MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Kateřina Lipavská

Dynamické modely pro panelová data

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Šárka Hudecová, Ph.D.
Studijní program:	Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie
Studijní obor:	MPSP

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucí mé diplomové práce RNDr. Šárce Hudecové, Ph.D. za cenné rady a připomínky, ochotu a množství času, které mi věnovala.

Název práce: Dynamické modely pro panelová data

Autor: Kateřina Lipavská

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Šárka Hudecová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce se zabývá dynamickým modelem pro panelová data a odhady jeho parametrů. Nejprve jsou zopakovány odhady pro lineární regresní model a zobecněná metoda momentů. Dále jsou uvedeny klasické odhady pro model panelových dat a zdůvodnění nevhodnosti použití těchto odhadů na dynamický model panelových dat. Následně jsou ukázány dvoustupňové odhady a odhady zobecněnou metodou momentů vhodné pro dynamický model, jmenovitě Arellanův-Bondův, Arellanův-Boverův a Ahnův-Schmidtův odhad. V závěru jsou na základě Monte Carlo simulační studie ověřeny vybrané teoretické výsledky a je porovnáno chování odhadů uvedených v práci pro různá nastavení.

Klíčová slova: panelová data, dynamický model, první diference, zobecněná metoda momentů

Title: Dynamic panel data models

Author: Kateřina Lipavská

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Šárka Hudecová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with a dynamic panel data model and parameters estimation in these models. First, estimation of parameters in linear regression models is revised as well as generalized method of moments. Second, classical estimation methods for panel data model are considered and it is shown why they are inappropriate to use for dynamic panel data model. Subsequently, two-stage least squares estimation method and estimators based on generalized method of moments are presented, namely Arellano-Bond, Arellano-Bover and Ahn-Schmidt estimators. Some of the theoretical results are illustrated in a Monte Carlo simulation study, which also compares behaviour of the presented estimators under various settings.

Keywords: panel data, dynamic model, first differences, generalized method of moments

Obsah

Úvod

Panelová data pro modelování n subjektů v T časech jsou v ekonometrii jednou z nejužívanějších datových struktur. K jejich analýze existují tři tradiční přístupy – společný model ignorující závislostní strukturu, model s fixními efekty a model s náhodnými efekty. Vykazují-li rezidua zkonstruovaného standardního modelu porušení předpokladů o nekorelovanosti náhodných chyb, můžeme zvolit nějaký model pro náhodné chyby. Dalším možným řešením je do modelu přidat zpožděné hodnoty odezvy, pak dostáváme tzv. dynamický panelový model, který je tématem této práce.

V případě, že jako jeden z regresorů použijeme zpožděnou hodnotu odezvy, způsobíme tím korelovanost regresorů a náhodných chyb, čímž porušíme jeden ze základních předpokladů lineárního modelu. Odhad pak nemá očekávané a požadované vlastnosti. Proto používáme jiné než tyto standardní přístupy k odhadu parametrů modelu.

V první kapitole jsou uvedeny různé odhady v lineárním regresním modelu, je zopakován odhad metodou obyčejných nejmenších čtverců, metodou přípustných zobecněných nejmenších čtverců a dvoustupňový odhad, dále je představena zobecněná metoda momentů a její souvislost s odhadem založeným na instrumentálních proměnných.

Druhá kapitola připomíná tři tradiční přístupy k panelovým datům – společný model, model s fixními efekty a model s náhodnými efekty, které jsou demonstrovány na příkladu Grunfeldových dat.

Ve třetí kapitole představujeme dynamický model panelových dat, ukazujeme, proč tradiční přístupy nejsou vhodné, a představíme různé odhady zobecněnou metodou momentů, jmenovitě Andersonův-Hsiaoův, Arellanův-Bondův, Arellanův-Boverův a Ahnův-Schmidtův odhad.

Čtvrtou kapitolu tvoří simulační studie, ve které ilustrujeme některé teoretické výsledky a porovnáváme jednotlivé odhady ze třetí kapitoly. Simulace, stejně jako tvorba obrázků, byla provedena v programu R, R Core Team (2020).

Za vlastní přínos práce lze považovat sepsání problematiky v jednotném značení, podrobná odvození a především provedení simulační studie.

1. Různé odhady v lineárním regresním modelu

V dalších kapitolách budeme používat různé odhady vycházející z lineárního regresního modelu, proto je nejprve stručně připomeneme. V části 1.1 zopakujeme metodu obyčejných nejmenších čtverců v klasickém lineárním regresním modelu, v části 1.2 metodu přípustných zobecněných nejmenších čtverců, v části 1.3 dvoustupňový odhad pomocí instrumentálních proměnných, v části 1.4 uvedeme odhad zobecněnou metodou momentů a v části 1.5 souvislost mezi dvoustupňovým odhadem a odhadem zobecněnou metodou momentů. Následující části čerpají z knih Wooldridge (2013) a Greene (2003).

Uvažujme lineární regresní model

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

kde $\mathbb{X}$ je matice modelu s n řádky a k sloupci, $\mathbf{Y}$ je odezva, $\boldsymbol{\beta}$ vektor parametrů a $\boldsymbol{\varepsilon}$ chybový člen. Vektor parametrů $\boldsymbol{\beta}$ má rozměry $(k \times 1)$. V dalším textu budeme vždy předpokládat model s plnou hodností, tedy že $\mathrm{P}(\mathrm{rank}(\mathbb{X}^\top\mathbb{X}) = k) = 1$.

1.1 Metoda obyčejných nejmenších čtverců

Odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ metodou obyčejných nejmenších čtverců v lineárním regresním modelu můžeme vyjádřit jako

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^\top\mathbf{Y}.$$

Platí-li předpoklad

(PLR1) $\mathbf{E}[\mathbf{Y}|\mathbb{X}] = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta}$,

ekvivalentní předpokladu $\mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbb{X}] = 0$, je uvedený odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ metodou obyčejných nejmenších čtverců nestranný, neboť

$$\mathbf{E}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbb{X}] = \mathbf{E}[(\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^\top\mathbf{Y}|\mathbb{X}] = (\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^\top\mathbf{E}[\mathbf{Y}|\mathbb{X}] = (\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

a tedy i $\mathbf{E}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$.

Platí-li předpoklad

(PLR2) $\mathbf{var}[\mathbf{Y}|\mathbb{X}] = \sigma^2\mathbb{I}_n$,

je rozptyl odhadu parametrů $\mathbf{var}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbb{X}] = \sigma^2(\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}$.

Matice modelu $\mathbb{X}$ má v řádcích vysvětlující proměnné pro jednotlivá pozorování,

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^\top \\ \mathbf{X}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^\top \end{bmatrix}.$$

Jsou-li $(Y_i, \mathbf{X}_i)$ nezávislé, stejně rozdělené, je předpoklad (PLR1) ekvivalentní předpokladu $\mathbf{E}[\varepsilon_i|\mathbf{X}_i] = 0 \quad \forall\, i = 1,\ldots,n$ a předpoklad (PLR2) je ekvivalentní předpokladu $\mathbf{var}[Y_i|\mathbf{X}_i] = \sigma^2 \quad \forall\, i = 1,\ldots,n$.

Z předpokladů (PLR1) a (PLR2) plyne, že chybové členy ε_i mají podmíněně při dané matici modelu $\mathbb{X}$ nulovou střední hodnotu a rozptyl σ^2.

Věta 1 (Gaussova-Markovova)**.** *V lineárním regresním modelu za předpokladů (PLR1) a (PLR2) platí, že odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ metodou obyčejných nejmenších čtverců je nejlepší lineární nestranný odhad.*

Důkaz. Viz věta 3.4 knihy Wooldridge (2013). □

Nyní uvedeme asymptotické vlastnosti.

Věta 2. *Uvažujme následující předpoklady:*

(PLR3) $\dfrac{1}{n}\mathbb{X}^\top\mathbb{X} \xrightarrow[n\to\infty]{P} W$, *kde W je konečná regulární matice,*

(PLR4) $\dfrac{1}{n}\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$,

(PLR5') $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,\sigma^2 Z)$, *kde Z je konečná regulární matice,*

(PLR5) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,\sigma^2 W)$, *kde W je matice z předpokladu (PLR3).*

Za předpokladů (PLR3) a (PLR4) je $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ metodou obyčejných nejmenších čtverců, konzistentní.

Za předpokladů (PLR3) a (PLR5') platí, že odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ metodou obyčejných nejmenších čtverců je pro $n \to \infty$ asymptoticky normální.

Platí-li navíc předpoklad (PLR5), pak reziduální rozptyl

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i - Y_i)^2}{n-k} \tag{1.1}$$

je pro $n \to \infty$ konzistentní odhad parametru σ^2, kde $\widehat{Y}_i = \mathbf{X}_i^\top\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, $i = 1,\ldots,n$, jsou vyrovnané hodnoty. Dále platí

$$T_n = \frac{\widehat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2(\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}_{jj}}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1), \tag{1.2}$$

kde β_j, resp. $\widehat{\beta}_j$ značí j-tou složku vektoru $\boldsymbol{\beta}$, resp. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ a $(\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}_{jj}$ je j-tý diagonální prvek matice $(\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}$.

Důkaz. Ukážeme konzistenci, vyjdeme z tvaru odhadu $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ a výraz upravíme.

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= \left(\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\mathbb{X}^\top\mathbf{Y} = n\left(\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\mathbb{X}^\top\mathbf{Y} = n\left(\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\mathbb{X}^\top\left(\mathbb{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \\ &= n\left(\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + n\left(\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta} + n\left(\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\varepsilon} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{P} \boldsymbol{\beta} + W^{-1}\cdot 0 = \boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

Důkaz asymptotické normality plyne analogicky s použitím Cramérovy-Slutského věty, detaily lze nalézt v knize Wooldridge (2013) jako důkaz věty 5.2. □

Platí-li (1.2), budeme v dalším textu psát, že odhady směrodatných chyb metodou obyčejných nejmenších čtverců jsou asymptoticky platné.

Pokud jsou chyby $\boldsymbol{\varepsilon}$ korelované s regresory, pak nutně není splněn předpoklad (PLR1), jelikož $\mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}\mathbb{X}] \neq 0$ implikuje $\mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbb{X}] = \boldsymbol{c} \neq 0$. V takovém případě je odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ metodou obyčejných nejmenších čtverců vychýlený, jelikož

$$\mathbf{E}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbb{X}] = \mathbf{E}[(\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^\top(\mathbb{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon})|\mathbb{X}] = \boldsymbol{\beta} + (\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^\top\mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbb{X}] \neq \boldsymbol{\beta}.$$

Nyní předpokládejme, že je splněn předpoklad (PLR3), ale oproti situaci ve větě 2

$\frac{1}{n}\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{P} A$, kde A je konečný vektor.

Vektor A v případě korelovanosti chyb $\boldsymbol{\varepsilon}$ a regresorů $\mathbb{X}$ obecně není nulový, což ukážeme pro náhodný výběr $(\mathbf{X}_i^\top, \varepsilon_i)^\top$, $i = 1,\dots,n$, za předpokladu, že střední hodnota $\mathbf{X}_i\varepsilon_i$ je konečná. Podle zákona velkých čísel pak totiž platí, že

$$\frac{1}{n}\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i\varepsilon_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mathbf{E}[\mathbf{X_1}\varepsilon_1] = \mathbf{cov}[\mathbf{X_1}, \varepsilon_1].$$

Uvedených předpokladů využijeme, podobně jako v důkazu konzistence, k úpravě výrazu pro odhad parametrů metodou obyčejných nejmenších čtverců

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= \left(\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\mathbb{X}^\top\mathbf{Y} = n\left(\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\mathbb{X}^\top\mathbf{Y} = n\left(\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\mathbb{X}^\top\left(\mathbb{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \\ &= n\left(\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + n\left(\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta} + n\left(\mathbb{X}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\varepsilon} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{P} \boldsymbol{\beta} + W^{-1}\cdot A \neq \boldsymbol{\beta},\end{aligned}$$

proto je odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ v případě korelovanosti regresorů a chyb nekonzistentní. Parametry můžeme v takovém případě odhadnout např. dvoustupňovým odhadem, viz část 1.3.

1.2 Metoda přípustných zobecněných nejmenších čtverců

V případě, že v lineárním regresním modelu $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ platí předpoklad (PLR1), ale neplatí předpoklad (PLR2) z kapitoly 1.1, je odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ metodou obyčejných nejmenších čtverců nestranný a může být konzistentní, ale není nejlepší. Dále neplatí t-testy s testovou statistikou T_n ve vzorci (1.2), neboť $\mathbf{var}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbb{X}] \neq \sigma^2(\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}$.

Označíme
$$\mathbf{var}[\mathbf{Y}|\mathbb{X}] = \sigma^2 \cdot \boldsymbol{\Omega},$$
kde σ^2 je neznámý parametr a $\boldsymbol{\Omega}$ je známá matice, o níž předpokládáme, že je pozitivně definitní. Lineární model s touto varianční maticí budeme nazývat zobecněný (angl. general) model lineární regrese. V tomto modelu je

$$\mathbf{var}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbb{X}] = (\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^\top\mathbf{var}[\mathbf{Y}|\mathbb{X}]\mathbb{X}(\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1} = (\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^\top\sigma^2 \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbb{X}(\mathbb{X}^\top\mathbb{X})^{-1}.$$

Namísto metody obyčejných nejmenších čtverců budeme vektor parametrů $\boldsymbol{\beta}$ odhadovat metodou zobecněných nejmenších čtverců (angl. generalized least squares). Vyjdeme z předpokladu, že matice $\boldsymbol{\Omega}$ je pozitivně definitní, pak i matice $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ je pozitivně definitní, a proto existuje symetrická matice $\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}$ taková, že $\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}$. Tuto matici můžeme nalézt např. pomocí spektrálního rozkladu $\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^\top$, kde $\mathbf{Q}$ je ortogonální matice, $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbb{I}_n$ a $\boldsymbol{\Lambda}$ je diagonální, s vlastními čísly λ_i, $i = 1,\dots,n$, na diagonále, která jsou z pozitivní definitnosti matice $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ kladná. Matice $\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}$ pak bude mít spektrální rozklad

$$\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\top,$$

kde matice $\mathbf{Q}$ je ze spektrálního rozkladu matice $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ a matice $\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$ je diagonální matice s prvky $\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1,\dots,n$, na diagonále.

Označíme $\mathbf{Y}^* = \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Y}$, $\mathbb{X}^* = \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{X}$ a $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}$. V modelu $\mathbf{Y}^* = \mathbb{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*$ platí $\mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}^*|\mathbb{X}] = 0$ a $\mathbf{var}[\boldsymbol{\varepsilon}^*|\mathbb{X}] = \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{var}[\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbb{X}]\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\sigma^2 \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} = \sigma^2 \cdot \mathbb{I}_n$, jsou tedy splněny předpoklady (PLR1) a (PLR2) klasického lineárního modelu. Proto je odhad

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_G = (\mathbb{X}^{*\top}\mathbb{X}^*)^{-1}\mathbb{X}^{*\top}\mathbf{Y}^* = (\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Y}$$

vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ metodou zobecněných nejmenších čtverců nejlepší lineární nestranný odhad. Toto plyne z Gaussovy-Markovovy věty (věta 1) pro transformovaný model.

Varianční matice odhadu vektoru parametrů je $\mathbf{var}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_G|\mathbb{X}] = \sigma^2(\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbb{X})^{-1}$. Pro testy o složkách $\boldsymbol{\beta}$ proto použijeme testovou statistiku

$$T_n = \frac{\widehat{\beta}_{Gj} - \beta_j}{\sqrt{\widehat{\sigma}_G^2(\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbb{X})^{-1}_{jj}}}, \tag{1.3}$$

kde β_j, resp. $\widehat{\beta}_{Gj}$ značí j-tou složku vektoru $\boldsymbol{\beta}$, resp. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_G$, $(\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbb{X})^{-1}_{jj}$ j-tý diagonální prvek matice $(\mathbb{X}^\top\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbb{X})^{-1}$ a $\widehat{\sigma}_G^2$ je odhad parametru σ^2, odhad získáme jako střední čtverec reziduí v modelu $\mathbf{Y}^* = \mathbb{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*$,

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_G^2 &= \frac{1}{n-k}\left|\left|\mathbf{Y}^* - \mathbb{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}_G\right|\right|^2 = \frac{1}{n-k}\left(\mathbf{Y}^* - \mathbb{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}_G\right)^\top\left(\mathbf{Y}^* - \mathbb{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}_G\right) = \\ &= \frac{1}{n-k}\left(\mathbf{Y} - \mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_G\right)^\top\boldsymbol{\Omega}^{-1}\left(\mathbf{Y} - \mathbb{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_G\right).\end{aligned}$$

Za předpokladů (PLR3), (PLR4) a (PLR5) z tvrzení 2 pro model $\mathbf{Y}^* = \mathbb{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*$ platí, že $\widehat{\sigma}_G^2$ je pro $n \to \infty$ konzistentní odhad σ^2 a pro testovou statistiku (1.3) platí $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$.

Speciálně, je-li matice $\boldsymbol{\Omega}$ diagonální (což nastává v případě heteroskedasticity), mluvíme o odhadu metodou vážených nejmenších čtverců.

Předpoklad, že matice $\boldsymbol{\Omega}$ je plně známá, je omezující. Přejdeme proto k odhadu metodou přípustných (angl. feasible) zobecněných nejmenších čtverců, ve kterém je matice $\boldsymbol{\Omega}$ funkcí vektoru neznámých parametrů $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)^\top$, tedy $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\gamma})$. Nejprve odhadneme vektor parametrů $\boldsymbol{\gamma}$ pomocí konzistentního odhadu $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$, dále jej použijeme k odhadu $\widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega}(\widehat{\boldsymbol{\gamma}})$ a vektor parametrů $\boldsymbol{\beta}$ odhadneme jako

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_F = (\mathbb{X}^\top \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{Y}.$$

Prakticky probíhá odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ metodou přípustných zobecněných nejmenších čtverců v modelu $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ následovně:

1. Odhadneme vektor parametrů $\boldsymbol{\beta}$ metodou obyčejných nejmenších čtverců, rezidua označíme $e_1, \ldots, e_n$.
2. Z reziduí $e_1, \ldots, e_n$ spočteme $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$.
3. Odhad $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ použijeme k odhadu $\widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega}(\widehat{\boldsymbol{\gamma}})$ a následně k odhadu $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_F$.

Případně můžeme kroky 2. – 3. iterovat.

1.3 Dvoustupňový odhad metodou nejmenších čtverců

Uvažujme lineární regresní model

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

kde dimenze matice modelu $\mathbb{X}$ jsou $n \times k$. Předpokládejme, že v tomto modelu platí $\mathbf{E}\varepsilon_i = 0$, ale neplatí předpoklad (PLR1), tedy rezidua jsou korelovaná s regresory, $\mathbf{E}[\mathbf{X}_i\varepsilon_i] \neq 0$. Jelikož neplatí základní předpoklad lineárního regresního modelu, nemůžeme vektor parametrů $\boldsymbol{\beta}$ odhadnout metodou nejmenších čtverců, takový odhad by byl vychýlený a mohl by být nekonzistentní, viz konec části 1.1.

Nechť jsou k dispozici instrumentální proměnné $Z_{i1}, \ldots, Z_{iq}$ nekorelované s ε_i, ale korelované s $X_{i1}, \ldots, X_{ik}$, $i = 1, \ldots, n$. Je-li X_{ij} nekorelované s ε_i, zařadíme jej mezi instrumenty, speciálně absolutní člen, byl-li zahrnut v modelu.

Označíme

$$\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} Z_{i1} \\ \vdots \\ Z_{iq} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} X_{i1} \\ \vdots \\ X_{ik} \end{pmatrix}, i = 1, \ldots, n, \quad \mathbb{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1^\top \\ \mathbf{Z}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_n^\top \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^\top \\ \mathbf{X}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^\top \end{bmatrix}.$$

Předpokládáme nekorelovanost instrumentů a náhodných chyb, $\mathbf{E}[\mathbf{Z}_i\varepsilon_i] = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Dvoustupňový odhad metodou nejmenších čtverců (angl. two-stage least squares) probíhá následovně:

1. stupeň: Pro každý sloupec matice $\mathbb{X}$ uvažujme regresní model s regresory $\mathbb{Z}$. Předpokládáme $\mathrm{P}(\mathrm{rank}(\mathbb{Z}) = q) = 1$. Dostaneme tak vyrovnané hodnoty, které uspořádáme do matice $\widehat{\mathbb{X}}$ s dimenzemi $n \times k$,

$$\widehat{\mathbb{X}} = \mathbb{Z}\left(\mathbb{Z}^\top\mathbb{Z}\right)^{-1}\mathbb{Z}^\top\mathbb{X}.$$

2. stupeň: Metodou obyčejných nejmenších čtverců odhadneme model

$$\mathbf{Y} = \widehat{\mathbb{X}}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_{2\mathrm{SLS}}.$$

Pro jeho plnou hodnost předpokládáme $q \geq k$. Dvoustupňový odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ je

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{2\mathrm{SLS}} = \left(\widehat{\mathbb{X}}^\top\widehat{\mathbb{X}}\right)^{-1}\widehat{\mathbb{X}}^\top\mathbf{Y} = \left(\mathbb{X}^\top\mathbb{Z}\left(\mathbb{Z}^\top\mathbb{Z}\right)^{-1}\mathbb{Z}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\mathbb{X}^\top\mathbb{Z}\left(\mathbb{Z}^\top\mathbb{Z}\right)^{-1}\mathbb{Z}^\top\mathbf{Y}.$$

Speciálně, pokud $q = k$, tedy $\mathbb{X}^\top\mathbb{Z}$ je čtvercová matice s hodností k, tedy existuje $\left(\mathbb{X}^\top\mathbb{Z}\right)^{-1}$, můžeme výraz pro $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{2\mathrm{SLS}}$ dále upravit a dostaneme odhad

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{IV}} = \left(\mathbb{Z}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\mathbb{Z}^\top\mathbf{Y}.$$

Za dodatečných předpokladů o momentech a podmíněných momentech je dvoustupňový odhad metodou nejmenších čtverců konzistentní a asymptoticky normální,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{2\mathrm{SLS}} - \boldsymbol{\beta}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0, V_{2\mathrm{SLS}}),$$

viz věta 5.3 a odvození před ní v knize Greene (2003) nebo také viz věty 5.1 a 5.2 v knize Wooldridge (2010). Asymptotickou varianční matici můžeme odhadnout pomocí

$$\widehat{V}_{2\mathrm{SLS}} = \widehat{\sigma}^2_{2\mathrm{SLS}}\left(\frac{1}{n}\cdot\widehat{\mathbb{X}}^\top\widehat{\mathbb{X}}\right)^{-1},$$

kde

$$\widehat{\sigma}^2_{2\mathrm{SLS}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \mathbf{X}_i^\top\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{2\mathrm{SLS}}\right)^2.$$

Konstrukce příslušných t-statistik pro testování významnosti β_j, j-té složky $\boldsymbol{\beta}$, je následně již přímočará.

Poznámka 1. V případě, že $\mathbf{var}[\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbb{X}] = \sigma^2\boldsymbol{\Omega}$, můžeme odhad pomocí instrumentálních proměnných vylepšit podobným postupem jako při odhadu metodou zobecněných nejmenších čtverců, viz 1.2. Nejprve tedy provedeme transformaci modelu pomocí matice $\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}$, čímž dostaneme model

$$\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon},$$

který odhadneme dvoustupňovým odhadem pomocí transformovaných instrumentů $\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Z}$, jak uvedl v kapitole 15.6 Wooldridge (2013).

1.4 Zobecněná metoda momentů

Zobecněná metoda momentů kombinuje pozorovaná data s informacemi v populačních momentových podmínkách. Odhadujeme pomocí ní parametry modelu, je-li jejich počet menší než počet podmínek. Zobecněná metoda momentů je robustnější než odhady metodou maximální věrohodnosti a vyžaduje méně informací. Tato kapitola je zpracována podle článku Zsohar (2012).

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou pozorování, ze kterých chceme odhadnout vektor parametrů $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ se skutečnou hodnotou θ_0. Nechť $f(X_i, \theta)\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^l$ je spojitě diferencovatelná funkce θ. Nechť $\mathbf{E}[f(X_i, \theta)]$ existuje a je konečná pro všechna $i = 1, \ldots, n$ a všechna θ a nechť tvoří množinu l populačních momentů. Populační momentové podmínky pak jsou

$$\mathbf{E}[f(X_i, \theta_0)] = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Populačním momentům odpovídají výběrové

$$f_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i, \theta).$$

Pro $p = l$ řešíme $f_n(\theta) = 0$, pro $l > p$ však tato rovnice nemá řešení, což je důvodem, proč zavádíme odhad zobecněnou metodou momentů. Můžeme např. minimalizovat $||f_n(\theta)||^2$ nebo definovat obecnější kriteriální funkci.

Předpokládejme, že $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost matic vah, $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} W$, W je konečná pozitivně definitní matice. Definujeme kriteriální funkci

$$Q_n(\theta) = f_n(\theta)^\top W_n f_n(\theta).$$

Pak odhad parametru θ_0 zobecněnou metodou momentů je definován jako

$$\widehat{\theta} = \operatorname*{argmin}_{\theta \in \Theta} Q_n(\theta).$$

Věta 3. *Předpokládejme, že*

1. *parametry jsou identifikované, tedy že $l \geq p$, máme alespoň p funkčně nezávislých momentových podmínek a parametry jsou jednoznačně určené, tedy že θ_0 je jediný vektor parametrů, který splňuje populační momentové podmínky.*

2. *Výběrové momenty konvergují po složkách $1, \ldots, l$ stejnoměrně v pravděpodobnosti pro $n \to \infty$ k jejich teoretickým středním hodnotám pro každé $\theta \in \Theta$,*

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_j(X_i, \theta) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[f_j(X_i, \theta)] \right| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \quad \forall j = 1, \ldots, l,$$

   kde $f_j(X_i, \theta)$ značí j-tou složku $f(X_i, \theta)$.

3. *Existuje matice F taková, že platí*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} f(X_i, \theta_0) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,F).$$

4. *$f(x,\theta)$ je spojitě diferencovatelná podle θ pro každé $\theta \in \Theta$ a každé x z nosičů $X_1, \ldots, X_n$. Označme*

$$G(\theta) = E\left[\frac{\partial f(X_i,\theta)}{\partial \theta}\right].$$

Předpokládejme, že existují konečné střední hodnoty prvních parciálních derivací $f(X_i,\theta)$ podle θ v bodě θ_0, $G(\theta_0) < \infty$, a předpokládejme, že $G(\theta_0)$ je hodnosti p.

Pak platí, že odhad $\widehat{\theta}$ parametru θ_0 zobecněnou metodou momentů je konzistentní a asymptoticky normální,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta} - \theta_0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, V_{GMM})$$

s asymptotickou varianční maticí

$$V_{GMM} = \left[G(\theta_0)^\top W G(\theta_0)\right]^{-1} G(\theta_0)^\top W F W G(\theta_0) \left[G(\theta_0)^\top W G(\theta_0)\right]^{-1}.$$

Důkaz. Viz důkaz věty 1.2 v knize Mátyás (1999). □

Poznámka 2. V případě, že $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr, můžeme 2. a 3. předpoklad věty 3 změnit na předpoklady konečnosti střední hodnoty $\mathbf{E}[f(X_1, \theta)]$ a konečnosti $\mathbf{var}[f(X_1,\theta)] = F$. Předpoklady věty 3 pak z těchto nahrazených předpokladů dostaneme použitím zákona velkých čísel a centrální limitní věty. Pro nezávislé, stejně rozdělené $X_1, \ldots, X_n$ je $f_n(\theta)$ nestranný a konzistentní odhad populačních momentů.

Je-li $W_n = F^{-1}$, je odhad zobecněnou metodou momentů asymptoticky eficientní mezi odhady, které využívají stejné vlastnosti a předpoklady jako zobecněná metoda momentů, viz kapitola 1.3.3 knihy Mátyás (1999). Např. odhad metodou maximální věrohodnosti využívá znalost celého rozdělení, tedy s tímto odhadem nelze, při porovnání asymptotických rozptylů, odhad zobecněnou metodou momentů srovnávat.

Prakticky odhad pro $W_n = F^{-1}$ probíhá ve dvou krocích.

1. Nejprve uvažujeme $W_n = I_n$ a minimalizujeme $Q_n(\theta) = f_n(\theta)^\top f_n(\theta)$ přes možná θ. Dostaneme konzistentní odhad $\widehat{\theta}$, pomocí nějž odhadneme matici F, odhad označme $\widehat{F}$. Např. jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé stejně rozdělené, pak použijeme výběrovou varianční matici,

$$\widehat{F} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i, \widehat{\theta}) f(X_i, \widehat{\theta})^\top.$$

2. Pak minimalizujeme $Q_n(\theta) = f_n(\theta)^\top \widehat{F}^{-1} f_n(\theta)$. Argument minima je hledaným odhadem parametru θ_0.

Tento postup lze iterovat.

Poznámka 3. Odhad matice F je vlastně $\widehat{F} = n \cdot \widehat{\mathbf{var}} f_n$, přičemž konstanta n nemá na minimalizaci kriteriální funkce vliv. V případě, že $X_1, \ldots, X_n$ nejsou nezávislé stejně rozdělené, pak můžeme namísto odhadu uvedeného v kroku 1 vyjádřit $\mathbf{var} f_n$ a část parametricky odhadnout.

Příklad 1 (Lineární regresní model). Uvažujme lineární regresní model z kapitoly 1.1. Pak odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ parametru $\boldsymbol{\beta}$ (s dimenzí $k \times 1$) metodou nejmenších čtverců můžeme ekvivalentně přepsat jako odhad metodou momentů, což je speciální případ zobecněné metody momentů, kdy počet podmínek je roven počtu odhadovaných parametrů. Zde bude $p = k$, $l = k$, $\theta = \boldsymbol{\beta}$.

Základním předpokladem lineárního modelu $Y_i = \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, je $\mathbf{E}[\varepsilon_i \mathbf{X}_i] = 0$. Za ε_i dosadíme $Y_i - \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta}$ a dostaneme momentovou podmínku $\mathbf{E}[(Y_i - \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta})\mathbf{X}_i] = 0$ s $f((\mathbf{X}_i, Y_i), \boldsymbol{\beta}) = (Y_i - \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta})\mathbf{X}_i$. Tedy výběrová populační momentová podmínka je

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i (Y_i - \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta}) = 0.$$

Po jednoduchém přepsání do maticového tvaru můžeme vidět, že odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ je stejný jako odhad metodou obyčejných nejmenších čtverců v části 1.1.

Příklad 2 (Instrumentální proměnné). Uvažujme lineární regresní model $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$. Předpokládejme, že v tomto modelu platí $\mathbf{E}\varepsilon_i = 0$, ale rezidua jsou korelovaná s regresory, $\mathbf{E}[\mathbf{X}_i \varepsilon_i] \neq 0$. Použijeme proto instrumentální proměnné $\mathbf{Z}_i$, nyní předpokládejme, že jich je stejný počet jako původních regresorů. Chyby musí být nekorelované s instrumentálními proměnnými, což dává populační momentové podmínky $\mathbf{E}[\mathbf{Z}_i \varepsilon_i] = 0$, $i, \dots, n$, které můžeme pomocí vyjádření chybových členů původního modelu přepsat jako $\mathbf{E}[\mathbf{Z}_i (Y_i - \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta})] = 0$. Příslušná výběrová populační podmínka je

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_i (Y_i - \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta}) = 0.$$

Tuto rovnici můžeme dále upravit na $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_i Y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (\mathbf{Z}_i \mathbf{X}_i^\top)\boldsymbol{\beta}$ a zapsat maticově, $\mathbb{Z}^\top \mathbf{Y} = \mathbb{Z}^\top \mathbb{X} \boldsymbol{\beta}$. Dostali jsme tak stejný odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ jako v části 1.3.

Příklad 3 (Zobecněný lineární regresní model). Uvažujme lineární regresní model $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, ve kterém platí předpoklad (PLR1), ale neplatí předpoklad (PLR2), nýbrž $\mathbf{var}[\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbb{X}] = \sigma^2 \boldsymbol{\Omega}$. Stejně jako při odhadu metodou zobecněných nejmenších čtverců v části 1.2 nejprve provedeme transformaci modelu pomocí matice $\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}$, označíme $\mathbf{Y}^* = \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Y}$, $\mathbb{X}^* = \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{X}$ a $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}$. V modelu $\mathbf{Y}^* = \mathbb{X}^* \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*$ platí předpoklady (PLR1) a (PLR2). Předpoklad (PLR1) využijeme k formulaci momentových podmínek $\mathbf{E}[\mathbf{X}_i^* \varepsilon_i^*] = \mathbf{E}[\mathbf{X}_i^* (Y_i^* - \mathbf{X}_i^{*\top} \boldsymbol{\beta})] = 0$, $i, \dots, n$, k nim příslušná výběrová populační podmínka je

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i^* (Y_i^* - \mathbf{X}_i^{*\top} \boldsymbol{\beta}) = 0.$$

Tuto rovnici upravíme a zapíšeme maticově, $\mathbb{X}^{*\top} \mathbf{Y}^* = \mathbb{X}^{*\top} \mathbb{X}^* \boldsymbol{\beta}$. Dostali jsme tak stejný odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ jako v části 1.2.

1.5 Souvislost mezi instrumentálními proměnnými a zobecněnou metodou momentů

Stejně jako v části 1.3 uvažujme lineární regresní model

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

kde dimenze matice modelu $\mathbb{X}$ jsou $n \times k$. Předpokládejme, že v tomto modelu platí $\mathbf{E}\varepsilon_i = 0$, ale rezidua jsou korelovaná s regresory, $\mathbf{E}[\mathbf{X}_i\varepsilon_i] \neq 0$. Dále předpokládejme, že $\mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}^\top\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbb{Z}] = \sigma^2\boldsymbol{\Omega}$, kde $\boldsymbol{\Omega}$ je známá regulární matice.

Problém korelovanosti regresorů a chyb umíme vyřešit pomocí instrumentálních proměnných $\mathbf{Z}_i$ dimenze q. V případě, že je $k = q$, je model identifikovaný a odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ je stejný při odhadu pomocí instrumentálních proměnných a při odhadu (zobecněnou) metodou momentů, viz *příklad* 2. V případě $q > k$ je model přeidentifikovaný. Můžeme použít dvoukrokový odhad z části 1.3 nebo použijeme zobecněnou metodu momentů, viz 1.4, a minimalizujeme kriteriální funkci

$$\begin{aligned} Q_n &= \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mathbf{X}_i^\top\boldsymbol{\beta})\mathbf{Z}_i\right]^\top W_n \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mathbf{X}_i^\top\boldsymbol{\beta})\mathbf{Z}_i\right] = \\ &= \left[\frac{1}{n}\left(\mathbb{Z}^\top\mathbf{Y} - \mathbb{Z}^\top\mathbb{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right]^\top W_n \left[\frac{1}{n}\left(\mathbb{Z}^\top\mathbf{Y} - \mathbb{Z}^\top\mathbb{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right]. \end{aligned}$$

Derivaci kvadratické formy Q_n v $\boldsymbol{\beta}$ podle vektoru $\boldsymbol{\beta}$

$$\frac{\partial Q_n}{\partial\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{n^2}2\mathbb{X}^\top\mathbb{Z}W_n\left(\mathbb{Z}^\top\mathbf{Y} - \mathbb{Z}^\top\mathbb{X}\boldsymbol{\beta}\right)$$

položíme rovnu 0 a dostaneme odhad

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbb{X}^\top\mathbb{Z}W_n\mathbb{Z}^\top\mathbb{X}\right)^{-1}\mathbb{X}^\top\mathbb{Z}W_n\mathbb{Z}^\top\mathbf{Y}.$$

V případě, že je model homoskedastický, tedy matice $\boldsymbol{\Omega}$ je jednotková matice, tak odhad asymptotické varianční matice F dostaneme z platnosti

$$\mathbf{var}\left[\mathbb{Z}^\top\left(\mathbf{Y} - \mathbb{X}\boldsymbol{\beta}\right)|\mathbb{Z}\right] = \mathbb{Z}^\top\sigma^2\boldsymbol{\Omega}\mathbb{Z} = \sigma^2\mathbb{Z}^\top\mathbb{Z},$$

a tedy

$$\widehat{F} \propto \mathbb{Z}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^\top\mathbb{Z},$$

kde $\propto$ značí rovnost až na konstantu. Jelikož kladná konstanta nemá na minimalizaci kriteriální funkce vliv, eficientní odhad dostaneme volbou matice vah

$$W_n = \left(\mathbb{Z}^\top\mathbb{Z}\right)^{-1},$$

tento odhad $\boldsymbol{\beta}$ je stejný jako odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{2\mathrm{SLS}}$ z části 1.3.

Pro obecnou $\boldsymbol{\Omega}$ vychází

$$\mathbf{var}\left[\mathbb{Z}^\top\left(\mathbf{Y} - \mathbb{X}\boldsymbol{\beta}\right)|\mathbb{Z}\right] = \mathbb{Z}^\top\sigma^2\boldsymbol{\Omega}\mathbb{Z},$$

abychom dostali eficientní odhad, jako matici vah bereme

$$W_n = \left(\mathbb{Z}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbb{Z}\right)^{-1}$$

a tedy minimalizujeme

$$\left[\mathbb{Z}^\top \left(\mathbf{Y} - \mathbb{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right]^\top \left(\mathbb{Z}^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbb{Z}\right)^{-1} \left[\mathbb{Z}^\top \left(\mathbf{Y} - \mathbb{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right].$$

Také můžeme nejprve provést transformaci modelu pomocí matice $\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}$, viz *poznámka* 1, populační momentové podmínky pak jsou

$$\mathbb{Z}^{*\top} \left(\mathbf{Y}^* - \mathbb{X}^*\boldsymbol{\beta}\right) = 0.$$

Pak

$$\mathbf{var}\left[\mathbb{Z}^{*\top} \left(\mathbf{Y}^* - \mathbb{X}^*\boldsymbol{\beta}\right) | \mathbb{Z}\right] = \mathbb{Z}^{*\top} \sigma^2 \mathbb{I}_n \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \sigma^2 \mathbb{I}_n \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Z} = \sigma^2 \mathbb{Z}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{Z}.$$

Vezmeme-li jako matici vah $\widehat{F}^{-1}$, minimalizujeme

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbb{Z}^{*\top} \left(\mathbf{Y}^* - \mathbb{X}^*\boldsymbol{\beta}\right)\right]^\top \left(\mathbb{Z}^{*\top} \mathbb{Z}^*\right)^{-1} \left[\mathbb{Z}^{*\top} \left(\mathbf{Y}^* - \mathbb{X}^*\boldsymbol{\beta}\right)\right] = \\
&= \left[\mathbb{Z}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \left(\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{Y} - \mathbb{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right)\right]^\top \left(\mathbb{Z}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Z}\right)^{-1} \left[\mathbb{Z}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \left(\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{Y} - \mathbb{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right)\right] = \\
&= \left[\mathbb{Z}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{Y} - \mathbb{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right]^\top \left(\mathbb{Z}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbb{Z}\right)^{-1} \left[\mathbb{Z}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{Y} - \mathbb{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right].
\end{aligned}$$

2. Panelová data

Panelová data používáme pro modelování n subjektů v T časech. Zaznamenáváme vždy odezvu a regresory. V této práci budeme vždy předpokládat, že jsou data balancovaná, tedy že měříme všechny subjekty ve všech časech.

Příkladem panelových dat může být sledování příjmů několika lidí v čase, kde mezi regresory můžeme uvažovat nejvyšší dosažené vzdělání, pohlaví, sektor, ve kterém pracují atd.

Dále budeme předpokládat, že subjekty se navzájem neovlivňují a že jsou náhodně vybrané.

Předpokládejme model ve tvaru

$$Y_{it} = \alpha + \mathbf{X}_{it}^\top \boldsymbol{\beta} + u_{it}, \tag{2.1}$$

kde Y_{it} je odezva, $\mathbf{X}_{it}$ jsou regresory bez absolutního členu s dimenzí $k \times 1$ a u_{it} jsou chybové členy, vše pro subjekty $i = 1, \ldots, n$ a měření v časech $t = 1, \ldots, T$. Parametr α je absolutní člen, $\boldsymbol{\beta}$ o rozměrech $k \times 1$ je vektor parametrů. Pozorování $(\mathbf{X}_{it}^\top, Y_{it})$ pro různá i jsou navzájem nezávislá. Model vychází z klasického regresního modelu, který je pro úplnost uveden v kapitole 1.

Předpokládejme, že chybový člen můžeme zapsat jako součet

$$u_{it} = \mu_i + \nu_{it},$$

kde μ_i je (nepozorovatelný) individuální efekt i-tého subjektu a ν_{it} je zbytkový chybový člen. Individuální efekt v sobě zahrnuje informaci, jak moc se liší neměřené charakteristiky neměnné v čase od jejich střední hodnoty a umožní modelovat heterogenitu subjektů. Zda je individuální efekt pevný, nebo náhodný, záleží na zvoleném přístupu k panelovým datům.

Existují tři přístupy k modelování panelových dat, které jsou zvláštními případy modelu (2.1). V sekci 2.1 představíme model, který zanedbává, že více pozorování v čase patří k jednomu subjektu. V sekci 2.2 představíme model, ve kterém považujeme individuální efekt μ_i za fixní a v sekci 2.3 za náhodný.

Poznámka 4. Kromě regresorů $\mathbf{X}_{it}$ mohou odezvu ovlivňovat i nepozorovatelné $\mathbf{Z}_i$, které nejsme schopni změřit, ale víme, že jsou v čase neměnné. Celý model by měl předpis $Y_{it} = \mathbf{X}_{it}^\top \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i^\top \boldsymbol{\gamma} + \nu_{it}$, kde $\boldsymbol{\gamma}$ je vektor parametrů. Nepozorovatelný individuální efekt i-tého subjektu μ_i tak můžeme chápat jako

$$\mu_i = \mathbf{Z}_i^\top \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{E}\left(\mathbf{Z}_i^\top \boldsymbol{\gamma}\right).$$

Předpokládáme, že mezi regresory nejsou takové veličiny, pro které existuje jejich netriviální lineární kombinace rovná konstantě skoro jistě. Proto budeme předpokládat, že všechny uvažované modely mají plnou hodnost.

Pokud nebude řečeno jinak, budeme v této kapitole i v kapitole o dynamických modelech pro panelová data předpokládat, že počet subjektů $n \to \infty$ a počet měření v čase T je fixní. Rovněž asymptotické vlastnosti budou uváděny pro T fixní a $n \to \infty$.

Tato kapitola o panelových datech čerpá z druhé kapitoly knihy autora Baltagi (2021), sedmé kapitoly knihy Wooldridge (2010) a čtrnácté kapitoly knihy Wooldridge (2013).

2.1 Společný model

Společný (angl. pooled) model

$$Y_{it} = \alpha + \mathbf{X}_{it}^\top \boldsymbol{\beta} + \nu_{it} \tag{2.2}$$

neumožňuje modelovat heterogenitu subjektů, jelikož neobsahuje nepozorovatelné individuální efekty subjektů.

Model lze zapsat maticově

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X}_S \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\nu},$$

kde

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ \vdots \\ Y_{1T} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{2T} \\ \vdots \\ Y_{n1} \\ \vdots \\ Y_{nT} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X}_S = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{X}_{11}^\top \\ 1 & \mathbf{X}_{12}^\top \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{X}_{1T}^\top \\ 1 & \mathbf{X}_{21}^\top \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{X}_{2T}^\top \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{X}_{n1}^\top \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{X}_{nT}^\top \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \nu_{11} \\ \nu_{12} \\ \vdots \\ \nu_{1T} \\ \nu_{21} \\ \vdots \\ \nu_{2T} \\ \vdots \\ \nu_{n1} \\ \vdots \\ \nu_{nT} \end{bmatrix}.$$

Označme regresory i-tého subjektu $\mathbf{X}_i$,

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{i1}^\top \\ \mathbf{X}_{i2}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{iT}^\top \end{bmatrix}.$$

Odhad parametrů můžeme vyjádřit jako

$$\begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} = \left(\mathbb{X}_S^\top \mathbb{X}_S\right)^{-1} \mathbb{X}_S^\top \mathbf{Y}.$$

Tvrzení 4. *Pro model (2.2) je za předpokladu*

(P1) $\mathbf{E}[\nu_{it}|\mathbf{X}_i] = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n,\ t = 1, \dots, T$

odhad $(\widehat{\alpha}^\top, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^\top)^\top$ *vektoru parametrů* $(\alpha^\top, \boldsymbol{\beta}^\top)^\top$ *metodou obyčejných nejmenších čtverců nestranný.*

Platí-li navíc (PLR3) a (PLR4) z tvrzení 2 s maticí modelu $\mathbb{X}_S$ *a chybovými členy* $\boldsymbol{\nu}$*, je odhad* $(\widehat{\alpha}^\top, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^\top)^\top$ *vektoru parametrů* $(\alpha^\top, \boldsymbol{\beta}^\top)^\top$ *metodou obyčejných nejmenších čtverců konzistentní pro* $n \to \infty$*.*

Platí-li navíc

(P2) $\mathbf{cov}[\nu_{it}, \nu_{is}|\mathbf{X}_i] = 0 \quad \forall t \neq s,\ i = 1, \dots, n;\ t, s = 1, \dots, T,$

$\mathbf{var}[\nu_{it}|\mathbf{X}_i] = \sigma_\nu^2 \quad \forall\, i = 1, \dots, n,\ t = 1, \dots, T$

a (PLR5) z tvrzení 2 s $\mathbb{X}_S$ a $\boldsymbol{\nu}$, jsou odhady směrodatných chyb metodou nejmenších čtverců asymptoticky platné a odhad vektoru parametrů $(\alpha^\top, \boldsymbol{\beta}^\top)^\top$ metodou obyčejných nejmenších čtverců je nejlepší lineární nestranný odhad.

Důkaz. Plyne z vlastností pro lineární regresní model, viz část 1.1. □

2.2 Model s fixními efekty

V modelu s fixními efekty považujeme μ_i za fixní efekt subjektu, odhadujeme pro každý subjekt absolutní člen $\alpha_i = \alpha + \mu_i$. Model můžeme zapsat ve tvaru

$$Y_{it} = \alpha_i + \mathbf{X}_{it}^\top \boldsymbol{\beta} + \nu_{it}. \tag{2.3}$$

Takový model má $n + k$ parametrů.

Označíme

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{i1}^\top \\ \mathbf{X}_{i2}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{iT}^\top \end{bmatrix}$$

matice regresorů pro i-tý subjekt. Model můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{Y} = \mathbb{W} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\nu},$$

kde $\mathbf{Y}$ a $\boldsymbol{\nu}$ jsou stejné jako v kapitole 2.1 a kde

$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_T & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{X}_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1}_T & \mathbf{X}_n \end{pmatrix}.$$

Platí-li předpoklad (P1) s maticí modelu $\mathbb{W}$ a chybovými členy $\boldsymbol{\nu}$, jsou odhady $\widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n$, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ parametrů α_i, $i = 1, \dots, n$ a vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ nestranné. Přidáme-li předpoklad (P2), je odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ metodou nejmenších čtverců nejlepší lineární nestranný odhad.

Lze ukázat, že platí-li navíc předpoklady (PLR3), (PLR4) a (PLR5) z věty 2 pro $n \to \infty$, je odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ parametrů $\boldsymbol{\beta}$ konzistentní a asymptoticky normální. Pro konzistenci odhadů $\widehat{\alpha}_i$ parametrů α_i, $i = 1, \dots, n$ potřebujeme $T \to \infty$. Viz kapitola 2.2 knihy Baltagi (2021).

Při odhadu metodou obyčejných nejmenších čtverců by v případě, že je n velké, mohlo dojít k numerickým problémům při výpočtu $(\mathbb{W}^\top \mathbb{W})^{-1}$, což potřebujeme při výpočtu odhadu

$$\begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \widehat{\alpha}_n \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} = \left(\mathbb{W}^\top \mathbb{W}\right)^{-1} \mathbb{W}^\top \mathbf{Y}.$$

Proto můžeme postupovat tak, že pro každý subjekt spočítáme průměr odezvy

$$\overline{Y}_{i\bullet} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_{it},$$

a obdobně také průměr regresorů i chybových členů v čase. Tyto průměry odečteme od napozorovaných dat a dostaneme tak model

$$Y_{it} - \overline{Y}_{i\bullet} = (\mathbf{X}_{it} - \overline{\mathbf{X}}_{i\bullet})^\top \boldsymbol{\beta} + \nu_{it} - \overline{\nu}_{i\bullet}.$$

Odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ metodou obyčejných nejmenších čtverců v tomto transformovaném modelu nazveme uvnitř-skupinový (angl. within).

Poznámka 5. Uvnitř-skupinový odhad bude stejný jako odhad metodou obyčejných nejmenších čtverců v původním modelu, liší se však odhady směrodatných chyb. Abychom dostali odhady směrodatných chyb z původního modelu, musíme odhad směrodatných chyb z modelu s uvnitř-skupinovou transformací vynásobit členem

$$\sqrt{\frac{nT - n - k}{nT - k}},$$

viz kapitola 10.5.2 knihy Wooldridge (2013). Uvnitř-skupinový odhad navíc neumožní odhadnout parametry u regresorů neměnných v čase (např. pohlaví).

2.3 Model s náhodnými efekty

U modelu

$$Y_{it} = \alpha + \mathbf{X}_{it}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_i + \nu_{it} \tag{2.4}$$

s náhodnými efekty μ_i lze, na rozdíl od modelu s fixními efekty, zobecnit závěry o heterogenitě na celou populaci, ze které pochází sledované subjekty. Náhodný efekt pro daný subjekt vyjadřuje, nakolik se liší neměřené charakteristiky a regresory fixní v čase od jejich střední hodnoty, viz *poznámka* 4.

Model lze zapsat maticově ve tvaru

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} + \boldsymbol{u},$$

kde

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ \vdots \\ Y_{1T} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{2T} \\ \vdots \\ Y_{n1} \\ \vdots \\ Y_{nT} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{X}_{11}^\top \\ 1 & \mathbf{X}_{12}^\top \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{X}_{1T}^\top \\ 1 & \mathbf{X}_{21}^\top \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{X}_{2T}^\top \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{X}_{n1}^\top \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{X}_{nT}^\top \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1T} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{2T} \\ \vdots \\ u_{n1} \\ \vdots \\ u_{nT} \end{bmatrix}$$

a kde $u_{it} = \mu_i + \nu_{it}$.

Označíme $\mathbf{X}_i$ regresory i-tého subjektu stejně jako v částech 2.1 a 2.2.

V dalším textu budeme pracovat s předpoklady (P1) a (P2) z 2.2, pro připomenutí (P2) říká, že $\mathbf{cov}[\nu_{it}, \nu_{is}|\mathbf{X}_i] = \sigma_\nu^2 \mathbf{1}[s = t] \; \forall i = 1, \dots n$ a $s,t = 1, \dots, T$. Rovněž využijeme následující předpoklady

(P2N) $\mathbf{cov}[\mu_i, \mu_j|\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = 0 \quad \forall i \neq j, \; i, \; j = 1, \dots, n,$

(P3N) $\mathbf{E}[\mu_i|\mathbf{X}_i] = 0 \quad \forall \; i = 1, \dots, n,$

(P4N) $\mathbf{E}[\mu_i \nu_{jt}|\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = 0 \quad \forall \; i, \; j = 1, \dots, n, \; t = 1, \dots, T,$

(P5N) $\mathbf{var}[\mu_i|\mathbf{X}_i] = \sigma_\mu^2 \quad \forall \; i = 1, \dots, n.$

S využitím uvedených předpokladů platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[u_{it}u_{js}|\mathbb{X}] &= \mathbf{E}[(\mu_i + \nu_{it})(\mu_j + \nu_{js})|\mathbb{X}] = \\
&= \mathbf{E}[\mu_i \mu_j|\mathbb{X}] + \mathbf{E}[\nu_{it}\mu_j|\mathbb{X}] + \mathbf{E}[\mu_i \nu_{js}|\mathbb{X}] + \mathbf{E}[\nu_{it}\nu_{js}|\mathbb{X}] = \\
&= \sigma_\mu^2 \mathbf{1}[i = j] + \sigma_\nu^2 \mathbf{1}[i = j, s = t].
\end{aligned}$$

Označme $\boldsymbol{u}_i = (u_{i1}, \dots, u_{iT})^\top$. Na diagonále varianční matice $\mathbf{var}[\boldsymbol{u}_i|\mathbb{X}]$, kterou budeme značit $\boldsymbol{\Sigma}$, je tedy součet rozptylu zbytkových chybových členů a rozptylu individuálních efektů. Mimo diagonálu pak je všude rozptyl individuálních efektů, matice $\boldsymbol{\Sigma}$ má tedy následující strukturu:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{var}[\boldsymbol{u}_i|\mathbb{X}] = \begin{pmatrix} \sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \dots & \sigma_\mu^2 \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 & \dots & \sigma_\mu^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_\mu^2 & \dots & \sigma_\mu^2 & \sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 \end{pmatrix}.$$

Varianční matice $\mathbf{var}[\boldsymbol{u}|\mathbb{X}]$, kterou budeme značit $\boldsymbol{\Omega}$, je pak blokově diagonální, na diagonále jsou varianční matice $\boldsymbol{\Sigma}$, má tedy následující strukturu

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{var}[\boldsymbol{u}|\mathbb{X}] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Varianční matice $\boldsymbol{\Omega}$ není násobkem jednotkové matice, proto odhad metodou obyčejných nejmenších čtverců není vhodný, neboť není nejlepší a neplatí testy o složkách vektoru parametrů. Kdybychom znali přesně matici $\boldsymbol{\Omega}$, parametry $\boldsymbol{\beta}$ bychom odhadli metodou zobecněných nejmenších čtverců, viz 1.2. V případě, že matici $\boldsymbol{\Omega}$ přesně neznáme, parametry $\boldsymbol{\beta}$ odhadneme metodou přípustných zobecněných nejmenších čtverců, viz 1.2, kde využíváme odhady ze společného modelu (2.2) a z modelu s fixními efekty (2.3).

2.3.1 Odhad metodou přípustných zobecněných nejmenších čtverců

V praxi totiž obvykle rozptyl chyb specifických pro subjekt σ_μ^2 ani zbytkových chybových členů σ_ν^2 neznáme, nemůžeme tedy použít odhad metodou zobecněných nejmenších čtverců. Používáme proto odhad metodou přípustných zobecněných nejmenších čtverců, viz 1.2, s konzistentními odhady $\widehat{\sigma}_\nu^2$, $\widehat{\sigma}_\mu^2$ parametrů σ_ν^2 a σ_μ^2. Označme $\widehat{\sigma}^2$ odhad rozptylu ve společném modelu a e_{it}, $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$ rezidua z modelu s fixními efekty. Pak σ_ν^2 můžeme odhadnout pomocí

$$\widehat{\sigma}_\nu^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} (e_{it} - \overline{e}_{i\bullet})^2}{nT - n - k},$$

kde $\overline{e}_{i\bullet} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} e_{it}$. Parametr σ_μ^2 odhadneme jako

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_\mu^2 &= \widehat{\sigma}^2 - \widehat{\sigma}_\nu^2, \text{ je-li } \widehat{\sigma}^2 - \widehat{\sigma}_\nu^2 \geq 0, \\ &= 0, \text{ je-li } \widehat{\sigma}^2 - \widehat{\sigma}_\nu^2 < 0. \end{aligned}$$

Tyto odhady použijeme k odhadu matice $\mathbf{\Sigma}$,

$$\widehat{\mathbf{\Sigma}} = \widehat{\mathbf{var}}[\boldsymbol{u}_i|\mathbb{X}] = \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}_\nu^2 + \widehat{\sigma}_\mu^2 & \widehat{\sigma}_\mu^2 & \dots & \widehat{\sigma}_\mu^2 \\ \widehat{\sigma}_\mu^2 & \widehat{\sigma}_\nu^2 + \widehat{\sigma}_\mu^2 & \dots & \widehat{\sigma}_\mu^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \widehat{\sigma}_\mu^2 & \dots & \widehat{\sigma}_\mu^2 & \widehat{\sigma}_\nu^2 + \widehat{\sigma}_\mu^2 \end{pmatrix},$$

a k odhadu matice $\mathbf{\Omega}$, který označíme $\widehat{\mathbf{\Omega}}$ a který následně použijeme v metodě přípustných zobecněných nejmenších čtverců, viz kapitola 1.2.

Platí-li předpoklady (P1), (P2), (P2N), (P3N) a (P4N), speciálně tedy platí-li nekorelovanost μ_i a $\mathbf{X}_{it}$, $\forall\, i = 1, \dots, n,\ t = 1, \dots, T$, je odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ metodou zobecněných nejmenších čtverců, nikoliv však metodou přípustných zobecněných nejmenších čtverců, nestranný.

Platí-li navíc předpoklady vycházející z (PLR3), (PLR4) a (PLR5) z věty 2 a (P5N), je odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ metodou přípustných zobecněných nejmenších čtverců konzistentní a asymptoticky normální pro $n \to \infty$ a T fixní. Dále jsou odhady směrodatných chyb metodou přípustných zobecněných nejmenších čtverců asymptoticky platné, viz 1.2.

Následující tvrzení je tvrzení 2.1 článku Hausman a Taylor (1981), poskytuje jednodušší způsob výpočtu odhadu. Tvrzení lze ukázat pomocí algebraických úprav naznačených v sekci 2.3 knihy Baltagi (2021). Tyto úpravy podrobně rozepíšeme.

Tvrzení 5. *Odhad metodou zobecněných nejmenších čtverců s maticí* $\mathbf{\Omega}$*, kde* $\mathbf{\Omega}$ *je dáno vzorcem* (2.5)*, je odhad metodou obyčejných nejmenších čtverců v transformovaném modelu*

$$Y_{it}^* = \alpha \cdot X_0 + \mathbf{X}_{it}^{*\top} \boldsymbol{\beta} + u_{it}^*,$$

kde $Y_{it}^* = Y_{it} - \gamma \cdot \overline{Y}_{i\bullet}$, $X_0 = 1 - \gamma$, $\mathbf{X}_{it}^* = \mathbf{X}_{it} - \gamma \cdot \overline{\mathbf{X}}_{i\bullet}$, $u_{it}^* = u_{it} - \gamma \cdot \overline{u}_{i\bullet}$ *a kde*

$$\gamma = 1 - \frac{\sigma_\nu}{\sqrt{\sigma_\nu^2 + T\sigma_\mu^2}}.$$

Důkaz. Označme $\mathbb{I}_n$ jednotkovou matici s dimenzemi $n \times n$, $\mathbb{I}_T$ jednotkovou matici s dimenzemi $T \times T$ a $\mathbb{J}_T$ matici obsahující na všech pozicích 1 s dimenzemi $T \times T$.

Připomeňme, že pro Kroneckerův součin a matice A, B, C a D platí $(A\otimes B)+(A\otimes C) = A\otimes(B+C)$, $(A\otimes B)\cdot(C\otimes D) = (A\cdot C)\otimes(B\cdot D)$ a $(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}$, lze-li matice sčítat, násobit či invertovat. Tato pravidla použijeme dále.

Varianční matici $\mathbf{\Omega}$ můžeme zapsat pomocí Kroneckerova součinu jako

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega} &= \sigma_\mu^2(\mathbb{I}_n \otimes \mathbb{J}_T) + \sigma_\nu^2(\mathbb{I}_n \otimes \mathbb{I}_T) = \\
&= T\sigma_\mu^2\left(\mathbb{I}_n \otimes \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right) + \sigma_\nu^2\left(\mathbb{I}_n \otimes \left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right)\right) + \sigma_\nu^2\left(\mathbb{I}_n \otimes \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right) = \\
&= (T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2)\left(\mathbb{I}_n \otimes \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right) + \sigma_\nu^2\left(\mathbb{I}_n \otimes \left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right)\right) = \\
&= \mathbb{I}_n \otimes \left((T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2)\frac{1}{T}\mathbb{J}_T + \sigma_\nu^2\left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right)\right).
\end{aligned}$$

Označíme

$$\mathbf{\Omega}_1 = (T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2)\frac{1}{T}\mathbb{J}_T + \sigma_\nu^2\left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right).$$

Pak $\mathbf{\Omega} = \mathbb{I}_n \otimes \mathbf{\Omega}_1$ a platí, že $\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbb{I}_n \otimes \mathbf{\Omega}_1^{-1}$. Inverzní matice k matici $\mathbf{\Omega}_1$ je

$$\mathbf{\Omega}_1^{-1} = \frac{1}{(T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2)} \cdot \frac{1}{T}\mathbb{J}_T + \frac{1}{\sigma_\nu^2}\left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right),$$

neboť

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_1\mathbf{\Omega}_1^{-1} =& \frac{T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2}{(T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2)}\frac{1}{T^2}\mathbb{J}_T\mathbb{J}_T + \frac{T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2}{\sigma_\nu^2} \cdot \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right) \\
&+ \frac{\sigma_\nu^2}{(T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2)}\left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right) \cdot \frac{1}{T}\mathbb{J}_T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\nu^2}\left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right)\left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right) = \\
=& \frac{1}{T^2} \cdot T\mathbb{J}_T + \frac{T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2}{\sigma_\nu^2} \cdot \frac{1}{T}\left(\mathbb{J}_T - \frac{1}{T}T\mathbb{J}_T\right) \\
&+ \frac{\sigma_\nu^2}{(T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2)}\left(\mathbb{J}_T - \frac{1}{T} \cdot T\mathbb{J}_T\right) \cdot \frac{1}{T} \\
&+ \left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T + \frac{1}{T^2} \cdot T\mathbb{J}_T\right) = \frac{1}{T}\mathbb{J}_T + \left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right) = \mathbb{I}_T.
\end{aligned}$$

Podle principu odhadu metodou zobecněných nejmenších čtverců potřebujeme matici $\mathbf{\Omega}_1^{-\frac{1}{2}}$ takovou, že $\mathbf{\Omega}_1^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Omega}_1^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{\Omega}_1^{-1}$. Touto maticí je

$$\mathbf{\Omega}_1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2}} \cdot \frac{1}{T}\mathbb{J}_T + \frac{1}{\sigma_\nu}\left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right),$$

neboť

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_1^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Omega}_1^{-\frac{1}{2}} =& \frac{1}{T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2} \cdot \frac{1}{T^2} \cdot T\mathbb{J}_T + \frac{1}{\sigma_\nu\sqrt{T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2}} \cdot \frac{1}{T}\left(\mathbb{J}_T - \frac{1}{T} \cdot T\mathbb{J}_T\right) \\
&+ \frac{1}{\sigma_\nu\sqrt{T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2}}\left(\mathbb{J}_T - \frac{1}{T} \cdot T\mathbb{J}_T\right) \cdot \frac{1}{T} + \frac{1}{\sigma_\nu^2}\left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right) = \\
=& \frac{1}{(T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2)} \cdot \frac{1}{T}\mathbb{J}_T + \frac{1}{\sigma_\nu^2}\left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right) = \mathbf{\Omega}_1^{-1}.
\end{aligned}$$

Z vlastností Kroneckerova součinu platí

$$\left(\mathbb{I}_n \otimes \boldsymbol{\Omega}_1^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(\mathbb{I}_n \otimes \boldsymbol{\Omega}_1^{-\frac{1}{2}}\right) = (\mathbb{I}_n \cdot \mathbb{I}_n) \otimes \left(\boldsymbol{\Omega}_1^{-\frac{1}{2}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_1^{-\frac{1}{2}}\right) = \mathbb{I}_n \otimes \boldsymbol{\Omega}_1^{-1} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}.$$

Nyní už jen rozepíšeme matici $\boldsymbol{\Omega}_1^{-\frac{1}{2}}$, aby bylo zřejmé, že se skutečně, až na přenásobení σ_ν, jedná o transformaci z tvrzení,

$$\sigma_\nu \boldsymbol{\Omega}_1^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_\nu}{\sqrt{T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2}} \cdot \frac{1}{T}\mathbb{J}_T + \left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbb{J}_T\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{T} & \frac{1}{T} & \dots & \frac{1}{T} \\ \frac{1}{T} & \frac{1}{T} & \ddots & \frac{1}{T} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{T} & \dots & \frac{1}{T} & \frac{1}{T} \end{pmatrix} - \frac{\sigma_\nu}{\sqrt{T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{T} & \frac{1}{T} & \dots & \frac{1}{T} \\ \frac{1}{T} & \frac{1}{T} & \ddots & \frac{1}{T} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{T} & \dots & \frac{1}{T} & \frac{1}{T} \end{pmatrix} \right),$$

a pro úplnost uvedeme, že vynásobením $\frac{1}{T}\mathbb{J}_T$ a libovolného vektoru, dostaneme vektor, jehož každý prvek je výběrový průměr hodnot prvků násobeného vektoru. □

Poznámka 6. Budeme-li uvažovat normální model se smíšenými efekty (tj. model, kde mohou být náhodné i jiné parametry než jen absolutní člen), lze parametry odhadovat pomocí maximální věrohodnosti, Hendersonových rovnic či omezené (angl. restricted) maximální věrohodnosti, více viz Diggle a kol. (2013) a Henderson (1984).

2.3.2 Hausmanův-Taylorův odhad

V případě, že je porušen předpoklad nekorelovanosti individuálních efektů a regresorů a tedy i předpoklad (P3N), nemůžeme postupovat jako v předchozí části 2.3, odhad metodou obyčejných nejmenších čtverců i zobecněných nejmenších čtverců by obecně nebyl konzistentní, ale můžeme k odhadu parametrů modelu použít odhad pomocí instrumentálních proměnných, viz 1.3.

Uvažujme nyní obecnější model než v předchozí části

$$Y_{it} = \mathbf{X}_{1it}^\top \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_{2it}^\top \boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{Z}_{1i}^\top \boldsymbol{\gamma}_1 + \mathbf{Z}_{2i}^\top \boldsymbol{\gamma}_2 + \mu_i + \nu_{it}, \tag{2.6}$$

$i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$, s regresory neměnnými v čase $\mathbf{Z}_{1i}$ a $\mathbf{Z}_{2i}$, kde regresory $\mathbf{X}_{2it}$ $\mathbf{Z}_{2i}$ jsou korelované s náhodnými individuálními efekty μ_i pro $\forall i = 1, \dots, n$ a $\forall t = 1, \dots, T$. Předpokládáme, že regresory $\mathbf{X}_{1it}$ a $\mathbf{Z}_{1i}$ nejsou korelované s individuálními efekty μ_i $\forall i = 1, \dots, n$ a $\forall t = 1, \dots, T$. Počet proměnných obsažených v regresorech $\mathbf{X}_{1it}$, $\mathbf{X}_{2it}$, $\mathbf{Z}_{1i}$ a $\mathbf{Z}_{2i}$ je po řadě k_1, k_2, l_1 a l_2.

Hausman a Taylor (1981) ve čtvrté části článku uvedli příklad dat, pro která se hodí model (2.6). Jde o model logaritmu platu mužů v závislosti na několika regresorech, mezi $\mathbf{X}_{1it}$ patří indikátor špatného zdraví, počet odpracovaných let a indikátor nezaměstnanosti v posledním roce, přičemž poslední dva zmiňované mohou být i v $\mathbf{X}_{2it}$. Mezi $\mathbf{Z}_{1i}$ autoři uvádějí rasu a indikátor, zda je muž v odborech. Mezi $\mathbf{Z}_{2i}$ zařadili počet let docházky do školy.

Hausman a Taylor (1981) navrhli odhad, při kterém nejprve provedeme uvnitřskupinovou transformaci jako v části 2.2. Tímto způsobem můžeme odhadnout parametry $\boldsymbol{\beta}_1$ a $\boldsymbol{\beta}_2$, ale ne $\boldsymbol{\gamma}_1$ a $\boldsymbol{\gamma}_2$, které z modelu vlivem transformace vypadnou. Nicméně odchylky od průměru $\mathbf{X}_{1it} - \overline{\mathbf{X}}_{1i\bullet}$ a $\mathbf{X}_{2it} - \overline{\mathbf{X}}_{2i\bullet}$, kde

$$\overline{\mathbf{X}}_{1i\bullet} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{X}_{1it} \quad \text{a} \quad \overline{\mathbf{X}}_{2i\bullet} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{X}_{2it},$$

dobře poslouží k odhadu původního modelu. Jako další instrumenty lze použít $\mathbf{Z}_{1i}$, čímž zbývá si opatřit ještě minimálně l_2 instrumentů. Jako tyto zbylé instrumenty lze použít $\overline{\mathbf{X}}_{1i\bullet}$.

Odhad probíhá v několika krocích:

1. Metodou obyčejných nejmenších čtverců odhadneme model

$$Y_{it} = \mathbf{X}_{1it}^\top\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_{2it}^\top\boldsymbol{\beta}_2 + \tilde{\nu}_{it}, \tag{2.7}$$

čímž dostaneme stejné bodové odhady vektorů parametrů $\boldsymbol{\beta}_1$ a $\boldsymbol{\beta}_2$ jako při odhadu modelu (2.6) po uvnitř-skupinové transformaci, tedy při odhadu v modelu

$$Y_{it} - \overline{Y}_{i\bullet} = (\mathbf{X}_{1it} - \overline{\mathbf{X}}_{1i\bullet})^\top\boldsymbol{\beta}_1 + (\mathbf{X}_{2it} - \overline{\mathbf{X}}_{2i\bullet})^\top\boldsymbol{\beta}_2 + \nu_{it} - \overline{\nu}_{i\bullet},$$

kde

$$\overline{Y}_{i\bullet} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}Y_{it}, \quad \overline{\nu}_{i\bullet} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\nu_{it}.$$

V tomto modelu se nevyskytují individuální efekty μ_i, tedy není problém, že předpoklad (P3N) není splněn. Reziduální rozptyl (1.1) z modelu (2.7) je odhadem σ_ν^2, odhad označíme $\widehat{\sigma}_\nu^2$.

2. Rezidua z modelu (2.7) v kroku 1 označme e_{it}. Dále označme

$$\overline{e}_{i\bullet} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}e_{it}.$$

Z modelu (2.7) z kroku 1 platí, že

$$\tilde{\nu}_{it} = Y_{it} - \mathbf{X}_{1it}^\top\boldsymbol{\beta}_1 - \mathbf{X}_{2it}^\top\boldsymbol{\beta}_2,$$

a pro rezidua platí, že

$$e_{it} = Y_{it} - \mathbf{X}_{1it}^\top\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \mathbf{X}_{2it}^\top\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2.$$

Z modelu (2.6) platí

$$Y_{it} - \mathbf{X}_{1it}^\top\boldsymbol{\beta}_1 - \mathbf{X}_{2it}^\top\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{Z}_{1i}^\top\boldsymbol{\gamma}_1 + \mathbf{Z}_{2i}^\top\boldsymbol{\gamma}_2 + \mu_i + \nu_{it},$$

kde levou stranu odhadneme právě pomocí reziduí e_{it} a dostaneme model

$$e_{it} = \mathbf{Z}_{1i}^\top\boldsymbol{\gamma}_1 + \mathbf{Z}_{2i}^\top\boldsymbol{\gamma}_2 + \mu_i + \nu_{it}.$$

Protože mezi regresory nejsou žádné závislé na t, celý model přes čas zprůměrujeme a dostaneme

$$\overline{e}_{i\bullet} = \mathbf{Z}_{1i}^\top\boldsymbol{\gamma}_1 + \mathbf{Z}_{2i}^\top\boldsymbol{\gamma}_2 + \mu_i + \overline{\nu}_{i\bullet}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Vzhledem ke korelovanosti regresorů $\mathbf{Z}_{2i}$ a individuálních efektů μ_i tento model odhadneme metodou instrumentálních proměnných, viz 1.3. Jako instrumenty pro $\mathbf{Z}_{2i}$ použijeme $\mathbf{Z}_{1i}$ a $\mathbf{X}_{1it}$. Odhadneme tedy nejprve model

$$\mathbf{Z}_{2i} = \mathbf{Z}_{1i}^\top \mathbf{a} + \mathbf{X}_{1it}^\top \mathbf{b} + \varepsilon_{it},$$

ze kterého dostaneme vyrovnané hodnoty $\widehat{\mathbf{Z}}_{2i}$, které použijeme v druhém kroku dvoustupňového odhadu při odhadu modelu

$$\overline{e}_{i\bullet} = \mathbf{Z}_{1i}^\top \gamma_1 + \widehat{\mathbf{Z}}_{2i}^\top \gamma_2 + \mu_i + \overline{\nu}_{i\bullet}.$$

Reziduální rozptyl z tohoto modelu je konzistentním odhadem $\sigma = \sigma_\mu^2 + \frac{\sigma_\nu^2}{T}$, odhad označme $\widehat{\sigma}^2$.

Tímto jsme dostali odhady všech parametrů modelu (2.6), které však nejsou nejlepší. Odhady můžeme vylepšit tím, že navíc vezmeme v úvahu fakt, že model (2.6) není homoskedastický a přejdeme k přípustnému zobecněnému odhadu.

Přípustný zobecněný odhad metodou nejmenších čtverců pomocí instrumentálních proměnných (který může být oproti standardní metodě odhadu s instrumentálními proměnnými, viz 1.3, eficientnější) použije jako instrumenty

$$\mathbf{V}_{it}^\top = \left((\mathbf{X}_{1it} - \overline{\mathbf{X}}_{1i\bullet})^\top, (\mathbf{X}_{2it} - \overline{\mathbf{X}}_{2i\bullet})^\top, \mathbf{Z}_{1i}^\top, \overline{\mathbf{X}}_{1i\bullet}^\top \right).$$

Model je identifikovaný, pokud $k_1 \geq l_2$, neboť $\overline{\mathbf{X}}_{1i\bullet}$ slouží jako instrumenty pro $\mathbf{Z}_{2i}$.

Odhad metodou zobecněných nejmenších čtverců naváže na předchozí kroky:

3. Z kroku 2 víme, že konzistentním odhadem σ_μ^2 bude

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_\mu^2 &= \widehat{\sigma}^2 - \frac{\widehat{\sigma}_\nu^2}{T}, \text{ je-li } \widehat{\sigma}^2 - \frac{\widehat{\sigma}_\nu^2}{T} \geq 0, \\ &= 0, \text{ je-li } \widehat{\sigma}^2 - \frac{\widehat{\sigma}_\nu^2}{T} < 0. \end{aligned}$$

Spočteme váhu $\widehat{\theta}$ pro odhad metodou přípustných zobecněných nejmenších čtverců,

$$\widehat{\theta} = \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_\nu^2}{\widehat{\sigma}_\nu^2 + T\widehat{\sigma}_\mu^2}}.$$

4. Označíme všechny regresory

$$\mathbf{W}_{it}^\top = \left(\mathbf{X}_{1it}^\top, \mathbf{X}_{2it}^\top, \mathbf{Z}_{1i}^\top, \mathbf{Z}_{2i}^\top \right), \; i = 1, \ldots, n, \; t = 1, \ldots, T$$

a uspořádáme je jako řádky do matice $\mathbb{W}$. Abychom, podobně jako v modelu s náhodnými efekty v části 2.3, dostali odhady parametrů původního modelu, viz *poznámka* 5, provedeme transformaci

$$\mathbf{W}_{it}^{*\top} = W_{it}^\top - (1 - \widehat{\theta})\overline{\mathbf{W}}_{i\bullet}^\top, \quad Y_{it}^* = Y_{it}(1 - \widehat{\theta})\overline{Y}_{i\bullet},$$

kde $\overline{\mathbf{W}}_{i\bullet}^\top = \left(\overline{\mathbf{X}}_{1i\bullet}^\top, \overline{\mathbf{X}}_{2i\bullet}^\top, \mathbf{Z}_{1i}^\top, \mathbf{Z}_{2i}^\top\right)^\top$. Matice $\mathbb{W}^*$ je po řádcích tvořena $\mathbf{W}_{it}^{*\top}$, Y_{it}^* jsou prvky sloupcového vektoru $\mathbf{Y}^*$. Matice $\mathbb{V}$ je po řádcích tvořena instrumentálními proměnnými $\mathbf{V}_{it}^\top$. Přípustný odhad s instrumentálními proměnnými lze spočíst pomocí

$$\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^\top, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^\top, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_1^\top, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_2^\top\right)^\top = \left[\mathbb{W}^{*\top}\mathbb{V}(\mathbb{V}^\top\mathbb{V})^{-1}\mathbb{V}^\top\mathbb{W}^*\right]^{-1}\mathbb{W}^{*\top}\mathbb{V}(\mathbb{V}^\top\mathbb{V})^{-1}\mathbb{V}^\top\mathbf{Y}^*.$$

Pro úplnost dodejme, že odhad metodou přípustných zobecněných nejmenších čtverců by byl

$$\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1^\top, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2^\top, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_1^\top, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_2^\top\right)_F^\top = \left[\mathbb{W}^{*\top}\mathbb{W}^*\right]^{-1}\mathbb{W}^{*\top}\mathbf{Y}^*.$$

Odchylky od průměru $\mathbf{X}_{2it} - \overline{\mathbf{X}}_{2i\bullet}$ sice v pravém slova smyslu nejsou instrumenty, neboť není zřejmé, že by měly být nekorelované s náhodnými efekty, nicméně Hausman a Taylor (1981) v části 3.2 uvedli, že dvoustupňový odhad parametrů $\boldsymbol{\beta}_1$ a $\boldsymbol{\beta}_2$ v modelu

$$Y_{it} - \gamma\cdot\overline{Y}_{i\bullet} = (\mathbf{X}_{1it} - \gamma\cdot\overline{\mathbf{X}}_{1i\bullet})^\top\boldsymbol{\beta}_1 + (\mathbf{X}_{2it} - \gamma\cdot\overline{\mathbf{X}}_{2i\bullet})^\top\boldsymbol{\beta}_2 + \nu_{it} - \gamma\cdot\overline{\nu}_{i\bullet},$$

kde γ je zavedeno v tvrzení 5, je stejný jako odhad metodou obyčejných nejmenších čtverců v modelu

$$P_A(Y_{it} - \gamma\cdot\overline{Y}_{i\bullet}) = P_A(\mathbf{X}_{1it} - \gamma\cdot\overline{\mathbf{X}}_{1i\bullet})^\top\boldsymbol{\beta}_1 + P_A(\mathbf{X}_{2it} - \gamma\cdot\overline{\mathbf{X}}_{2i\bullet})^\top\boldsymbol{\beta}_2 + P_A(\nu_{it} - \gamma\cdot\overline{\nu}_{i\bullet}),$$

kde P_A je operátor ortogonální projekce do sloupcového prostoru matice $[\mathbb{H}, \mathbf{X}_{1it}, \mathbf{Z}_{1i}]$ a kde $\mathbb{H}$ je matice, která počítá odchylky od průměru (viz část 3.1.2). Projekce $\mathbf{X}_{1it}$ jsou právě tyto $\mathbf{X}_{1it}$, projekce $\mathbf{X}_{2it}$ lze spočítat pomocí průměrů v čase, viz Apendix B článku Hausman a Taylor (1981). Dostaneme tedy stejný odhad parametrů jako při použití odchylek $(\mathbf{X}_{1it} - \overline{\mathbf{X}}_{1i\bullet})$ a $(\mathbf{X}_{2it} - \overline{\mathbf{X}}_{2i\bullet})$ jako instrumentů.

Poznamenejme, že momentové podmínky použité k formulaci instrumentálních proměnných jsou

$$\mathbf{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{X}_{1it}\\ \mathbf{X}_{2it}\\ \mathbf{Z}_{1i}\\ \overline{\mathbf{X}}_{1i\bullet}\end{pmatrix}(u_{it} - \overline{u}_{i\bullet})\right] = \mathbf{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{X}_{1it}\\ \mathbf{X}_{2it}\\ \mathbf{Z}_{1i}\\ \overline{\mathbf{X}}_{1i\bullet}\end{pmatrix}(\nu_{it} - \overline{\nu}_{i\bullet})\right] = 0,$$

kde $u_{it} = \mu_i + \nu_{it}$ a

$$\overline{u}_{i\bullet} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_{it}.$$

2.4 Příklad

Příklad 4. Budeme uvažovat Grunfeldova data, Grunfeld (1958), dostupná v R, R Core Team (2020), v knihovně `AER` autorů Kleiber a Zeileis (2008). Jedná se o panelová data pro 11 amerických firem sledovaných v letech 1935–1954. Sledovaly se hrubé investice, tržní hodnota firmy a kapitál. Uvažujeme model závislosti tržní hodnoty firmy (V) na jejím kapitálu (C),

$$V_{it} = \alpha + \beta C_{it} + \mu_i + \nu_{it},\ i = 1, \ldots, 11,\ t = 1935, \ldots, 1954.$$

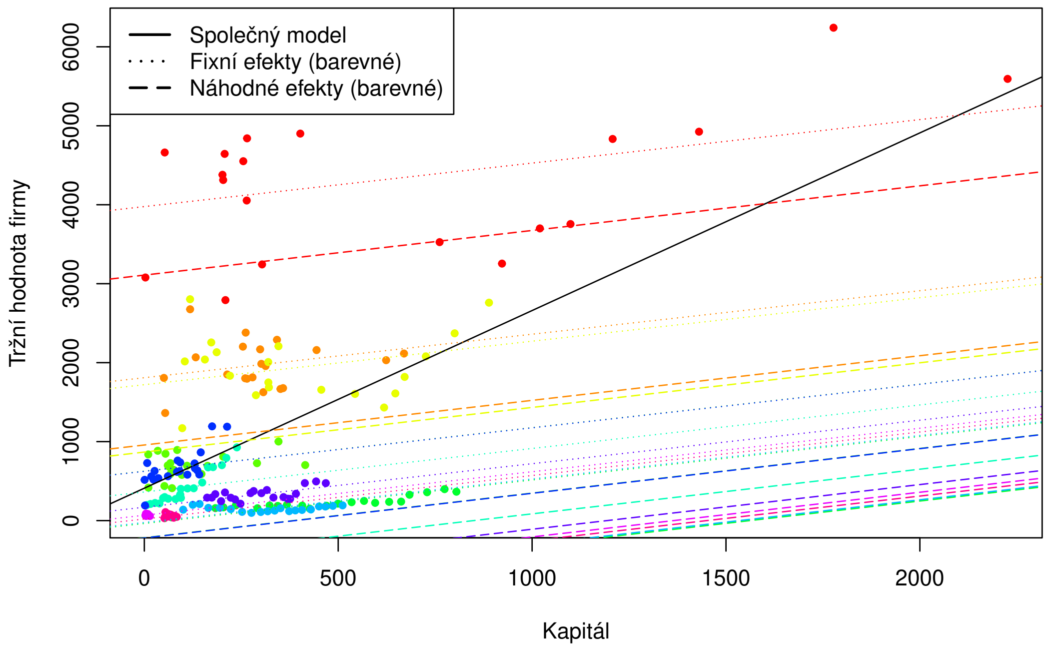
Na obrázku 2.1 je body uveden graf závislosti tržní hodnoty firmy na jejím kapitálu, jednotlivé firmy jsou odlišeny barevně.

Odhadneme uvedený model pomocí všech tří uvedených přístupů k panelovým datům, odhady parametrů a jejich směrodatné chyby (SE) jsou uvedeny v tabulce 2.1. Pro fixní efekty jsme použili uvnitř-skupinovou transformaci, takže nemůžeme odhadnout individuální efekty μ_i, $i = 1, \ldots, 11$.

	společný model		fixní efekty		náhodné efekty	
parametr	odhad	SE	odhad	SE	odhad	SE
abs. člen $\widehat{\alpha}$	410,140	99,444	–	–	843,215	302,112
kapitál $\widehat{\beta}$	2,250	0,255	0,551	0,094	0,565	0,095

Tabulka 2.1: Grunfeldova data a 3 přístupy k panelovým datům.

Odhady z tabulky 2.1 jsou graficky znázorněny na obrázku 2.1, na obrázku pro odhad modelu s fixními efekty nebyla použita uvnitř-skupinová transformace. Individuální efekty v modelu s náhodnými efekty dostaneme jako transformovaný mezi-skupinový odhad reziduí, více viz funkce ranef autora Tappe (2022) v knihovně `plm` od Millo (2017).



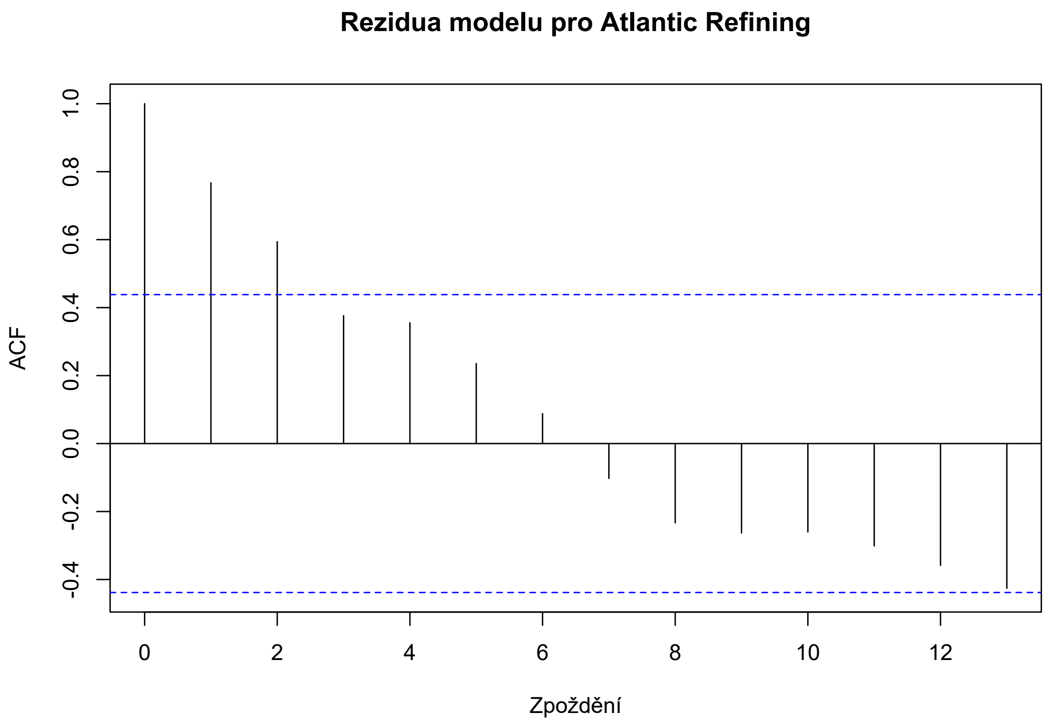
Obrázek 2.1: Tržní hodnota v závislosti na kapitálu pro firmy z Grunfeldových dat a tři odhady závislosti na kapitálu pro firmy z Grunfeldových dat.

Vidíme, že ve společném modelu se odhad parametru β (sklon přímky) výrazně liší od odhadu stejného parametru ať už v modelu s fixními či v modelu s náhodnými efekty, vzhledem k tomu, že neumožňuje modelovat heterogenitu subjektů, bychom tento přístup nedoporučili. U volby, zda přistoupit k fixním nebo náhodným efektům, může hrát roli také to, zda jsme firmy vybírali náhodně z nějaké množiny firem a potřebujeme naše závěry zobecnit na celou tuto množinu, pak bychom vybrali přístup s náhodnými efekty. Můžeme rovněž provést Hausmanův test, viz část 2.2. článku Hausman a Taylor (1981), hypotézy nekorelovanosti individuálních efektů a regresorů. Odhad s náhodnými efekty by v případě korelovanosti byl nekonzistentní, odhad s fixními efekty je konzistentní i v případě korelovanosti. Pro modely s fixními a náhodnými efekty v tomto příkladu je p-hodnota Hausmanova testu 0,294, můžeme tedy doporučit odhad s náhodnými efekty.

3. Dynamické modely pro panelová data

V panelových datech sledujeme pro daný subjekt i časovou řadu, kde předpoklad (P2) uvedený v kapitole 2, tedy předpoklad nekorelovanosti jednotlivých zbytkových chyb pro daný subjekt, nemusí být vždy splněn. Z tohoto důvodu zavádíme dynamické modely pro panelová data.

Příklad 5. Uvažujme Grunfeldova data popsaná v příkladu 4. Vybereme 4 firmy (Atlantic Refining, IBM, Union Oil a Westinghouse), pro které odhadneme stejný model závislosti tržní hodnoty firmy na jejím kapitálu jako ve zmíněném příkladu 4, tentokrát jen s fixními efekty. Pro Atlantic Refining vykreslíme graf výběrové autokorelační funkce reziduí, viz obr. 3.1. Data naznačují, že předpoklad nekorelovanosti (P2) by mohl být porušený.



Obrázek 3.1: Výběrová autokorelační funkce reziduí Atlantic Refining z Grunfeldových dat.

Dynamický model pro panelová data má předpis

$$Y_{it} = \delta_1 Y_{i,t-1} + \ldots + \delta_p Y_{i,t-p} + \mathbf{X}_{it}^\top \boldsymbol{\beta} + u_{it}, \tag{3.1}$$

kde Y_{it} je odezva, $\mathbf{X}_{it}$ jsou regresory dimenze $k \times 1$, $\boldsymbol{\beta}$ je vektor parametrů dimenze $k \times 1$, $\delta_1, \ldots, \delta_p$ jsou jednorozměrné parametry a u_{it} je chybový člen, který lze zapsat jako

$$u_{it} = \mu_i + \nu_{it},$$

tedy jako součet chybového členu specifického pro subjekt μ_i a zbytkového chybového členu ν_{it}, $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$. Aby mohlo být $t = 1, \dots, T$, tedy T rovnic, musíme k dříve uvažovaným $Y_{i1}, \dots, Y_{iT}$ přidat $Y_{i,-p+1}, \dots, Y_{i0}$. Chybové členy specifické pro subjekt a zbytkové chybové členy, popsané dále, musí být vzájemně nezávislé. V modelu může, ale nemusí, být zahrnut absolutní člen jako jeden z regresorů.

Budeme se zabývat situací, kdy $p = 1$, tedy modelem

$$Y_{it} = \delta_1 Y_{i,t-1} + \mathbf{X}_{it}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_i + \nu_{it}, \tag{3.2}$$

kvůli stabilitě předpokládejme $|\delta_1| < 1$. Zobecnění pro vyšší p je přímočaré.

Předpoklady budeme uvažovat stejné jako pro model s fixními či náhodnými efekty v kapitole 2 podle toho, jaké efekty v dynamickém modelu uvažujeme, a přidáme předpoklad, že zbytkové chybové členy jsou nezávislé, stejně rozdělené, s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ_ν^2,

(P1D) $\nu_{it} \sim \mathrm{iid}(0,\sigma_\nu^2) \quad i = 1, \dots, n,\ t = 1, \dots, T.$

V případě panelových dat s náhodnými efekty μ_i, $i = 1, \dots, n$, přidáme předpoklad: chybové členy specifické pro subjekt jsou nezávislé, stejně rozdělené, s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ_μ^2,

(P2D) $\mu_i \sim \mathrm{iid}(0,\sigma_\mu^2) \quad i = 1, \dots, n,$

a také, že μ_i je nezávislé na $\mathbf{X}_{i1}, \dots, \mathbf{X}_{iT}$, $i = 1, \dots, n$.

Když model (3.2) neobsahuje exogenní regresory $\mathbf{X}_{it}$, pak je tvaru

$$Y_{it} = \delta_1 Y_{i,t-1} + \mu_i + \nu_{it} \tag{3.3}$$

a nazývá se panelový AR(1) model. Pro tento model rozepíšeme Y_{it} pro $t = 1, 2, 3$ a dosadíme předchozí vyjádření,

$$\begin{aligned}
Y_{i1} &= \delta_1 Y_{i0} + \mu_i + \nu_{i1},\\
Y_{i2} &= \delta_1 Y_{i1} + \mu_i + \nu_{i2} = \delta_1(\delta_1 Y_{i0} + \mu_i + \nu_{i1}) + \mu_i + \nu_{i2} =\\
&= \delta_1^2 Y_{i0} + (\delta_1 + 1)\mu_i + \delta_1 \nu_{i1} + \nu_{i2},\\
Y_{i3} &= \delta_1 Y_{i2} + \mu_i + \nu_{i3} = \delta_1 \left(\delta_1^2 Y_{i0} + (\delta_1 + 1)\mu_i + \delta_1 \nu_{i1} + \nu_{i2}\right) + \mu_i + \nu_{i3} =\\
&= \delta_1^3 Y_{i0} + (\delta_1^2 + \delta_1 + 1)\mu_i + \delta_1^2 \nu_{i1} + \delta_1 \nu_{i2} + \nu_{i3}.
\end{aligned}$$

Pro obecné t pak

$$\begin{aligned}
Y_{it} &= \delta_1^t Y_{i0} + (\delta_1^{t-1} + \ldots + \delta_1 + 1)\mu_i + \delta_1^{t-1}\nu_{i1} + \delta_1^{t-2}\nu_{i2} + \ldots + \delta_1 \nu_{i,t-1} + \nu_{i,t} =\\
&= \delta_1^t Y_{i0} + \mu_i \sum_{j=0}^{t-1} \delta_1^j + \sum_{j=0}^{t-1} \delta_1^j \nu_{i,t-j},
\end{aligned}$$

odkud je patrné, proč požadujeme $|\delta_1| < 1$. Uvedené vyjádření využijeme dále v části 3.1.1. Z předchozího vyjádření plyne, viz také Das (2019), část 18.2, že pro velké t platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y_{it}|\mu_i] &\approx \mu_i \sum_{j=0}^{\infty} \delta_1^j = \mu_i \cdot \frac{1}{1-\delta_1},\\
\mathbf{var}[Y_{it}|\mu_i] &\approx \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{var}\left(\delta_1^j \nu_{i,t-j}\right) = \frac{\sigma_\nu^2}{1-\delta_1^2}.
\end{aligned}$$

3.1 Klasické odhady

V této části ukážeme, jak se chovají odhady z kapitoly 2 při použití na dynamický model pro panelová data. Připomeňme, že uvažujeme T fixní a $n \to \infty$.

3.1.1 Odhad metodou nejmenších čtverců

Budeme uvažovat model (3.2), který má mezi regresory vždy jen jednu zpožděnou hodnotu vysvětlované proměnné.

Nejprve ukážeme, že odhad metodou obyčejných nejmenších čtverců v modelu s náhodnými efekty je nekonzistentní pro $n \to \infty$, i pokud by $T \to \infty$. Jelikož Y_{it} je funkcí μ_i,

$$Y_{i,t} = \delta_1 Y_{i,t-1} + \mathbf{X}_{i,t}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_i + \nu_{it},$$

$Y_{i,t-1}$ je funkcí μ_i,

$$Y_{i,t-1} = \delta_1 Y_{i,t-2} + \mathbf{X}_{i,t-1}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_i + \nu_{i,t-1},$$

tedy $Y_{i,t-1}$ je korelované s $u_{it} = \mu_i + \nu_{it}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{cov}[Y_{i,t-1},\, u_{it}] &= \mathbf{cov}[\delta_1 Y_{i,t-2} + \mathbf{X}_{i,t-1}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_i + \nu_{i,t-1},\, \mu_i + \nu_{it}] = \\
&= \mathbf{E}[\delta_1 Y_{i,t-2}\mu_i + \mu_i \mathbf{X}_{i,t-1}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_i^2 + \mu_i \nu_{i,t-1} \\
&+ \delta_1 Y_{i,t-2}\nu_{it} + \nu_{it}\mathbf{X}_{i,t-1}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_i \nu_{it} + \nu_{i,t-1}\nu_{it}] \\
&- (\mathbf{E}[\delta_1 Y_{i,t-2} + \mathbf{X}_{i,t-1}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_i + \nu_{i,t-1}])(\mathbf{E}[\mu_i + \nu_{it}]) = \\
&= \mathbf{E}[\delta_1 Y_{i,t-2}\mu_i + \mu_i^2] = \delta_1 \mathbf{E}[Y_{i,t-2}\mu_i] + \sigma_\mu^2,
\end{aligned}$$

kde jsme využili předpoklady o nulové střední hodnotě chyb specifických pro subjekt i zbytkových chyb a jejich (i vzájemné) nezávislosti. Budeme-li navíc předpokládat, že pozorujeme část časové řady, kterou lze uvažovat pro t libovolně do minulosti a že časové řady regresorů i odezvy jsou stacionární, pak můžeme rekurzivně pokračovat a aproximovat pro m velké,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{cov}[Y_{i,t-1},\, u_{it}] = \delta_1 \mathbf{E}[Y_{i,t-2}\mu_i] + \sigma_\mu^2 = \delta_1 \left(\delta_1 \mathbf{E}[Y_{i,t-3}\mu_i] + \sigma_\mu^2\right) + \sigma_\mu^2 = \\
&= \delta_1^3 \mathbf{E}[Y_{i,t-4}\mu_i] + \sigma_\mu^2 + \delta_1 \sigma_\mu^2 + \delta_1^2 \sigma_\mu^2 = \ldots = \delta_1^{m+1}\mathbf{E}[Y_{i,t-(m+2)}\mu_i] + \sigma_\mu^2 \sum_{j=0}^{m} \delta_1^j \\
&\xrightarrow[m\to\infty]{} 0 + \sigma_\mu^2 \cdot \frac{1}{1-\delta_1} = \frac{\sigma_\mu^2}{1-\delta_1} \neq 0.
\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že chybový člen u_{it} a regresor $Y_{i,t-1}$ jsou korelované, tedy odhad parametrů modelu metodou nejmenších čtverců není obecně konzistentní, viz diskuze za větou 2. Touto nenulovou kovariancí je porušen předpoklad (P3N), tedy ani odhad metodou zobecněných nejmenších čtverců v podobě popsané pro náhodné efekty v části 2.3 není konzistentní.

3.1.2 Uvnitř-skupinový odhad

Pro dynamický model zavádíme uvnitř-skupinový (angl. within) odhad, pro který ukážeme, že pokud i $T \to \infty$, odhady parametrů konzistentní jsou. Uvažujme model (3.2), v tomto modelu provedeme podobnou transformaci jako v kapitole 2.2. Spočítáme průměry odezvy, regresorů a chybových členů,

$$\overline{Y}_{i\bullet} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_{it}, \quad \overline{Y}_{i\bullet,-T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_{i,t-1}, \quad \overline{\mathbf{X}}_{i\bullet} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{X}_{it}, \quad \overline{\nu}_{i\bullet} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \nu_{it},$$

které odečteme od napozorovaných dat a dostaneme model

$$Y_{it} - \overline{Y}_{i\bullet} = \delta_1(Y_{i,t-1} - \overline{Y}_{i\bullet,-T}) + (\mathbf{X}_{it} - \overline{\mathbf{X}}_{i\bullet})^\top \boldsymbol{\beta} + \nu_{it} - \overline{\nu}_{i\bullet},$$

$i = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, T$. V tomto modelu se sice nevyskytují individuální efekty μ_i, ale regresory $Y_{i,t-1} - \overline{Y}_{i\bullet,-T}$ jsou korelované s chybami $\nu_{it} - \overline{\nu}_{i\bullet}$, neboť $Y_{i,t-1}$ je korelované s $\overline{\nu}_{i\bullet}$. Korelovanost regresorů a chyb vede k vychýlení odhadu vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$ a parametru δ_1 metodou obyčejných nejmenších čtverců. Toto vychýlení je řádu $\frac{1}{T}$, jak ukázal Nickell (1981).

Odhad by byl konzistentní, jen pokud by i $T \to \infty$, což ukážeme pro model $Y_{it} = \delta_1 Y_{i,t-1} + u_{it}$. Označme $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \ldots, Y_{i,T})^\top$ a

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \mathbf{Y}_2^\top, \ldots, \mathbf{Y}_n^\top)^\top,$$

$\mathbf{Y}_{i,-T} = (Y_{i0}, \ldots, Y_{i,T-1})^\top$ a

$$\mathbf{Y}_{-T} = (\mathbf{Y}_{1,-T}^\top, \mathbf{Y}_{2,-T}^\top, \ldots, \mathbf{Y}_{n,-T}^\top)^\top,$$

vektory chyb $\boldsymbol{\nu}_i = (\nu_{i1}, \ldots, \nu_{iT})^\top$ a

$$\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\nu}_1^\top, \boldsymbol{\nu}_2^\top, \ldots, \boldsymbol{\nu}_n^\top)^\top,$$

dále označme $\mathbb{H} = \mathbb{I}_T - \frac{1}{T}\mathbf{1}_T\mathbf{1}_T^\top$ symetrickou a pro každé T idempotentní matici s dimenzemi $T \times T$, která z vektoru počítá odchylky od průměrné hodnoty,

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} & \cdots & -\frac{1}{T} \\ -\frac{1}{T} & 1-\frac{1}{T} & \cdots & -\frac{1}{T} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ -\frac{1}{T} & \cdots & 1-\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} \\ -\frac{1}{T} & \cdots & -\frac{1}{T} & 1-\frac{1}{T} \end{pmatrix}.$$

V maticovém tvaru pro i-tý subjekt platí $\mathbb{H}\mathbf{Y}_i = \mathbb{H}\mathbf{Y}_{i,-T} + \mathbb{H}\boldsymbol{\nu}_i$.

Pro $(\mathbb{I}_n \otimes \mathbb{H})\mathbf{Y}_{-T}$ předpokládejme (PLR3) z části 1.1. Neplatí však předpoklad (PLR4),

$$\frac{1}{nT}((\mathbb{I}_n \otimes \mathbb{H})\mathbf{Y}_{-T})^\top (\mathbb{I}_n \otimes \mathbb{H})\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{nT}\sum_{i=1}^{n}[\mathbb{H}\mathbf{Y}_{i,-T}]^\top \mathbb{H}\boldsymbol{\nu}_{i,-1} = \frac{1}{nT}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Y}_{i,-T}^\top \mathbb{H}\boldsymbol{\nu}_i$$

nekonverguje v pravděpodobnosti pro $n \to \infty$ k nulovému vektoru, jelikož

$$\mathbf{E}[\mathbf{Y}_{i,-T}^\top \mathbb{H}\boldsymbol{\nu}_i] = \sum_{t=1}^{T}\mathbf{E}[Y_{i,t-1}(\nu_{it} - \overline{\nu}_{i\bullet})] \neq 0,$$

neboť

$$\mathbf{E}[Y_{i,t-1}\overline{\nu}_{i\bullet}] = \mathbf{E}\left[Y_{i,t-1}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(Y_{it} - \delta_1 Y_{i,t-1})\right].$$

Výraz $\frac{1}{nT}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Y}_{i,-T}^\top \mathbb{H}\boldsymbol{\nu}_i$ by konvergoval pro $nT \to \infty$ k 0, pokud by $\overline{\nu}_{i\bullet}$ konvergovalo k 0, což nastává pokud $T \to \infty$ podle zákona velkých čísel.

3.1.3 Maximálně-věrohodné odhady

Bond (2002) připomíná možnost odhadu metodou maximální věrohodnosti pro dynamický model panelových dat. Musíme však předpokládat nějaké konkrétní rozdělení individuálních efektů a zbytkových chyb, např. normální. Navíc rozdělení proměnných Y_{it}, $t = 1, \ldots, T$, záleží na tom, co předpokládáme pro Y_{i0}, které může být náhodné či deterministické, korelované či nekorelované s individuálním efektem μ_i, může být specifikované tak, aby pro každý subjekt byla $\mathbf{E}[Y_{it}]$ konstantní od $t = 1$, či jej můžeme specifikovat tak, aby řada $Y_{i1}, \ldots, Y_{iT}$ splňovala stacionaritu nějakého vyššího řádu. Všechny tyto předpoklady vedou na různé věrohodnostní funkce a tedy i jiné odhady parametrů. V případě, že předpoklady na Y_{i0} jsou chybně specifikovány, a tedy používáme chybnou věrohodnostní funkci, mohou být odhady parametrů modelu nekonzistentní. Více o maximálně-věrohodných odhadech uvádí v části 4.3.3a Hsiao (2003).

Pro ilustraci uvedeme věrohodnost pro stacionární případ, kdy je Y_{i0} fixní, individuální efekty jsou náhodné a zbytkové chyby i individuální efekty mají normální rozdělení. Pak je věrohodnost tvaru

$$(2\pi)^{-\frac{nT}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{Y}_i - \delta_1 \mathbf{Y}_{i,-T} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}\right)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\mathbf{Y}_i - \delta_1 \mathbf{Y}_{i,-T} - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}\right) \right\},$$

kde využíváme značení z kapitoly 2 a části 3.1.2. Odhad parametrů nalezneme jako argument maxima věrohodnostní funkce přes $(\delta_1, \boldsymbol{\beta}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{1+k}$.

Odhady metodou maximální věrohodnosti se dále teoreticky zabývat nebudeme, pouze je uvedeme pro srovnání v simulační studii v kapitole 4.

Oproti maximálně-věrohodným odhadům odhady založené na metodě instrumentálních proměnných a odhady zobecněnou metodou momentů uvedené v následující části, tj. Andersonův-Hsiaoův, Arellanův-Bondův, Arellanův-Boverův a Ahnův-Schmidtův odhad předpokládají pro Y_{i0} pouze $\mathbf{cov}[\nu_{it}, Y_{i0}] = 0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ a $t = 1, \ldots, T$.

3.2 Odhady zobecněnou metodou momentů

Při uvnitř-skupinovém odhadu v části 3.1.2 jsme narazili na problém korelovanosti regresorů a chyb. V lineárním modelu tento problém umíme vyřešit pomocí instrumentálních proměnných, viz část 1.3. V uvnitř-skupinovém odhadu však není zcela jasné, jaký instrument použít kvůli hodnotě průměru zpožděných odezev $\overline{Y}_{i\bullet-1}$. Proto v této části zavádíme odhad pomocí transformace na první diference s pomocí instrumentálních proměnných a odhady zobecněnou metodou momentů.

Následující kapitoly o odhadech čerpají přehledově z osmé kapitoly knihy Baltagi (2021) a třinácté kapitoly knihy Greene (2003). Dále čerpáme z původních článků, které jsou citovány u jednotlivých odhadů.

3.2.1 Odhad metodou instrumentálních proměnných pomocí transformace na první diference

Uvažujme opět model (3.2). V tomto modelu provedeme transformaci na první diference. Dostaneme tak model

$$Y_{it} - Y_{i,t-1} = \delta_1(Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2}) + (\mathbf{X}_{it} - \mathbf{X}_{i,t-1})^\top \boldsymbol{\beta} + \nu_{it} - \nu_{i,t-1},$$

$i = 1, \ldots, n$, $t = 2, \ldots, T$.

V tomto modelu odhadneme parametry dvoustupňovým odhadem metodou nejmenších čtverců, viz 1.3, s instrumentálními proměnnými $Y_{i,t-2} - Y_{i,t-3}$ nebo $Y_{i,t-2}$ pro regresor $Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2}$. Obě varianty instrumentálních proměnných nejsou korelované s chybami $\nu_{it} - \nu_{i,t-1}$ za předpokladu vzájemné nekorelovanosti ν_{it}, $t = 1, \ldots, T$, ale jsou korelované s regresorem $Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2}$. Rovněž bychom mohli použít např. $Y_{i,t-3}$ či ještě více zpožděné hodnoty. Momentové podmínky pro instrument $Y_{i,t-2}$ jsou

$$\mathbf{E}[Y_{i,t-2}(\nu_{it} - \nu_{i,t-1})] = 0,$$

$t = 2, \ldots, T$. Pro každý instrument máme jednu podmínku, pro každý subjekt tedy $T - 1$ podmínek. Pro instrument $Y_{i,t-2} - Y_{i,t-3}$ pak

$$\mathbf{E}[(Y_{i,t-2} - Y_{i,t-3})(\nu_{it} - \nu_{i,t-1})] = 0,$$

$t = 3, \ldots, T$, v tomto případě máme pro každý subjekt $T - 2$ podmínek.

Instrument, který použijeme, označme obecně W_{it}. V případě instrumentu $Y_{i,t-2}$ bude dále $t_* = 2$ a v případě $Y_{i,t-2} - Y_{i,t-3}$ pak $t_* = 3$.

Dvoustupňový odhad metodou nejmenších čtverců s instrumentálními proměnnými probíhá ve dvou krocích pomocí metody obyčejných nejmenších čtverců:

1. Odhadneme model, na který můžeme nahlížet např. jako na společný model pro panelová data,

   $$\Delta Y_{i,t-1} = Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2} = cW_{it} + (\mathbf{X}_{it} - \mathbf{X}_{i,t-1})^\top \boldsymbol{d} + \varepsilon_{it},$$

   $i = 1, \ldots, n$, $t = t_*, \ldots, T$. Z odhadu tohoto modelu dostaneme vyrovnané hodnoty $\widehat{\Delta Y_{i,t-1}}$, ty použijeme ve druhém kroku.

2. Metodou obyčejných nejmenších čtverců odhadneme model

   $$Y_{it} - Y_{i,t-1} = \delta_1(\widehat{\Delta Y_{i,t-1}}) + (\mathbf{X}_{it} - \mathbf{X}_{i,t-1})^\top \boldsymbol{\beta} + \nu_{it} - \nu_{i,t-1},$$

$i = 1, \ldots, n$, $t = t_*, \ldots, T$. Dostaneme tak dvoustupňový odhad metodou nejmenších čtverců, $\widehat{\delta}_{1,2\mathrm{SLS}}$ a $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{2\mathrm{SLS}}$. Popsaný přístup navrhli v 8. části článku Anderson a Hsiao (1981), podle kterých odhad budeme nazývat Andersonův-Hsiaoův.

Chyby v modelu v kroku 2 mají komplikovanější varianční matici, bylo by lepší tento model odhadnout metodou přípustných nejmenších čtverců, neboť varianční matice chyb i-tého subjektu je typu $\sigma_\nu^2 \cdot G$, kde G je fixní, nikoliv však jednotková, matice,

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

neboť

$$\begin{aligned}
\mathbf{cov}[\nu_{i,j+1} - \nu_{ij}, \nu_{i,k+1} - \nu_{ik}] = \\
&= \mathbf{E}[\nu_{i,j+1}\nu_{i,k+1}] - \mathbf{E}[\nu_{ij}\nu_{i,k+1}] - \mathbf{E}[\nu_{i,j+1}\nu_{ik}] + \mathbf{E}[\nu_{ij},\nu_{ik}] = \\
&= \sigma_\nu^2 - 0 - 0 + \sigma_\nu^2, \text{ je-li } j = k, \\
&= 0 - \sigma_\nu^2 - 0 + 0, \text{ je-li } j - k = 1, \\
&= 0 - 0 - \sigma_\nu^2 + 0, \text{ je-li } j - k = -1, \\
&= 0 - 0 - 0 + 0, \text{ je-li } |j - k| \geq 2.
\end{aligned}$$

Následně bychom využili odhad zobecněnou metodou nejmenších čtverců popsaný v části 1.2 s maticí $\mathbb{I}_n \otimes G$ jako maticí $\mathbf{\Omega}$.

Dvoustupňový odhad je vlastně odhad zobecněnou metodou momentů s momentovými podmínkami

$$\mathbf{E}[W_{it}(\nu_{it} - \nu_{i,t-1})] = 0.$$

V případě, kdy by model byl panelový AR(1) model (3.3),

$$Y_{it} = \delta_1 Y_{i,t-1} + u_{it}, \quad t = 1, \ldots, T,$$

odhad parametru δ_1 metodou momentů by měl v případě instrumentů $Y_{i,t-2}$ předpis

$$\widehat{\delta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=2}^{T} (Y_{it} - Y_{i,t-1}) Y_{i,t-2}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=2}^{T} (Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2}) Y_{i,t-2}}$$

podle vzorce pro dvoustupňový odhad se stejným počtem regresorů a instrumentů, viz 1.3, a v případě instrumentů $Y_{i,t-2} - Y_{i,t-3}$ pak

$$\widehat{\delta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=3}^{T} (Y_{it} - Y_{i,t-1})(Y_{i,t-2} - Y_{i,t-3})}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=3}^{T} (Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2})(Y_{i,t-2} - Y_{i,t-3})}.$$

Označme

$$\mathbf{W}_i = \begin{pmatrix} W_{i,t_*} \\ \vdots \\ W_{i,T} \end{pmatrix}, \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_n \end{pmatrix}, \Delta\mathbf{Y}_{i*} = \begin{pmatrix} Y_{i,t_*-1} - Y_{i,t_*-2} \\ \vdots \\ Y_{i,T-1} - Y_{i,T-2} \end{pmatrix}, \Delta\mathbf{Y}_* = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{Y}_{1*} \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{Y}_{n*} \end{pmatrix},$$

při tomto značení je odhad asymptotické rozptylové matice dvoustupňového odhadu, viz část 1.3,

$$\widehat{\sigma}^2_{2\mathrm{SLS}} \cdot \left(\frac{1}{nT} \left(\mathbf{W} \left(\mathbf{W}^\top \mathbf{W} \right)^{-1} \mathbf{W}^\top \Delta\mathbf{Y}_* \right)^\top \left(\mathbf{W} \left(\mathbf{W}^\top \mathbf{W} \right)^{-1} \mathbf{W}^\top \Delta\mathbf{Y}_* \right) \right)^{-1},$$

kde

$$\widehat{\sigma}^2_{2\mathrm{SLS}} = \frac{1}{nT} \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \left(Y_{it} - \widehat{\delta}_1 Y_{i,t-1} \right)^2.$$

Nevyužili jsme však všechny informace o momentech, proto odhad více rozvineme v části 3.2.2.

Poznámka 7. Pro menší rozptyl Arellano (1989) v numerické části článku doporučuje jako instrumentální proměnnou volit $Y_{i,t-2}$. Vlastní porovnání bude provedeno v kapitole 4.

Dále v této části představíme odhady, které využívají zobecněnou metodu momentů, viz 1.4, jednotlivé metody se liší tím, jakou sadu momentových podmínek ke konstrukci odhadu využívají. Pro každý odhad zformulujeme momentové podmínky, ke kterým uvedeme příslušné výběrové populační podmínky. Musíme však vyřešit problém korelovanosti regresorů a chyb. Proto provádíme různé transformace modelu, např. transformace na první diference, a používáme instrumentální proměnné. Následně využijeme princip zobecněné metody momentů, viz 1.4, tj. minimalizujeme kriteriální funkci a odhadujeme asymptotickou varianční matici. Jak konkrétně postupovat, ukážeme v částech 3.2.2 a 3.2.3.

3.2.2 Arellanův-Bondův odhad

Stejně jako autoři tohoto odhadu z článku Arellano a Bond (1991) nejprve uvažujme model (3.3) bez dalších regresorů

$$Y_{it} = \delta_1 Y_{i,t-1} + u_{it}, \quad t = 1, \ldots, T,$$

a až následně přejdeme k modelu (3.2) s jednou zpožděnou hodnotou a regresory $\mathbf{X}_{it}$ nekorelovanými s nepozorovanými individuálními efekty μ_i, $\forall i = 1, \ldots, n$ a $t = 1, \ldots, T$.

Provedeme transformaci na první diference a dostaneme model

$$Y_{it} - Y_{i,t-1} = \delta_1(Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2}) + \nu_{it} - \nu_{i,t-1}, \quad t = 2, \ldots, T,$$

čímž z modelu vypadnou individuální efekty μ_i. Na rozdíl od odhadu v části 3.2.1 nyní použijeme jako instrumenty všechny $Y_{i,t-2}, \ldots, Y_{i0}$, neboť pro každé $t = 2, \ldots, T$ jsou korelované s $Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2}$, ale nekorelované s $\nu_{it} - \nu_{i,t-1}$.

Uvedeme explicitně několik momentových podmínek. Momentová podmínka pro $t = 2$ je

$$\mathbf{E}[Y_{i0}(\nu_{i2} - \nu_{i1})] = 0.$$

Momentové podmínky pro $t = 3$ jsou

$$\mathbf{E}[Y_{i0}(\nu_{i3} - \nu_{i2})] = \mathbf{E}[Y_{i1}(\nu_{i3} - \nu_{i2})] = 0$$

a pro $t = 4$

$$\mathbf{E}[Y_{i0}(\nu_{i4} - \nu_{i3})] = \mathbf{E}[Y_{i1}(\nu_{i4} - \nu_{i3})] = \mathbf{E}[Y_{i2}(\nu_{i4} - \nu_{i3})] = 0.$$

Označme matice instrumentů pro i-tý subjekt $\mathbf{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$, jde o blokově diagonální matice

$$\mathbf{V}_i = \begin{pmatrix} Y_{i0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [Y_{i0}, Y_{i1}] & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & [Y_{i0}, \ldots, Y_{i,T-2}] \end{pmatrix}$$

s $T - 1$ řádky a $1 + 2 + \ldots + (T - 1) = \frac{(T-1)T}{2}$ sloupci.

Matice instrumentů $\mathbb{V}$ je obdélníková,

$$\mathbb{V} = \left(\mathbf{V}_1^\top, \quad \mathbf{V}_2^\top, \quad \dots, \quad \mathbf{V}_n^\top\right)^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n \end{pmatrix},$$

s $n(T-1)$ řádky a $\frac{(T-1)T}{2}$ sloupci.

Označme

$$\begin{aligned}
\Delta\nu_i &= (\nu_{i2} - \nu_{i1}, \dots, \nu_{iT} - \nu_{i,T-1})^\top, \quad i = 1, \dots, n, \\
\Delta\mathbf{Y}_i &= (Y_{i2} - Y_{i1}, \dots, Y_{iT} - Y_{i,T-1})^\top, \quad i = 1, \dots, n, \\
\Delta\mathbf{Y}_{i,-T} &= (Y_{i1} - Y_{i0}, \dots, Y_{i,T-1} - Y_{i,T-2})^\top, \quad i = 1, \dots, n, \\
\Delta\mathbf{Y} &= (\Delta\mathbf{Y}_1^\top, \dots, \Delta\mathbf{Y}_n^\top)^\top, \\
\Delta\mathbf{Y}_{-T} &= (\Delta\mathbf{Y}_{1,-T}^\top, \dots, \Delta\mathbf{Y}_{n,-T}^\top)^\top, \\
\Delta\boldsymbol{\nu} &= (\Delta\nu_1^\top, \dots, \Delta\nu_n^\top)^\top.
\end{aligned}$$

Chyby $\nu_{it} - \nu_{i,t-1} = Y_{it} - Y_{i,t-1} - \delta_1(Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2})$ jsou nekorelované s instrumenty, což vytváří momentové podmínky odhadu

$$\mathbf{E}[\mathbf{V}_i^\top \Delta\nu_i] = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

kde

$$\Delta\nu_i = (Y_{i2} - Y_{i1} - \delta_1(Y_{i1} - Y_{i0}), \dots, Y_{iT} - Y_{i,T-1} - \delta_1(Y_{i,T-1} - Y_{i,T-2}))^\top.$$

Celkově tedy máme pro i-tý subjekt $\frac{(T-1)T}{2}$ podmínek.

Příslušná výběrová momentová podmínka je

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\mathbf{V}_i^\top \Delta\nu_i] = 0.$$

Tuto momentovou podmínku využijeme v odhadu parametru δ_1 zobecněnou metodou momentů, viz 1.4, kde v prvním kroku minimalizujeme kriteriální funkci s jednotkovou maticí jako maticí vah,

$$\widehat{\delta}_1 = \operatorname*{argmin}_{\delta_1 \in \mathbb{R}} \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top \Delta\nu_i\right]^\top \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top \Delta\nu_i\right].$$

Dále postupujeme tak, že spočteme rezidua $\widehat{\Delta\nu_i} = \Delta\mathbf{Y}_i - \widehat{\delta}_1 \cdot \Delta\mathbf{Y}_{i,-T}$ z prvního kroku a z nich odhadnutou asymptotickou varianční matici až na konstantu

$$\widehat{F} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{V}_i^\top \widehat{\Delta\nu_i}\right] \left[\mathbf{V}_i^\top \widehat{\Delta\nu_i}\right]^\top, \tag{3.5}$$

jejíž inverzní matici použijeme jako matici vah v druhém kroku odhadu zobecněnou metodou momentů, tj. minimalizujeme

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top \Delta\nu_i\right]^\top \widehat{F}^{-1} \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top \Delta\nu_i\right].$$

Můžeme zvolit i jinou matici vah, označme ji W_n, a v prvním kroku odhadu zobecněnou metodou momentů minimalizovat

$$\widehat{\delta}_1 = \underset{\delta_1 \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top \Delta\nu_i \right]^\top W_n \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top \Delta\nu_i \right].$$

V případě volby matice vah

$$W_n = \left(\frac{1}{n} \mathbb{V}^\top \mathbb{V} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top \mathbf{V}_i \right)^{-1},$$

dostaneme odhad

$$\widehat{\delta}_1 = \left[(\Delta\mathbf{Y}_{-T})^\top \mathbb{V} \left(\mathbb{V}^\top \mathbb{V} \right)^{-1} \mathbb{V}^\top (\Delta\mathbf{Y}_{-T}) \right]^{-1} (\Delta\mathbf{Y}_{-T})^\top \mathbb{V} \left(\mathbb{V}^\top \mathbb{V} \right)^{-1} \mathbb{V}^\top \Delta\mathbf{Y},$$

stejný jako dvoustupňový odhad, viz část 1.5 s regresory $\Delta\mathbf{Y}_{-T}$ a instrumenty $\mathbb{V}$.

Kdybychom provedli standardní odhad pomocí instrumentálních proměnných, viz kapitola 1.3, nebo výše popsaný odhad zobecněnou metodou momentů, nebrali bychom vůbec v úvahu, že chyby $\nu_{it} - \nu_{i,t-1}$ jsou rozdíly chyb v původním modelu a tvoří MA(1) proces. Zanedbali bychom, že

$$\mathbf{E}[\Delta\nu_i \Delta\nu_i^\top] = \sigma_\nu^2 G,$$

kde G je dána předpisem (3.4).

Tento fakt použijeme v odhadu parametru δ_1 zobecněnou metodou momentů, viz 1.4, a to využitím matice vah

$$W_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top G \mathbf{V}_i \right)^{-1}, \tag{3.6}$$

kde G je dána vzorcem (3.4). Tento odhad je eficientní, neboť odhad asymptotické varianční matice je

$$\widehat{F} \propto \mathbf{var} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top \Delta\nu_i | \mathbf{V}_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top \mathbf{var}(\Delta\nu_i | \mathbf{V}_i) \mathbf{V}_i$$

a optimální volba matice vah je $W_n = \widehat{F}^{-1}$, kladná konstanta nemá na minimalizaci kriteriální funkce vliv.

Pro tuto volbu váhové matice dostaneme, za využití předpokladu (P1D) a odvození tvaru argumentu minima v části 1.5, odhad

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}_1 &= \underset{\delta_1 \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top \Delta\nu_i \right]^\top \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top G \mathbf{V}_i \right)^{-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top \Delta\nu_i \right] = \\
&= \underset{\delta_1 \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left[\mathbb{V}^\top \Delta\boldsymbol{\nu} \right]^\top W_n \left[\mathbb{V}^\top \Delta\boldsymbol{\nu} \right] = \\
&= \left[(\Delta\mathbf{Y}_{-T})^\top \mathbb{V} W_n \mathbb{V}^\top (\Delta\mathbf{Y}_{-T}) \right]^{-1} (\Delta\mathbf{Y}_{-T})^\top \mathbb{V} W_n \mathbb{V}^\top \Delta\mathbf{Y}.
\end{aligned}$$

Tento odhad bychom mohli dále využít k odhadu asymptotické varianční matice $\widehat{F}$ dané vzorcem (3.5), jejíž inverzi bychom využili v druhém kroku odhadu zobecněnou metodou momentů jako matici vah. Arellano a Bond (1991) uvedli, že v případě volby matice vah (3.6) je jednokrokový odhad asymptoticky (pro $n \to \infty$) ekvivalentní s odhadem po druhém kroku odhadu zobecněnou metodou momentů s maticí vah $\widehat{F}^{-1}$, kde $\widehat{F}$ je dána vzorcem (3.5), byla-li v prvním kroku využita zmíněná matice (3.6). V případě volby (3.6) tedy není nutné druhý krok odhadu zobecněnou metodou momentů provádět.

Odhad asymptotického rozptylu odhadu parametru δ_1 podle věty 3 je

$$\widehat{V}_{GMM} = \frac{(\Delta \mathbf{Y}_{-T})^\top \mathbb{V} W_n \widehat{F} W_n \mathbb{V}^\top (\Delta \mathbf{Y}_{-T})}{((\Delta \mathbf{Y}_{-T})^\top \mathbb{V} W_n \mathbb{V}^\top (\Delta \mathbf{Y}_{-T}))^2}.$$

Poznámka 8. Alternativně můžeme odhad parametru δ_1 získat odhadem metodou zobecněných nejmenších čtverců, viz 1.2, v modelu

$$\mathbb{V}^\top \Delta \mathbf{Y} = \delta_1 \mathbb{V}^\top \Delta \mathbf{Y}_{-T} + \mathbb{V}^\top \Delta \boldsymbol{\nu},$$

neboť varianční matice chyb $\mathbb{V}^\top \Delta \boldsymbol{\nu}$ je $\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{V}^\top (\mathbb{I}_n \otimes G) \mathbb{V} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top G \mathbf{V}_i$ a dostaneme tak stejný odhad parametru δ_1 jako při odhadu zobecněnou metodou momentů s maticí vah (3.6).

Přejděme nyní k modelu (3.2). V tomto modelu opět provedeme transformaci na první diference

$$Y_{it} - Y_{i,t-1} = \delta_1 (Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2}) + (\mathbf{X}_{it} - \mathbf{X}_{i,t-1})^\top \boldsymbol{\beta} + \nu_{it} - \nu_{i,t-1},$$

k instrumentům $Y_{i,t-2}, \ldots, Y_{i0}$ přidáme jako další instrumenty $\mathbf{X}_{i1}, \ldots \mathbf{X}_{iT}$.

Uvedeme opět několik prvních momentových podmínek, pro $t = 2$ to budou

$$\mathbf{E}[Y_{i0}(\nu_{i2} - \nu_{i1})] = 0$$

a

$$\mathbf{E}[\mathbf{X}_{i1}(\nu_{i2} - \nu_{i1})] = \mathbf{E}[\mathbf{X}_{i2}(\nu_{i2} - \nu_{i1})] = \ldots = \mathbf{E}[\mathbf{X}_{iT}(\nu_{i2} - \nu_{i1})] = 0,$$

pro $t = 3$

$$\mathbf{E}[Y_{i0}(\nu_{i3} - \nu_{i2})] = \mathbf{E}[Y_{i1}(\nu_{i3} - \nu_{i2})] = 0$$

a

$$\mathbf{E}[\mathbf{X}_{i1}(\nu_{i3} - \nu_{i2})] = \mathbf{E}[\mathbf{X}_{i2}(\nu_{i3} - \nu_{i2})] = \ldots = \mathbf{E}[\mathbf{X}_{iT}(\nu_{i3} - \nu_{i2})] = 0,$$

a pro $t = 4$ pak

$$\mathbf{E}[Y_{i0}(\nu_{i4} - \nu_{i3})] = \mathbf{E}[Y_{i1}(\nu_{i4} - \nu_{i3})] = \mathbf{E}[Y_{i2}(\nu_{i4} - \nu_{i3})] = 0$$

a

$$\mathbf{E}[\mathbf{X}_{i1}(\nu_{i4} - \nu_{i3})] = \mathbf{E}[\mathbf{X}_{i2}(\nu_{i4} - \nu_{i3})] = \ldots = \mathbf{E}[\mathbf{X}_{iT}(\nu_{i4} - \nu_{i3})] = 0.$$

Matice instrumentů $\mathbb{V}$ má stejnou strukturu jako v předchozí situaci. Jednotlivé $\mathbf{V}_i^\top$, $i = 1, \ldots, n$, jsou rovněž blokově diagonální,

$$\mathbf{V}_i^\top = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} Y_{i0} \\ \mathbf{X}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{iT} \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} Y_{i0} \\ Y_{i1} \\ \mathbf{X}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{iT} \end{bmatrix} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} Y_{i0} \\ \vdots \\ Y_{i,T-2} \\ \mathbf{X}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{i,T} \end{bmatrix} \end{pmatrix},$$

mají $T-1$ sloupců a $\frac{(T-1)T}{2} + k \cdot (T-1) \cdot T = \left(\frac{1}{2} + k\right)(T-1) \cdot T$ řádků, kde k je rozměr $\mathbf{X}_{it}$.

Momentové podmínky odhadu zobecněnou metodou momentů jsou

$$\mathbf{E}[\mathbf{V}_i^\top \Delta\nu_i] = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Pro každý subjekt máme $\left(\frac{1}{2} + k\right)(T-1) \cdot T$ podmínek.

Označme

$$\Delta\mathbb{X}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{i2}^\top - \mathbf{X}_{i1}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{iT}^\top - \mathbf{X}_{i,T-1}^\top \end{pmatrix} \qquad i = 1, \dots, n,$$

$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{Y}_{1,-T} & \Delta\mathbb{X}_1 \\ \Delta\mathbf{Y}_{2,-T} & \Delta\mathbb{X}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \Delta\mathbf{Y}_{n,-T} & \Delta\mathbb{X}_n \end{pmatrix}.$$

Momentové podmínky použijeme v odhadu zobecněnou metodou momentů, viz kapitola 1.4. Odhad touto metodou je

$$\begin{pmatrix} \widehat{\delta} \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} = \left(\mathbb{W}^\top \mathbb{V} W_n \mathbb{V}^\top \mathbb{W}\right)^{-1} \mathbb{W}^\top \mathbb{V} W_n \mathbb{V}^\top \Delta\mathbf{Y},$$

viz část 1.5 s regresory $\mathbb{W}$ a instrumenty $\mathbb{V}$. Při minimalizaci kriteriální funkce standardně v prvním kroku odhadu můžeme použít jako matici vah W_n jednotkovou matici, případně můžeme použít matici vah danou vzorcem (3.6) a druhý krok neprovádět.

Odhad lze upravit pro případ, kdy některé z exogenních regresorů jsou korelované s individuálními náhodnými efekty, viz konec sekce 2 článku Arellano a Bond (1991).

3.2.3 Arellanův-Boverův odhad

Uvažujme model (3.2) s jednou zpožděnou hodnotou a regresory $\mathbf{X}_{it}$ nekorelovanými s individuálními efekty μ_i pro $\forall i = 1, \ldots, n$ a $\forall t = 1, \ldots, T$.

Arellano a Bover (1995) navrhli sjednocující postup odhadu zobecněnou metodou momentů, kdy nejprve provedeme transformaci modelu pomocí matice

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \mathbb{C} \\ \frac{1}{T} \cdot \mathbf{1}_T^\top \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{1}_T$ je jednotkový vektor délky T a $\mathbb{C}$ je jakákoli matice s $T-1$ řádky a T sloupci taková, že $\mathbb{C}\mathbf{1}_T = 0$. Tím, že matice $\mathbb{H}$ má poslední řádek jiný, budeme pro jakoukoliv transformaci modelu mít vždy k dispozici T rovnic. Jinak bychom např. při transformaci na první diference měli jen $T-1$ rovnic. Dále by z modelu vypadly efekty neměnné v čase, jejichž parametry bychom v případě, že by poslední řádek nevytvářel průměrnou hodnotu (ale např. první diferenci nebo odchylku od průměru), nemohli odhadnout.

Pro i-tý subjekt tak dostaneme model

$$\mathbb{H}\mathbf{Y}_i = \delta_1 \mathbb{H}\mathbf{Y}_{i,-T} + \mathbb{H}\mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \mathbb{H}\mu_i \mathbf{1}_T + \mathbb{H}\boldsymbol{\nu}_i, \tag{3.7}$$

kde $\mathbf{Y}_i$, $\mathbf{Y}_{i,-T}$ a $\mathbf{X}_i$ jsou zavedeny v částech 2.2 a 3.1.2.

Jako transformační matici $\mathbb{H}$ s dimenzemi $T \times T$ můžeme volit

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} & \ldots & -\frac{1}{T} \\ -\frac{1}{T} & 1-\frac{1}{T} & \ldots & -\frac{1}{T} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ -\frac{1}{T} & \ldots & 1-\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} \\ \frac{1}{T} & \ldots & \frac{1}{T} & \frac{1}{T} \end{pmatrix}.$$

Když vynásobíme zleva maticí $\mathbb{H}$ nějaký vektor z délky T, prvních $T-1$ prvků výsledného vektoru budou odchylky od průměrné hodnoty prvků ve vektoru, $z_t - \overline{z}_T$, a poslední prvek bude průměr $\overline{z}_T$.

Provedeme tak uvnitř-skupinovou transformaci, čímž dostaneme model

$$Y_{it} - \overline{Y}_{i\bullet} = \delta_1 (Y_{i,t-1} - \overline{Y}_{i\bullet,-T}) + (\mathbf{X}_{it} - \overline{\mathbf{X}}_{i\bullet})^\top \boldsymbol{\beta} + \nu_{it} - \overline{\nu}_{i\bullet},\ t = 1, \ldots, T-1,$$

jehož odhad byl rovněž popsán v části 3.1.2, a kde $\overline{Y}_{i\bullet}$, $\overline{Y}_{i\bullet,-T}$, $\overline{\mathbf{X}}_{i\bullet}$, $\overline{\nu}_{i\bullet}$ jsou definovány stejně jako v části 3.1.2. V tomto případě využijeme, že

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{X}_{it}(u_{is} - \overline{u}_{i\bullet})\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{X}_{it}(\nu_{is} - \overline{\nu}_{i\bullet})\right] = 0 \text{ pro } i = 1, \ldots, n,\ s,t = 1, \ldots, T-1,$$

kde $\overline{u}_{i\bullet} = \frac{1}{T} \sum\limits_{t=1}^{T} u_{it}$.

Nebo využijeme matici

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{T} & \ldots & \frac{1}{T} & \frac{1}{T} & \frac{1}{T} \end{pmatrix},$$

čímž provedeme pro $t = 2, \dots, T$ transformaci na první diference a dostaneme model

$$Y_{it} - Y_{i,t-1} = \delta_1(Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2}) + (\mathbf{X}_{it} - \mathbf{X}_{i,t-1})^\top \boldsymbol{\beta} + \nu_{it} - \nu_{i,t-1},$$

který jsme odhadovali v předchozí části 3.2.2 a který využívá

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{X}_{it}(u_{is} - u_{i,s-1})\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{X}_{it}(\nu_{is} - \nu_{i,s-1})\right] = 0 \text{ pro } i = 1, \dots, n,$$
$$t = 1, \dots, T,\ s = 2, \dots, T.$$

Instrumenty $\mathbf{V}_i$ pro odhad (3.7) budou obsahovat vždy $T-1$ instrumentů stejného typu a poslední řádek bude jiný. Matice instrumentů pro i-tý subjekt má T řádků, $b+c+d$ sloupců (konkrétně dále) a strukturu

$$\mathbf{V}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{i1}^\top & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{i2}^\top & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{V}_{i,T-1}^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{a}_i^\top \end{pmatrix}.$$

Jednotlivé $\mathbf{V}_{it}^\top$, které slouží jako instrumenty pro odhad prvních $T-1$ rovnic, mohou obsahovat následující

- $\mathbf{X}_{it}^\top, \mathbf{X}_{i,t-1}^\top$, pak $b = (T-1) \cdot 2k$,
- $\mathbf{X}_{i1}^\top, \dots \mathbf{X}_{iT}^\top$, pak $b = (T-1) \cdot Tk$,
- $\mathbf{X}_{i1}^\top, \dots \mathbf{X}_{it}^\top$, pak $b = \frac{(T-1)T}{2} \cdot k$

a k tomu vždy ještě $Y_{i0}, \dots, Y_{i,t-2}$, $c = \frac{(T-1)T}{2}$.

Poslední řádek $\mathbf{a}_i^\top$, který slouží jako instrument pro poslední rovnici, může být $\overline{\mathbf{X}}_{i\bullet}$, resp. $\left[\mathbf{X}_{i1}^\top, \mathbf{X}_{i2}^\top, \dots, \mathbf{X}_{iT}^\top\right]$. Pak $d = k$, resp. $d = Tk$.

Momentové podmínky odhadu zobecněnou metodou momentů, viz část 1.4, pro kteroukoli volbu matice $\mathbb{H}$ jsou

$$\mathbf{E}[\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H} \boldsymbol{u}_i] = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

kde $\boldsymbol{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iT})^\top$. Počet podmínek pro subjekt se liší v závislosti na tom, co obsahuje $\mathbf{V}_{it}$.

K nim příslušné populační momentové podmínky jsou

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top \mathbb{H} \boldsymbol{u}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}\left(\mathbf{Y}_i - \delta_1 \mathbf{Y}_{i,-T} - \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta}\right) = 0,$$

kde $\mathbf{Y}_{i,-T} = (Y_{i0}, \dots, Y_{i,T-1})^\top$ a $\mathbf{X}_i$ obsahuje v řádcích $\mathbf{X}_{i1}^\top, \dots, \mathbf{X}_{iT}^\top$.

Označíme všechny regresory

$$\mathbf{W}_{it}^\top = \left(Y_{i,t-1}, \mathbf{X}_{it}^\top\right), \quad i = 1, \dots, n,\ t = 1, \dots, T,$$

dále označme

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{i1}^\top \\ \mathbf{W}_{i2}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{iT}^\top \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{iT} \end{bmatrix}.$$

Pro odhad v kroku 1. odhadu zobecněnou metodou momentů použijeme standardně jednotkovou matici a tedy minimalizujeme

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}\boldsymbol{u}_i\right]^\top \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}\boldsymbol{u}_i\right],$$

čímž dostaneme odhady $\left(\widehat{\delta}_1, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^\top\right)^\top$ parametrů $\left(\delta_1, \boldsymbol{\beta}^\top\right)^\top$ modelu (3.2) a rezidua

$$\widehat{\boldsymbol{u}}_i = \mathbf{Y}_i - \mathbf{W}_i\left(\widehat{\delta}_1, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^\top\right)^\top, \quad i = 1, \ldots, n,$$

které využijeme k odhadu asymptotické varianční matice F,

$$\widehat{F} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}\widehat{\boldsymbol{u}}_i\right]\left[\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}\widehat{\boldsymbol{u}}_i\right]^\top.$$

Inverzi k matici $\widehat{F}$ využijeme v druhém kroku odhadu jako matici vah, tzn. že minimalizujeme

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}\boldsymbol{u}_i\right]^\top \widehat{F}^{-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}\boldsymbol{u}_i\right].$$

Případně můžeme v kroku 1. uvažovat jako matici vah

$$W_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}^\top \mathbb{H}\mathbf{V}_i\right)^{-1},$$

čímž dostaneme odhad parametrů

$$\begin{pmatrix}\widehat{\delta}_1\\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}\end{pmatrix} = \underset{\delta_1\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}^k}{\operatorname{argmin}}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}\boldsymbol{u}_i\right]^\top \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}^\top \mathbb{H}\mathbf{V}_i\right)^{-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}\boldsymbol{u}_i\right],$$

stejný jako je dvoustupňový odhad metodou nejmenších čtverců. Model však nemusí být homoskedastický, proto odhad využijeme k výpočtu reziduí a pokračujeme druhým krokem stejně jako v případě jednotkové matice vah.

Další možností je konzistentně odhadnout parametry $\left(\delta_1, \boldsymbol{\beta}_1^\top\right)^\top$ v kroku 1. pomocí jednotkové matice jako matice vah. Následně využijeme struktury varianční matice chyb $\boldsymbol{u}_i$ pro model s náhodnými efekty, $\boldsymbol{\Sigma}$, z kapitoly 2.3, kde potřebné odhady $\widehat{\sigma}_\mu^2$ a $\widehat{\sigma}_\nu^2$ spočteme z reziduí $\widehat{\boldsymbol{u}}_i$, $i = 1, \ldots, n$, a jako matici vah v kroku 2. vezmeme inverzní matici k matici

$$\widehat{F} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbb{H}^\top \mathbf{V}_i.$$

Původně jsme totiž uvažovali

$$\widehat{F} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}\widehat{\boldsymbol{u}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i^\top \mathbb{H}^\top \mathbf{V}_i \propto \widehat{\mathbf{var}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i^\top \mathbb{H}\boldsymbol{u}_i\right)$$

a nyní jen vylepšíme odhad $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \widehat{\mathbf{var}}\boldsymbol{u}_i$ uvažováním struktury matice $\boldsymbol{\Sigma}$ pro model s náhodnými efekty.

3.2.4 Ahnův-Schmidtův odhad

Ahn a Schmidt (1995) ve svém článku ukázali, že Arellanův-Bondův odhad, viz část 3.2.2, nebere v úvahu nelineární momentové podmínky, jejichž přidání může zlepšit chování odhadu.

Uvažujme model (3.3), $Y_{it} = \delta_1 Y_{i,t-1} + u_{it}$, s jednou zpožděnou hodnotou bez dalších regresorů.

Uvažujme předpoklady na dynamický model z úvodu kapitoly 3 a předpoklad $\mathbf{cov}[\nu_{it}, Y_{i0}] = 0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ a $t = 1, \ldots, T$. Ahn a Schmidt navrhli k momentovým podmínkám Arellanova-Bondova odhadu

$$\mathbf{E}[Y_{is}(u_{it} - u_{i,t-1})] = \mathbf{E}[Y_{is}(\nu_{it} - \nu_{i,t-1})] = 0, \quad t = 2, \ldots, T,\ s = 0, \ldots, t-2,$$

přidat nelineární momentové podmínky

$$\mathbf{E}[u_{iT}(u_{it} - u_{i,t-1})] = \mathbf{E}[u_{iT}(\nu_{it} - \nu_{i,t-1})] = 0, \quad t = 2, \ldots, T-1,$$

kterých je pro každý subjekt $T - 2$.

Uvedené momentové podmínky vycházejí z modelu pro první diference pro $t = 2, \ldots, T$,

$$Y_{it} - Y_{i,t-1} = \delta_1(Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2}) + \nu_{it} - \nu_{i,t-1}$$

a rovnice modelu pro $t = T$,

$$Y_{iT} = \delta_1 Y_{i,T-1} + u_{iT}.$$

Ahn a Schmidt (1995) uvedli také druhou variantu momentových podmínek,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y_{i0}u_{it}] - k_1 &= 0, \quad \forall t = 1, \ldots, T, \\ \mathbf{E}[u_{is}u_{it}] - k_2 &= 0, \quad \forall s \neq t = 1, \ldots, T, \end{aligned} \tag{3.8}$$

těchto podmínek je $T - 1$ a $\frac{(T-1)T}{2} - 1$. Konstanta k_2 je rovna σ^2_μ z předpokladu na rozptyl individuálních efektů μ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Tvrzení 6. *Nechť platí (P2), (P4N) a* $\mathbf{cov}[\nu_{it}, Y_{i0}] = 0$ *pro každé* $i = 1, \ldots, n$ *a* $t = 1, \ldots, T$. *Pak platí* (3.8) *právě tehdy, když platí*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y_{is}(u_{it} - u_{i,t-1})] &= \mathbf{E}[Y_{is}(\nu_{it} - \nu_{i,t-1})] = 0, t = 2, \ldots, T,\ s = 0, \ldots, t-2, \\ \mathbf{E}[u_{iT}(u_{it} - u_{i,t-1})] &= \mathbf{E}[u_{iT}(\nu_{it} - \nu_{i,t-1})] = 0,\ t = 2, \ldots, T-1. \end{aligned}$$

Důkaz. Naznačíme pro několik prvních t.

- Předpokládejme, že platí $\mathbf{E}[Y_{i0}u_{it}] = k_1$, $t = 1, \ldots, T$ a $\mathbf{E}[u_{is}u_{it}] = k_2$, $s \neq t = 1, \ldots, T$.

  Pak $\mathbf{E}[u_{iT}(u_{it} - u_{i,t-1})] = k_2 - k_2 = 0$ pro $t = 2, \ldots, T-1$ a $\mathbf{E}[Y_{i0}(u_{i2} - u_{i1})] = k_1 - k_1 = 0$, $\mathbf{E}[Y_{i0}(u_{i3} - u_{i2})] = k_1 - k_1 = 0$.

  Dále pak $\mathbf{E}[Y_{i1}(u_{i3} - u_{i2})] = \mathbf{E}[(\delta_1 Y_{i0} + u_{i1})(u_{i3} - u_{i2})] = \delta_1 \mathbf{E} Y_{i0}u_{i3} - \delta_1 \mathbf{E} Y_{i0}u_{i2} + \mathbf{E} u_{i1}u_{i3} - \mathbf{E} u_{i1}u_{i2} = \delta_1 k_1 - \delta_1 k_1 + k_2 - k_2 = 0$ atd.

- Předpokládejme nyní naopak, že platí $\mathbf{E}[Y_{is}(u_{it} - u_{i,t-1})] = 0$, $t = 2, \ldots, T$, $s = 0, \ldots, t-2$ a $\mathbf{E}[u_{iT}(u_{it} - u_{i,t-1})] = 0$, $t = 2, \ldots, T-1$.

  Pak z $\mathbf{E}[Y_{i0}(u_{i2} - u_{i1})] = 0$ platí $\mathbf{E}[Y_{i0}u_{i2}] = \mathbf{E}[Y_{i0}u_{i1}] = k_1$.

  Z $\mathbf{E}[Y_{i0}(u_{i3} - u_{i2})] = 0$ platí $\mathbf{E}[Y_{i0}u_{i3}] = \mathbf{E}[Y_{i0}u_{i2}] = k_1$ a z $\mathbf{E}[Y_{i1}(u_{i3} - u_{i2})] = \mathbf{E}[(\delta_1 Y_{i0} + u_{i1})(u_{i3} - u_{i2})] = \delta_1 \mathbf{E}[Y_{i0}(u_{i3} - u_{i2})] + \mathbf{E}[u_{i1}u_{i3}] - \mathbf{E}[u_{i1}u_{i2}] = 0$ platí $\mathbf{E}[u_{i1}u_{i3}] = \mathbf{E}[u_{i1}u_{i2}] = k_2$ atd.

  Nakonec z $\mathbf{E}[u_{iT}(u_{i,T-1} - u_{i,T-2})] = 0$ platí $\mathbf{E}u_{iT}u_{i,T-1} = \mathbf{E}u_{iT}u_{i,T-2}$.

$\square$

Na druhou variantu momentových podmínek (3.8) můžeme nahlížet jako na omezení na strukturu varianční matice

$$\mathbf{var}\begin{pmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{iT} \\ Y_{i0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \ldots & \sigma_\mu^2 & \mathbf{E}[Y_{i0}u_{i1}] \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 & \ldots & \sigma_\mu^2 & \mathbf{E}[Y_{i0}u_{i2}] \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_\mu^2 & \ldots & \sigma_\mu^2 & \sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 & \mathbf{E}[Y_{i0}u_{iT}] \\ \mathbf{E}[Y_{i0}u_{i1}] & \ldots & \mathbf{E}[Y_{i0}u_{i,T-1}] & \mathbf{E}[Y_{i0}u_{iT}] & \mathbf{var}Y_{i0} \end{pmatrix},$$

kde σ_μ^2, resp. σ_ν^2 jsou rozptyly individuálních efektů, resp. zbytkových chyb z předpokladů pro dynamický model.

Matice instrumentů pro i-tý subjekt nyní bude mít strukturu

$$\mathbf{Z}_i^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_i^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_{T-2} \end{pmatrix},$$

kde matice $\mathbf{V}_i^\top$ je matice instrumentů Arellanova-Bondova odhadu, viz strana 34. Matice $\mathbf{Z}_i^\top$ mají $T-1+T-2$ sloupců a $(1+2+\ldots+(T-1))+T-2 = \frac{(T-1)T}{2}+T-2$ řádků.

Momentové podmínky uvedené v první variantě jsou

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{Z}_i^\top s_i\right] = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

kde

$$\begin{aligned} s_i = ((\Delta\nu_i)^\top, u_{iT}(Y_{i2} - Y_{i1} - \delta_1(Y_{i1} - Y_{i0})), \ldots, \\ u_{iT}(Y_{i,T-1} - Y_{i,T-2} - \delta_1(Y_{i,T-2} - Y_{i,T-3})))^\top, \end{aligned}$$

kde $u_{iT} = Y_{iT} - \delta_1 Y_{i,T-1}$ a

$$\Delta\nu_i = (Y_{i2} - Y_{i1} - \delta_1(Y_{i1} - Y_{i0}), \ldots, Y_{iT} - Y_{i,T-1} - \delta_1(Y_{i,T-1} - Y_{i,T-2}))^\top.$$

Celkově tedy máme pro i-tý subjekt $\frac{(T-1)T}{2} + T - 2$ podmínek.

Příslušná výběrová podmínka pak je

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\mathbf{Z}_i^\top s_i] = 0.$$

Odhad parametru δ_1 zobecněnou metodou momentů dostaneme jako

$$\widehat{\delta}_1 = \underset{\delta_1 \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_i^\top s_i\right]^\top W_n \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_i^\top s_i\right],$$

kde v prvním kroku použijeme jako matici vah W_n jednotkovou matici $\mathbb{I}_{\frac{(T-1)T}{2}+T-2}$ a spočteme $\widehat{s}_i$, což je vektor s_i s dosazením $\widehat{\delta}_1$ z kroku 1. za δ_1. Při uvažování podmínek v uvedeném tvaru nelze tento odhad jednoduše zapsat jako v části 1.5, kde byly všechny uvažované podmínky lineární. V druhém kroku pak jako matici vah použijeme $W_n = \widehat{F}^{-1}$, kde

$$\widehat{F} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{Z}_i^\top \widehat{s}_i\right]\left[\widehat{s}_i^\top \mathbf{Z}_i\right] \propto \widehat{\mathbf{var}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Z}_i^\top s_i\right),$$

tato volba matice vah W_n je optimální z teorie odhadu zobecněnou metodou momentů, viz 1.4.

Případně bychom mohli v prvním kroku použít matici vah

$$W_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Z}_i^\top \begin{pmatrix} G & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_{T-2}\end{pmatrix}\mathbf{Z}_i\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i^\top G\mathbf{V}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_{T-2}\end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i^\top G\mathbf{V}_i\right)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_{T-2}\end{pmatrix},$$

kde G je dána vzorcem (3.4), a využít tak v levém horním bloku informaci o struktuře varianční matice $\Delta\nu_i$ podobně jako v Arellanově-Bondově odhadu v části 3.2.2, pro nelineární podmínky je pak v pravém dolním bloku použita jednotková matice. Pro Ahnův-Schmidtův odhad však neexistuje matice vah taková, že bychom v prvním kroku dostali odhad asymptoticky ekvivalentní s odhadem po druhém kroku odhadu zobecněnou metodou momentů, jak uvedli v části 4.3 Blundell a Bond (1998).

Budeme-li uvažovat model (3.2), přidáme k uvedeným momentovým podmínkám, stejně jako v Arellanově-Bondově odhadu, další momentové podmínky $\mathbf{E}[\mathbf{X}_{it}(u_{is} - u_{i,s-1})] = 0$, $t = 1, \dots, T$ a $s = 2, \dots, T$. Matice instrumentů $\mathbf{Z}_i$ pak bude mít následující strukturu, další postup by byl analogický,

$$\mathbf{Z}_i^\top = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} Y_{i0} \\ \mathbf{X}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{iT}\end{bmatrix} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} Y_{i0} \\ Y_{i1} \\ \mathbf{X}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{iT}\end{bmatrix} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} Y_{i0} \\ \vdots \\ Y_{i,T-2} \\ \mathbf{X}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{i,T}\end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbb{I}_{T-2}\end{pmatrix}.$$

4. Simulace

V této kapitole pomocí simulací v programu R od R Core Team (2020) porovnáme různé odhady parametrů v dynamickém modelu panelových dat. Byly použity knihovny `plm` autora Millo (2017), pro práci s maticemi knihovny `pracma` od Borchers (2022), `Matrix` od Bates a Maechler (2019) a `lfda` od Tang a kol. (2016). Funkce pro výpočty odhadů byly samostatně implementovány na základě metod popsaných v předchozích kapitolách, některé byly srovnány s odhady z knihoven `nlme` od Pinheiro a kol. (2020), `dynlm` od Zeileis (2019) a `pdynmc` od Fritsch a kol. (2021).

Uvedené hodnoty různých charakteristik odhadů jsou spočteny na základě $N = 1000$ opakování simulací. Individuální efekty, resp. zbytkové chyby generujeme z normálního rozdělení,

$$\mu_i \sim N(0, \sigma_\mu^2), \quad \nu_{it} \sim N(0, \sigma_\nu^2),$$

pro zvolené hodnoty σ_μ^2 a σ_ν^2. Pro dosažení stacionarity jsou data generovaná pro $t = -49, \ldots, T$, přičemž k analýze jsou využita jen data pro $T \geq 0$. Odpovídá to praktické situaci, kdy hodnoty začneme pozorovat v čase 1, avšak děj, který za modelem stojí, již nějakou dobu probíhá. Jako počáteční hodnotu $Y_{i,-49}$ volíme 0. Regresory X_{it} generujeme nezávisle na sobě z $N(1,1)$. Takto si pomocí generátoru pseudonáhodných čísel připravíme data s n subjekty v T časech.

Odhady budeme porovnávat pomocí odhadu vychýlení

$$\text{vych.} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \widehat{\delta}_{1,j} - \delta_1,$$

výběrové směrodatné odchylky (sd)

$$\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} \left(\widehat{\delta}_{1,j} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \widehat{\delta}_{1,j} \right)^2}$$

a odmocninové střední čtvercové chyby

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\widehat{\delta}_{1,j} - \delta_1 \right)^2},$$

kde $\widehat{\delta}_{1,j}$ je odhad parametru δ_1 spočtený na základě j-tého opakování simulace, pro β_1 analogicky.

Nejlepší hodnotu pro dané nastavení budeme v tabulkách označovat barevně.

4.1 Klasické odhady

Začneme srovnáním klasických odhadů – odhadu ve společném modelu (spol.), v modelu s fixními efekty (FE), v modelu s náhodnými efekty (RE) a odhadu metodou maximální věrohodnosti (MLE) – s prvním odhadem, který řeší korelovanost zpožděných hodnot odezvy a individuálních efektů, a to dvoustupňovým odhadem s instrumentální proměnnou druhou zpožděnou hodnotou odezvy (IV).

Uvažujme model (3.3) bez dalších regresorů, tj. panelový AR(1) model, který má předpis $Y_{it} = \delta_1 Y_{i,t-1} + \mu_i + \nu_{it}$. Ověříme, že klasické odhady nedávají uspokojivé výsledky a dále, že vychýlení v případě modelu s fixními efekty je řádu $\frac{1}{T}$, jak již bylo zmíněno v části 3.1.2.

V tabulce 4.1 je uveden odhad vychýlení, výběrová směrodatná odchylka a odmocninová střední čtvercová chyba pro odhady v modelu (3.3) s nastavením parametrů $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 2{,}25$ a $\sigma_\nu^2 = 4$. Klasické odhady skutečně neposkytují správné odhady parametrů, s rostoucím T se zmenšuje odhad vychýlení v modelu s fixními efekty a maximálně-věrohodného odhadu, nicméně i pro $T = 50$ je stále vyšší než u odhadu s instrumentálními proměnnými IV. U společného modelu a modelu s náhodnými efekty odhad vychýlení příliš nezáleží na T ani na n.

		$T=5$			$T=10$			$T=50$		
n	odhad	vych.	sd	RMSE	vych.	sd	RMSE	vych.	sd	RMSE
100	spol.	0,311	0,028	0,312	0,312	0,022	0,313	0,312	0,017	0,313
	FE	−0,332	0,046	0,335	−0,162	0,032	0,165	−0,031	0,012	0,033
	RE	0,311	0,028	0,312	0,312	0,022	0,313	0,312	0,017	0,313
	MLE	0,311	0,028	0,312	0,106	0,112	0,154	0,001	0,013	0,013
	IV	0,004	0,123	0,123	0,002	0,071	0,071	0,000	0,026	0,026
500	spol.	0,314	0,011	0,314	0,313	0,010	0,314	0,313	0,008	0,313
	FE	−0,331	0,021	0,331	−0,162	0,014	0,163	−0,031	0,006	0,031
	RE	0,314	0,011	0,314	0,313	0,010	0,314	0,313	0,008	0,313
	MLE	0,314	0,011	0,314	0,079	0,052	0,095	0,001	0,006	0,006
	IV	−0,000	0,058	0,058	−0,000	0,031	0,031	−0,000	0,011	0,011

Tabulka 4.1: Porovnání klasických odhadů a IV, $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 2{,}25$, $\sigma_\nu^2 = 4$.

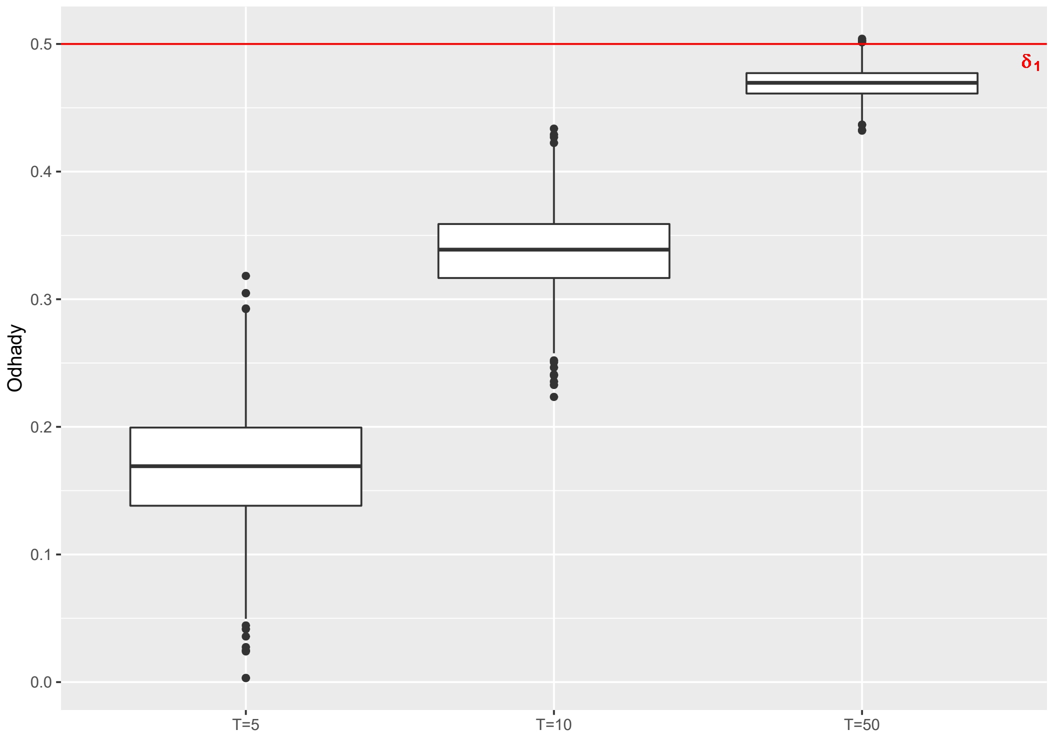
Na obrázku 4.1 jsou boxploty znázorňující odhady z tabulky 4.1. Je vidět, že vychýlení v modelu s fixními efekty se zmenšuje, což napovídá, že by mohlo být řádu $\frac{1}{T}$, při této volbě parametrů je přibližně $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{T}$.

V tabulkách 4.2 a 4.3 je uveden odhad vychýlení, výběrová směrodatná odchylka a odmocninová střední čtvercová chyba pro $\delta_1 = 0{,}5$ a další volby σ_μ^2 a σ_ν^2. Z hlediska odhadu vychýlení vychází opět nejlépe odhad IV. Odhad vychýlení v modelu s fixními efekty na hodnotách σ_μ^2 a σ_ν^2 téměř nezávisí.

		$T=5$			$T=10$			$T=50$		
n	odhad	vych.	sd	RMSE	vych.	sd	RMSE	vych.	sd	RMSE
100	spol.	0,372	0,021	0,373	0,373	0,017	0,374	0,374	0,014	0,374
	FE	−0,332	0,046	0,335	−0,162	0,032	0,165	−0,031	0,012	0,033
	RE	0,372	0,021	0,373	0,373	0,017	0,374	0,374	0,014	0,374
	MLE	0,372	0,021	0,373	0,145	0,148	0,207	0,001	0,013	0,013
	IV	0,005	0,143	0,143	0,003	0,078	0,078	0,000	0,026	0,026
500	spol.	0,375	0,009	0,375	0,375	0,007	0,375	0,374	0,006	0,375
	FE	−0,331	0,021	0,331	−0,162	0,014	0,163	−0,031	0,006	0,031
	RE	0,375	0,009	0,375	0,375	0,007	0,375	0,374	0,006	0,375
	MLE	0,375	0,009	0,375	0,114	0,100	0,152	0,001	0,006	0,006
	IV	−0,001	0,067	0,067	−0,000	0,034	0,034	−0,000	0,012	0,012

Tabulka 4.2: Porovnání klasických odhadů a IV, $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$.

V tabulkách 4.4, 4.5 a 4.6 jsou uvedeny charakteristiky odhadů v modelu (3.3) s $\delta_1 = 0{,}9$ a různými volbami σ_μ^2 a σ_ν^2. S větším δ_1 je v modelu s fixními efekty



Obrázek 4.1: Odhady v modelu s fixními efekty pro $n = 100$ a $T = 5, 10, 50$, $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 2{,}25$, $\sigma_\nu^2 = 4$.

		$T = 5$			$T = 10$			$T = 50$		
n	odhad	vych.	sd	RMSE	vych.	sd	RMSE	vych.	sd	RMSE
100	spol.	0,210	0,035	0,213	0,213	0,027	0,214	0,213	0,019	0,214
	FE	−0,332	0,046	0,335	−0,162	0,032	0,165	−0,031	0,012	0,033
	RE	0,210	0,035	0,213	0,213	0,027	0,214	0,213	0,019	0,219
	MLE	0,206	0,044	0,211	0,057	0,058	0,081	0,001	0,013	0,013
	IV	0,002	0,107	0,107	0,002	0,066	0,066	0,000	0,025	0,025
500	spol.	0,214	0,015	0,215	0,214	0,012	0,214	0,214	0,009	0,214
	FE	−0,331	0,021	0,331	−0,162	0,014	0,163	−0,031	0,006	0,031
	RE	0,214	0,015	0,215	0,214	0,012	0,214	0,214	0,009	0,214
	MLE	0,214	0,015	0,215	0,053	0,024	0,058	0,001	0,006	0,006
	IV	−0,000	0,051	0,051	−0,000	0,029	0,029	−0,000	0,011	0,011

Tabulka 4.3: Porovnání klasických odhadů a IV, $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 4$.

vychýlení větší, ale stále se s rostoucím T zmenšuje. Pro $n = 100$ a $T = 5$ má IV odhad velký odhad vychýlení a velkou výběrovou směrodatnou odchylku.

Z tabulek 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 a 4.6 je patrné, že vychýlení v modelu s fixními efekty závisí hlavně na δ_1 a T, méně pak na n, σ_μ^2 a σ_ν^2. Pro uvedené volby parametrů se potvrzuje, že klasické odhady obvykle neposkytují dobré odhady parametrů, s rostoucím T se zmenšuje vychýlení v modelu s fixními efekty a maximálně-věrohodného odhadu. U společného modelu a modelu s náhodnými efekty vychýlení s rostoucím T zůstává přibližně stejné. S rostoucím n se snižuje výběrová směrodatná odchylka u všech odhadů, ale k výrazným změnám u odhadu vychýlení v případě klasických odhadů nedochází. V případě, že je δ_1 blíže 1 (tedy blíže nestacionaritě modelu), IV odhad pro menší n a T také nedává uspokojivé výsledky, v další části proto porovnáme i odhady zobecněnou metodou momentů.

n	odhad	$T = 5$ vych.	sd	RMSE	$T = 10$ vych.	sd	RMSE	$T = 50$ vych.	sd	RMSE
100	spol.	0,092	0,006	0,092	0,092	0,004	0,092	0,091	0,001	0,091
	FE	−0,465	0,050	0,468	−0,244	0,028	0,245	−0,044	0,008	0,045
	RE	0,091	0,006	0,091	0,092	0,004	0,092	0,091	0,001	0,091
	MLE	0,091	0,006	0,092	0,092	0,004	0,092	0,086	0,022	0,088
	IV	0,482	59,277	59,249	−0,121	4,042	4,042	0,000	0,051	0,051
500	spol.	0,092	0,002	0,092	0,092	0,002	0,092	0,091	0,001	0,091
	FE	−0,463	0,022	0,463	−0,244	0,013	0,244	−0,044	0,004	0,044
	RE	0,091	0,002	0,091	0,092	0,002	0,092	0,091	0,001	0,091
	MLE	0,092	0,002	0,092	0,092	0,002	0,092	0,090	0,009	0,092
	IV	−0,011	1,165	1,164	0,002	0,120	0,120	−0,000	0,024	0,024

Tabulka 4.4: Porovnání klasických odhadů a IV, $\delta_1 = 0{,}9$, $\sigma_\mu^2 = 2{,}25$, $\sigma_\nu^2 = 4$.

n	odhad	$T = 5$ vych.	sd	RMSE	$T = 10$ vych.	sd	RMSE	$T = 50$ vych.	sd	RMSE
100	spol.	0,095	0,004	0,095	0,095	0,003	0,095	0,095	0,001	0,095
	FE	−0,465	0,050	0,468	−0,244	0,028	0,245	−0,044	0,008	0,045
	RE	0,095	0,004	0,095	0,095	0,003	0,095	0,095	0,001	0,095
	MLE	0,095	0,004	0,095	0,095	0,003	0,095	0,080	0,034	0,087
	IV	0,422	18,668	18,663	0,099	4,037	4,036	0,001	0,063	0,063
500	spol.	0,095	0,002	0,095	0,095	0,001	0,095	0,095	0,000	0,095
	FE	−0,463	0,022	0,463	−0,244	0,013	0,244	−0,044	0,004	0,044
	RE	0,095	0,002	0,095	0,095	0,001	0,095	0,095	0,000	0,095
	MLE	0,095	0,002	0,095	0,095	0,001	0,095	0,092	0,013	0,094
	IV	0,001	1,527	1,527	0,005	0,182	0,182	−0,000	0,030	0,030

Tabulka 4.5: Porovnání klasických odhadů a IV, $\delta_1 = 0{,}9$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$.

n	odhad	$T = 5$ vych.	sd	RMSE	$T = 10$ vych.	sd	RMSE	$T = 50$ vych.	sd	RMSE
100	spol.	0,082	0,008	0,083	0,083	0,005	0,083	0,082	0,003	0,082
	FE	−0,465	0,050	0,468	−0,244	0,028	0,245	−0,044	0,008	0,045
	RE	0,081	0,008	0,081	0,083	0,005	0,083	0,082	0,003	0,082
	MLE	0,082	0,008	0,083	0,083	0,005	0,083	0,063	0,033	0,071
	IV	−2,349	82,721	82,713	0,032	0,399	0,400	0,000	0,040	0,040
500	spol.	0,083	0,003	0,083	0,083	0,002	0,083	0,083	0,001	0,083
	FE	−0,463	0,022	0,463	−0,244	0,015	0,244	−0,044	0,004	0,044
	RE	0,081	0,003	0,081	0,083	0,002	0,083	0,083	0,001	0,083
	MLE	0,083	0,003	0,083	0,083	0,002	0,083	0,077	0,018	0,079
	IV	0,006	0,198	0,198	0,001	0,082	0,082	−0,000	0,019	0,019

Tabulka 4.6: Porovnání klasických odhadů a IV, $\delta_1 = 0{,}9$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 4$.

V tabulce 4.7 je uveden odhad vychýlení, výběrová směrodatná odchylka a odmocninová střední čtvercová chyba pro odhady v modelu (3.3) s nastavením parametrů $\delta_1 = 0{,}0$, $\sigma_\mu^2 = 1$ a $\sigma_\nu^2 = 1$. Odhady ve společném modelu a v modelu s náhodnými efekty vykazují velký odhad vychýlení. V modelu s fixními efekty mají odhady nejmenší výběrovou směrodatnou odchylku, z hlediska odhadu vychýlení je nejlepší odhad s instrumentálními proměnnými IV, nejmenší odmocninovou střední čtvercovou chybu mají odhady s instrumentálními proměnnými IV nebo maximálně-věrohodné odhady MLE.

n	odhad	$T=5$ vych.	sd	RMSE	$T=10$ vych.	sd	RMSE	$T=50$ vych.	sd	RMSE
100	spol.	0,495	0,052	0,498	0,497	0,044	0,499	0,498	0,036	0,499
	FE	−0,202	0,042	0,206	−0,100	0,032	0,105	−0,020	0,014	0,024
	RE	0,495	0,052	0,498	0,497	0,044	0,499	0,498	0,036	0,499
	MLE	0,065	0,075	0,099	0,012	0,037	0,039	0,000	0,014	0,014
	IV	−0,001	0,077	0,077	0,001	0,049	0,049	0,000	0,021	0,021
500	spol.	0,500	0,022	0,501	0,499	0,019	0,500	0,499	0,016	0,499
	FE	−0,199	0,020	0,200	−0,100	0,014	0,101	−0,020	0,006	0,021
	RE	0,500	0,022	0,501	0,499	0,019	0,500	0,499	0,016	0,499
	MLE	0,066	0,032	0,073	0,012	0,016	0,020	0,000	0,006	0,006
	IV	0,000	0,036	0,036	−0,000	0,022	0,022	−0,000	0,009	0,009

Tabulka 4.7: Porovnání klasických odhadů a IV, $\delta_1 = 0{,}0$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$.

4.2 Odhady zobecněnou metodou momentů

4.2.1 Panelový AR(1) model

V této části budeme porovnávat odhady uvedené v tabulce 4.8 v modelu (3.3) s jednou zpožděnou hodnotou bez dalších regresorů.

IV O1	IV – jako instrument Y_{t-2}, obyčejné nejm. čtverce
IV G1	IV – jako instrument Y_{t-2}, zobecněné nejm. čtverce, viz poznámka 1
IV O2	IV – jako instrument $Y_{t-2} - Y_{t-3}$, obyčejné nejm. čtverce
IV G2	IV – jako instrument $Y_{t-2} - Y_{t-3}$, zobec. nejm. čtverce, viz pozn. 1
ABI	Arellanův-Bondův – jednotková matice vah
AB1	Arellanův-Bondův – jednokrokový s G
AB2	Arellanův-Bondův – dvoukrokový s G
ABS	Arellanův-Bondův – jako dvoustupňový odhad
ASI	Ahnův-Schmidtův – jednotková matice vah
ASG	Ahnův-Schmidtův – matice vah s G v levém horním rohu

Tabulka 4.8: Porovnávané odhady v panelovém AR(1) modelu.

V tabulce 4.9 jsou uvedeny charakteristiky odhadů zobecněnou metodou momentů pro volbu parametrů $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$. V případě této volby parametrů se jako nejlepší jeví odhad pomocí instrumentálních proměnných IV O1 a Ahnův-Schmidtův odhad ASG, naopak nejhůře odhady metodou zobecněných nejmenších čtverců s instrumentálními proměnnými IV G1 a IV G2. Pro $n = 100$ ani dvoustupňový odhad ABS neposkytuje příliš dobré výsledky.

Odhady, které pro dané nastavení n a T nelze kvůli numerickým problémům při výpočtu matice $\widehat{F}^{-1}$ spočítat, v tabulkách proškrtneme, $-$.

Odhady uvedené v tabulce 4.9 dále znázorníme pomocí boxplotů, na kterých je červeně vyznačena skutečná hodnota parametru δ_1, a histogramů.

Začneme u základního odhadu s instrumentálními proměnnými a metodou obyčejných nejmenších čtverců na obrázku 4.2. Pro všechny volby n i T je vychýlení odhadů téměř nulové, s rostoucím T se zmenšuje rozptyl odhadů, totéž i s rostoucím n.

Na obrázcích 4.3 a 4.4 jsou boxploty znázorněny ostatní odhady z tabulky 4.9 pro $T = 5$ a $T = 10$. Největší rozdíl v odhadech nastává v situaci, kdy $n = 100$

		$T=5$			$T=10$			$T=50$		
n	odhad	vych.	sd	RMSE	vych.	sd	RMSE	vych.	sd	RMSE
100	IV O1	0,005	0,143	0,143	0,003	0,078	0,078	0,000	0,026	0,026
	IV G1	2,222	53,032	53,052	1,764	18,904	18,977	0,582	19,933	19,931
	IV O2	0,031	0,350	0,351	0,013	0,197	0,197	0,003	0,081	0,081
	IV G2	0,870	7,412	7,460	2,047	12,599	12,758	3,907	75,683	75,746
	ABI	−0,083	0,146	0,168	−0,184	0,117	0,218	–	–	–
	AB1	−0,051	0,122	0,132	−0,033	0,057	0,065	−0,018	0,014	0,023
	AB2	−0,049	0,133	0,142	−0,033	0,063	0,071	–	–	–
	ABS	−0,138	0,138	0,195	−0,198	0,074	0,211	−0,466	0,022	0,466
	ASI	−0,042	0,104	0,112	−0,163	0,106	0,194	–	–	–
	ASG	0,011	0,110	0,110	0,010	0,062	0,063	–	–	–
500	IV O1	−0,001	0,067	0,067	−0,000	0,034	0,034	−0,000	0,012	0,012
	IV G1	0,855	0,242	0,889	1,305	1,421	1,928	1,759	9,234	9,396
	IV O2	0,011	0,137	0,137	0,001	0,088	0,088	−0,000	0,036	0,036
	IV G2	0,694	0,239	0,734	1,216	0,422	1,287	3,863	90,507	90,544
	ABI	−0,013	0,059	0,061	−0,018	0,028	0,033	–	–	–
	AB1	−0,012	0,058	0,059	−0,007	0,025	0,025	−0,004	0,007	0,008
	AB2	−0,011	0,059	0,060	−0,006	0,026	0,027	–	–	–
	ABS	−0,030	0,068	0,074	−0,048	0,036	0,060	−0,152	0,012	0,152
	ASI	−0,003	0,039	0,039	−0,014	0,022	0,026	–	–	–
	ASG	0,001	0,038	0,038	−0,000	0,019	0,019	–	–	–

Tabulka 4.9: Porovnání odhadů zobecněnou metodou momentů v panelovém AR(1) modelu, $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$, o jaké odhady se jedná, je uvedeno v tabulce 4.8.

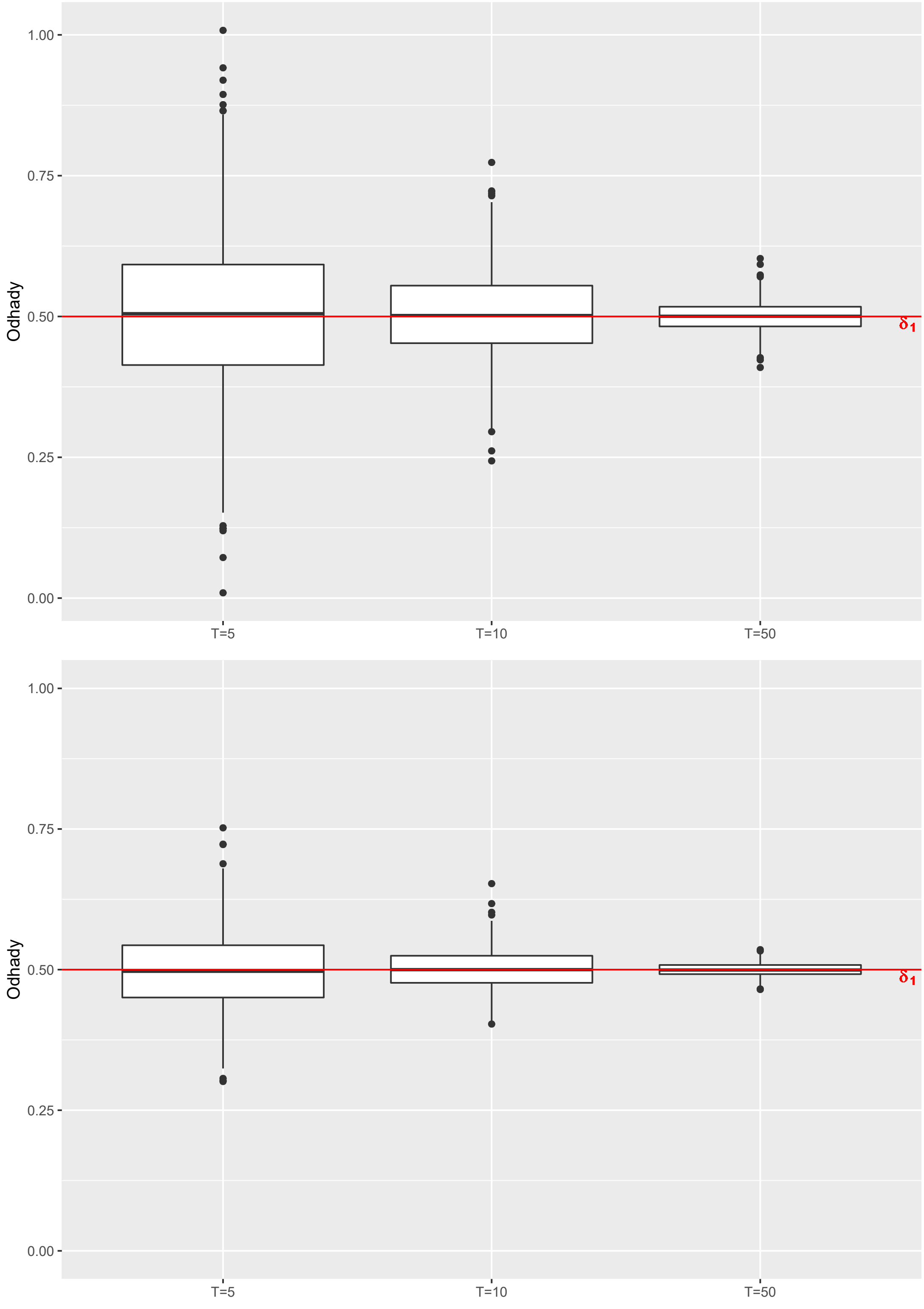
a $T = 10$, kdy Arellanův-Bondův odhad s jednotkovou maticí vah ABI a dvoustupňový odhad ABS výrazně podhodnocují skutečnou hodnotu parametru δ_1 a navíc mají tyto odhady větší rozpětí mezi 1. a 3. kvartilem. Naopak pro $n = 500$ a $T = 5$ jsou všechny odhady velice podobné.

Na histogramech 4.5 jsou znázorněny odhady z tabulky 4.9 pro $n = 100$ a $T = 5$. U většiny odhadů (mimo IV G1, IV G2 a ASG) z pohledu na histogram nemůžeme usuzovat, že by normalitu, viz věta 3, porušovaly.

V tabulce 4.10 jsou uvedeny charakteristiky odhadů pro volbu parametrů $\delta_1 = -0{,}8$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$. Při uvedeném nastavení parametrů se všechny odhady Areallana-Bonda i Ahna-Schmidta chovají velice podobně, nejsou výrazně vychýlené ani pro malé T.

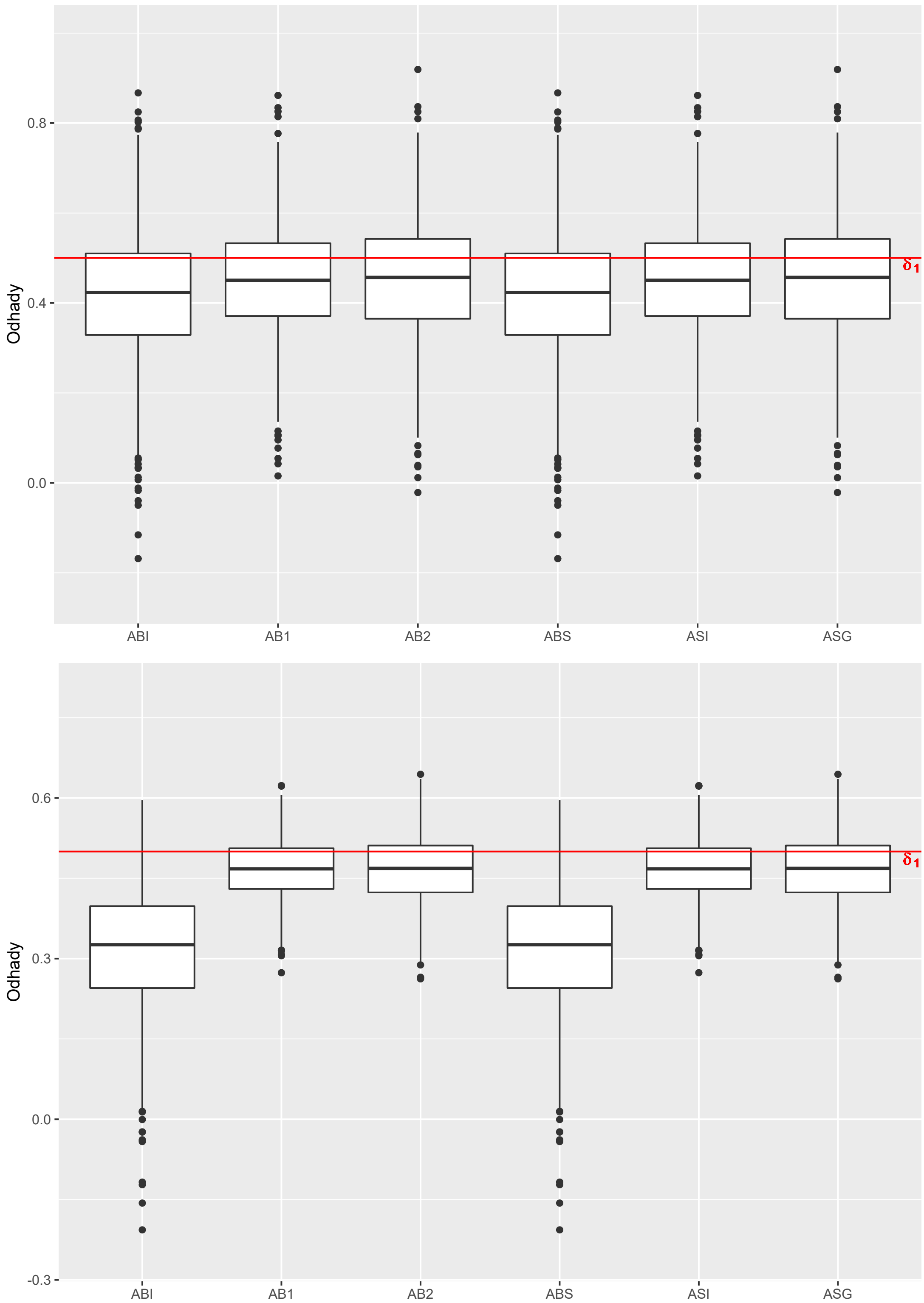
V tabulce 4.11 jsou uvedeny charakteristiky odhadů zobecněnou metodou momentů pro volbu parametrů $\delta_1 = 0{,}9$, $\sigma_\mu^2 = 2{,}25$, $\sigma_\nu^2 = 4$. Pro $T = 5$ a $n = 100$ se jako jediný dobrý odhad jeví Ahnův-Schmidtův odhad s maticí G pro Arellanovy-Bondovy momentové podmínky. Jako jediný funguje dobře i na hranici nestacionarity pro menší rozsah výběru a kratší čas sledování. Zároveň pro $\delta_1 = 0{,}9$, $\sigma_\mu^2 = 2{,}25$, $\sigma_\nu^2 = 4$, $n = 100$ a $T = 5$ neplatí, že by IV O1 měl menší výběrový rozptyl než IV O2, jak tvrdil Arellano (1989). Preference IV O1 tedy neplatí vždy.

Nemáme-li prvotní představu o velikosti parametru δ_1, lze pro menší n a T doporučit Ahnův-Schmidtův odhad ASG, který dává dobré výsledky bez ohledu na skutečnou velikost parametru δ_1. Nepohybujeme-li se na hranici nestacionarity, jsou odhady IV O1, IV O2, ABI, AB1, AB2, ABS, ASI a ASG poměrně srovnatelné z hlediska sledovaných charakteristik. Naopak využití odhadů IV G1 a IV G2 nelze doporučit.

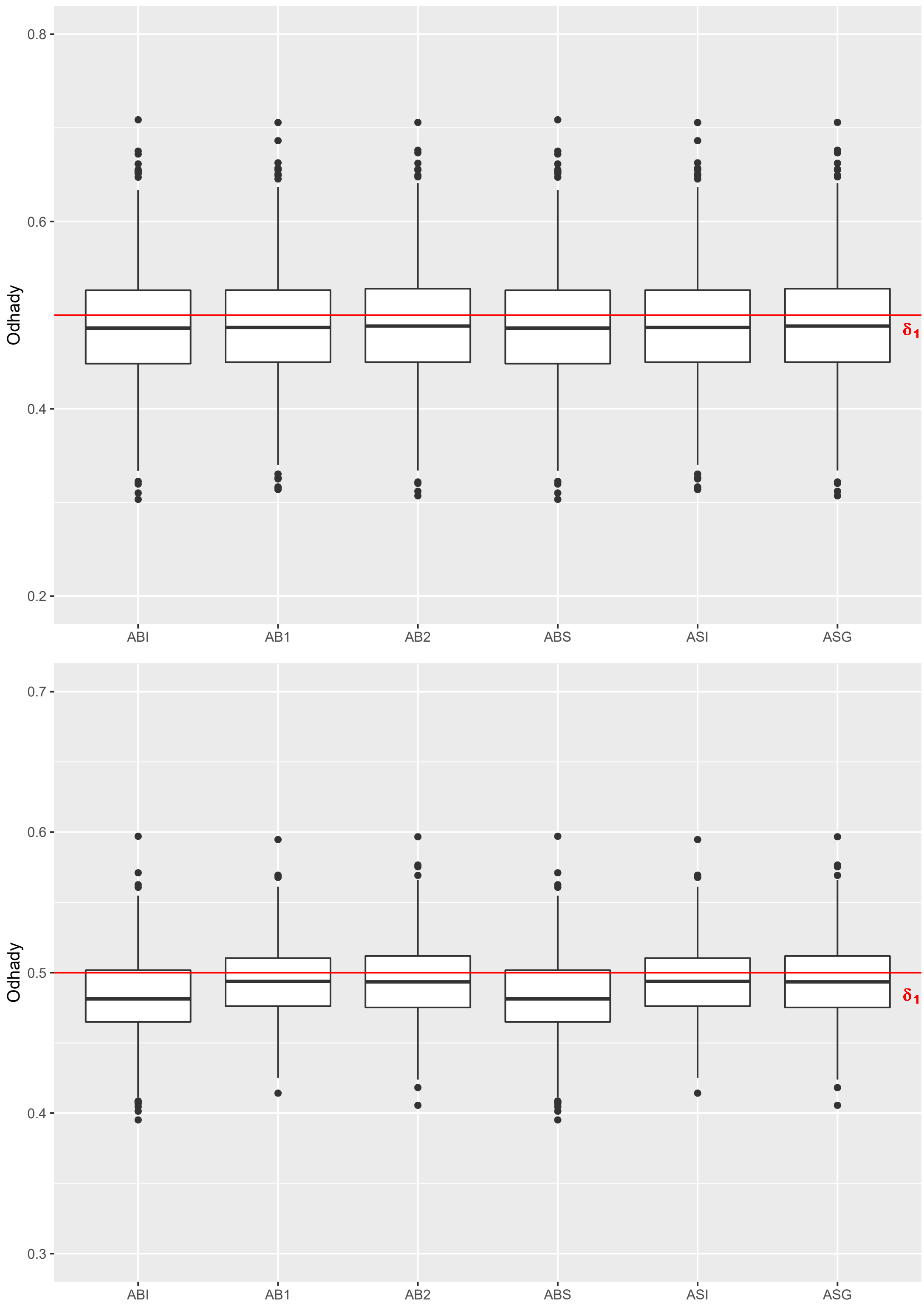


Obrázek 4.2: Odhady IV O1 pro $n = 100$ (nahoře) a $n = 500$ (dole), $T = 5,\ 10,\ 50$, $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 1$ a $\sigma_\nu^2 = 1$.

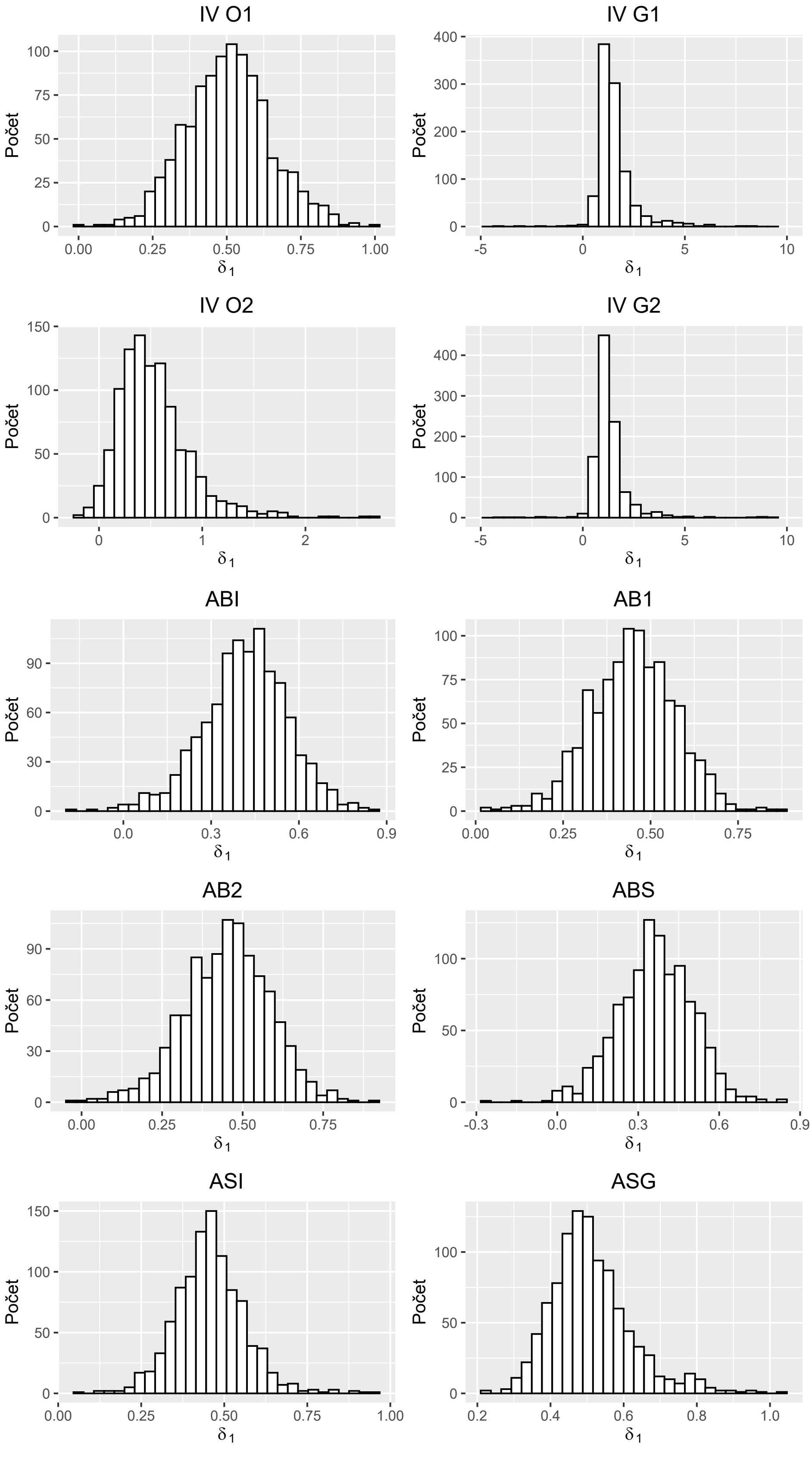
Na základě provedených simulací bychom mohli říci, že odhad ASG, využívající nejvíce informací o momentech ze všech porovnávaných odhadů, poskytuje z hlediska odmocninové střední čtvercové chyby ve většině případů nejlepší odhady. Pokud nelze využít odhad ASG, doporučili bychom z hlediska odmocninové střední čtvercové chyby jednokrokový Arellanův-Bondův odhad AB1.



Obrázek 4.3: Odhady ABI, AB1, AB2, ABS, ASI a ASG pro $n = 100$, $T = 5$ (nahoře) a $T = 10$ (dole), $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$.



Obrázek 4.4: Odhady ABI, AB1, AB2, ABS, ASI a ASG pro $n = 500$, $T = 5$ (dole) a $T = 10$ (nahoře), $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$.



Obrázek 4.5: Histogramy odhadů IV O1, IV G1, IV O2, IV G2, ABI, AB1, AB2, ABS, ASI a ASG pro $n = 100$ a $T = 5$, $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$.

n	odhad	$T=5$ vych.	$T=5$ sd	$T=5$ RMSE	$T=10$ vych.	$T=10$ sd	$T=10$ RMSE	$T=50$ vych.	$T=50$ sd	$T=50$ RMSE
100	IV O1	0,000	0,030	0,030	0,002	0,020	0,020	0,000	0,009	0,009
	IV G1	0,130	0,047	0,138	0,164	0,047	0,171	0,191	0,078	0,206
	IV O2	0,000	0,037	0,037	0,002	0,023	0,023	0,000	0,010	0,010
	IV G2	0,105	0,047	0,115	0,161	0,048	0,168	0,190	0,078	0,206
	ABI	−0,004	0,030	0,031	−0,000	0,023	0,023	–	–	–
	AB1	−0,001	0,029	0,029	−0,000	0,020	0,020	−0,002	0,008	0,009
	AB2	−0,004	0,030	0,030	−0,002	0,022	0,022	–	–	–
	ABS	−0,002	0,030	0,030	−0,004	0,020	0,020	−0,027	0,008	0,028
	ASI	−0,003	0,030	0,030	0,001	0,023	0,023	–	–	–
	ASG	−0,003	0,030	0,030	0,000	0,025	0,025	–	–	–
500	IV O1	0,000	0,013	0,013	−0,000	0,009	0,009	−0,000	0,004	0,004
	IV G1	0,128	0,021	0,130	0,161	0,021	0,162	0,192	0,034	0,195
	IV O2	−0,000	0,016	0,016	−0,000	0,010	0,010	−0,000	0,004	0,004
	IV G2	0,103	0,021	0,105	0,158	0,021	0,159	0,192	0,033	0,195
	ABI	−0,001	0,013	0,013	−0,001	0,009	0,009	–	–	–
	AB1	−0,000	0,013	0,013	−0,000	0,009	0,009	−0,000	0,004	0,004
	AB2	−0,001	0,013	0,013	−0,001	0,009	0,009	–	–	–
	ABS	−0,000	0,013	0,013	−0,001	0,009	0,009	−0,006	0,004	0,007
	ASI	−0,000	0,013	0,013	−0,001	0,009	0,009	–	–	–
	ASG	−0,000	0,013	0,013	−0,001	0,009	0,009	–	–	–

Tabulka 4.10: Porovnání odhadů zobecněnou metodou momentů v panelovém AR(1) modelu, $\delta_1 = -0{,}8$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$, o jaké odhady se jedná, je uvedeno v tabulce 4.8.

n	odhad	$T=5$ vych.	$T=5$ sd	$T=5$ RMSE	$T=10$ vych.	$T=10$ sd	$T=10$ RMSE	$T=50$ vych.	$T=50$ sd	$T=50$ RMSE
100	IV O1	0,482	59,277	59,249	−0,121	4,042	4,042	0,001	0,051	0,051
	IV G1	0,628	28,535	28,528	−4,118	131,560	131,558	0,338	9,833	9,834
	IV O2	−1,066	24,306	24,318	−0,361	13,664	13,662	0,161	1,334	1,343
	IV G2	2,998	51,686	51,747	0,015	17,985	17,976	0,440	9,750	9,755
	ABI	−0,676	0,452	0,814	−0,703	0,336	0,780	–	–	–
	AB1	−0,411	0,309	0,514	−0,205	0,122	0,239	−0,040	0,014	0,042
	AB2	−0,480	0,387	0,616	−0,235	0,152	0,280	–	–	–
	ABS	−0,754	0,305	0,814	−0,785	0,146	0,798	−0,884	0,027	0,885
	ASI	−0,359	0,252	0,439	−0,548	0,239	0,598	–	–	–
	ASG	0,036	0,184	0,187	0,067	0,076	0,101	–	–	–
500	IV O1	−0,011	1,165	1,164	0,002	0,120	0,120	−0,000	0,024	0,024
	IV G1	4,055	98,143	98,178	2,488	30,486	30,572	10,274	320,790	320,794
	IV O2	−0,557	17,490	17,490	0,182	1,859	1,867	0,013	0,191	0,191
	IV G2	1,941	53,942	53,950	0,968	12,827	12,857	2,119	49,872	49,892
	ABI	−0,231	0,276	0,359	−0,208	0,150	0,256	–	–	–
	AB1	−0,145	0,190	0,239	−0,067	0,060	0,089	−0,012	0,007	0,014
	AB2	−0,156	0,208	0,260	−0,072	0,068	0,099	–	–	–
	ABS	−0,384	0,230	0,447	−0,453	0,104	0,465	−0,638	0,024	0,638
	ASI	−0,116	0,139	0,181	−0,189	0,124	0,226	–	–	–
	ASG	0,056	0,113	0,126	0,056	0,055	0,079	–	–	–

Tabulka 4.11: Porovnání odhadů zobecněnou metodou momentů v panelovém AR(1) modelu, $\delta_1 = 0{,}9$, $\sigma_\mu^2 = 2{,}25$, $\sigma_\nu^2 = 4$, o jaké odhady se jedná, je uvedeno v tabulce 4.8.

4.2.2 Model s dalším regresorem

Nakonec budeme porovnávat odhady uvedené v tabulce 4.12 v modelu (3.2) s jedním regresorem X_{it}, půjde tedy o odhad v modelu

$$Y_{it} = \delta_1 Y_{i,t-1} + \beta_1 X_{it} + \mu_i + \nu_{it}.$$

Připomeňme, že individuální efekty, resp. zbytkové chyby generujeme z $N(0, \sigma_\mu^2)$, resp. z $N(0, \sigma_\nu^2)$ pro uvedené hodnoty σ_μ^2 a σ_ν^2 a regresory X_{it} generujeme z $N(1{,}1)$.

IV O1	IV – jako instrument Y_{t-2}, obyčejné nejm. čtverce
IV G1	IV – jako instrument Y_{t-2}, zobecněné nejm. čtverce, viz poznámka 1
IV O2	IV – jako instrument $Y_{t-2} - Y_{t-3}$, obyčejné nejm. čtverce
IV G2	IV – jako instrument $Y_{t-2} - Y_{t-3}$, zobec. nejm. čtverce, viz pozn. 1
AB1	Arellanův-Bondův – jednokrokový s G
AB2	Arellanův-Bondův – dvoukrokový s G
ABvD	Arellanův-Boverův – transformace na první diference
ABvU	Arellanův-Boverův – uvnitř-skupinová transformace
ASI	Ahnův-Schmidtův – jednotková matice vah
ASG	Ahnův-Schmidtův – matice vah s G v levém horním rohu

Tabulka 4.12: Odhady v dynamickém panelovém modelu s dalším regresorem.

Ahnův-Schmidtův odhad vykazuje numerické problémy při výpočtu $\widehat{F}^{-1}$, proto uvedeme charakteristiky odhadů ASI a ASG pouze pro $T = 3$. Pro větší T jsou u odhadů ASI a ASG uvedeny charakteristiky odhadů po prvním kroku odhadu.

V tabulkách 4.13 jsou uvedeny charakteristiky odhadů parametrů δ_1 a β_1 zobecněnou metodou momentů v modelu s jedním regresorem $X_{it} \sim N(1{,}1)$, $\beta_1 = 1$, $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$. Vzhledem k tomu, že regresory X_{it} se v čase příliš nemění, a Arellanův-Bondův odhad není vhodný pro odhad parametrů u regresorů fixních v čase, odhady AB1 a AB2 neodhadnou β_1 správně. Při tomto nastavení parametrů je pro parametr δ_1 z hlediska odhadu vychýlení nejlepší odhad s instrumentálními proměnnými odhadnutý metodou obyčejných nejmenších čtverců IV O1, z hlediska odhadu směrodatné odchylky a odmocninové střední čtvercové chyby pak Ahnův-Schmidtův odhad ASG. Pro odhad parametru β_1 je z hlediska odhadu vychýlení nejlepší odhad IV O1 či ASG, z hlediska odhadu směrodatné odchylky a odmocninové střední čtvercové chyby pak odhad ASG, a to i přes to, že u tohoto odhadu nyní využíváme jen první krok odhadu zobecněnou metodou momentů.

V tabulkách 4.14 jsou uvedeny charakteristiky odhadů parametrů δ_1 a β_1 zobecněnou metodou momentů v modelu s jedním regresorem $X_{it} \sim N(1{,}1)$, $\beta_1 = 1$, $\delta_1 = 0{,}9$, $\sigma_\mu^2 = 2{,}25$, $\sigma_\nu^2 = 4$. Jsou-li rozptyly individuálních efektů a zbytkových chyb větší, zároveň je δ_1 blíže nestacionaritě, je pro δ_1 nejvhodnější Ahnův-Schmidtův odhad ASG, v některých situacích z hlediska odhadu vychýlení pak odhad IV O1. Pro β_1 je nejlepší odhad, stejně jako při předchozím nastavení parametrů, ASG či IV O1. Odhady pomocí instrumentálních proměnných IV O1, IV G1, IV O2 a IV G2 vykazují oproti ostatním odhadům velký odhad směrodatné odchylky u odhadů parametru δ_1 a v některých situacích i u β_1. Je-li $n = 100$, vykazují odhady IV G2 při odhadu β_1 lepší vlastnosti než odhady IV O2. Celkově bychom pro oba parametry jako nejvhodnější označili odhad ASG.

δ_1

n	odhad	$T=5$ vych.	sd	RMSE	$T=7$ vych.	sd	RMSE	$T=10$ vych.	sd	RMSE
100	IV O1	0,001	0,105	0,105	0,002	0,074	0,074	0,002	0,056	0,056
	IV G1	0,958	11,318	11,353	0,526	1,691	1,770	−5,964	204,537	204,522
	IV O2	0,020	0,229	0,230	0,018	0,188	0,188	0,009	0,145	0,145
	IV G2	0,447	2,209	2,252	0,892	8,387	8,431	0,696	4,046	4,103
	AB1	−0,340	0,076	0,348	−0,229	0,059	0,236	−0,147	0,042	0,153
	AB2	−0,358	0,082	0,367	−0,233	0,060	0,241	–	–	–
	ABvD	−0,264	0,717	0,764	−0,354	0,514	0,624	–	–	–
	ABvU	−0,106	0,514	0,524	−0,124	0,433	0,450	–	–	–
	ASI	−0,083	0,099	0,129	−0,107	0,091	0,140	−0,139	0,082	0,161
	ASG	−0,009	0,062	0,063	−0,009	0,045	0,046	−0,006	0,034	0,034
500	IV O1	0,001	0,047	0,047	−0,000	0,034	0,034	0,001	0,024	0,024
	IV G1	0,389	0,128	0,409	0,478	0,147	0,500	0,566	0,173	0,592
	IV O2	0,004	0,097	0,097	0,001	0,076	0,076	0,002	0,059	0,059
	IV G2	0,317	0,127	0,341	0,436	0,138	0,458	0,543	0,166	0,568
	AB1	−0,334	0,036	0,336	−0,220	0,028	0,222	−0,139	0,021	0,141
	AB2	−0,360	0,040	0,362	−0,233	0,030	0,234	−0,144	0,021	0,145
	ABvD	−0,209	0,648	0,681	−0,377	0,503	0,628	−0,466	0,411	0,622
	ABvU	−0,061	0,664	0,666	−0,119	0,416	0,433	−0,102	0,313	0,329
	ASI	−0,021	0,042	0,047	−0,029	0,034	0,044	−0,039	0,031	0,050
	ASG	−0,001	0,025	0,025	−0,002	0,019	0,019	−0,002	0,013	0,014

β_1

n	odhad	$T=5$ vych.	sd	RMSE	$T=7$ vych.	sd	RMSE	$T=10$ vych.	sd	RMSE
100	IV O1	0,002	0,074	0,074	−0,001	0,056	0,056	0,001	0,047	0,047
	IV G1	0,269	2,826	2,837	0,125	0,385	0,404	−1,289	43,677	43,674
	IV O2	0,011	0,128	0,129	0,008	0,102	0,102	0,005	0,079	0,080
	IV G2	0,158	0,817	0,831	0,259	2,917	2,927	0,122	0,734	0,744
	AB1	−0,980	0,114	0,986	−0,990	0,072	0,992	−0,988	0,056	0,990
	AB2	−0,977	0,126	0,985	−0,989	0,076	0,991	–	–	–
	ABvD	−0,053	1,129	1,129	−0,109	0,727	0,734	–	–	–
	ABvU	0,028	0,946	0,946	0,006	0,650	0,650	–	–	–
	ASI	−0,029	0,119	0,122	−0,053	0,123	0,134	−0,065	0,119	0,136
	ASG	−0,000	0,058	0,058	−0,004	0,048	0,048	−0,001	0,039	0,039
500	IV O1	−0,000	0,033	0,033	−0,002	0,026	0,026	0,000	0,019	0,019
	IV G1	0,118	0,048	0,128	0,113	0,042	0,121	0,100	0,035	0,106
	IV O2	0,001	0,053	0,053	−0,001	0,042	0,042	0,001	0,033	0,033
	IV G2	0,111	0,053	0,123	0,116	0,044	0,124	0,106	0,037	0,112
	AB1	−1,000	0,053	1,001	−0,998	0,034	0,998	−0,998	0,025	0,998
	AB2	−0,998	0,057	0,999	−0,997	0,037	0,998	−0,997	0,027	0,998
	ABvD	−0,048	1,100	1,100	−0,162	0,706	0,724	−0,202	0,503	0,542
	ABvU	0,013	1,459	1,458	−0,025	0,678	0,678	0,018	0,439	0,439
	ASI	−0,011	0,044	0,045	−0,015	0,042	0,044	−0,020	0,040	0,045
	ASG	−0,000	0,024	0,024	−0,001	0,019	0,019	−0,001	0,015	0,015

Tabulka 4.13: Porovnání odhadů parametrů δ_1 a β_1 zobecněnou metodou momentů v dynamickém panelovém modelu s jedním regresorem $X_{it} \sim N(1{,}1)$, $\beta_1 = 1$, $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$, o jaké odhady se jedná, je uvedeno v tabulce 4.12.

δ_1

n	odhad	$T = 5$ vych.	sd	RMSE	$T = 7$ vych.	sd	RMSE	$T = 10$ vych.	sd	RMSE
100	IV O1	0,052	6,135	6,133	0,102	5,468	5,466	−0,042	1,422	1,422
	IV G1	−0,187	14,815	14,809	0,220	9,236	9,234	−0,277	17,681	17,674
	IV O2	12,963	437,974	437,946	7,799	373,767	373,661	−3,967	127,538	127,536
	IV G2	−3,858	76,175	76,235	1,802	51,556	51,561	−0,037	6,850	6,846
	AB1	−0,617	0,141	0,633	−0,441	0,104	0,453	−0,298	0,069	0,306
	AB2	−0,687	0,163	0,706	−0,466	0,113	0,479	–	–	–
	ABvD	−0,348	0,679	0,763	−0,609	0,642	0,884	–	–	–
	ABvU	−0,183	0,531	0,561	−0,273	0,477	0,549	–	–	–
	ASI	−0,400	0,341	0,525	−0,441	0,290	0,528	−0,532	0,256	0,591
	ASG	0,016	0,104	0,105	0,032	0,068	0,075	0,036	0,049	0,060
500	IV O1	0,020	1,381	1,380	0,004	0,219	0,219	0,007	0,112	0,112
	IV G1	0,595	21,300	21,298	0,989	44,751	44,740	0,900	12,062	12,089
	IV O2	0,094	3,634	3,633	0,155	1,687	1,693	0,223	2,837	2,8447
	IV G2	0,235	13,360	13,355	1,768	42,274	42,290	−0,110	21,847	21,836
	AB1	−0,649	0,080	0,654	−0,465	0,062	0,469	−0,309	0,043	0,312
	AB2	−0,756	0,096	0,762	−0,535	0,073	0,540	−0,344	0,049	0,347
	ABvD	−0,349	0,700	0,782	−0,572	0,605	0,833	−0,789	0,533	0,952
	ABvU	−0,147	0,510	0,531	−0,266	0,460	0,531	−0,272	0,389	0,474
	ASI	−0,211	0,228	0,311	−0,255	0,196	0,322	−0,291	0,181	0,343
	ASG	0,024	0,072	0,076	0,032	0,052	0,061	0,031	0,042	0,052

β_1

n	odhad	$T = 5$ vych.	sd	RMSE	$T = 7$ vych.	sd	RMSE	$T = 10$ vych.	sd	RMSE
100	IV O1	0,036	3,223	3,222	0,044	2,582	2,581	−0,020	0,707	0,707
	IV G1	−0,128	7,431	7,428	0,031	3,543	3,542	−0,216	8,779	8,778
	IV O2	8,198	275,916	275,900	2,712	154,325	154,272	−1,690	55,226	55,224
	IV G2	−1,116	20,051	20,072	0,794	22,553	22,556	0,005	2,852	2,851
	AB1	−0,979	0,188	0,997	−0,993	0,117	0,999	−0,989	0,090	0,993
	AB2	−0,979	0,199	0,999	−0,991	0,123	0,999	–	–	–
	ABvD	−0,061	2,611	2,610	−0,200	1,572	1,584	–	–	–
	ABvU	−0,037	2,421	2,420	−0,031	1,458	1,457	–	–	–
	ASI	−0,084	0,994	0,997	−0,183	0,807	0,827	−0,243	0,699	0,739
	ASG	0,002	0,152	0,152	−0,007	0,133	0,133	−0,005	0,112	0,112
500	IV O1	0,007	0,734	0,734	−0,001	0,118	0,118	0,004	0,066	0,066
	IV G1	0,273	9,569	9,568	0,460	19,096	19,091	0,354	4,733	4,744
	IV O2	0,042	1,773	1,773	0,076	0,829	0,832	0,116	1,546	1,550
	IV G2	0,069	6,631	6,628	0,874	21,380	21,387	−0,087	9,301	9,297
	AB1	−1,004	0,123	1,011	−0,996	0,070	0,998	−0,999	0,043	1,000
	AB2	−1,002	0,113	1,008	−0,997	0,068	0,999	−0,997	0,045	0,999
	ABvD	−0,149	2,192	2,196	−0,286	1,509	1,535	−0,343	0,906	0,969
	ABvU	0,032	2,486	2,485	−0,101	1,444	1,447	0,001	0,967	0,966
	ASI	−0,090	0,649	0,654	−0,125	0,599	0,612	−0,161	0,562	0,584
	ASG	0,008	0,061	0,062	0,008	0,048	0,049	0,008	0,041	0,041

Tabulka 4.14: Porovnání odhadů parametrů δ_1 a β_1 zobecněnou metodou momentů v dynamickém panelovém modelu s jedním regresorem $X_{it} \sim N(1{,}1)$, $\beta_1 = 1$, $\delta_1 = 0{,}9$, $\sigma^2_\mu = 2{,}25$, $\sigma^2_\nu = 4$, o jaké odhady se jedná, je uvedeno v tabulce 4.12.

V tabulkách 4.15 a 4.16 jsou uvedeny charakteristiky odhadů po druhém kroku Ahnova-Schmidtova odhadu. Při nastavení parametrů $\beta_1 = 1$, $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$ mají obě verze Ahnova-Schmidtova odhadu velice podobné sledované vlastnosti, při nastavení parametrů $\beta_1 = 1$, $\delta_1 = 0{,}9$, $\sigma_\mu^2 = 2{,}25$, $\sigma_\nu^2 = 4$ se z hlediska sledovaných charakteristik lépe jeví odhad ASI s jednotkovou maticí vah.

δ_1

		$T=3$		
n	odhad	vych.	sd	RMSE
100	ASI	0,010	0,300	0,300
	ASG	0,009	0,299	0,299
500	ASI	0,100	0,224	0,245
	ASG	0,097	0,225	0,245

β_1

		$T=3$		
n	odhad	vych.	sd	RMSE
100	ASI	−0,058	0,265	0,271
	ASG	−0,053	0,256	0,261
500	ASI	−0,005	0,214	0,214
	ASG	0,010	0,234	0,234

Tabulka 4.15: Porovnání odhadů parametrů δ_1 a β_1 v dynamickém panelovém modelu s jedním regresorem $X_{it} \sim N(1{,}1)$, $\beta_1 = 1$, $\delta_1 = 0{,}5$, $\sigma_\mu^2 = 1$, $\sigma_\nu^2 = 1$, zkratky ASI a ASG jsou vysvětleny v tabulce 4.12.

δ_1

		$T=3$		
n	odhad	vych.	sd	RMSE
100	ASI	−0,230	0,476	0,528
	ASG	−0,250	0,526	0,582
500	ASI	−0,079	0,383	0,391
	ASG	−0,093	0,420	0,430

β_1

		$T=3$		
n	odhad	vych.	sd	RMSE
100	ASI	−0,134	0,422	0,443
	ASG	−0,167	0,414	0,446
500	ASI	−0,113	0,464	0,477
	ASG	−0,149	0,481	0,503

Tabulka 4.16: Porovnání odhadů parametrů δ_1 a β_1 v dynamickém panelovém modelu s jedním regresorem $X_{it} \sim N(1{,}1)$, $\beta_1 = 1$, $\delta_1 = 0{,}9$, $\sigma_\mu^2 = 2{,}25$, $\sigma_\nu^2 = 4$, zkratky ASI a ASG jsou vysvětleny v tabulce 4.12.

4.3 Shrnutí

V simulacích se potvrdilo, že klasické odhady nejsou pro dynamický model panelových dat vhodné. Dále se potvrdilo, že odhad v modelu v fixními efekty má vychýlení řádu $\frac{1}{T}$. Na druhou stranu, tvrzení, že odhad s instrumentální proměnnou $Y_{i,t-2}$ má menší rozptyl než odhad s instrumentální proměnnou $Y_{i,t-2} - Y_{i,t-3}$, se neukázalo jako obecně platné.

Je-li panelový AR(1) model blíže nestacionárnímu, potvrzuje se, že použití odhadu s co největším počtem momentových podmínek (Ahnova-Schmidtova) je z hlediska odhadu směrodatné odchylky a odmocninové střední čtvercové chyby nejvhodnější. U modelu s dalším regresorem se také jako nejvhodnější jeví Ahnův-Schmidtův odhad, u parametru příslušného dalšímu regresoru je tomu tak z hlediska odhadu vychýlení a odmocninové střední čtvercové chyby. V některých situacích jsou všechny odhady zobecněnou metodou momentů poměrně srovnatelné, jindy vykazují velké rozdíly. Obecně lze pro dynamický model panelových dat doporučit Ahnův-Schmidtův odhad, a to i v případě, že lze provést jen jeho první krok.

Velká podobnost sledovaných charakteristik u jednokrokového a dvoukrokového Arellanova-Bondova odhadu s využitím matice G (AB1 a AB2) v případě $n = 500$ potvrzuje, že zmíněné odhady jsou asymptoticky ekvivalentní, jak uváděli Arellano a Bond (1991).

Závěr

Cílem práce bylo popsat dynamický model panelových dat a způsob odhadu jeho parametrů. Nejprve jsme zopakovali různé odhady v lineárním regresním modelu a zobecněnou metodu momentů. Dále jsme uvažovali klasické odhady pro model panelových dat a důvody, proč a kdy není vhodné je použít na dynamický model. Následně jsou uvedeny odhady vhodné pro dynamický model panelových dat, ať už dvoustupňový odhad či různé odhady zobecněnou metodou momentů – Arellanův-Bondův, Arellanův-Boverův a Ahnův-Schmidtův.

Na závěr jsme ověřili některé teoretické výsledky a porovnali odhady z teoretické části v simulační studii. Simulace ukázala, že skutečně klasické odhady nemusí být vhodné, potvrdily se lepší vlastnosti – odhad vychýlení, výběrová směrodatná odchylka a odmocninová střední čtvercová chyba – u Ahnova-Schmidtova odhadu, využívajícího více momentových podmínek, zejména v případě modelu bližšího nestacionárnímu. Pro dynamický model bez dalších regresorů se kromě zmíněného Ahnova-Schmidtova odhadu jako vhodný jeví i dvoustupňový odhad s druhou zpožděnou hodnotou odezvy jako instrumentální proměnnou odhadnutý metodou obyčejných nejmenších čtverců či jednokrokový Arellanův-Bondův odhad. Dále se potvrdila vlastnost řádu vychýlení u modelu s fixními efekty.

Na druhou stranu, preference některého z dvoustupňových odhadů na základě výběrové směrodatné odchylky, uvedená v článku Arellano (1989), se ukázala být platná jen v některých situacích.

Seznam použité literatury

Ahn, S. C. a Schmidt, P. (1995). Efficient estimation of models for dynamic panel data. *Journal of Econometrics*, **68**(1), 5–27. ISSN 0304-4076.

Anderson, T. W. a Hsiao, C. (1981). Estimation of Dynamic Models with Error Components. *Journal of the American Statistical Association*, **76**(375), 598–606. ISSN 0162-1459.

Arellano, M. a Bover, O. (1995). Another Look at the Instrumental Variable Estimation of Error-components Models. *Journal of econometrics*, **68**(1), 29–51. ISSN 0304-4076.

Arellano, M. (1989). A Note on the Anderson-Hsiao Estimator for Panel Data. *Economics letters*, **31**(4), 337–341. ISSN 0165-1765.

Arellano, M. a Bond, S. (1991). Some Tests of Specification for Panel Data: Monte Carlo Evidence and an Application to Employment Equations. *The Review of economic studies*, **58**(2), 277–297. ISSN 0034-6527.

Baltagi, B. H. (2021). *Econometric Analysis of Panel Data, 6. vydání*. Springer. ISBN 978-3-030-53952-8.

Bates, D. a Maechler, M. (2019). *Matrix: Sparse and Dense Matrix Classes and Methods*. URL `https://CRAN.R-project.org/package=Matrix`. R package version 1.2-18.

Blundell, R. a Bond, S. (1998). Initial conditions and moment restrictions in dynamic panel data models. *Journal of Econometrics*, **87**(1), 115–143. ISSN 0304-4076.

Bond, S. R. (2002). Dynamic panel data models: a guide to micro data methods and practice. *Portuguese economic journal*, **1**(2), 141–162. ISSN 1617-982X.

Borchers, H. W. (2022). *pracma: Practical Numerical Math Functions*. URL `https://CRAN.R-project.org/package=pracma`. R package version 2.4.2.

Das, P. (2019). *Econometrics in Theory and Practice Analysis of Cross Section, Time Series and Panel Data with Stata 15.1, 1. vydání*. Springer Singapore. ISBN 981-329-019-6.

Diggle, P., Heagerty, P., Liang, K.-Y. a Zeger, S. L. (2013). *Analysis of Longitudinal Data*. Oxford statistical science series ; 25. Oxford University Press, Oxford. ISBN 978-0-19-852484-7.

Fritsch, M., Pua, A. A. Y. a Schnurbus, J. (2021). pdynmc: Moment Condition Based Estimation of Linear Dynamic Panel Data Models. URL `https://cran.r-project.org/package=pdynmc`.

Greene, W. H. (2003). *Econometric analysis, 5. vydání*. Prentice-Hall, Upper Saddle. ISBN 0-13-110849-2.

GRUNFELD, Y. (1958). *The Determinants of Corporate Investment.* PhD thesis, University of Chicago, Department of Economics.

HAUSMAN, J. A. a TAYLOR, W. E. (1981). Panel Data and Unobservable Individual Effects. *Econometrica*, **49**(6), 1377–1398. ISSN 0012-9682.

HENDERSON, C. R. (1984). *Applications of Linear Models in Animal Breeding.* University of Guelph.

HSIAO, C. (2003). *Analysis of Panel Data, 2. vydání.* Econometric Society monographs; 34. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 1-316-08580-5.

KLEIBER, C. a ZEILEIS, A. (2008). *Applied Econometrics with R.* Springer-Verlag, New York. URL `https://CRAN.R-project.org/package=AER`. ISBN 978-0-387-77316-2.

MILLO, G. (2017). Robust Standard Error Estimators for Panel Models: A Unifying Approach. *Journal of Statistical Software*, **82**(3), 1–27. doi: 10.18637/jss.v082.i03.

MÁTYÁS, L. (1999). *Generalized Method of Moments Estimation.* Themes in modern econometrics. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 0521660130.

NICKELL, S. (1981). Biases in Dynamic Models with Fixed Effects. *Econometrica*, **49**(6), 1417–1426. ISSN 0012-9682.

PINHEIRO, J., BATES, D., DEBROY, S., SARKAR, D. a R CORE TEAM (2020). *nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models.* URL `https://CRAN.R-project.org/package=nlme`. R package version 3.1-149.

R CORE TEAM (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL `https://www.R-project.org/`.

TANG, YUAN, LI a WENXUAN (2016). lfda: An R Package for Local Fisher Discriminant Analysis and Visualization. *arXiv preprint arXiv:1612.09219.* URL `https://arxiv.org/abs/1612.09219`.

TAPPE, K. (2022). Funkce ranef v R. URL `https://rdrr.io/cran/plm/src/R/tool_ranfixef.R`. Naposledy navštíveno 20. 2. 2023.

WOOLDRIDGE, J. M. (2010). *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data, 2. vydání.* MIT Press, Cambridge. ISBN 9780262232586.

WOOLDRIDGE, J. M. (2013). *Introductory Econometrics : A Modern Approach, 5. vydání.* South-Western Cengage Learning, Mason. ISBN 978-1-111-53104-1.

ZEILEIS, A. (2019). *dynlm: Dynamic Linear Regression.* URL `https://CRAN.R-project.org/package=dynlm`. R package version 0.3-6.

ZSOHAR, P. (2012). Short Introduction to the Generalized Method of Moments. *Hungarian Statistical Review*, **90**(SN16), 150–170.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

A. Přílohy

Elektronickou přílohou jsou tři R skripty:

1. simulace_panelovych_dat.R, obsahující simulaci dynamických panelových dat a všechny použité odhady,
2. simulace_cyklus.R, obsahující cyklus pro $N = 1000$ opakování simulací a odhadů použitých v části 4.1,
3. odhady_Grunfeldova_data.R, obsahující kód s výpočty odhadů pro modely Grunfeldových dat.