

# Posudek diplomové práce

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

**Autor práce** Bc. Marian Poljak  
**Název práce** Off-diagonal ordered Ramsey numbers  
**Rok odevzdání** 2023  
**Studijní program** Informatika **Studijní obor** Diskrétní modely a algoritmy

**Autor posudku** doc. RNDr. Martin Balko, Ph.D. **Role** vedoucí  
**Pracoviště** Katedra aplikované matematiky

## Text posudku:

Předložená práce je pokračováním autorovy úspěšné bakalářské práce, ve které zkoumal vlastnosti uspořádaných čísel pro speciální třídy uspořádaných grafů. Tato práce je více soustředěna na ne-diagonální uspořádaná Ramseyova čísla, konkrétně na uspořádaná Ramseyova čísla  $R_{<}(M^{<}, K_3^{<})$  pro uspořádané  $n$ -vrcholové párování  $M^{<}$  a trojúhelník  $K_3^{<}$ . Jejich studium je motivováno následujícím otevřeným problémem, který formulovali autoři Conlon, Fox, Lee a Sudakov v roce 2017: existuje konstanta  $\varepsilon > 0$  taková, že  $R_{<}(M^{<}, K_3^{<}) \in O(n^{2-\varepsilon})$ ? Jedná se o jeden z nejzajímavějších a nejtěžších otevřených problémů z teorie uspořádaných Ramseyových čísel, pro nějž nejlepší známé odhady dávají  $R_{<}(M^{<}, K_3^{<}) \in \Omega((n/\log n)^{4/3})$  a  $R_{<}(M^{<}, K_3^{<}) \in O(n^2/\log n)$ . Je proto skvělé, že autor práce dokázal u tohoto problému dosáhnout částečného pokroku.

Mezi hlavní výsledky práce patří odhad  $R_{<}(M^{<}, K_3^{<}) \in \Omega((n/\log n)^{5/4})$  pro téměř všechna uspořádaná  $n$ -vrcholová párování s chromatickým číslem 2. Pro chromatické číslo 3 autor dokázal  $R_{<}(M^{<}, K_3^{<}) \in \Omega((n/\log n)^{4/3})$  pro konkrétní uspořádané párování  $M^{<}$ , což asymptoticky odpovídá dolnímu odhadu pro obecná uspořádaná párování od autorů Conlon, Fox, Lee a Sudakov. Pro téměř všechna uspořádaná  $n$ -vrcholová párování s chromatickým číslem 2 je dokázán i horní odhad  $R_{<}(M^{<}, K_3^{<}) \in O(n^{7/4})$ , který vylepšuje horní odhad od Dhruva Rohatgiho z MIT. Součástí práce je i konstrukce obarvení, která dává dolní odhad na uspořádaná Ramseyova čísla tzv. nested párování, který vyvrací domněnku od Dhruva Rohatgiho. První protipříklad byl uvedený již v autorově bakalářské práci, ale teprve tato konstrukce dává nekonečně velké protipříklady.

Práce je napsána pečlivě, nenašel jsem žádné překlepy a všechna tvrzení a kroky v důkazech jsou srozumitelně vysvětleny. Použité techniky jsou vysoce netriviální, v důkazech dolních odhadů je použito například Lovászovo lokální lemma a důkaz horního odhadu je založen na technice vykreslování pomocí tzv. vláken, což je metoda, která se nově objevila v několika nedávných důkazech z různých oblastí extrémní kombinatoriky.

**Výsledky této práce byly již ve formě prodlouženého abstraktu přijaty na konfer-**

**enci EuroComb 2023** a plná verze daného článku je již odeslána do kvalitního mezinárodního impaktovaného časopisu.

Celkově práci považuji za velmi kvalitní s významným vědeckým přínosem a převyšující standardní požadavky na diplomovou práci a doporučuji ji ohodnotit známkou **výborně**. Práci **navrhuji i na zvláštní ocenění**, neboť kvalitou podle mého názoru převyšuje původní bakalářskou práci, za kterou byl autor v roce 2021 oceněn cenou Jaroslava Heyrovského pro nejlepší absolventy přírodovědných oborů.

**Práci doporučuji k obhajobě.**

**Práci navrhuji na zvláštní ocenění.**

V Praze dne 30. 5. 2023

Podpis: