, že

$$\lim_{p \to +\infty} c(p) = \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{\mu(I \setminus J)}{\mu(J)}\right)^{\frac{1}{p-1}} + 1} = \frac{1}{\left(\frac{\mu(I \setminus J)}{\mu(J)}\right)^{0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Považujme na chvíli $a = \frac{\mu(I \setminus J)}{\mu(J)}$ za konstantu a vypočítejme derivaci funkce $c(p)$:

$$c'(p) = \left(\left(a^{\frac{1}{p-1}} + 1\right)^{-1}\right)' = (-1)\left(a^{\frac{1}{p-1}} + 1\right)^{-2} \cdot a^{\frac{1}{p-1}} \ln a \cdot (-1)\,(p-1)^{-2} =$$

$$= \ln a \cdot \frac{a^{\frac{1}{p-1}}}{\left(a^{\frac{1}{p-1}} + 1\right)^{2} (p-1)^2}$$

O znaménku derivace rozhoduje pouze $\ln a$ (ostatní součinitelé mají vždy kladné znaménko). Tedy platí:

- Je-li $a > 1$, pak $c'(p) > 0$ a $c(p)$ je rostoucí (případ $\mu(I \setminus J) > \mu(J)$).
- Je-li $0 < a < 1$, pak $c'(p) < 0$ a $c(p)$ je klesající (případ $\mu(I \setminus J) < \mu(J)$).
- Je-li $a = 1$, pak $c'(p) = 0$ a $c(p)$ je konstantní (případ $\mu(I \setminus J) = \mu(J)$).

Stojí za povšimnutí, že

$$\lim_{p \to 1_+} c'(p) = 0,$$

tedy jednostranná tečna v bodě $p = 1$ má nulovou směrnici. Přesvědčme se o tom výpočtem:

$$\lim_{p \to 1_+} c'(p) = \lim_{p \to 1_+} \ln a \cdot \frac{a^{\frac{1}{p-1}}}{\left(a^{\frac{1}{p-1}} + 1\right)^2 (p-1)^2} = \ln a \lim_{y \to +\infty} \frac{a^y y^2}{\left(a^y + 1\right)^2}$$

a počítejme tuto limitu nejprve pro $a > 1$:

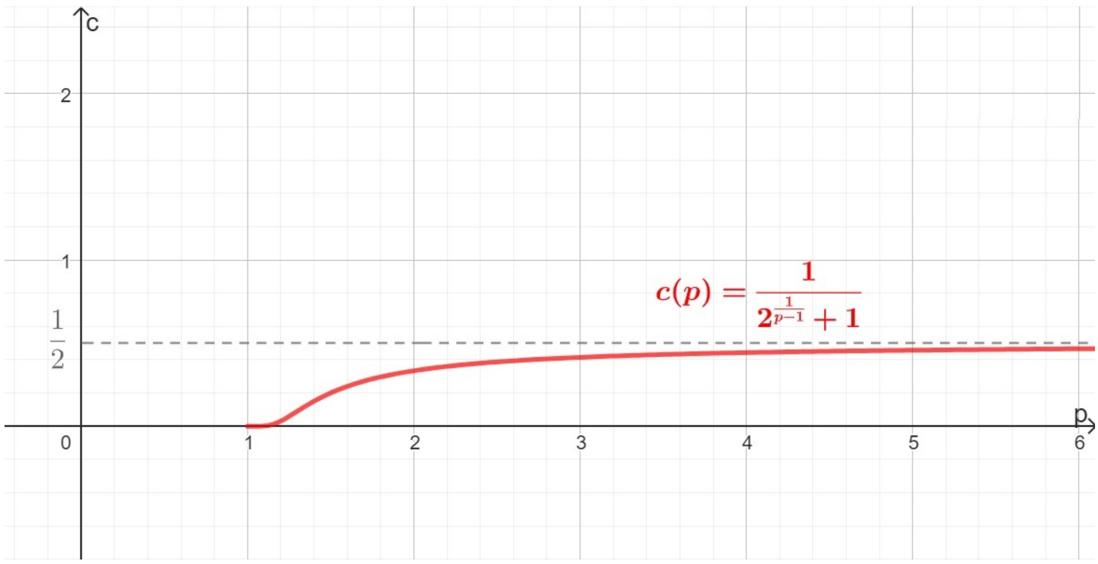
$$\lim_{y \to +\infty} \frac{a^y y^2}{\left(a^y + 1\right)^2} = \lim_{y \to +\infty} \frac{a^y y^2}{(a^y)^2 \left(1 + a^{-y}\right)^2} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2}{a^y \left(1 + a^{-y}\right)^2} =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2}{a^y} \cdot \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\left(1 + a^{-y}\right)^2} = 0 \cdot \frac{1}{\left(1 + 0\right)^2} = 0$$

Pro $0 < a < 1$ použijme větu o limitě součinu a poté zaveďme substituci $a = \frac{1}{b}$:

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{a^y y^2}{\left(a^y + 1\right)^2} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\left(a^y + 1\right)^2} \cdot \lim_{y \to +\infty} a^y y^2 = \frac{1}{\left(0 + 1\right)^2} \cdot \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2}{b^y} = 0,$$

neboť $b \in (1, \infty)$ a exponenciála b^y roste rychleji než polynom.



Obrázek 2.1: Graf funkce $c(p)$ v případě, kdy $\frac{\mu(I \setminus J)}{\mu(J)} = 2$

Všimněme si, že pro $p = 2$ je danou konstantou $c(2)$ skutečně integrální průměr funkce F na intervalu I:

$$c(2) = \frac{1}{\frac{\mu(I \setminus J)}{\mu(J)} + 1} = \frac{\mu(J)}{\mu(I \setminus J) + \mu(J)} = \frac{\mu(J)}{\mu(I)} = \frac{\int_I F}{\mu(I)}.$$

Poznámka. Pro danou měřitelnou funkci $F : I \to \mathbb{R}$ na omezeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a dané $p \in [1, \infty]$ označme symbolem $c(p)$ konstantu splňující

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F(x) - c||_p = \big|\big|F(x) - c(p)\big|\big|_p. \tag{2.5}$$

Viděli jsme, že hodnota $c(p)$ nemusí být vždy určena jednoznačně. Následující příklady ilustrují další zajímavý jev: I když je pro každé p hodnota $c(p)$ určena jednoznačně, funkce $p \mapsto c(p)$ obecně **nemusí být monotónní**.

Příklad 2.2.7. Uvažujme funkci

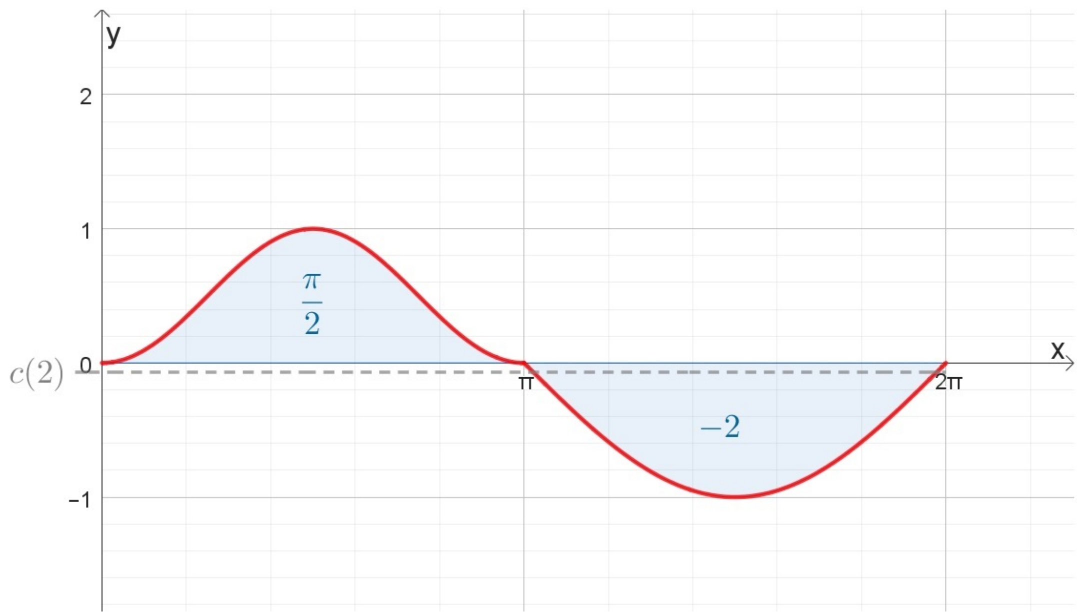
$$F(x) = \begin{cases} \sin^2 x & x \in [0, \pi] \\ \sin x & x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Medián této funkce je jednoznačně určen a je roven 0, stejně tak i aritmetický průměr jejího suprema a infima, zatímco její integrální průměr je záporný.

$$c(2) = \frac{\int_0^{2\pi} F(x)\,dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx + \Big[-\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}\Big) = \frac{1}{2\pi}\Big(\Big[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\Big]_0^{\pi} - 2\Big) = \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - 2\Big)$$

V tomto případě je tedy monotonie $c(p)$ porušena.

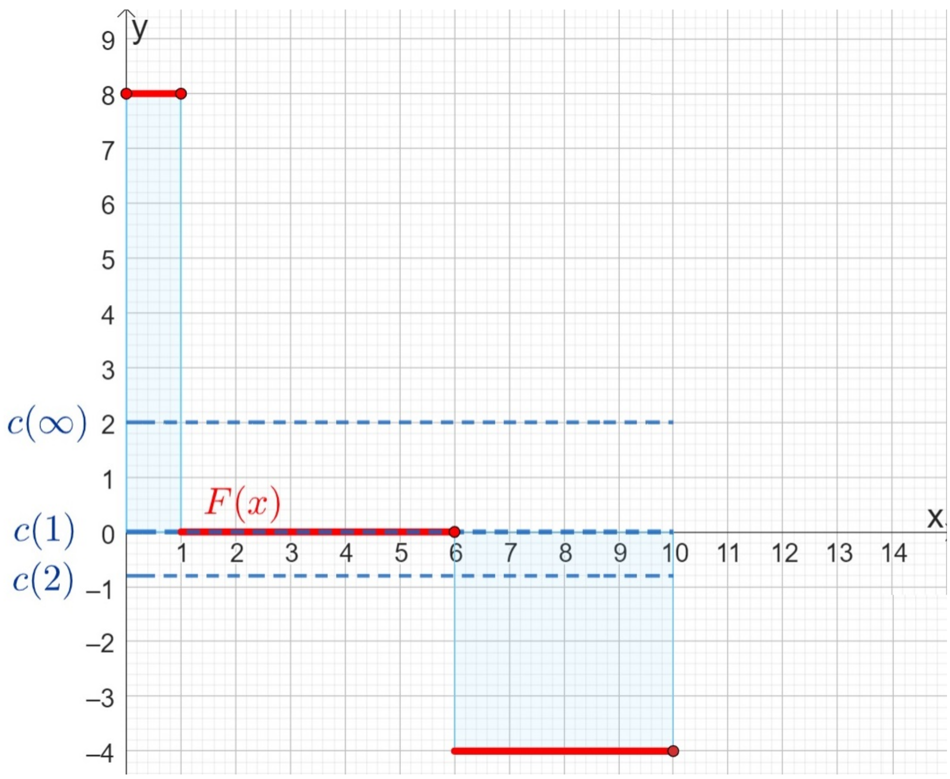


Příklad 2.2.8. Uvažujme funkci

$$F(x) = \begin{cases} 8 & x \in [0,1], \\ 0 & x \in (1,6], \\ -4 & x \in (6,10]. \end{cases}$$

- Medián této funkce je určen jednoznačně a je roven 0, neboť např. pro $x \in [0,5]$ je $F(x) \geq 0$ a pro $x \in (5,10]$ je $F(x) \leq 0$. Tedy $c(1) = 0$.
- Aritmetický průměr jejího suprema a infima je $\frac{8-4}{2} = \frac{4}{2} = 2$, tj. $c(\infty) = 2$.
- Její integrální průměr je

$$\frac{\int_0^{10} F(x)\,dx}{10} = \frac{\int_0^1 8\,dx + \int_6^{10}(-4)\,dx}{10} = \frac{8 + (-16)}{10} = -\frac{8}{10} = c(2).$$



Ukážeme, že pro $p \in (1,\infty)$ existuje konstanta $c(p) \in [-4,8]$ splňující (2.5) a je určena jednoznačně. Nechť $p > 1$ je dáno. Položme

$$g(c) := ||F(x) - c||_p^p = \int_0^{10} \left|F(x) - c\right|^p dx =$$

$$= \int_0^1 \left|8 - c\right|^p dx + \int_1^6 |0 - c|^p\,dx + \int_6^{10} |-4 - c|^p\,dx =$$

$$= (8-c)^p + 5|c|^p + 4(4+c)^p.$$

To je spojitá funkce na intervalu $[-4,8]$ a tedy musí zde nabývat svého minima.

Ukažme, že funkce g má právě jedno minimum v intervalu $[-4, 8]$, a to nutně ve vnitřním bodě tohoto intervalu. Spočtěme její první a druhou derivaci:

$$g'(c) = -p\,(8-c)^{p-1} + 5p\,|c|^{p-1}\operatorname{sgn} c + 4p\,(4+c)^{p-1},$$

$$g''(c) = p\,(p-1)\,(8-c)^{p-2} + 5p\,(p-1)\,|c|^{p-2} + 4p\,(p-1)\,(4+c)^{p-2},\ c \neq 0.$$

Pro $p > 1$ platí, že

$$\lim_{c\to 0_+} g'(c) = \lim_{c\to 0_-} g'(c) = g'(0),$$

tedy g' spojitá v 0 a tudíž i na celém intervalu $[-4, 8]$.

Dále si všimněme, že $g'' > 0$ na $(-4, 0)$ i na $(0, 8)$, tedy funkce g' je na těchto intervalech rostoucí. Zároveň o funkci g' víme, že je spojitá na celém intervalu $[-4, 8]$, tudíž musí být rostoucí také na celém tomto intervalu. Protože

$$g'(-4) = -p\,12^{p-1} - 5p\,4^{p-1} < 0 \quad \text{a} \quad g'(8) = 5p\,8^{p-1} + 4p\,12^{p-1} > 0,$$

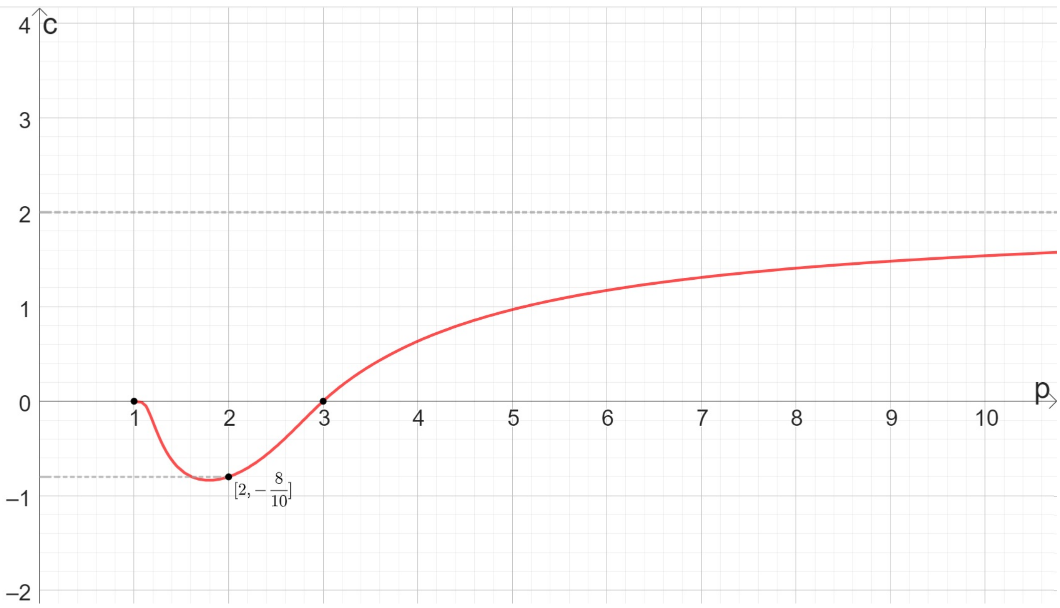
musí nutně existovat právě jeden bod $\xi_p \in (-4, 8)$ takový, že

$$g'(\xi_p) = 0.$$

Jde tedy o stacionární bod funkce g, ve kterém musí nabývat svého minima, neboť $g' < 0$ na $[-4, \xi_p)$, tudíž g je zde klesající, a $g' > 0$ na $(\xi_p, 10]$, tudíž g je zde rostoucí. Toto číslo ξ_p je zároveň hledanou konstantou $c(p)$ splňující (2.5) a současně je řešením rovnice $g'(c) = 0$, tedy rovnice

$$-(8-c)^{p-1} + 5|c|^{p-1}\operatorname{sgn} c + 4(4+c)^{p-1} = 0. \tag{2.6}$$

Ověřili jsme, že pro každé $p \in (1, \infty)$ má tato rovnice právě jedno řešení $c(p)$. Tedy konstanta $c(p)$ splňující podmínku (2.5) je určena jednoznačně. Rovnicí (2.6) je implicitně zadaná funkce $p \mapsto c(p)$ a tato funkce není monotónní.



Obrázek 2.2: Graf funkce $p \mapsto c(p)$ zadané implicitně rovnicí (2.6)

Můžeme si také povšimnout, že pokud dosadíme do rovnice (2.6) za $c = 0$, dostaneme rovnici $-8^{p-1} + 4 \cdot 4^{p-1} = 0$, jejímž řešením je $p = 3$. Tedy $c(3) = 0$.

Příklad 2.2.9. Uvažujme funkci

$$F(x) = \begin{cases} k \sin x & x \in [0, \pi], \\ \sin x & x \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$$

kde $k > 0$ je konstanta.

- Medián této funkce je vždy 0, nezávisle na čísle $k > 0$. Proto pro $p = 1$ je

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F(x) - c||_1 = ||F(x)||_1.$$

- Integrální průměr této funkce je

$$\frac{\int_0^{2\pi} F(x)\,dx}{2\pi - 0} = \frac{1}{2\pi}\Big(k \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\Big) = \frac{2k-2}{2\pi} = \frac{k-1}{\pi}.$$

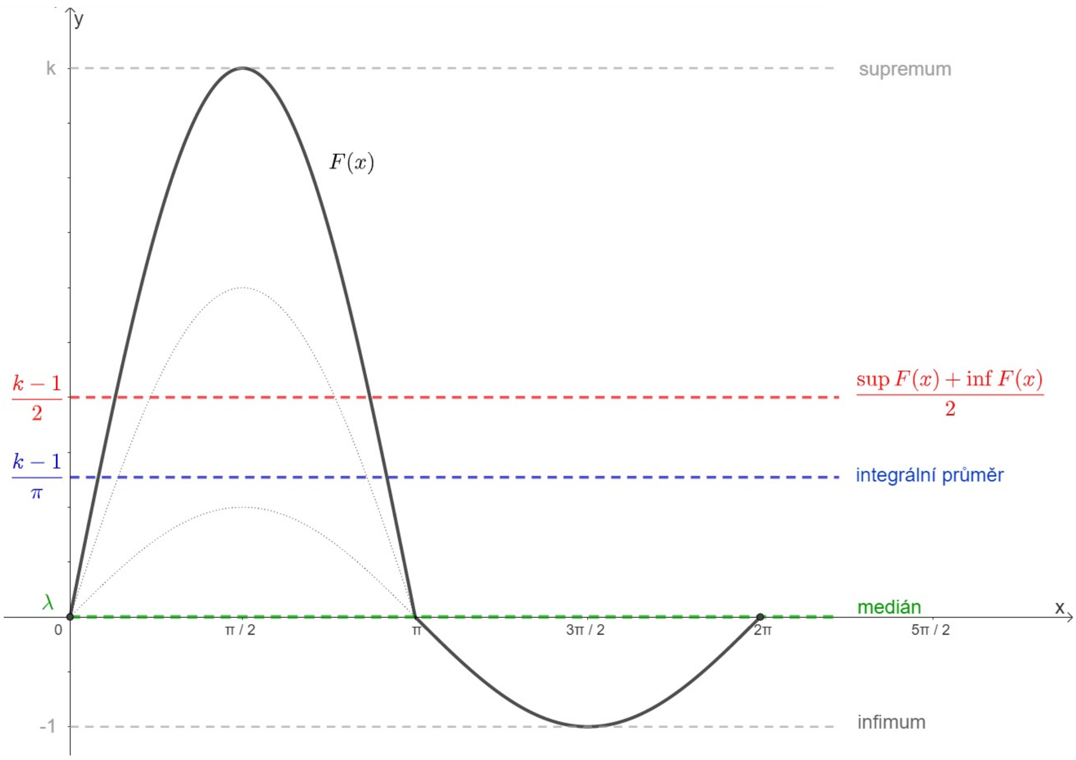
  Proto pro $p = 2$ je

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F(x) - c||_2 = \Big|\Big|F(x) - \frac{k-1}{\pi}\Big|\Big|_2.$$

- Aritmetický průměr jejího suprema a infima je $\frac{k-1}{2}$, proto pro $p = \infty$ je

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F(x) - c||_\infty = \Big|\Big|F(x) - \frac{k-1}{2}\Big|\Big|_\infty.$$

Povšimněme si, že se zvětšujícím se k bude medián pořád stejný, zatímco integrální průměr i aritmetický průměr suprema a infima se budou měnit.



Tvrzení 2.2.10. *Je-li F měřitelná funkce na intervalu I, pak*

$$\operatorname{osc}_\infty(F,\ I) \leq \operatorname{osc}_C(F,\ I).$$

*Je-li navíc funkce F **spojitá**, pak nastává rovnost.*

Důkaz.

$$\operatorname{osc}_\infty(F,\ I) = \frac{\operatorname{ess\,sup} F(x) - \operatorname{ess\,inf} F(x)}{2} \leq \frac{\sup F(x) - \inf F(x)}{2} = \operatorname{osc}_C(F,\ I)$$

Pokud je navíc funkce F **spojitá** na intervalu I, pak

$$\inf_{x\in I} F(x) = \operatorname{ess\,inf}_{x\in I} F(x) \quad \text{a} \quad \sup_{x\in I} F(x) = \operatorname{ess\,sup}_{x\in I} F(x),$$

tedy nastává rovnost oscilací.

□

Příklad 2.2.11. Uvažujme funkci $f : [-1{,}1] \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1{,}1] \setminus \{\frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}\}, \\ \frac{1}{x} & x \in \{\frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Tato funkce je nulová skoro všude, proto

$$\operatorname{osc}_\infty(f,\ [-1,1]) = \inf_{c\in\mathbb{R}} ||f(x) - c||_\infty = ||f(x)||_\infty = 0,$$

neboť množina těch x, pro která je tato funkce nenulová, má nulovou Lebesgueovu míru. Zatímco pro $p = C$ je

$$\operatorname{osc}_C(f,\ [-1,1]) = +\infty,$$

neboť pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$f\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2^k}} = 2^k,$$

a tedy

$$\operatorname{osc}_C(f,[-1{,}1]) \geq \frac{1}{2}\left|f\left(\frac{1}{2^k}\right) - f(0)\right| = 2^{k-1},$$

přičemž pravá strana roste nade všechny meze.

Tvrzení 2.2.12 (Trojúhelníková nerovnost pro oscilaci)**.** *Jsou-li F_1 a F_2 měřitelné funkce na intervalu $[a,b]$ a $p \in [1,\infty] \cup \{C\}$, potom*

$$\operatorname{osc}_p(F_1 + F_2,\, [a,b]) \leq \operatorname{osc}_p(F_1,\, [a,b]) + \operatorname{osc}_p(F_2,\, [a,b]).$$

Důkaz. Nechť $p \in [1,\infty]$. Přepišme oscilaci funkce $F_1 + F_2$ z definice:

$$\operatorname{osc}_p(F_1 + F_2,\, [a,b]) = (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c \in \mathbb{R}} ||F_1 + F_2 - c||_{L^p}.$$

Číslo c lze zapsat jako $c = c_1 + c_2$, přičemž

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F_1 + F_2 - c||_{L^p} = \inf_{c_1, c_2 \in \mathbb{R}} ||F_1 - c_1 + F_2 - c_2||_{L^p} \leq$$

$$\leq \inf_{c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \Big(||F_1 - c_1||_{L^p} + ||F_2 - c_2||_{L^p} \Big) =$$

$$= \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} \Big(||F_1 - c_1||_{L^p} \Big) + \inf_{c_2 \in \mathbb{R}} \Big(||F_2 - c_2||_{L^p} \Big).$$

V předposledním kroku jsme využili trojúhelníkovou nerovnost L^p normy a v posledním kroku jsme využili toho, že infimum součtu dvou funkcí přes různé proměnné je aditivní, tedy je rovno součtu jejich infim, tj.

$$\inf_{a,b}(f(a) + g(b)) = \inf_a f(a) + \inf_b g(b).$$

Dostáváme tedy

$$\operatorname{osc}_p(F_1 + F_2,\, [a,b]) \leq (b-a)^{-\frac{1}{p}} \Big(\inf_{c_1 \in \mathbb{R}} (||F_1 - c_1||_{L^p}) + \inf_{c_2 \in \mathbb{R}} (||F_2 - c_2||_{L^p}) \Big).$$

$$= \operatorname{osc}_p(F_1,\, [a,b]) + \operatorname{osc}_p(F_2,\, [a,b]).$$

Je-li $p = C$, potom

$$\operatorname{osc}_p(F_1 + F_2,\, [a,b]) = \frac{1}{2} \sup_{x,y \in [a,b]} \Big| (F_1 + F_2)(y) - (F_1 + F_2)(x) \Big| =$$

$$= \frac{1}{2} \sup_{x,y \in [a,b]} \Big| F_1(y) + F_2(y) - F_1(x) - F_2(x) \Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \sup_{x,y \in [a,b]} \Big| F_1(y) - F_1(x) \Big| + \frac{1}{2} \sup_{x,y \in [a,b]} \Big| F_2(y) - F_2(x) \Big| =$$

$$= \operatorname{osc}_p(F_1,\, [a,b]) + \operatorname{osc}_p(F_2,\, [a,b]).$$

□

Tvrzení 2.2.13. *Nechť $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce, pak*

$$H(p) := \operatorname{osc}_p(F,\,[a,b])$$

je ***neklesající*** *funkce na intervalu* $[1,\infty)$.

Důkaz. Chceme dokázat, že platí

$$\forall p,q \in [1,\infty) \quad p < q \implies H(p) \le H(q).$$

Připomeňme Hölderovu nerovnost[4], která říká, že pro čísla $p,\, q \in [1,\infty]$ splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a pro měřitelné funkce $f,g : X \to \mathbb{R}^*$, kde $X \subset \mathbb{R}$, platí:

$$||f\,g||_1 \le ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

Nyní použijeme Hölderovu nerovnost na funkce 1 a $|f|^p$ a sdružené exponenty $\frac{q}{q-p}$ a $\frac{q}{p}$, pro něž je součet jejich převrácených hodnot roven 1.

$$|||f|^p \cdot 1||_1 \le |||f|^p||_{\frac{q}{p}} \cdot ||1||_{\frac{q}{q-p}}.$$

To znamená

$$\int_X |f(x)|^p\,dx \le \Big(\int_X (|f(x)|^p)^{\frac{q}{p}}\,dx\Big)^{\frac{p}{q}} \cdot (\mu(X))^{\frac{q-p}{q}}.$$

Umocníme-li obě strany nerovnice na $\frac{1}{p}$, získáme

$$||f||_p \le ||f||_q \cdot (\mu(X))^{\frac{q-p}{pq}},$$

kde $\mu(X) = \mu([a,b]) = b-a$. Z toho dostáváme, že

$$\begin{aligned} H(p) = \operatorname{osc}_p(F,\,[a,b]) &= (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_p \\ &\le (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_q\,(b-a)^{\frac{q-p}{pq}} \\ &= (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_q\,(b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\ &= (b-a)^{-\frac{1}{q}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_q = \operatorname{osc}_q(F,\,[a,b]) = H(q). \end{aligned}$$

□

[4]Hölderova nerovnost je důsledek tzv. **Youngovy nerovnosti**, která říká, že pro libovolné $x \in [0,1]$ a pro všechna $a,b \in \mathbb{R}$ platí:

$$xa + (1-x)b \ge a^x b^{1-x}.$$

Speciálním případem Hölderovy nerovnosti ($p = q = 2$) je tzv. **Cauchy-Schwarzova nerovnost**, která říká, že v libovolném prostoru X se skalárním součinem $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ platí:

$$\forall x,y \in X: \quad \langle x\,,y\,\rangle \le ||x||\,||y||.$$

Následující lemma lze i s důkazem nalézt v [7, Theorem 3.10.7].

Lemma 2.2.14. *Nechť* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je měřitelná funkce a* $||f||_\infty < +\infty$*, pak*

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty.$$

Důkaz. Je-li $f(x) = 0$ skoro všude, pak $||f||_p = 0$ pro všechna $p \in [1,\infty]$ a tvrzení platí triviálně. Předpokládejme tedy, že f není nulová skoro všude. Označme

$$M := ||f||_\infty.$$

Potom pro skoro všechna $x \in [a,b]$ platí

$$f(x) \le M.$$

a tedy

$$||f||_p \le ||M||_p.$$

Zvolme $\varepsilon \in (0,1)$ a označme $E := \{x \in [a,b];\, |f(x)| > \varepsilon\, M\}$. Pro $M > 0$ má tato množina nutně kladnou míru. Pak platí

$$\int_a^b |f(x)|^p\, dx \ge \int_E |f(x)|^p\, dx \ge \int_E (\varepsilon\, M)^p\, dx = (\varepsilon\, M)^p\, \lambda(E).$$

Umocněním obou stran nerovnice na $\frac{1}{p}$ získáme

$$||f||_p \ge \varepsilon\, M\, (\lambda(E))^{\frac{1}{p}}.$$

Dohromady tedy máme odhad normy

$$\varepsilon\, M\, (\lambda(E))^{\frac{1}{p}} \le ||f||_p \le ||M||_p.$$

Zatím však nevíme, zda $\lim_{p\to\infty} ||f||_p$ existuje. Dostáváme

$$\liminf_{p\to\infty} \varepsilon\, M\, (\lambda(E))^{\frac{1}{p}} \le \liminf_{p\to\infty} ||f||_p \le \limsup_{p\to\infty} ||f||_p \le \limsup_{p\to\infty} ||M||_p,$$

$$\lim_{p\to\infty} \varepsilon\, M\, (\lambda(E))^{\frac{1}{p}} \le \liminf_{p\to\infty} ||f||_p \le \limsup_{p\to\infty} ||f||_p \le \lim_{p\to\infty} ||M||_p,$$

$$\varepsilon\, M \le \liminf_{p\to\infty} ||f||_p \le \limsup_{p\to\infty} ||f||_p \le M.$$

Protože ε jsme mohli volit libovolně blízko 1, získáváme, že limita norem $||f||_p$ existuje a je rovna esenciálnímu supremu funkce f, tedy

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p = M = ||f||_\infty.$$

$\square$

Poznámka. Funkce $H(p) := ||f||_p$, kde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je libovolná měřitelná funkce, obecně nemusí být monotónní. Jak jsme ale dokázali, za předpokladu, že $||f||_\infty < +\infty$ musí vždy existovat její limita v $+\infty$.

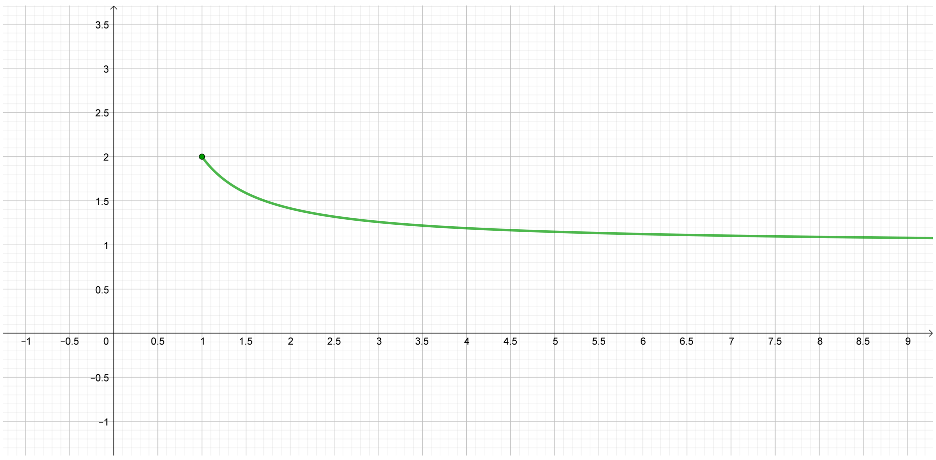
Příklad 2.2.15. Norma konstantní funkce na intervalu délky větší než 1 je klesající funkce v proměnné p. Například norma funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [0,2] \\ 1 & x \in [0,2] \end{cases}$$

je

$$||f||_p = \left(\int_0^2 |1|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}},$$

a to je klesající funkce v proměnné p.



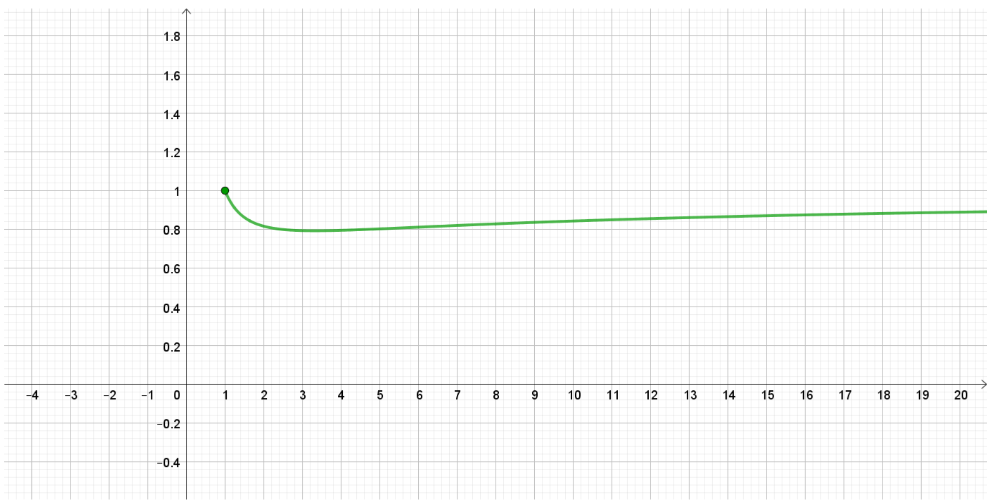
Obrázek 2.3: Graf funkce $H(p) := ||f||_p = 2^{\frac{1}{p}}$

Limitou této funkce v $+\infty$ je esenciální supremum funkce f, tedy $||f||_\infty = 1$.

Příklad 2.2.16. Norma funkce $f(x) = x$ na intervalu $[-1,1]$ je

$$||x||_p = \left(\int_{-1}^1 |x|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{2}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}}$$

a tato funkce monotónní není (příklad 2.3.1). Její limitou v $+\infty$ je $||f||_\infty = 1$.



Obrázek 2.4: Graf funkce $H(p) := ||f||_p = \left(\frac{2}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}}$

Tvrzení 2.2.17. *Nechť $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce a $||F||_\infty < +\infty$, pak*

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{osc}_p(F,\ [a,b]) = \operatorname{osc}_\infty(F,\ [a,b]).$$

Důkaz. Funkce $H(p) := \operatorname{osc}_p(F,\ [a,b])$ je dle tvrzení 2.2.13 monotónní a tedy musí existovat její limita.

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{osc}_p(F,\ [a,b]) = \lim_{p\to\infty} (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_p = \lim_{p\to\infty} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_p$$

Chceme ukázat, že

$$\lim_{p\to\infty} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_p = \inf_{c\in\mathbb{R}} \lim_{p\to\infty} ||F-c||_p = \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F-c||_\infty.$$

Dle předchozího lemmatu získáváme, že pro libovolnou konstantu $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{p\to\infty} ||F-c||_p = ||F-c||_\infty.$$

To je bodová konvergence, tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \exists p_0 \in (1,\infty) \quad \forall p \geq p_0 : \Big| \, ||F-c||_p - ||F-c||_\infty \Big| < \varepsilon.$$

Tato konvergence bude dokonce stejnoměrná, protože malá změna hodnoty c způsobí malou změnu výrazu $|\, ||F-c||_p - ||F-c||_\infty \,|$, tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \Big| ||F-c+\delta||_p - ||F-c+\delta||_\infty - (||F-c||_p - ||F-c||_\infty) \Big| < \varepsilon.$$

Označme výraz v absolutní hodnotě

$$V(p) := ||F-c+\delta||_p - ||F-c+\delta||_\infty - (||F-c||_p - ||F-c||_\infty)$$

a odhadujme tento výraz nejprve shora. Použitím trojúhelníkové nerovnosti pro normu dostáváme

$$||F-c+\delta||_p \leq ||F-c||_p + ||\delta||_p$$

a zároveň

$$||F-c||_\infty = ||F-c+\delta-\delta||_\infty \leq ||F-c+\delta||_\infty + ||\delta||_\infty,$$

a tedy

$$||F-c+\delta||_\infty \geq ||F-c||_\infty - ||\delta||_\infty.$$

vynásobením obou stran nerovnice -1 dostáváme

$$-||F-c+\delta||_\infty \leq -||F-c||_\infty + ||\delta||_\infty.$$

Dostáváme tedy horní odhad výrazu $V(p)$:

$$V(p) \leq ||F-c||_p + ||\delta||_p - ||F-c||_\infty + ||\delta||_\infty - (||F-c||_p - ||F-c||_\infty) =$$

$$= ||\delta||_p + ||\delta||_\infty = \delta\,(b-a)^{\frac{1}{p}} + \delta = \delta\,((b-a)^{\frac{1}{p}} + 1).$$

Obdobně získáme dolní odhad výrazu $V(p)$. Použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$||F - c + \delta||_p \geq ||F - c||_p - ||\delta||_p,$$
$$-||F - c + \delta||_\infty \geq -||F - c||_\infty - ||\delta||_\infty.$$

Tedy

$$V(p) \geq ||F - c||_p - ||\delta||_p - ||F - c||_\infty - ||\delta||_\infty - (||F - c||_p - ||F - c||_\infty) =$$
$$= -||\delta||_p - ||\delta||_\infty = -\delta\,(b-a)^{\frac{1}{p}} - \delta = -\delta\,((b-a)^{\frac{1}{p}} + 1).$$

Dohromady tedy získáváme odhad

$$-\delta\,((b-a)^{\frac{1}{p}} + 1) \leq V(p) \leq \delta\,((b-a)^{\frac{1}{p}} + 1).$$

Tedy

$$|V(p)| \leq \delta\,((b-a)^{\frac{1}{p}} + 1)$$

K zadanému $\varepsilon > 0$ tedy volme

$$\delta := \frac{\varepsilon}{1 + (b-a)^{\frac{1}{p}}}.$$

Z provedených úprav vyplývá, že

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_0 \in (1, \infty) \quad \forall p \geq p_0 \quad \forall c \in \mathbb{R} : \Big| \, ||F - c||_p - ||F - c||_\infty \Big| < \varepsilon.$$

Chceme ukázat, že

$$\lim_{p\to\infty} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F - c||_p = \inf_{c\in\mathbb{R}} ||F - c||_\infty.$$

Označme

$$g(c) := ||F - c||_\infty,$$
$$g_p(c) := ||F - c||_p.$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. K němu dovedeme najít p_0 takové, že pro všechna $p \geq p_0$ a pro všechna $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\Big| \, g_p(c) - g(c) \Big| < \varepsilon.$$

Vezměme $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ splňující

$$g(c_1) < \inf g + \varepsilon$$
$$g_p(c_2) < \inf g_p + \varepsilon$$

Potom

$$\inf g_p \leq g_p(c_1) = g(c_1) + (g_p(c_1) - g(c_1)) \leq \inf g + \varepsilon + \varepsilon = \inf g + 2\varepsilon,$$
$$\inf g \leq g(c_2) = g_p(c_2) + (g(c_2) - g_p(c_2)) \leq \inf g_p + \varepsilon + \varepsilon = \inf g_p + 2\varepsilon.$$

Tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ umíme najít p_0 takové, že pro všechna $p \geq p_0$ bude platit

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} g(c) - 2\varepsilon \leq \inf_{c\in\mathbb{R}} g_p(c) \leq \inf_{c\in\mathbb{R}} g(c) + 2\varepsilon.$$

Tedy z definice limity

$$\lim_{p\to\infty} \inf_{c\in\mathbb{R}} g_p(c) = \inf_{c\in\mathbb{R}} g(c).$$

$\square$

Lemma 2.2.18. *Nechť $p \in [1,\infty] \cup \{C\}$, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce a $\lambda > 0$. Potom*

$$\operatorname{osc}_p(\lambda F,\, [a,b]) = \lambda \operatorname{osc}_p(F,\, [a,b]).$$

Důkaz. V případě $p = C$ je

$$\operatorname{osc}(\lambda F,\, [a,b]) = \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[a,b]} \Big|\lambda F(y) - \lambda F(x)\Big| = \frac{1}{2}\, |\lambda| \sup_{x,y\in[a,b]} \Big|F(y) - F(x)\Big| =$$

$$= \lambda \operatorname{osc}(F,\, [a,b]).$$

Ve druhé rovnosti jsme využili vlastnosti suprema

$$\forall \lambda > 0 : \sup(\lambda f(x)) = \lambda\ \sup(f(x)).$$

V případě $p \in [1,\infty]$ je

$$\operatorname{osc}_p(\lambda F,\, [a,b]) = (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||\lambda F - c|| = (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} |\lambda|\, ||F - \frac{c}{\lambda}|| =$$

$$= |\lambda|\, (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{y\in\mathbb{R}}\ ||F - y|| = \lambda \operatorname{osc}_p(F,\, [a,b])$$

Ve druhé rovnosti jsme využili homogenity normy a ve třetí rovnosti jsme využili vlastnosti infima

$$\forall \lambda > 0 : \inf(\lambda f(x)) = \lambda\ \inf(f(x))$$

□

Lemma 2.2.19. *Nechť $p \in [1,\infty] \cup \{C\}$ a $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Potom*

$$\operatorname{osc}_p(-F,\, [a,b]) = \operatorname{osc}_p(F,\, [a,b])$$

Důkaz. Pro $p = C$ je

$$\operatorname{osc}(-F,\, [a,b]) = \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[a,b]} |-F(y) - (-F(x))| = \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[a,b]} |(-1)\cdot(F(y) - F(x))| =$$

$$= \frac{1}{2}|-1| \sup_{x,y\in[a,b]} |(F(y) - F(x))| = \operatorname{osc}(F,\, [a,b]).$$

Pro $p \in [1,\infty]$ je

$$\operatorname{osc}_p(-F,\, [a,b]) = (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||-F - c|| = (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}}\ |-1|\, ||F + c|| =$$

$$= (b-a)^{-\frac{1}{p}} \inf_{y\in\mathbb{R}} ||F - y|| = \operatorname{osc}_p(F,\, [a,b]).$$

Ve druhé rovnosti jsme opět využili homogenitu normy.

□

Lemma 2.2.20. *Nechť $p \in [1,\infty] \cup \{C\}$ a $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Potom pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí*

$$\operatorname{osc}_p(\lambda F,\, [a,b]) = |\lambda| \operatorname{osc}_p(F,\, [a,b]).$$

Důkaz.

- Pro $\lambda = 0$ je tvrzení triviální.
- Pro $\lambda > 0$ tvrzení plyne z lemmatu 2.2.18.
- Pro $\lambda < 0$ lze přepsat $\lambda F = (-\lambda)(-F)$ a následně použijeme lemmata 2.2.18 a 2.2.19.

□

Připomeňme definici pseudonormy.

Definice 2.2.21 (Pseudonorma). *Nechť X je vektorový prostor nad tělesem T. Zobrazení $L : X \to R$ nazýváme **pseudonorma**, pokud splňuje:*

- $\forall x,y \in X : \; L(x+y) \le L(x) + L(y)$
- $\forall x \in X \, \forall t \in T : L(tx) = |t| \, L(x)$
- $L(0) = 0$

*Řekneme, že zobrazení L je **norma**, pokud navíc splňuje*

- $L(x) = 0 \iff x = 0$

Tvrzení 2.2.22. *Nechť $p \in [1,\infty] \cup \{C\}$. Zobrazení, které libovolné měřitelné funkci $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ přiřadí její oscilaci; tj. funkcionál definovaný předpisem*

$$L(F) := \operatorname{osc}_p(F,\, [a,b])$$

je pseudonorma.

Důkaz. Plyne z tvrzení 2.2.12 a z lemmatu 2.2.20.

□

Poznámka. Oscilace není norma. Tedy není pravda, že

$$\operatorname{osc}_p(F,\, [a,b]) = 0 \iff \forall x \in [a,b] : \quad F(x) = 0,$$

neboť oscilace každé konstantní funkce je nulová.

Lemma 2.2.23 (Subaditivita oscilace vzhledem k intervalu)**.** *Nechť $c \in [a,b]$ a $F : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pak*

$$\operatorname{osc}(F,\ [a,b]) \leq \operatorname{osc}(F,\ [a,c]) + \operatorname{osc}(F,\ [c,b]). \tag{2.7}$$

Důkaz. Je-li funkce F neomezená na intervalu $[a,b]$, je také neomezená alespoň na jednom z intervalů $[a,c]$ nebo $[c,b]$. Oscilace neomezené funkce je rovna $+\infty$, tedy v takovém případě nastává rovnost a tvrzení platí.

Předpokládejme, že funkce F je omezená na $[a,b]$. Uvažujme následující případy:

- Je-li
$$\sup_{x\in[a,b]} F(x) = \sup_{x\in[a,c]} F(x) \ \text{ a } \ \inf_{x\in[a,b]} F(x) = \inf_{x\in[a,c]} F(x),$$
potom
$$\sup_{x,y\in[a,b]} \Big|F(y) - F(x)\Big| = \sup_{x,y\in[a,c]} \Big|F(y) - F(x)\Big| \leq$$
$$\leq \sup_{x,y\in[a,c]} \Big|F(y) - F(x)\Big| + \sup_{x,y\in[c,b]} \Big|F(y) - F(x)\Big|.$$
Vynásobením nerovnice $\frac{1}{2}$ získáváme požadovanou nerovnost (2.7).

- Je-li
$$\sup_{x\in[a,b]} F(x) = \sup_{x\in[c,b]} F(x) \ \text{ a } \ \inf_{x\in[a,b]} F(x) = \inf_{x\in[c,b]} F(x),$$
potom postupujeme analogicky jako v předchozím případě.

- Nechť
$$\sup_{x\in[a,b]} F(x) = \sup_{x\in[a,c]} F(x),$$
$$\inf_{x\in[a,b]} F(x) = \inf_{x\in[c,b]} F(x).$$
Chceme ukázat, že
$$\operatorname{osc}(F,\ [a,b]) \leq \operatorname{osc}(F,\ [a,c]) + \operatorname{osc}(F,\ [c,b]).$$
Tedy
$$\sup_{x\in[a,b]} F(x) - \inf_{x\in[a,b]} F(x) \leq \sup_{x\in[a,c]} F(x) - \inf_{x\in[a,c]} F(x) + \sup_{x\in[c,b]} F(x) - \inf_{x\in[c,b]} F(x),$$
$$\sup_{x\in[a,b]} F(x) - \inf_{x\in[a,b]} F(x) \leq \sup_{x\in[a,b]} F(x) - \inf_{x\in[a,c]} F(x) + \sup_{x\in[c,b]} F(x) - \inf_{x\in[a,b]} F(x).$$
Od obou stran nerovnice odečteme $\sup_{x\in[a,b]} F(x)$ a přičteme $\inf_{x\in[a,b]} F(x)$ a vidíme, že stačí dokázat
$$0 \leq -\inf_{x\in[a,c]} F(x) + \sup_{x\in[c,b]} F(x).$$
Ekvivalentně
$$\sup_{x\in[c,b]} F(x) \geq \inf_{x\in[a,c]} F(x),$$
a to musí být vždy splněno, protože $[a,c] \cap [c,b] = \{c\}$ a tedy
$$\inf_{x\in[a,c]} F(x) \leq F(c) \leq \sup_{x\in[c,b]} F(x).$$

- V případě, kdy

$$\sup_{x\in[a,b]} F(x) = \sup_{x\in[c,b]} F(x) \text{ a } \inf_{x\in[a,b]} F(x) = \inf_{x\in[a,c]} F(x),$$

postupujeme analogicky jako v předchozím případě.

$\square$

Poznámka. Nerovnost (2.7) platí pouze pro obyčejnou oscilaci (tj. pro $p = C$), ale neplatí pro p-oscilaci pro žádné $p \in [1, \infty]$. Jako protipříklad uvažme funkci danou předpisem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1], \\ 1 & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Na intervalech $[0, 1]$ a $(1, 2]$ má nulovou oscilaci, neboť na těchto intervalech je konstantní a p-oscilace zanedbává množiny nulové Lebesgueovy míry; ale na intervalu $[0, 2]$ má funkce F oscilaci kladnou. Tedy

$$\operatorname{osc}_p(F,\ [0, 2]) > \operatorname{osc}_p(F,\ [0, 1]) + \operatorname{osc}_p(F,\ [1, 2]).$$

Lemma 2.2.24. *Nechť $p \in [1, \infty] \cup \{C\}$ a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce.*

$$\textit{Je-li } [c, d] \subset [a, b], \textit{pak } \operatorname{osc}_p(F,\ [c, d]) \leq \operatorname{osc}_p(F,\ [a, b]).$$

Důkaz. Pro $p = C$ platí

$$\frac{1}{2} \sup_{x,y\in[c,d]} \Big|F(y) - F(x)\Big| \leq \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[a,b]} \Big|F(y) - F(x)\Big|,$$

tedy

$$\operatorname{osc}_C(F,\ [c, d]) \leq \operatorname{osc}_C(F,\ [a, b]).$$

Nechť $p \in [1, \infty]$. Pro Lebesgueův integrál nezáporné funkce f platí:

$$\text{Je-li } A \subset B, \text{ potom } \int_A f(x)dx \leq \int_B f(x)dx.$$

Tedy pro libovolnou konstantu $K \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_c^d |F(x) - K|^p \, dx \leq \int_a^b |F(x) - K|^p \, dx.$$

Protože pro $p \in [1, \infty]$ je funkce $t \to t^{\frac{1}{p}}$ rostoucí, platí

$$\Big(\int_c^d |F(x) - K|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_a^b |F(x) - K|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

a tato nerovnost platí tedy i pro infima

$$\inf_{K\in\mathbb{R}} \Big(\int_c^d |F(x) - K|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \inf_{K\in\mathbb{R}} \Big(\int_a^b |F(x) - K|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Tedy

$$\operatorname{osc}_p(F,\ [c, d]) \leq \operatorname{osc}_p(F,\ [a, b]).$$

$\square$

Z předcházejících dvou lemmat ihned získáme tento důsledek.

Důsledek 2.2.25. *Obyčejná oscilace je konečně subaditivní, tedy je-li funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ a existuje-li $n \in \mathbb{N}$ tak, že $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, pak platí:*

$$\operatorname{osc}(F, \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]) \leq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}(F, [a_i, b_i]).$$

Poznámka. Tuto vlastnost obyčejné oscilace využijeme ve 3. kapitole při důkazu aditivity HKS_α integrálu vzhledem k integračnímu oboru (tvrzení 3.2.2).

Příklad 2.2.26. Obyčejná oscilace není spočetně subaditivní, tedy je-li funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]$, pak obecně **neplatí**, že

$$\operatorname{osc}(F, \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{osc}(F, [a_i, b_i]).$$

Uvažujme funkci danou předpisem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x \in (1,2] \end{cases}$$

a následující systém intervalů: [0,1], $[\frac{3}{2}, 2]$, $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$, $\ldots$, tedy

$$\forall i \geq 2 \quad [a_i, b_i] = \left[1 + \frac{1}{2^{i-1}}, 1 + \frac{1}{2^{i-2}}\right].$$

Pak platí, že

$$[0,2] = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i].$$

Oscilace funkce F na intervalu $[0,2]$ je rovna 1, ale na každém z intervalů $[a_i, b_i]$ je funkce F konstantní a tedy má zde nulovou oscilaci. Tedy

$$\operatorname{osc}(F, \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]) = 1 > \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{osc}(F, [a_i, b_i]) = 0.$$

2.3 Příklady

Příklad 2.3.1. Spočtěme oscilaci funkce $F(x) = x$ na intervalu $[-1, 1]$.

Protože funkce F je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[-1,1]$, získáváme z tvrzení 2.2.10, že pro $p = \infty$ platí

$$\operatorname{osc}_\infty(x,\, [-1,1]) = \operatorname{osc}_C(x,\, [-1,1]) = \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[-1,1]} |y - x| = \frac{1}{2}\Big(1 - (-1)\Big) = 1.$$

Spočtěme oscilaci pro $p \in [1, \infty)$.

$$\operatorname{osc}_p(x,\, [-1,1]) = 2^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\,\in\,\mathbb{R}} ||x - c||_{L^p}.$$

Z definice L^p normy je

$$||x - c||_p = \Big(\int_{-1}^{1} |x - c|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Hledejme tedy infimum této funkce proměnné c, kde $p \in [1, \infty)$ je parametr. Protože F je omezená měřitelná funkce na $[-1,1]$, z tvrzení 2.2.1 dostáváme, že

$$\inf_{c\,\in\,\mathbb{R}} ||x - c||_p = \inf_{c\,\in\,[-1,1]} ||x - c||_p.$$

Infimum tedy budeme hledat pro c z intervalu $[-1, 1]$.

Je-li $c \in [-1, 1]$, pak

$$\int_{-1}^{1} |x - c|^p \, dx = \int_{-1}^{c} (c - x)^p \, dx + \int_{c}^{1} (x - c)^p \, dx = -\int_{c+1}^{0} t^p \, dt + \int_{0}^{1-c} t^p \, dt$$

$$= \frac{(c + 1)^{p+1}}{p + 1} + \frac{(1 - c)^{p+1}}{p + 1} = \frac{1}{p + 1}\Big((c + 1)^{p+1} + (1 - c)^{p+1}\Big).$$

Označme $H(c) := \int_{-1}^{1} |x - c|^p \, dx$. Derivace této funkce je

$$H'(c) = (c + 1)^p - (1 - c)^p, \quad c \in [-1, 1].$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$H'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

Rovnice $H'(c) = 0$ má tedy právě jedno řešení a platí

$$\forall c \in (-\infty, 0) : H'(c) < 0 \quad \wedge \quad \forall c \in (0, \infty) : H'(c) > 0.$$

Tedy funkce $H(c)$ je klesající na intervalu $[-1, 0)$ a rostoucí na $(0, 1]$. Z toho plyne, že nabývá minima pro $c = 0$.

$$H(0) = \frac{2}{p + 1}$$

Dostáváme tedy

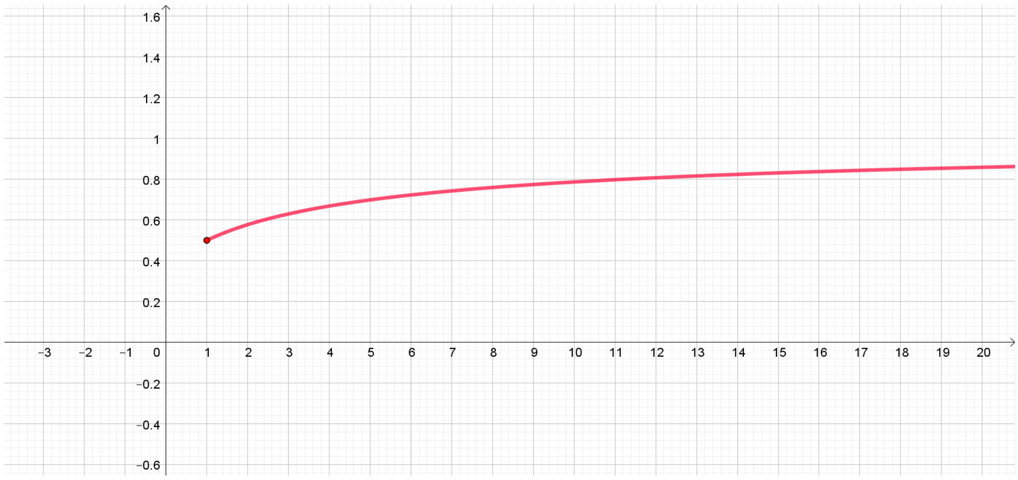
$$\operatorname{osc}_p(x,\,[-1,1]) = 2^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} (H(c))^{\frac{1}{p}} = 2^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Oscilace funkce $F(x) = x$ na intervalu $[-1{,}1]$ je tedy rostoucí funkce v proměnné $p \in [1,\infty]$ a její limita pro p jdoucí do $+\infty$ je rovna jedné.

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to+\infty} e^{\frac{1}{p}\log(\frac{1}{p+1})} = e^{\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p}\log(\frac{1}{p+1})} = e^0 = 1.$$

Ve druhém kroku jsme ve výpočtu použili větu o limitě složené funkce a ve třetím kroku bychom limitu exponentu vypočítali následujícím způsobem.

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\log\left(\frac{1}{p+1}\right) = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left(-\log(p+1)\right) = -\lim_{p\to+\infty} \frac{\log(p+1)}{p} = 0.$$



Obrázek 2.5: Graf funkce $\operatorname{osc}_p(x,\,[-1,1]) = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$

Poznámka. Jak jsme viděli v tvrzení 2.2.13, p-oscilace je vždy neklesající funkce v proměnné p (což je zajištěno multiplikativní konstantou $(b-a)^{-\frac{1}{p}}$ v definici oscilace). Poznamenejme ale, že norma funkce $F(x) = x$ na intervalu $[-1{,}1]$, tedy funkce $||x||_p = \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$ monotónní není (příklad 2.2.16).

Analogicky bychom mohli spočítat oscilaci funkce $F(x) = x$ na libovolném intervalu tvaru $[-m{,}m]$ pro $m \in \mathbb{R}^+$ a $p \in [1,\infty]$. Pro $c \in [-m,m]$ je

$$H(c) = \int_{-m}^{m} |x-c|^p \, dx = \frac{1}{p+1}\Big((c+m)^{p+1} + (m-c)^{p+1}\Big),$$

$$H(0) = \frac{1}{p+1}\Big((0+m)^{p+1} + (m-0)^{p+1}\Big) = \frac{2}{p+1}\, m^{p+1}.$$

Dostaneme tedy

$$\operatorname{osc}_p(x,\,[-m,m]) = (2m)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} (H(c))^{\frac{1}{p}} = (2m)^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{2m^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} = m\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Příklad 2.3.2. Spočtěme oscilaci funkce $F(x) = \sin x$ na intervalu $[-\pi,\pi]$.

- Pro $p = C$ dostáváme

$$\mathrm{osc}_C(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[-\pi,\pi]} \Big|\sin(y) - \sin(x)\Big| = \frac{1}{2}\Big|\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})\Big| =$$

$$= \frac{1}{2}\Big|1-(-1)\Big| = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

- Pro $p = \infty$ získáváme z tvrzení 2.2.10, že

$$\mathrm{osc}_\infty(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = osc_C(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = 1,$$

  protože je funkce $\sin x$ spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[-\pi,\pi]$.

Pro $p \in [1,\infty)$ je oscilace dána jako

$$\mathrm{osc}_p(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = (2\pi)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} ||\sin x - c||_{L^p}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{p}} \inf_{c\in\mathbb{R}} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - c|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Protože funkce $\sin x$ je omezená, z tvrzení 2.2.1 dostáváme, že

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - c|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} = \inf_{c\in[A,B]} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - c|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}},$$

přičemž $A = \inf_{x\in[-\pi,\pi]} \sin x = -1$ a $B = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \sin x = 1$. Víme tedy, že infimum funkce

$$H(c) := \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - c|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

budeme hledat v intervalu $[-1,1]$. Ukážeme, že infimum takové funkce bude vždy nastávat pro $c = 0$ pro všechna $p \in [1,\infty)$.

- Pro $p = 1$ můžeme využít toho, že medián funkce $\sin x$ na intervalu $[-\pi,\pi]$ je 0 a z tvrzení 2.1.9 tedy získáváme, že

$$\mathrm{osc}_1(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = (2\pi)^{-1}\, ||\sin x - 0||_1 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, dx =$$

$$= (2\pi)^{-1}\, 2\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{1}{2\pi}\, 2\cdot 2 = \frac{2}{\pi}.$$

- Pro $p = 2$ můžeme využít toho, že integrální průměr funkce $\sin x$ na intervalu $[-\pi,\pi]$ je 0 a z tvrzení 2.2.2 tedy získáváme, že

$$\mathrm{osc}_2(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, ||\sin x - 0||_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx\big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(2\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx\big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\big(\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\big)^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\Big[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\Big]_0^{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\big(\frac{\pi}{2}\big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Pro $p \in (1, \infty)$ ukážeme, že funkce

$$h(c) := H^p(c) = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - c|^p \, dx$$

je rostoucí na intervalu (0,1]. Analogicky se dokáže, že je tato funkce klesající na $[-1{,}0)$. Z toho potom plyne, že nabývá minima pro $c = 0$.

Podle věty o derivaci integrálu podle parametru získáme

$$h'(c) = \frac{\partial}{\partial c} \int_{-\pi}^{\pi} |c - \sin x|^p \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} p \, |c - \sin x|^{p-1} \operatorname{sgn}(c - \sin x) dx$$

Ověřme předpoklady této věty:

  - Funkce $c \mapsto |c - \sin x|^p$ je spojitá pro všechna $c \in [-1{,}1]$, neboť je kompozicí spojitých funkcí, a tedy je měřitelná
  - Pro všechna $c \in [-1{,}1]$ a pro všechna $x \in [-\pi{,}\pi]$ existuje vlastní derivace $\frac{\partial}{\partial c}|c - \sin x|^p$, neboť funkce $t \to |t|^p$ je diferencovatelná pro všechna $p > 1$.
  - Derivace podle parametru je omezená funkce na omezeném intervalu, tedy k ní dovedeme najít integrovatelnou majorantu s.v.:

    $$\forall c \in [-1{,}1] \quad \Big| p \, |c - \sin x|^{p-1} \operatorname{sgn}(c - \sin x) \Big| \le p \, 2^{p-1}$$

    a konstantní funkce na omezeném intervalu je integrovatelná.
  - Existuje nějaký bod, pro nějž je daný integrál konvergentní, tj.

    $$\exists c_0 \in [-1{,}1] \quad \int_{-\pi}^{\pi} |c_0 - \sin x|^p \, dx < \infty.$$

    Lze volit např. $c_0 = 0$. Integrand je omezená funkce na omezeném intervalu, tedy daný integrál je konvergentní.

Označme

$$M^+ := \{x \in [-\pi{,}\pi] \mid \quad c > \sin x\},$$
$$M^- := \{x \in [-\pi{,}\pi] \mid \quad c < \sin x\}.$$

Potom

$$h'(c) = p \Big(\int_{M^+} (c - \sin x)^{p-1} \, dx \; - \int_{M^-} (\sin x - c)^{p-1} \, dx \Big).$$

K libovolnému $c \in (0{,}1]$ umíme najít takové $\delta > 0$, že

$$M^- = \Big(\frac{\pi}{2} - \delta, \; \frac{\pi}{2} + \delta \Big),$$

přičemž $(-\frac{\pi}{2}-\delta, -\frac{\pi}{2}+\delta) \subset M^+$. Derivaci $h(c)$ pak můžeme zdola odhadnout.

$$\begin{aligned} h'(c) &\geq p\left(\int_{-\frac{\pi}{2}-\delta}^{-\frac{\pi}{2}+\delta} (c-\sin x)^{p-1}\,dx \;-\; \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} (\sin x - c)^{p-1}\,dx\right) = \\ &= p\left(\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} (c+\sin y)^{p-1}\,dy \;-\; \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} (\sin x - c)^{p-1}\,dx\right) = \\ &= p\left(\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} \left((c+\sin z)^{p-1} \;-\; (\sin z - c)^{p-1}\right) dz\right) > 0. \end{aligned}$$

neboť pro $c \in (0,1]$ platí:

$$c + \sin z > \sin z - c$$

a tedy integrand je kladný. Z toho plyne, že funkce h je rostoucí na $(0,1]$. Analogicky ukážeme, že h je klesající na $[-1,0)$ a z toho plyne, že funkce h nabývá minima v 0. Tedy i funkce $h^{\frac{1}{p}}$ nabývá minima v 0, neboť $t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$ je rostoucí funkce pro libovolné $p \in (1,\infty)$.

Tedy

$$\operatorname{osc}_p(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = (2\pi)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Užitím matematického softwaru tento integrál dovedeme spočítat a dostaneme:

$$\operatorname{osc}_p(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = \pi^{-\frac{1}{2p}} \left(\frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(1+\frac{p}{2})}\right)^{\frac{1}{p}},$$

kde Γ je funkce gama definovaná předpisem

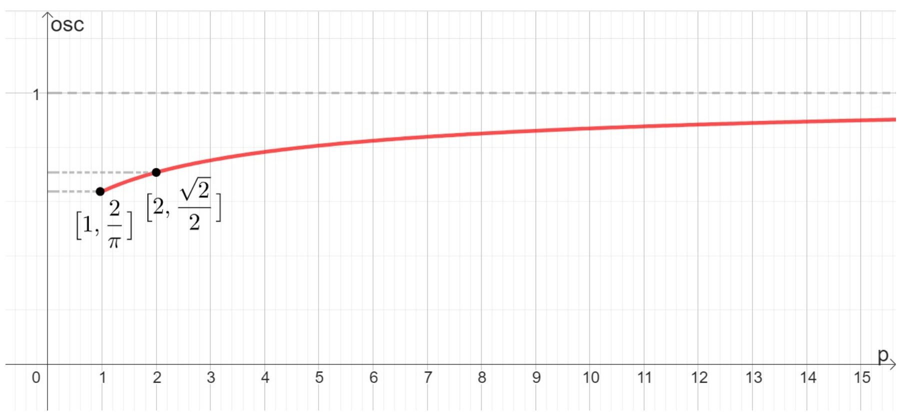
$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds.$$

Z tvrzení 2.2.13 získáme, že funkce $p \mapsto \operatorname{osc}_p(\sin x,\ [-\pi,\pi])$ je monotónní a z tvrzení 2.2.17 dostaneme, že

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{osc}_p(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = \operatorname{osc}_\infty(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = 1.$$

Tedy pro $p \in [1,\infty)$ platí

$$0 < \operatorname{osc}_p(\sin x,\ [-\pi,\pi]) \leq 1.$$



Obrázek 2.6: Graf funkce $p \mapsto \operatorname{osc}_p(\sin x,\ [-\pi,\pi]) = \pi^{-\frac{1}{2p}} \left(\frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(1+\frac{p}{2})}\right)^{\frac{1}{p}}$

3. HKS_α^p integrál

V této kapitole se zabýváme vlastnostmi HKS_α^p integrálu, který je zobecněním HKS integrálu.

Definice 3.0.1 (**α-systém**). *Nechť $\alpha \geq 1$ a $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Systém intervalů s význačnými body $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ nazveme **α-systém**, pokud intervaly*

$$(x_i - \alpha(x_i - a_i), x_i + \alpha(b_i - x_i))$$

jsou po dvou disjunktní a jsou všechny obsaženy v I.

*Je-li $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ kalibr, řekneme, že α-systém $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ je **δ-jemný**, pokud*

$$\forall i : [a_i, b_i] \subset (x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)).$$

Poznámka. Systémem v intervalu I budeme rozumět libovolnou množinu nepřekrývajících se intervalů $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^n \subset I$. Dělením intervalu I rozumíme takový systém, který navíc pokrývá interval I, tedy $\bigcup\limits_i [a_i, b_i] = I$.

Následující definice HKS_α integrálu je zobecněním HKS integrálu, přičemž pro $\alpha = 1$ je tato definice ekvivalentní s klasickou definicí HKS integrálu (definice 1.4.1), jak ukážeme v tvrzení 3.2.1.

Definice 3.0.2 (**HKS_α integrál**). *[3, Definition 3.2] Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $\alpha \geq 1$ a f, F, G jsou **měřitelné funkce** na I. Řekneme, že F je neurčitý HKS_α **integrál** funkce f vzhledem k funkci G, pokud pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon : I \to \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechny δ_ε**-jemné** α**-systémy** $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ v intervalu I platí:*

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}(F - f(x_i)G,\ [a_i, b_i]) < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Značení. Symbolem HK_α budeme rozumět HKS_α pro volbu $G(x) = x$.

Následující definice je zobecněním definice HKS_α integrálu v tom smyslu, že místo obyčejné oscilace pracuje také s p-oscilací.

Definice 3.0.3 (**HKS_α^p integrál**). *[3, Definition 3.2] Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $\alpha \geq 1$ a $p \in [1, \infty]$ nebo $p = C$. Nechť f, F, G jsou **měřitelné funkce** na I. Řekneme, že F je neurčitý HKS_α^p **integrál** funkce f vzhledem k funkci G na intervalu I, pokud pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon : I \to (0,\infty)$ tak, že pro všechny δ**-jemné** α**-systémy** $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ intervalu I platí:*

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p(F - f(x_i)G,\ [a_i, b_i]) < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Značení. Symbolem HK_α^p budeme rozumět HKS_α^p pro volbu $G(x) = x$.

Definice 3.0.4. *Řekneme, že α-systém $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ je **centrovaný**, je-li každý význačný bod x_i středem intervalu $[a_i, b_i]$. HKS_α^p integrál nazýváme centrovaný, uvažujeme-li v definici 3.0.3 pouze centrované α-systémy.*

Poznámka. Z definice je zřejmé, že existence necentrovaného integrálu implikuje existenci centrovaného.

Poznámka. Je-li F neurčitý HKS_α^p integrál funkce f vzhledem k funkci G na I a $C \in \mathbb{R}$ je konstanta, pak i funkce $F + C$ je neurčitý HKS_α^p integrál funkce f vzhledem k funkci G na I, protože přičtení konstanty k libovolné funkci nezmění hodnotu její oscilace.

Poznámka. Je-li $p \in [1,\infty]$, pak k neurčitému integrálu můžeme přičíst funkci, která je nulová skoro všude a získáme opět neurčitý integrál, protože p-oscilace zanedbává množiny nulové Lebesgueovy míry. Proto pro $p \in [1,\infty]$ nemá smysl definovat určitý integrál vztahem $\int_a^b f\,dG = F(b) - F(a)$ jako přírůstek primitivní funkce. Má-li funkce F vlastnost (3.2) a $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce splňující $H(x) = 0$ na $(a,b]$ a $H(a) > 0$, pak funkce $F + H$ je také neurčitým integrálem a splňuje (3.2); nicméně číselná hodnota určitého integrálu by pro tuto funkci byla jiná. Tato definice určitého integrálu má smysl pouze pro HKS_α integrál (def. 3.2.10).

Poznámka. Třída HKS_α^p integrovatelných funkcí (pro pevně zvolený integrátor $G : I \to \mathbb{R}$) se s rostoucím α zvětšuje nebo je stejná. Je-li $\alpha_1 < \alpha_2$, pak každý α_2-systém v I je také α_1 systém. Speciálně, třídy HK_α integrovatelných funkcí jsou pro $\alpha \in [1,2]$ totožné a pro $\alpha > 2$ se zvětšují (dokázáno v [8]).

3.1 Vlastnosti HKS_α^p integrálu

Tvrzení 3.1.1. *Nechť $\alpha \geq 1$ a $p, q \in [1, \infty]$. Pro pevně zvolený integrátor $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ označme jako HKS_α^p množinu všech integrovatelných funkcí na intervalu $[a,b]$.*

$$\text{Je-li } p < q, \text{ potom } HKS_\alpha^q \subseteq HKS_\alpha^p.$$

Důkaz. Předpokládejme, že funkce F je neurčitý HKS_α^q integrál funkce f vzhledem k funkci G na $[a,b]$. To znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_q(F - f(x_i)G,\, [a_i, b_i]) < \varepsilon.$$

Z tvrzení 2.2.5 víme, že funkce $H(q) := \operatorname{osc}_q(F,\, I)$ je neklesající, tedy

$$\text{je-li } p < q, \text{ potom } \operatorname{osc}_p(F,\, I) \leq \operatorname{osc}_q(F,\, I).$$

Tedy

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_p(F - f(x_i)G,\, [a_i, b_i]) \leq \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_q(F - f(x_i)G,\, [a_i, b_i]) < \varepsilon,$$

z čehož plyne, že F je také neurčitý HKS_α^p integrál funkce f vzhledem k funkci G na $[a,b]$.

$\square$

Poznámka. Inkluze v předchozím tvrzení je ve skutečnosti ostrá, tj. pro $p < q$ platí $HKS_\alpha^q \subset HKS_\alpha^p$. Důkaz lze najít v [3, Theorem 5.5].

Příklad 3.1.2. Uvažujme funkce $F, G, f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dané předpisy

$$f(x) = 1$$

$$F(x) = x$$

$$G(x) = \begin{cases} x & x \in [-1,1] \setminus \{\frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}\} \\ \frac{1}{x} & x \in \{\frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

a nechť $\alpha \geq 1$. Pak

- F je neurčitý HKS_α^∞ integrál funkce f vzhledem ke G, neboť pro jakýkoliv význačný bod x_i je funkce $F - f(x_i)G$ nulová skoro všude a proto

$$\operatorname{osc}_\infty(F - f(x_i)G,\, [a_i, b_i]) = 0$$

  pro každý interval $[a_i, b_i] \subset [-1,1]$.

- F není neurčitý HKS_α^C integrál funkce f vzhledem ke G, neboť uvažujeme-li δ-jemný α-systém tvořený jedním intervalem

$$\Big\{\Big[-\frac{\delta(0)}{\alpha}, \frac{\delta(0)}{\alpha}\Big], 0\Big\},$$

  kde δ je libovolný kalibr, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$\operatorname{osc}_C\Big(F - f(0)G,\, \Big[-\frac{\delta(0)}{\alpha}, \frac{\delta(0)}{\alpha}\Big]\Big) \geq \frac{1}{2}\Big(2^k - \frac{1}{2^k}\Big),$$

  přičemž pravá strana roste nade všechny meze, neboť funkce $F - f(0)G$ je na tomto intervalu neomezená, proto

$$\operatorname{osc}_C\Big(F - f(0)G,\, \Big[-\frac{\delta(0)}{\alpha}, \frac{\delta(0)}{\alpha}\Big]\Big) = +\infty.$$

Tvrzení 3.1.3. *Nechť $\alpha \geq 1$ a $p = \infty$ nebo $p = C$. Pro pevně zvolený integrátor $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ označme jako HKS_α^p množinu všech integrovatelných funkcí na intervalu $[a,b]$. Pak*

$$HKS_\alpha^C \subseteq HKS_\alpha^\infty.$$

Důkaz. Předpokládejme, že funkce F je neurčitý HKS_α^C integrál funkce f vzhledem k funkci G na $[a,b]$. To znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_C(F - f(x_i)G,\, [a_i, b_i]) < \varepsilon.$$

Z tvrzení 2.2.10 víme, že pro libovolnou měřitelnou funkci $H : I \to \mathbb{R}$ platí, že

$$\operatorname{osc}_\infty(H,\, I) \leq \operatorname{osc}_C(H,\, I),$$

proto

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_\infty(F - f(x_i)G,\, [a_i, b_i]) \leq \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}_C(F - f(x_i)G,\, [a_i, b_i]) < \varepsilon,$$

tedy F je také neurčitý HKS_α^∞ integrál funkce f vzhledem k funkci G na $[a,b]$.

□

Linearita HKS^p_α integrálu

Tvrzení 3.1.4 (Linearita HKS^p_α integrálu vzhledem k integrandu)**.** *Nechť f, g, G jsou měřitelné funkce na $[a,b]$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom platí*

- *Je-li F neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G, pak λF je neurčitý integrál funkce λf vzhledem ke G.* ***(homogenita)***

- *Je-li F_1 neurčitý integrál funkce f_1 vzhledem ke G a F_2 neurčitý integrál funkce f_2 vzhledem ke G, pak $F_1 + F_2$ je neurčitý integrál funkce $f_1 + f_2$ vzhledem ke G.* ***(aditivita)***

Důkaz.

Dokažme nejprve homogenitu. Pro $\lambda = 0$ je tvrzení zřejmé. Uvažujme tedy $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Předpokládáme, že F je neurčitý integrál funkce f vzhledem k funkci G na intervalu $[a,b]$. Tedy dle definice

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{osc}_p(F - f(x_i)G,\, [a_i, b_i]) < \varepsilon.$$

Chceme ukázat, že potom λF je neurčitý integrál funkce λf vzhledem ke G pro libovolné nenulové číslo λ. Použitím lemmatu 2.2.20 můžeme z oscilace vytknout absolutní hodnotu λ, tedy

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{osc}_p(\lambda F - \lambda f(x_i)G,\, [a_i, b_i]) = |\lambda| \sum_{i=1}^n \mathrm{osc}_p \Big(F - f(x_i)G,\, [a_i, b_i]\Big) < |\lambda|\, \varepsilon =: \varepsilon'.$$

Tedy pro libovolné $\varepsilon' > 0$ vezměme $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{|\lambda|}$ a vidíme, že podmínka z definice integrálu funkce λf vzhledem ke G je splněna.

Nyní dokažme aditivitu. Označme $F := F_1 + F_2$. Chceme ukázat, že F je neurčitý integrál funkce $f_1 + f_2$ vzhledem ke G na $[a, b]$. Tedy chceme ukázat, že

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon : [a, b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{osc}_p(F - (f_1(x_i) + f_2(x_i))G,\, [a_i, b_i]) < \varepsilon.$$

Z definice, F_1 je neurčitý integrál funkce f_1 vzhledem ke G na intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon_1} : [a, b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_{\varepsilon_1}\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{osc}_p(F_1 - f_1(x_i)G,\, [a_i, b_i]) < \varepsilon_1.$$

F_2 je neurčitý integrál funkce f_2 vzhledem ke G na intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon_2} : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_{\varepsilon_2}\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p(F_2 - f_2(x_i)G,\ [a_i,b_i]) < \varepsilon_2.$$

K zadanému $\varepsilon > 0$ zvolme

$$\delta_\varepsilon = \min(\delta_{\varepsilon_1},\delta_{\varepsilon_2}).$$

Pak každý δ_ε-jemný systém je zároveň δ_{ε_1}-jemný i δ_{ε_2}-jemný. Platí tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p\Big(F - (f_1(x_i) + f_2(x_i))G,\ [a_i,b_i]\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p\Big(F_1 - f_1(x_i)G + F_2 - f_2(x_i)G, [a_i,b_i]\Big) <$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p\Big(F_1 - f_1(x_i)G,\ [a_i,b_i]\Big) + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p\Big(F_2 - f_2(x_i)G, [a_i,b_i]\Big) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon.$$

Nejprve jsme funkci F rozepsali jako $F_1 + F_2$, poté jsme využili trojúhelníkovou nerovnost pro oscilaci (Tvrzení 2.2.12) a protože předpokládáme, že F_1 je neurčitý integrál funkce f_1 vzhledem ke G a F_2 je neurčitý integrál funkce f_2 vzhledem ke G, umíme součty obou oscilací udělat libovolně malé a tedy i menší než pevně zadané ε.

□

Tvrzení 3.1.5 (Linearita HKS^p_α integrálu vzhledem k integrátoru)**.** *Nechť f, g, G jsou měřitelné funkce na $[a,b]$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom platí*

- *Je-li F neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G, pak λF je neurčitý integrál funkce f vzhledem ke λG.* ***(homogenita)***
- *Je-li F_1 neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G_1 a F_2 neurčitý integrál funkce f vzhledem k G_2, pak $F_1 + F_2$ je neurčitý integrál funkce f vzhledem ke $G_1 + G_2$.* ***(aditivita)***

Důkaz.

Dokažme nejprve homogenitu. Pro $\lambda = 0$ je tvrzení zřejmé. Uvažujme tedy $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Předpokládáme, že F je neurčitý integrál funkce f vzhledem k funkci G na intervalu $[a,b]$. Tedy dle definice

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i,b_i],x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p(F - f(x_i)G,\ [a_i,b_i]) < \varepsilon.$$

Chceme ukázat, že potom λF je neurčitý integrál funkce f vzhledem ke λG pro libovolné nenulové číslo λ. Použitím lemmatu 2.2.20 můžeme z oscilace vytknout absolutní hodnotu λ, tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p(\lambda F - f(x_i)\lambda G,\ [a_i,b_i]) = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p\Big(F - f(x_i)G,\ [a_i,b_i]\Big) < |\lambda|\,\varepsilon =: \varepsilon'.$$

Tedy pro libovolné $\varepsilon' > 0$ vezměme $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{|\lambda|}$ a vidíme, že podmínka z definice integrálu funkce f vzhledem ke λG je splněna.

Nyní dokažme aditivitu. Označme $F := F_1 + F_2$. Chceme ukázat, že F je neurčitý integrál funkce f vzhledem ke $G_1 + G_2$ na $[a, b]$. Tedy chceme ukázat, že

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon : [a, b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc} \Big(F - f(x_i)(G_1 + G_2),\ [a_i, b_i] \Big) < \varepsilon.$$

Z definice, F_1 je neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G_1 na intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon_1} : [a, b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_{\varepsilon_1}\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p \Big(F_1 - f(x_i)G_1,\ [a_i, b_i] \Big) < \varepsilon_1.$$

F_2 je neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G_2 na intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon_2} : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_{\varepsilon_2}\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}_p \Big(F_2 - f(x_i)G_2,\ [a_i, b_i] \Big) < \varepsilon_2.$$

K zadanému $\varepsilon > 0$ zvolme

$$\delta_\varepsilon = \min(\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}).$$

Pak každý δ_ε-jemný systém je zároveň δ_{ε_1}-jemný i δ_{ε_2}-jemný. Platí tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc} \Big(F - f(x_i)(G_1 + G_2),\ [a_i, b_i] \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc} \Big(F_1 - f(x_i)G_1 + F_2 - f(x_i)G_2,\ [a_i, b_i] \Big) <$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc} \Big(F_1 - f(x_i)G_1,\ [a_i, b_i] \Big) + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc} \Big(F_2 - f(x_i)G_2,\ [a_i, b_i] \Big) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon.$$

Nejprve jsme funkci F rozepsali jako $F_1 + F_2$, poté jsme využili trojúhelníkovou nerovnost pro supremum a protože předpokládáme, že F_1 je neurčitý integrál f vzhledem ke G_1 a F_2 je neurčitý integrál k f vzhledem k G_2, umíme součty obou oscilací udělat libovolně malé a tedy i menší než pevně zadané ε.

□

Důkaz následujícího tvrzení lze nalézt v [3, Theorem 3.5].

Tvrzení 3.1.6 (Jednoznačnost HKS^p_α integrálu)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $\alpha \geq 1$, $p \in [1, +\infty]$ a nechť F_1, F_2: $I \to \mathbb{R}$ jsou neurčité HKS^p_α integrály funkce f vzhledem k funkci G na I. Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že $F_1 = F_2 + C$ skoro všude.*

Tvrzení 3.1.7 (Integrál na podintervalu). *Nechť F je neurčitý HKS^p_α integrál funkce f vzhledem ke G na intervalu I. Je-li $J \subset I$ libovolný podinterval, pak F je také neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G na intervalu J.*

Důkaz. K libovolnému $\varepsilon > 0$ najdeme kalibr $\delta_\varepsilon : I \to (0,\infty)$ takový, že pro všechny δ_ε-jemné α-systémy $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ v intervalu I platí

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}\Big(F - f(x_i)G,\ [a_i, b_i]\Big) < \varepsilon.$$

Každý δ_ε-jemný α-systém $\{[c_i, d_i], x_i\}_{i=1}^n$ v intervalu J je také δ_ε-jemným α-systémem v intervalu I.

□

3.2 Vlastnosti HKS_α integrálu

V této sekci se zabýváme vlastnostmi HKS^p_α integrálu pro $p = C$.

Tvrzení 3.2.1. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $F, G, f : I \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Pak F je neurčitý HKS integrál funkce f vzhledem ke G na I právě tehdy, když F je neurčitý HKS_1 integrál funkce f vzhledem ke G na I.*

Důkaz tvrzení lze nalézt v [3, Proposition 3.7].

Důkaz. Předpokládejme, že F je neurčitý HKS integrál funkce f vzhledem ke G na I; ukážeme, že potom je také jejím HKS_1 integrálem. Připomeňme, že díky Saksovu-Henstockovu lemmatu jsme ekvivalentně přeformulovali definici HKS integrálu pomocí neurčitého integrálu (def. 1.4.3): F je neurčitým HKS integrálem funkce f vzhledem k funkci G právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon : [a,b] \to (0,\infty) \quad \forall\, \delta_\varepsilon\text{-jemná dělení} \quad \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i) - f(x_i)(G(b_i) - G(a_i))| < \varepsilon.$$

K zadanému $\varepsilon > 0$ uvažujme δ_ε-jemné dělení $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$. Pro libovolné j najdeme $z_j \in [a_j, b_j]$ takové, že $z_j \neq x_j$ a zároveň

$$\Big|F(z_j) - F(x_j) - f(x_j)(G(z_j) - G(x_j))\Big|$$
$$\geq \frac{1}{4} \sup_{x,y \in [a_j,b_j]} \Big|F(x) - F(y) - f(x_j)(G(x) - G(y))\Big|.$$

Ukažme sporem, že takové z_j vždy musí existovat. Pokud by totiž pro každé $z \in [a_j,b_j]$ platilo

$$\big|F(z) - F(x_j) - f(x_j)(G(z) - G(x_j)\big| <$$
$$< \frac{1}{4} \sup_{x,y \in [a_j,b_j]} \Big|F(x) - F(y) - f(x_j)(G(x) - G(y))\Big|,$$

pak by pro všechna $x, y \in [a_j,b_j]$ z trojúhelníkové nerovnosti plynulo

$$\Big|F(x) - F(y) - f(x_j)(G(x) - G(y)\Big| \leq$$

$$\leq \Big|F(x) - F(x_j) - f(x_j)(G(x) - G(x_j))\Big| + \Big|F(x_j) - F(y) - f(x_j)(G(x_j) - G(y))\Big| <$$

$$< \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[a_j,b_j]} \Big|F(x) - F(y) - f(x_j)(G(x) - G(y)\Big|,$$

což je ve sporu s definici suprema. Tedy

$$\Big|F(z_j) - F(x_j) - f(x_j)(G(z_j) - G(x_j))\Big| \geq \frac{1}{2} \operatorname{osc}(F - f(x_j)G, [a_j, b_j]).$$

Vezměme

$$[\alpha_j, \beta_j] := \begin{cases} [z_j, x_j] & z_j < x_j, \\ [x_j, z_j] & z_j > x_j. \end{cases}$$

Potom $\{[\alpha_i, \beta_i], x_i\}_{i=1}^n$ je δ_ε-jemný systém v intervalu $[a,b]$ a tedy

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}(F - f(x_i)G, [a_i, b_i]) \leq 2 \sum_{i=1}^n |F(\beta_i) - F(\alpha_i) - f(x_i)(G(\beta_i) - G(\alpha_i))| < 2\varepsilon.$$

Tedy F je neurčitý HKS_1 integrál funkce f vzhledem ke G.

Opačná implikace je zřejmá. Předpokládáme-li, že F je neurčitý HKS_1 integrál funkce f vzhledem ke G, pak pro všechny δ_ε-jemné systémy v $[a,b]$, a tedy také pro všechna δ_ε-jemná dělení (systémy pokrývající interval $[a,b]$) $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ platí

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}(F - f(x_i)G, [a_i, b_i]) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sup_{x,y\in[a_i,b_i]} \Big|F(x) - F(y) - f(x_i)(G(x) - G(y))\Big| < \varepsilon$$

a tedy platí také

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i) - f(x_i)(G(b_i) - G(a_i))| < 2\varepsilon.$$

□

Tvrzení 3.2.2 (Aditivita HKS_α integrálu vzhledem k integračnímu oboru)**.** *Nechť $f, F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Je-li F neurčitý integrál funkce f vzhledem ke G na intervalu $[a,c]$ i na intervalu $[c,b]$, pak je neurčitým integrálem funkce f vzhledem ke G na $[a,b]$.*

Důkaz. K zadanému $\varepsilon > 0$ najdeme kalibry $\delta_\varepsilon^{'} : [a,c] \to \mathbb{R}^+$ a $\delta_\varepsilon^{''} : [c,b] \to \mathbb{R}^+$ tak, že

$$\forall\, \delta_\varepsilon^{'}\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, c_i], x_i\}_{i=1}^n \text{ v } [a,c]: \quad \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}\Big(F - f(x_i)G,\ [a_i, c_i]\Big) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall\, \delta_\varepsilon^{''}\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[c_j, b_j], y_j\}_{j=1}^m \text{ v } [c,b]: \quad \sum_{j=1}^m \operatorname{osc}\Big(F - f(y_j)G,\ [c_j, b_j]\Big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definujme kalibr $\delta_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ následujícím způsobem:

$$\delta_\varepsilon(x) := \begin{cases} \min\{\delta_\varepsilon^{'}, \frac{1}{2}(c-x)\} & x \in [a,c) \\ \min\{\delta_\varepsilon^{'}, \delta_\varepsilon^{''}\} & x = c \\ \min\{\delta_\varepsilon^{''}, \frac{1}{2}(x-c)\} & x \in (c,b] \end{cases}$$

Touto konstrukcí kalibru zajistíme, že

$$\forall x < c: \quad x + \delta_\varepsilon(x) \le x + \frac{1}{2}(c-x) < c,$$

$$\forall x > c: \quad x - \delta_\varepsilon(x) \ge x - \frac{1}{2}(x-c) > c.$$

a z toho plyne, že je-li $x \neq c$, pak nutně $c \notin (x - \delta_\varepsilon(x), x + \delta_\varepsilon(x))$.

Pro libovolný δ_ε-jemný α-systém $\{[A_i, B_i], z_i\}_{i=1}^n$ v $[a,b]$ buď c neleží v žádném z intervalů $[A_i, B_i]$ nebo najdeme $m \in \{1, ..., n\}$ takové, že $c \in [A_m, B_m]$ a zároveň $c = z_m$. Předpokládejme tedy, že takový interval v tomto systému existuje (v opačném případě je důkaz tvrzení triviální).

Označme pro jednoduchost zápisu $H_i := F - f(z_i)G$. Pak platí

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{osc}(H_i,\ [A_i, B_i]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \operatorname{osc}(H_i,\ [A_i, B_i]) + \operatorname{osc}(H_m,\ [A_m, B_m]) + \sum_{i=m+1}^{n} \operatorname{osc}(H_i,\ [A_i, B_i]).$$

Využitím lemmatu 2.2.23 (subaditivita oscilace vzhledem k integračnímu oboru) získáváme odhad

$$\operatorname{osc}(H_m,\ [A_m, B_m]) \le \operatorname{osc}(H_m,\ [A_m, c]) + \operatorname{osc}(H_m,\ [c, B_m]),$$

a tedy dohromady získáváme:

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}(H_i,\, [A_i, B_i]) \le \sum_{i=1}^{m-1} \operatorname{osc}(H_i,\, [A_i, B_i]) + \operatorname{osc}(H_m,\, [A_m, c])$$

$$+ \operatorname{osc}(H_m,\, [c, B_m]) + \sum_{i=m+1}^{n} \operatorname{osc}(H_i,\, [A_i, B_i]) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy F je neurčitý integrál f vzhledem ke G na intervalu $[a,b]$.

□

Poznámka. Tvrzení neplatí pro $p \in [1, \infty]$. Ukažme protipříklad.

Příklad 3.2.3. Nechť $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ je identicky nulová funkce, $G : [0,2] \to \mathbb{R}$ je libovolný integrátor a nechť

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1], \\ 1 & x \in (1,2]. \end{cases}$$

Pak F je neurčitým HKS_α^p integrálem funkce f na intervalu [0,1] i na intervalu [1,2], ale není jejím neurčitým HKS_α^p integrálem na [0,2].

Zvolme $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ a uvažujme libovolný kalibr $\delta : [0,2] \to (0,2]$. Vezměme δ-jemný α-systém tvořený jediným intervalem

$$\left[1 - \frac{\delta(1)}{2},\, 1 + \frac{\delta(1)}{2}\right] \subseteq [0,2]$$

s význačným bodem $x_1 = 1$. Délka tohoto intervalu je tedy rovna $\delta(1)$. Medián funkce F může být libovolné číslo z intervalu $[0, 1]$ (příklad 2.1.5). Volme tedy medián $\lambda = 0$. Pro $p = 1$ tedy dle tvrzení 2.1.9 platí

$$\operatorname{osc}_1\left(F - f(1)G, \left[1 - \frac{\delta(1)}{2},\, 1 + \frac{\delta(1)}{2}\right]\right) = \frac{1}{\delta(1)} \int_{1-\frac{\delta(1)}{2}}^{1+\frac{\delta(1)}{2}} F(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\delta(1)} \int_{1}^{1+\frac{\delta(1)}{2}} 1\, dx = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Tedy F není neurčitým HKS_α^1 integrálem funkce f na $[0, 2]$ a tedy dle tvrzení 3.1.1 ani není jejím HKS_α^p integrálem na $[0, 2]$ pro žádné $p \in [1, \infty]$.

Tvrzení 3.2.4 (Jednoznačnost HKS_1 integrálu)**.** *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť F_1, F_2: $J \to \mathbb{R}$ jsou neurčité HKS_1 integrály funkce f vzhledem k funkci G na intervalu J. Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že $F_1 = F_2 + C$.*

Důkaz. Stačí dokázat, že $F_1 - F_2$ je konstantní na libovolném uzavřeném podintervalu $I \subset J$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. K němu najdeme kalibry δ'_ε, $\delta''_\varepsilon : I \to \mathbb{R}^+$ takové, že

$$\forall\, \delta'_\varepsilon\text{-jemné systémy } \{[c_i, d_i], z_i\}_{i=1}^n \text{ v } I: \quad \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}\Big(F_1 - f(z_i)G,\, [c_i, d_i]\Big) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall\, \delta''_\varepsilon\text{-jemné systémy } \{[u_i, v_i], t_i\}_{i=1}^m \text{ v } I: \quad \sum_{i=1}^m \operatorname{osc}\Big(F_2 - f(t_i)G,\, [u_i, v_i]\Big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vezměme

$$\delta_\varepsilon := \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon),$$

pak každý δ_ε-jemný systém je zároveň δ'_ε-jemný i δ''_ε-jemný.

Uvažujme libovolné δ_ε-jemné dělení $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$, tj. systém pokrývající interval I. Podle Cousinova lemmatu (Lemma 1.1.7) takový systém musí existovat. Pak

$$\operatorname{osc}(F_1 - F_2, I) \le \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}\Big(F_1 - F_2,\, [a_i, b_i]\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}\Big(F_1 - f(x_i)G + (-F_2 + f(x_i)G),\, [a_i, b_i]\Big) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}\Big(F_1 - f(x_i)G\,, [a_i, b_i]\Big) + \sum_{i=1}^n \operatorname{osc}\Big(F_2 - f(x_i)G\,, [a_i, b_i]\Big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

V první nerovnosti jsme využili Lemma 2.2.23 (subaditivita oscilace vzhledem k intervalu) a ve druhé nerovnosti jsme využili Tvrzení 2.2.12 (trojúhelníková nerovnost pro oscilaci) a Lemma 2.2.19.

Protože $\varepsilon > 0$ lze volit libovolně malé, dostáváme, že $\operatorname{osc}(F_1 - F_2, I) = 0$, tedy[1] $F_1 - F_2$ je konstantní funkce na intervalu I.

□

Definice 3.2.5 (Regulovaná funkce)**.** *Řekneme, že funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je **regulovaná**, pokud má v každém bodě intervalu $[a,b]$ konečné jednostranné limity, tj.*

$$\forall x \in [a,b) \quad \exists \lim_{t \to x_+} f(t) \in \mathbb{R},$$

$$\forall x \in (a,b] \quad \exists \lim_{t \to x_-} f(t) \in \mathbb{R}.$$

[1]

$$\operatorname{osc}(F, I) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sup_{x,y \in I} \Big|F(y) - F(x)\Big| = 0 \Leftrightarrow \forall x,y \in I : F(x) = F(y).$$

$$\Leftrightarrow F \text{ je konstantní na } I.$$

Tvrzení 3.2.6. *Nechť $\alpha \geq 1$, F je neurčitý HKS_α integrál funkce f vzhledem ke G na $[a,b]$ a nechť $c \in [a,b]$. Pak*

$$\lim_{x \to c} \Big(F(x) + f(c)(G(c) - G(x)) \Big) = F(c). \tag{3.3}$$

Poznámka. Je-li c krajním bodem intervalu $[a,b]$, uvažujeme jednostrannou limitu.

Důkaz. K zadanému $\varepsilon > 0$ najdeme kalibr $\delta_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechny δ_ε-jemné α-systémy $\{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n$ v intervalu $[a,b]$ platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{osc}(F - f(x_i)G,\, [a_i, b_i]) < \varepsilon.$$

Pokud $c < b$, pak pro libovolné $x \in (c, c + \delta_\varepsilon(c))$ splňující $[c, c + \alpha(x - c)) \subset [a,b]$ uvažujme δ_ε-jemný α-systém tvořený jedním intervalem

$$\{[c, x], c\}.$$

Tedy z definice integrálu plyne, že

$$\operatorname{osc}\Big(F - f(c)G\,, [c, x]\Big) < \varepsilon.$$

Tedy

$$\frac{1}{2} \sup_{t,z \in [c,x]} \Big| F(t) - F(z) - f(c)(G(t) - G(z)) \Big| < \varepsilon$$

a z toho plyne, že

$$\Big| F(x) - F(c) - f(c)(G(x) - G(c)) \Big| < 2\varepsilon. \tag{3.4}$$

Analogicky, pokud $c > a$, pak pro pro libovolné $x \in (c - \delta_\varepsilon(c), c)$ splňující $(c - \alpha(c - x), c] \subset [a,b]$ uvažujme δ_ε-jemný α-systém tvořený jedním intervalem

$$\{[x, c], c\}.$$

Tedy z definice integrálu plyne, že

$$\operatorname{osc}\Big(F - f(c)G\,, [x, c]\Big) < \varepsilon.$$

Tedy

$$\frac{1}{2} \sup_{t,z \in [x,c]} \Big| F(t) - F(z) - f(c)(G(t) - G(z)) \Big| < \varepsilon,$$

a z toho plyne, že

$$\Big| F(x) - F(c) - f(c)(G(x) - G(c)) \Big| < 2\varepsilon. \tag{3.5}$$

Z odhadů (3.4) a (3.5) tedy získáváme, že pro všechna $x \in (c - \delta_\varepsilon(c), c + \delta_\varepsilon(c))$ splňující

$$\Big(c - \alpha|c - x|, c + \alpha|c - x| \Big) \subset [a,b]$$

platí:

$$\Big| F(x) - F(c) + f(c)(G(c) - G(x)) \Big| < 2\varepsilon.$$

$\square$

Tvrzení 3.2.7. *Nechť F je neurčitý HKS_α integrál funkce f vzhledem ke G na intervalu $[a,b]$. Pokud G je regulovaná funkce, pak i F je regulovaná funkce a platí*

$$\forall c \in [a,b) \quad \lim_{x\to c_+} F(x) = F(c) + f(c)\Big(\lim_{x\to c_+} G(x) - G(c)\Big), \tag{3.6}$$

$$\forall c \in (a,b] \quad \lim_{x\to c_-} F(x) = F(c) + f(c)\Big(\lim_{x\to c_-} G(x) - G(c)\Big). \tag{3.7}$$

Důkaz. Dokážeme vztah (3.6). Z předcházejícího tvrzení víme, že pro libovolné $c \in [a,b)$ platí:

$$\lim_{x\to c}\Big(F(x) + f(c)(G(c) - G(x))\Big) = F(c).$$

Předpokládáme, že G je regulovaná funkce, proto musí existovat v každém bodě $c \in [a,b)$ vlastní limita $\lim_{x\to c_+} G(x)$ a tedy existuje vlastní limita

$$\lim_{x\to c_+}\Big(f(c)(G(c) - G(x))\Big).$$

Z věty o aritmetice limit tedy plyne:

$$F(c) = \lim_{x\to c_+}\Big(F(x) + f(c)(G(c) - G(x))\Big) = \lim_{x\to c} F(x) + \lim_{x\to c_+} f(c)(G(c) - G(x)) =$$

$$= \lim_{x\to c_+} F(x) + f(c)\Big(G(c) - \lim_{x\to c} G(x)\Big) = \lim_{x\to c_+} F(x) - f(c)\Big(\lim_{x\to c_+} G(x) - G(c)\Big).$$

Tedy existuje i vlastní limita $\lim_{x\to c_+} F(x)$ a platí (3.6). Analogicky dokážeme vztah (3.7) a existenci vlastní limity $\lim_{x\to c_-} F(x)$ v každém bodě $c \in (a,b]$. To znamená, že funkce F je také regulovaná.

$\square$

Tvrzení 3.2.8. *Nechť F je neurčitý HKS_α integrál funkce f vzhledem ke G na intervalu $[a,b]$. Je-li integrátor G je spojitá funkce, pak i neurčitý integrál F je spojitá funkce. Speciálně, neurčitý HK_α integrál je vždy spojitá funkce.*

Důkaz. Je-li G spojitá na $[a,b]$, je také regulovaná a tedy dle přecházejícího tvrzení splňuje (3.6) a (3.7). Ze spojitosti G plyne, že pro libovolné $x \in [a,b]$ je

$$\lim_{t\to x}(G(t) - G(x)) = 0$$

a tedy z rovností (3.6), (3.7) získáváme

$$\lim_{t\to x} F(t) = F(x),$$

přičemž v krajních bodech intervalu $[a,b]$ uvažujeme jednostranné limity.

$\square$

Tvrzení 3.2.9 (Jednoznačnost HKS_α integrálu)**.** *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $\alpha > 1$ a nechť F_1, F_2: $J \to \mathbb{R}$ jsou neurčité HKS_α integrály funkce f vzhledem k funkci G na J. Nechť F_1, F_2, G jsou regulované funkce. Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že $F_2 = F_1 + C$.*

Důkaz. Protože z tvrzení 3.1.3 vyplývá inkluze

$$HKS_\alpha \subseteq HKS_\alpha^\infty,$$

a pro HKS_α^∞ integrál platí jednoznačnost skoro všude (tvrzení 3.1.6), platí také pro HKS_α integrál. Tedy existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ tak, že $F_2 - F_1 = C$ skoro všude. Chceme ukázat, že za předpokladu regulovanosti platí tato rovnost všude.

Protože funkce F_1, F_2 jsou regulované a regulované funkce tvoří vektorový prostor, je také $F_2 - F_1$ regulovaná. Víme tedy, že $F_2 - F_1 = C$ s.v. a zároveň víme, že v každém bodě intervalu J musí existovat jednostranné limity funkce $F_2 - F_1$ a být konečné. Ukažme nejprve, že tyto limity se musí rovnat číslu C.

Pro libovolný bod $x \in J$ uvažme intervaly

$$I_n := \big(x,\, x + \frac{1}{n}\big),\ n \in \mathbb{N}.$$

Protože $F_2 - F_1 = C$ s.v., musí existovat bod $x_n \in I_n \cap J$ takový, že

$$(F_2 - F_1)(x_n) = C.$$

Pak platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

a zároveň

$$\lim_{n\to+\infty} (F_2 - F_1)(x_n) = C.$$

Protože funkce $F_2 - F_1$ je regulovaná, musí existovat limita zprava a mít stejnou hodnotu, tedy

$$\lim_{y\to x_+} (F_2 - F_1)(y) = C.$$

Analogicky dokážeme, že i limita zleva v bodě x má hodnotu C.

Stačí ukázat, že rovnost $F_2 - F_1 = C$ platí na libovolném uzavřeném intervalu $I \subset J$. Z linearity a homogenity integrálu vyplývá, že funkce $F_2 - F_1$ je neurčitý HKS_α integrál nulové funkce na intervalu I vzhledem k integrátoru G. Z tvrzení 3.2.7 tedy plyne, že v každém bodě $c \in I$ se funkce $F_2 - F_1$ shoduje se svými jednostrannými limitami, tedy označíme-li $I := [a, b]$, pak

$$\forall c \in [a,b) \quad \lim_{x\to c_+} (F_2 - F_1)(x) = (F_2 - F_1)(c)$$
$$\forall c \in (a,b] \quad \lim_{x\to c_-} (F_2 - F_1)(x) = (F_2 - F_1)(c)$$

Jak jsme již dokázali, tyto limity musí být rovny číslu C, proto

$$\forall x \in I \quad (F_2 - F_1)(x) = C,$$

a tedy funkce $F_2 - F_1$ musí být konstantní na celém intervalu I.

□

Definice 3.2.10 (Určitý HKS_α integrál). *Nechť $F, G, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce a $\alpha \geq 1$. Nechť F je neurčitý HKS_α integrál funkce f vzhledem ke G na $[a,b]$. Pro $\alpha = 1$ definujeme určitý integrál vztahem*

$$\int_a^b f\,dG := F(b) - F(a). \tag{3.8}$$

Jsou-li navíc F a G regulované funkce na $[a,b]$, pak určitý HKS_α integrál definujeme vztahem (3.8) i pro $\alpha > 1$.

Tvrzení 3.2.11. *Nechť F je neurčitý HKS_α integrál funkce f vzhledem ke G na intervalu $[a,b)$ a nechť existuje vlastní limita*

$$L := \lim_{x \to b_-} \Big(F(x) - f(b)(G(x) - G(b)) \Big). \tag{3.9}$$

Položíme-li $F(b) = L$, pak F je neurčitý HKS_α integrál f vzhledem ke G na $[a,b]$.

Poznámka. Analogické tvrzení platí pro interval $(a,b]$ a limitu v bodě a zprava.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Z definice limity (3.9) němu najdeme $\Delta > 0$ tak, že

$$\forall x \in [b - \Delta,\, b] : \quad \Big| F(x) - F(b) - f(b)(G(x) - G(b)) \Big| < \varepsilon.$$

Proto také platí:

$$\sup_{x \in [b - \Delta,\, b]} \Big| F(x) - F(b) - f(b)(G(x) - G(b)) \Big| < \varepsilon.$$

K danému $\varepsilon > 0$ najdeme kalibr δ_ε: $[a,\, b) \to \mathbb{R}^+$ takový, že

$$\forall \delta_\varepsilon\text{-jemné } \alpha\text{-systémy } \{[a_i, b_i], x_i\}_{i=1}^n \text{ v } [a,\, b) : \sum_{i=1}^n \operatorname{osc} \Big(F - f(x_i)G,\, [a_i, b_i] \Big) < \varepsilon.$$

Definujme nový kalibr $\delta'_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ následujícím způsobem:

$$\delta'_\varepsilon(x) := \begin{cases} \min\{\delta_\varepsilon(x), \frac{1}{2}(b - x)\} & x \in [a,\, b) \\ \Delta & x = b \end{cases}$$

Pak každý δ'_ε-jemný systém v $[a,\, b)$ je také δ_ε-jemný.
Chceme nyní ukázat, že pro libovolný δ'_ε-jemný α-systém tvaru $\{[z, b], \xi\}$ je

$$\operatorname{osc} \big(F - f(\xi)G,\, [z, b] \big) < \varepsilon.$$

Touto konstrukcí kalibru δ'_ε jsme zaručili, že systém tvaru $\{[z, b], \xi\}$ může být δ'_ε-jemný pouze v případě, že dělícím bodem bude krajní bod intervalu, tj.

$$\xi = b.$$

Pokud totiž $\xi \neq b$, pak neplatí inkluze $[z, b] \subset (\xi - \delta'_\varepsilon(\xi), \xi + \delta'_\varepsilon(\xi))$. Současně tím máme zaručeno, že délka tohoto intervalu musí být nejvýše Δ, tedy musí platit inkluze $[z, b] \subseteq [b - \Delta, b]$. Využitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme:

$$\operatorname{osc}\big(F - f(b)G,\ [z,b]\big) = \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[z,\,b]} \big|F(x) - F(y) - f(b)(G(x) - G(y))\big|$$

$$\le \frac{1}{2} \sup_{x,y\in[z,\,b]} (\big|F(x)-F(b)-f(b)(G(x)-G(b))\big|+\big|F(b)-F(y)-f(b)(G(b)-G(y))\big|)$$

$$\overset{2}{=} \frac{1}{2} \sup_{x\in[z,\,b]} |F(x) - F(b) - f(b)(G(x) - G(b))| +$$

$$+ \frac{1}{2} \sup_{y\in[z,\,b]} |F(y) - F(b) - f(b)(G(y) - G(b))| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

[2] V předposlední rovnosti jsme využili toho, že

$$\sup_{a,b}(f(a) + g(b)) = \sup_a f(a) + \sup_b g(b)$$

4. Vztah k ostatním integrálům

4.1 MC_α integrál

H. Bendová a J. Malý v roce 2011 definovali MC integrál, který je ekvivalentní s HK integrálem.

Definice 4.1.1 (MC integrál)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f, F : I \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Řekneme, že funkce F je neurčitý MC integrál (monotonically controlled) funkce f na I, pokud existuje ostře rostoucí funkce $\varphi : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in I$ platí:*

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y-x)}{\varphi(y) - \varphi(x)} = 0. \tag{4.1}$$

Definice je převzata z [9, Definition 1].

Příklad 4.1.2. Ukažme, že funkce $F(x) = x^2$ je neurčitým MC integrálem funkce $f(x) = 2x$ na libovolném otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Za ostře rostoucí funkci $\varphi : I \to \mathbb{R}$ volme například $\varphi(x) = x$. Pro libovolné $x \in I$ platí:

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y-x)}{\varphi(y) - \varphi(x)} = \lim_{y \to x} \frac{y^2 - x^2 - 2x(y-x)}{y - x} =$$

$$= \lim_{y \to x} \frac{y^2 - 2xy + x^2}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{(y-x)^2}{y - x} = \lim_{y \to x} (y - x) = 0.$$

V roce 2017 definovali T. Ball a D. Preiss MC_α integrál, který je zobecněním MC integrálu a je ekvivalentní s HK_α integrálem.

Definice 4.1.3 (MC_α integrál)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f, F : I \to \mathbb{R}$ jsou funkce a $\alpha > 0$. Řekneme, že funkce F je neurčitý MC_α integrál funkce f na I, pokud existuje ostře rostoucí funkce $\varphi : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in I$ platí:*

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y-x)}{\varphi(x + \alpha(y-x)) - \varphi(x)} = 0. \tag{4.2}$$

Definice je převzata z [8, Definition 2].

Tvrzení 4.1.4 (Vlastnosti MC_α integrálu)**.** *Nechť $\alpha > 0$ a F je neurčitý MC_α integrál funkce f na (a,b). Potom platí:*

- *F je spojitá na (a,b).*
- *$F'(x) = f(x)$ pro skoro všechna $x \in (a,b)$.*
- *Pro každé $\beta < \alpha$ je F také neurčitým MC_β integrálem funkce f na (a,b).*

Důkaz lze nalézt v [8, Proposition 4].

Tvrzení 4.1.5 (Vztah MC_α integrálu a HK_α integrálu)**.** *Nechť $\alpha \geq 1$, $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $F, f : I \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Pak F je neurčitým MC_α integrálem funkce f na I právě tehdy, je-li neurčitým HK_α integrálem funkce f na I.*

Důkaz lze nalézt v [3, Theorem 4.1].

Definice 4.1.6 (α-kontrolní funkce)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f, F, G : I \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce a $p \in [1, +\infty] \cup \{C\}$. Řekneme, že funkce $\varphi : I \to \mathbb{R}$ je **α-kontrolní funkce** trojice (f, F, G), pokud je ostře rostoucí na I a pro všechna $x \in I$ platí:*

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{\operatorname{osc}_p(F - f(x)G, [x, x+r])}{\varphi(x + \alpha r) - \varphi(x)} = \lim_{r \to 0_+} \frac{\operatorname{osc}_p(F - f(x)G, [x - r, x])}{\varphi(x) - \varphi(x - \alpha r)} = 0. \quad (4.3)$$

Definice je převzata z [3, sekce 4].

Poznámka. Je-li $p = C$ a $G(x) = x$, je definice (4.3) ekvivalentní s definicí (4.2).

Příklad 4.1.7. Funkce $F(x) = \log x$ je pro libovolné $\alpha > 0$ neurčitým MC_α integrálem funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ na libovolném otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}^+$. Za ostře rostoucí funkci $\varphi : I \to \mathbb{R}$ volme například $\varphi(x) = e^x$. Pro libovolné $x \in I$ platí:

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y - x)}{\varphi(x + \alpha(y - x)) - \varphi(x)} = \lim_{y \to x} \frac{\log y - \log x - \frac{1}{x}(y - x)}{e^{x + \alpha(y - x)} - e^x} =$$

$$= \lim_{y \to x} \frac{\log \frac{y}{x} - \frac{y}{x} + 1}{e^{x + \alpha(y - x)} - e^x} = \lim_{t \to 1} \frac{\log t - t + 1}{e^{x + \alpha x(t-1)} - e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{t \to 1} \frac{\frac{1}{t} - 1}{\alpha x e^{x + \alpha x(t-1)}} = \frac{0}{\alpha x e^x} = 0.$$

Tedy $\varphi(x) = e^x$ je α-kontrolní funkce pro trojici $(\frac{1}{x}, \log x, x)$ na $\mathbb{R}^+$.

Tvrzení 4.1.8 (Vztah HKS^p_α integrálu a α-kontrolní funkce)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f, F, G : I \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce a $p \in [1, +\infty] \cup \{C\}$. Pak F je neurčitým HKS^p_α integrálem funkce f vzhledem k funkci G na I právě tehdy, existuje-li α-kontrolní funkce $\varphi : I \to \mathbb{R}$ pro trojici (f, F, G).*

Důkaz lze nalézt v [3, Theorem 4.1].

4.2 Vztah s aproximativní derivací

Definice 4.2.1 (Bod hustoty)**.** *Řekneme, že $x \in \mathbb{R}$ je bodem hustoty množiny $M \subset \mathbb{R}$, pokud*

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{\mu((x - r, x + r) \setminus M)}{2r} = 0. \quad (4.4)$$

Definice 4.2.2 (Aproximativní limita a aproximativní derivace)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}$ je aproximativní limita funkce $F : I \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in I$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje množina $M_\varepsilon \subset I$ taková, že x je bodem hustoty množiny M_ε a současně $|F - A| < \varepsilon$ na M_ε. Píšeme*

$$\operatorname{ap} - \lim_{t \to x} F(t) = A.$$

Aproximativní derivaci funkce F v bodě $x \in I$ definujeme jako aproximativní limitu

$$\operatorname{ap} - F'(x) = \operatorname{ap} - \lim_{t \to x} \frac{F(x) - F(t)}{x - t}.$$

Následující tvrzení o vztahu aproximativní derivace a centrovaného HK_α^p integrálu dokázali J. Malý a K. Kuncová v roce 2019.

Tvrzení 4.2.3 (Vztah aproximativní derivace a HK_α^p integrálu). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $\alpha \geq 1$ a $p \in [1, +\infty]$. Je-li F neurčitý centrovaný HK_α^p integrál funkce f na I, pak f je aproximativní derivací F skoro všude. Je-li F neurčitý centrovaný HK_α integrál funkce f na I, pak $F = f'$ skoro všude.*

Důkaz lze najít v [3, Theorem 6.3].

4.3 Denjoyův-Chinčinův integrál

Definice 4.3.1 (Absolutní spojitost). *Nechť I je interval. Řekneme, že funkce $F : I \to \mathbb{R}$ je absolutně spojitá na množině $E \subset I$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každou konečnou posloupnost nepřekrývajících se intervalů $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^n$ s koncovými body v E platí:*

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta \quad \implies \quad \sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

*Řekneme, že funkce F je **zobecněná absolutně spojitá funkce** (ACG) na I, pokud F je spojitá na I a zároveň existuje posloupnost podmnožin $E_k \subset I$ taková, že $\bigcup_k E_k = I$ a zároveň F je absolutně spojitá na každé této podmnožině.*

Definice 4.3.2 (Denjoyův-Chinčinův integrál). *Nechť $F, f : I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce F je neurčitý Denjoyův-Chinčinův integrál funkce f, pokud F je zobecněná absolutně spojitá funkce na I a zároveň f je aproximativní derivací F skoro všude na I.*

Tvrzení 4.3.3. *Pro každé $\alpha \geq 1$ existuje funkce, která má Denjoyův-Chinčinův integrál, ale nemá centrovaný HK_α^1 integrál.*

Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v [3, Theorem 5.4].

Závěr

Vlastním přínosem v této práci jsou výsledky v kapitolách 2 a 3.

Ve druhé kapitole jsme se zabývali vlastnostmi oscilace z různých hledisek. Ukázali jsme, že oscilace jakožto funkcionál $F \mapsto \operatorname{osc}_p(F, I)$ je pseudonorma na prostoru měřitelných funkcí. Pro měřitelnou funkci $F : I \to \mathbb{R}$ a $p \in [1, \infty]$ jsme také zkoumali chování funkce $p \mapsto \operatorname{osc}_p(F, I)$, o které jsme mimo jiné dokázali, že je neklesající a platí pro ni, že

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{osc}_p(F,\, I) = \operatorname{osc}_\infty(F,\, I).$$

Tyto výsledky jsme pak v kapitole 3 využili při zkoumání tříd integrovatelných funkcí a ukázali jsme, že

$$\text{pro } p < q \text{ platí } HKS^q_\alpha \subseteq HKS^p_\alpha.$$

Dále jsme dokázali, že pro měřitelnou funkci F na intervalu I platí, že

$$\operatorname{osc}_\infty(F,\, I) \leq \operatorname{osc}_C(F,\, I),$$

přičemž za předpokladu spojitosti funkce F zde nastává rovnost. Tento výsledek jsme v kapitole 3 využili k dokázání inkluze

$$HKS^C_\alpha \subseteq HKS^\infty_\alpha.$$

Také jsme zkoumali vlastnosti oscilace vzhledem k intervalu. Jak jsme ukázali, obyčejná oscilace (tj. případ $p = C$) je subaditivní vzhledem k intervalu, tedy splňuje

$$\operatorname{osc}(F,\, [a, b]) \leq \operatorname{osc}(F,\, [a, c]) + \operatorname{osc}(F,\, [c, b]).$$

Tuto vlastnost ale p-oscilace nemá. Právě v důsledku toho jsme v kapitole 3 dokázali, že HKS_α integrál je aditivní vzhledem k integračnímu oboru, ale HKS^p_α integrál pro $p \in [1, +\infty]$ tuto vlastnost nemá. Obecně lze říci, že chování obyčejné oscilace je příznivější než chování p-oscilace.

Ve třetí kapitole jsme se nejprve zabývali vlastnostmi HKS^p_α integrálu, které jsou společné pro $p = C$ a $p \in [1, +\infty]$. Dokázali jsme například jejich linearitu vzhledem k integrandu i integrátoru. Poté jsme se zabývali vlastnostmi HKS_α integrálu a dokázali jsme například aditivitu vzhledem k integračnímu oboru, jednoznačnost pro $\alpha = 1$ nebo vztah s regulovaností. Neurčitým HKS_α integrálem nemusí být spojitá ani regulovaná funkce. Jak jsme ale ukázali, je-li integrátorem spojitá, resp. regulovaná funkce, pak neurčitý integrál musí být rovněž spojitá, resp. regulovaná funkce, a to nezávisle na integrandu.

Protože pro $p \in [1, +\infty]$ je oscilace $\operatorname{osc}_p(F, I)$ definována pomocí normy $||\cdot||_p$, která nerozeznává, že se dvě funkce liší pouze na množině nulové Lebesgueovy míry, nemůžeme pro $p \in [1, +\infty]$ definovat určitý HKS^p_α integrálem vztahem

$$\int_a^b f\, dG = F(b) - F(a),$$

neboť přičtením funkce, která je nulová skoro všude k neurčitému integrálu F získáme opět neurčitý integrál; tedy tato definice by nedávala smysl (hodnota určitého integrálu nebyla určena jednoznačně). Tímto vztahem definujeme pouze určitý HKS_1 integrál a za dodatečného předpokladu regulovanosti F i G také určitý HKS_α integrál pro $\alpha > 1$.

Další zajímavé tvrzení, které jsme dokázali pro HKS_α integrál, říká, že je-li F neurčitý HKS_α integrál funkce f vzhledem ke G na intervalu $[a,b)$ a existuje-li vlastní limita

$$L := \lim_{x \to b_-} \Big(F(x) - f(b)(G(x) - G(b)) \Big),$$

pak lze funkci F dodefinovat v krajním bodě intervalu $[a,b)$ hodnotou této limity, tj. položit $F(b) := L$, a takto dodefinovaná funkce F bude neurčitým HKS_α integrálem f vzhledem ke G na celém intervalu $[a,b]$. Analogické tvrzení samozřejmě platí pro interval $(a,b]$ a limitu v bodě a zprava. Obdoba tohoto tvrzení pro HKS integrál je známá jako Hakeova věta a lze ji nalézt například v publikaci [2].

Dalším zajímavým tématem jsou nejrůznější příklady funkcí, které jsou integrovatelné v jednom smyslu a nejsou integrovatelné v jiném smyslu. Příklady jsou často technicky náročné, a tak jsme se jim s ohledem na omezený rozsah práce nevěnovali. V publikaci [3] je několik takových příkladů zkonstruováno. Existují i jiné novější verze HK integrálu, jako je například KN integrál, který zavedl P. Krejčí [4]. Dosud zřejmě není vyjasněn vztah mezi KN integrálem a HKS^p_α integrálem, na což nám v této práci nezbyl prostor.

V rozšířené verzi práce jsme se ve druhé kapitole zabývali otázkou minimalizace normy

$$\big|\big|F(x) - c\big|\big|_p$$

pro dané $p \in [1,\infty]$ a pro danou měřitelnou funkci F na omezeném intervalu. Tento problém spadá spíše do L^p prostorů, nicméně úzce souvisí s pojmem oscilace, který je v definici HKS^p_α integrálu klíčový. Ukázali jsme, jak v případech $p = 1$, $p = 2$ a $p = \infty$ najít konstantu $c(p)$ splňující

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} ||F(x) - c||_p = \big|\big|F(x) - c(p)\big|\big|_p.$$

Shrňme to ještě jednou:

- Pro $p = 1$ je danou konstantou medián funkce F na intervalu $[a,b]$, tedy číslo λ splňující $F(x) \geq \lambda$ pro $x \in M$ a zároveň $F(x) \leq \lambda$ pro $x \in [a,b] \setminus M$, kde $M \subset [a,b]$ je nějaká měřitelná množina splňující $\mu(M) = \frac{1}{2}(b-a)$. Dokázali jsme, že medián musí vždy existovat, ale nemusí být určen jednoznačně. Za předpokladu spojitosti funkce F je vždy určen jednoznačně.

- Pro $p = 2$ je danou konstantou integrální průměr funkce F na intervalu $[a,b]$, tedy číslo
$$\frac{\int_a^b F(x)\,dx}{b-a}.$$

- Pro $p = \infty$ je danou konstantou aritmetický průměr esenciálního suprema a esenciálního infima funkce F na daném intervalu.

Ukázali jsme navíc, že pro všechna $p \in [1,\infty]$ je tato konstanta číslo splňující

$$\operatorname{ess\,inf} F(x) \;\leq\; c(p) \;\leq\; \operatorname{ess\,sup} F(x).$$

S tím souvisí několik zajímavých otázek, které zůstávají otevřené.

Otevřené problémy

- Nechť I je omezený uzavřený interval a $F : I \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Existuje pro všechna $p \in (1, +\infty]$ konstanta $c(p)$ splňující
$$\inf_{c\in\mathbb{R}} ||F(x) - c||_p = \big|\big|F(x) - c(p)\big|\big|_p,$$
která je určena jednoznačně? V kladném případě má smysl hovořit o funkci $p \mapsto c(p)$ a zabývat se jejími vlastnostmi. Například:
  - Je funkce $c(p)$ spojitá, popř. diferencovatelná?
  - Platí, že
$$\lim_{p\to+\infty} c(p) = c(\infty)?$$
  - Musí existovat vlastní limita
$$\lim_{p\to 1_+} c(p) = \lambda \in \mathbb{R}?$$
Pokud ano, musí být číslo λ mediánem funkce F i za předpokladu, že nemá jednoznačně určený medián?
  - Platí, že
$$\lim_{p\to 1_+} c'(p) = 0?$$
  - V případě, že funkce $c(p)$ není monotónní[1], musí mít v intervalu $(1, \infty)$ nejvýše jeden extrém?
- Existuje funkce, která je HKS_α^∞ integrovatelná, ale není HKS_α^C integrovatelná? V tvrzení 3.1.3 jsme dokázali, že pro pevně zvolený integrátor platí inkluze
$$HKS_\alpha^C \subseteq HKS_\alpha^\infty$$
a v příkladu 3.1.2 jsme našli trojici F, G, f takovou, že F je neurčitý HKS_α^∞ integrál funkce f vzhledem ke G, ale není jejím HKS_α^C integrálem. Otázkou zůstává, zda lze najít dvojici funkcí f, G takovou, že existuje neurčitý HKS_α^∞ integrál f vzhledem ke G, ale neexistuje HKS_α^C integrál.[2]
- V tvrzení 3.2.9 jsme dokázali jednoznačnost HKS_α integrálu pro $\alpha > 1$ za předpokladu regulovanosti integrátoru a neurčitého integrálu. To nasvědčuje tomu, že bez předpokladu regulovanosti zřejmě nemusí být neurčitý HKS_α integrál pro $\alpha > 1$ určen jednoznačně. Najdeme příklad neregulovaného integrátoru G a dvou různých neregulovaných funkcí F_1, F_2, které jsou obě neurčitými HKS_α integrály téže funkce f vzhledem ke G pro nějaké $\alpha > 1$, ale funkce $F_1 - F_2$ není konstantní?

[1] Dlouho jsem byl přesvědčen, že funkce $c(p)$ musí být vždy monotónní (čemuž nasvědčoval i příklad 2.2.6 a další příklady) a snažil jsem se monotonii dokázat. Zjištění, že tomu tak být nemusí, bylo překvapující.

[2] Je jasné, že integrand musí být nekonstantní funkce. Je-li totiž např. $f(x) = 1$, pak integrátor G může být jakákoliv funkce a vzhledem k němu bude f vždy integrovatelná, jelikož lze vždy volit $F = G$ a tato funkce bude její neurčitý HKS_α^C integrál (oscilace funkce $F(x) - f(x_i)G(x)$ bude nulová). Je tedy nutné najít jinou volbu integrandu a integrátoru než v příkladu 3.1.2.

Seznam použité literatury

[1] M. Tvrdý: *Stieltjesův integrál (Kurzweilova teorie).* Univerzita Palackého v Olomouci, 2012.

[2] G. A. Monteiro, A. Slavík, M. Tvrdý: *Kurzweil-Stieltjes Integral. Theory and Applications.* World Scientific, 2019.

[3] J. Malý, K. Kuncová: *On a generalization of Henstock-Kurzweil integrals.* Mathematica Bohemica 144 (2019), 393–422.

[4] P. Krejčí: *The Kurzweil integral with exclusion of negligible sets.* Mathematica Bohemica 128 (2003), 277–292.

[5] Š. Schwabik: *Integrace v R (Kurzweilova teorie).* UK Karolinum, 1999.

[6] S. Kao, J. Gonzales: *Math 402 - Real Analysis, The Henstock-Kurzweil Integral.* (2015) https://bit.ly/3qUgzQ3.

[7] L. Pick, A. Kufner, O. John, S. Fučík: *Function spaces.* De Gruyter, 2013.

[8] T. Ball, D. Preiss: *Monotonically controlled integrals.* Mathematics Almost Everywhere. In Memory of Solomon Marcus (A. Bellow et al., eds.). World Scientific Publishing, Hackensack (2018), https://arxiv.org/pdf/1709.04345.pdf.

[9] H. Bendová, J. Malý: *An elementary way to introduce a Perron-like integral.* Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. 36 (2011), 153–164.

[10] J. Kurzweil: *Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter.* Czech. Math. Journal 7(82) (1957), 418–449.

[11] Š. Schwabik. P. Šarmanová: *Malý průvodce historií integrálu.* (Czech), Praha: Prometheus, 1996.

[12] Z. Strakoš: *Metoda konjugovaných gradientů jako dobrodružství jdoucí přes staletí.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 65 (2020), 197–222.