



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Jakub Tyle

**Perzistence v přesně řešitelném modelu  
náhodné procházky**

Katedra fyziky kondenzovaných látek

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Tomáš Novotný, Ph.D.

Studijní program: Fyzika (B1701)

Studijní obor: FOF (1701R026)

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Rád bych touto cestou poděkoval panu docentu Tomáši Novotnému a panu doktorovi Martinu Žondovi za jejich cenné rady a podporu při psaní této bakalářské práce. Jejich odborné znalosti a ochota mi byly velkou pomocí při psaní této práce a umožnily mi dosáhnout lepších výsledků.

Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přátelům, kteří mi poskytli neocenitelnou podporu během celého procesu studia. Bez jejich podpory a povzbuzování by bylo těžší dokončit tuto práci. Chtěl bych tedy poděkovat i všem dalším lidem, kteří mi během psaní bakalářské práce poskytli pomoc a podporu. Vaše rady a přístup mi byly velmi cenné a přispěly k úspěšnému dokončení této práce. Vaše podpora pro mě byla velmi důležitá a budu Vám za ni vždycky velmi vděčný.

Název práce: Perzistence v přesně řešitelném modelu náhodné procházky

Autor: Jakub Tyle

Katedra: Katedra fyziky kondenzovaných látek

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Tomáš Novotný, Ph.D., Katedra fyziky kondenzovaných látek

Abstrakt: Práce se zabývá Ornstein-Uhlenbeckovým procesem a jeho zobecněnou verzí hnanou Ornstein-Uhlenbeckovským šumem. Cílem práce je odvodit a prezentovat základní vlastnosti tohoto procesu a limitní přechod procesu k Gaussovskému bílému šumu, v případě obyčejného Ornstein-Uhlenbeckova procesu, či přechod k obyčejnému Ornstein-Uhlenbeckově procesu, pro jeho zobecněnou verzi. Součástí studia této problematiky bylo simulování doby prvního dosažení nulové úrovně procesu. Text této práce se tak zabývá souhrnem a analýzou simulací, jež byly provedeny. Tyto simulace pravděpodobnosti doby prvního dosažení nulové úrovně byly provedeny pro procesy se stacionárním rozdělením počáteční polohy a pro procesy s fixní počáteční polohou a výsledky byly srovnány s teoretickými předpoklady.

Klíčová slova: Ornstein-Uhlenbeckův proces, Doba prvního dosažení, Persistence, Fokker-Planckova rovnice, Gaussovský bílý šum.

Title: Persistence in an exactly solvable random walk model

Author: Jakub Tyle

Department: Department of condensed matter physics

Supervisor: doc. RNDr. Tomáš Novotný, Ph.D., Department of condensed matter physics

Abstract: The work deals with the Ornstein-Uhlenbeck process and its generalized version driven by Ornstein-Uhlenbeck noise. The aim of the work is to derive and present the basic properties of this process and the limiting transition of the process to Gaussian white noise, in the case of the ordinary Ornstein-Uhlenbeck process, or the transition to the ordinary Ornstein-Uhlenbeck process for its generalized version. As part of the study of this issue, the time of first reaching the zero level of the process was simulated. The text of this work thus deals with a summary and analysis of the simulations that were performed. These simulations of the probability of the time of first reaching the zero level were performed for processes with a stationary distribution of initial position and for processes with a fixed initial position, and the results were compared with theoretical assumptions.

Keywords: Ornstein-Uhlenbeck process, First time passage, Persistence, Fokker-Planck equation, Gaussian white noise.

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Teoretický přehled</b>	<b>3</b>
1.1 Ornstein-Uhlenbeckův proces	3
1.2 Gaussovský bílý šum	4
<b>2 Přehled výsledků pro Ornstein-Uhlenbeckův proces</b>	<b>6</b>
2.1 Odvození základních vlastností	6
2.1.1 Řešení diferenciální rovnice	6
2.1.2 Střední hodnota	6
2.1.3 Korelační funkce	7
2.1.4 Variance procesu	7
2.2 Bezrozměrný Ornstein-Uhlenbeckův proces	8
2.3 Limita Gaussovského bílého šumu	9
2.4 Fokker-Planckova rovnice	10
2.5 Hustota doby prvního dosažení	11
<b>3 Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces</b>	<b>13</b>
3.1 Eliminace parametrů procesu	14
3.2 Odvození základních vlastností	15
3.2.1 Řešení diferenciální rovnice	16
3.2.2 Střední hodnota	17
3.2.3 Variančně-kovarianční matice	17
<b>4 Výsledky simulace</b>	<b>19</b>
4.1 Simulace doby prvního dosažení Ornstein-Uhlenbeckova procesu	19
4.1.1 Proces se stacionárním rozdělením počáteční polohy	19
4.1.2 Proces s fixní počáteční polohou	20
4.2 Simulace doby prvního dosažení zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu	21
4.2.1 Proces se stacionárním rozdělením počátečních poloh procesu $x_0$ a šumu $y_0$	21
4.2.2 Proces s fixní počáteční polohou procesu $x_0$ a stacionárním rozdělením počáteční polohy šumu $y_0$	24
4.2.3 Analýza výsledků simulace	30
<b>Závěr</b>	<b>31</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>32</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>33</b>
<b>A Kódy v jazyce Python</b>	<b>34</b>

# Úvod

## Motivace

V posledních desetiletích se stochastické procesy staly nezbytnou součástí mnoha oborů vědy, jako jsou biologie, fyzika, ekonomie a mnoho dalších. Stochastické procesy jsou procesy, u kterých je vývoj náhodný, takže nelze předpovědět budoucí vývoj s přesností. Tyto procesy se používají k modelování jevů, jako jsou fluktuace v cenách akcií, náhodná pohyblivost částic v kapalinách nebo dokonce chování buněk.

Jedním z vědců, kteří se zabývají stochastickými procesy v biologii, je Vincent Hakim. Vincent Hakim je francouzský vědec, který se specializuje na matematické modelování biologických systémů. V roce 2015 přednesl v Paříži přednášku (Hakim, 2015) na téma "Models of collective cell motion", kde představil modelování tohoto pohybu pomocí Ornstein-Uhlenbeckova procesu.

Ornstein-Uhlenbeckův proces je stochastický proces, který se používá pro modelování různých jevů v ekonomii, fyzice, biologii a dalších oblastech. Vincent Hakim ukázal, že lze Ornstein-Uhlenbeckův proces využít k modelování pohybu buněk v tkáních. Tento proces je však limitován pouze na pohyb jedné buňky a nelze s jeho pomocí modelovat kolektivní pohyb buněk. Proto byl představen Ornstein-Uhlenbeckův proces hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem, který umožňuje modelovat pohyb buněk v kolektivu a simulovat chování celé tkáně.

Tento přístup má mnoho potenciálních aplikací v biologii, například při výzkumu růstu a rozvoje tkání, při studiu buněčné migrace nebo při vývoji léčebných metod pro nemoci spojené s poruchami pohybu buněk.

Výzkum Ornstein-Uhlenbeckova procesu s Ornstein-Uhlenbeckovým šumem a jeho aplikací v biologii je tedy velmi užitečný pro pochopení dynamiky biologických systémů a vývoje nových terapeutických přístupů. Vincent Hakim a jeho kolegové přispěli k rozvoji tohoto přístupu a jeho aplikací v biologii, což má potenciál změnit způsob, jakým chápeme biologické systémy a jak s nimi pracujeme.

## Cíle práce

Cílem této bakalářské práce je představit či vypočítat základní vlastnosti Ornstein-Uhlenbeckova procesu a jeho rozšířené verze, Ornstein-Uhlenbeckova procesu hnaného Ornstein-Uhlenbeckovským šumem. Pro tuto bakalářskou práci je však hlavním cílem prozkoumat vlastnosti doby prvního dosažení tohoto zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu s Ornstein-Uhlenbeckovým šumem. To samo o sobě vyžaduje numerické simulace. Výsledky simulace první doby dosažení budou analyzovány pro dostatečný počet trajektorií a porovnány s teoretickými předpoklady.

# 1. Teoretický přehled

## 1.1 Ornstein-Uhlenbeckův proces

Ornstein-Uhlenbeckův proces je stochastický proces, který se používá v mnoha oblastech jako například v matematické finanční teorii, fyzice a biologii. Tento proces byl poprvé představen Robertem Ornsteinem a George Uhlenbeckem.

Ornstein-Uhlenbeckův proces lze definovat jako stochastický proces, který se řídí diferenciální rovnicí, kterou můžeme zapsat v Langevinově tvaru následujícím způsobem:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda(x(t) - \mu) + \sigma\xi(t), \quad (1.1)$$

kde  $x(t)$  je stav procesu v čase  $t$ ,  $\lambda$  je driftový parametr, který udává rychlost, s jakou se proces vrací ke střední hodnotě  $\mu$ ,  $\sigma$  je volatilita, jež ovlivňuje rozptyl náhodných fluktuací.  $\xi(t)$  je gaussovský bílý šum, který je někdy také psán jako diferenciál Wienerova procesu  $W(t)$ , což je stochastický proces, používaný k modelování náhodných fluktuací. V našem textu se však budeme nadále držet konvenčního značení  $\xi(t)$ . Tento vztah (1.1) je v analogii s odbornou literaturou: Gardiner, 1997, str. 80 vztah (4.1.1), pro:  $a(x,t) = -\lambda(x(t) - \mu)$ ,  $b(x,t) = \sigma$ .

Z rovnice (1.1) často bývá vynechán člen se střední hodnotou  $\mu$ . Rovnice tak přechází na tvar s nulovou střední hodnotou. Z této rovnice budeme vycházet při studiu Ornstein-Uhlenbeckova procesu a jeho zobecněné verze, tedy procesu hnaného Ornstein-Uhlenbeckovským šumem. Upravená rovnice tedy nabývá následujícího tvaru:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda x(t) + \sigma\xi(t). \quad (1.2)$$

Ornstein-Uhlenbeckův proces má mnoho vlastností, jež ho činí užitečným v mnoha oblastech. Patří mezi ně například:

- **Stacionarita:** Ornstein-Uhlenbeckův proces se asymptoticky přibližuje ke své stacionární hodnotě  $\mu$  s rychlostí definovanou parametrem  $\lambda$ , což znamená, že má dlouhodobou tendenci vracet se k této hodnotě. Tento jev se také někdy nazývá *reverting to the mean*, neboli tendence vracet se k průměru, pokud se od něj vzdálíme.
- **Volatilita:** Ornstein-Uhlenbeckův proces umožňuje modelování náhodných fluktuací s rozdílnými úrovněmi volatility.
- **Markovost:** Přírůstky Ornstein-Uhlenbeckova procesu jsou nezávislé na hodnotách procesu v minulosti. Znamená to tedy, že proces je markovský.
- **Normalita přírůstků:** Přírůstky Ornstein-Uhlenbeckova procesu jsou normálně rozdělené se střední hodnotou rovnou nule a s konstantním rozptylem.

Další vlastností Ornstein-Uhlenbeckova procesu je to, že jeho pravděpodobnostní rozdělení má uzavřenou formu, což umožňuje snadný výpočet pravděpodobnostních charakteristik procesu, jako je například střední hodnota, rozptyl a korelační funkce.

Ornstein-Uhlenbeckův proces se také často používá jako základ pro rozšíření na složitější modely, jako tomu bylo v našem případě, kdy místo gaussovského bílého šumu byl použit Ornstein-Uhlenbeckův šum, tedy šum který se vyvíjí z gaussovského bílého šumu dle stochastické diferenciální rovnice (1.1), resp. (1.2). Využití zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu závisí na konkrétní formě jeho rozšíření, ale rozšíření může být například pro modelování náhodného chování skupiny jedinců.

Celkově lze tedy říci, že Ornstein-Uhlenbeckův proces je významným nástrojem pro modelování náhodných procesů s reverzní tendencí, volatilitou a markovskými vlastnostmi.

## 1.2 Gaussovský bílý šum

Gaussovský bílý šum je modelem pro náhodné procesy, kde se v každém okamžiku generuje nezávislá náhodná hodnota s gaussovským rozdělením pravděpodobnosti a konstantním středním kvadratickým rozptylem.

Bílý šum je charakterizován nulovou korelací mezi náhodnými veličinami v různých časech a konstantním středním kvadratickým rozptylem, což znamená, že rozptyl náhodné veličiny v každém okamžiku je stejný. Tento model se často používá jako základ pro výpočty v řadě aplikací, jako například v oblasti řízení procesů, signálního zpracování, statistiky a pravděpodobnosti.

Jedním z klíčových charakteristik gaussovského bílého šumu je jeho spektrum. V případě bílého šumu je spektrum konstantní pro všechny frekvence, což znamená, že se šum vyskytuje se stejnou intenzitou v každém okamžiku - proto bílý šum.

Z toho co bylo dosavadně řečeno lze definovat gaussovský bílý šum dle jeho vlastností a to následovně:

**Definice 1** (GAUSSOVSKÝ BÍLÝ ŠUM: Gardiner, 1997, str. 80).

*Nechť  $\xi_t$  je náhodný proces, který splňuje následující vlastnosti:*

$$\begin{aligned} \xi(t), \xi(t') & \dots && \text{statisticky nezávislá pro všechna } t \text{ různé od } t', \\ \langle \xi(t) \rangle & = 0 && \text{pro všechna } t, \\ \langle \xi(t), \xi(t') \rangle & = \delta(t - t'), && \text{pro všechna } t, t'. \end{aligned}$$

*Pak proces  $\xi(t)$  nazveme gaussovským bílým šumem.*

Vztah mezi gaussovským bílým šumem a Wienerovým procesem spočívá v tom, že Wienerův proces lze interpretovat jako integrál gaussovského bílého šumu. Konkrétně, diferenciál Wienerova procesu je limitou gaussovského bílého šumu při nekonečně malých časových intervalech. Tento vztah je znám jako Itovo lemma a má klíčovou roli v teorii stochastických diferenciálních rovnic.



V případě Ornstein-Uhlenbeckova procesu může být gaussovský bílý šum použit jako základ pro generování náhodných přírůstků k procesu. Tyto přírůstky jsou poté integrovány k výpočtu nových hodnot procesu v každém časovém kroku. Díky tomuto přístupu lze simulovat proces s náhodnými fluktuacemi, které mají nulovou korelaci mezi jednotlivými časovými kroky.

V závěru lze tedy říci, že gaussovský bílý šum je významným modelem v oblasti náhodných procesů. Jeho vlastnosti, jako delta korelace mezi jednotlivými časovými kroky a konstantní střední kvadratický rozptyl, umožňují jeho využití a aplikace v široké škále oborů, jako například v oblastech pravděpodobnosti, statistiky, fyziky či biologie.

# 2. Přehled výsledků pro Ornstein-Uhlenbeckův proces

## 2.1 Odvození základních vlastností

Jako výchozí bod této kapitoly uvažujme Ornstein-Uhlenbeckův proces definovaný diferenciální rovnicí (1.2) s nulovou střední hodnotou  $\mu$ .

### 2.1.1 Řešení diferenciální rovnice

Nejprve hledíme řešení této diferenciální rovnice (1.2). Uvažujme-li následující substituci:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\psi(t) \Leftrightarrow \psi(t) = e^{\lambda t}x(t)$$

a diferencujeme-li nyní tuto proměnnou  $\psi(t)$  dle času, pak s využitím definičního vztahu z rovnice (1.2) dostáváme následující:

$$\frac{\psi(t)}{dt} = \lambda e^{\lambda t}x(t) + e^{\lambda t}\frac{x(t)}{dt} = e^{\lambda t}(\lambda x(t) - \lambda x(t) + \sigma\xi(t)) = \sigma e^{\lambda t}\xi(t).$$

Integrujeme nyní tuto rovnost dle časové proměnné od  $T = 0$  do  $T = t$ . Dostáváme tak následující vztah:

$$\psi(t) - \psi(0) = \sigma \int_0^t e^{\lambda T}\xi(T)dT,$$

kterýž nás po zpětné substituci a přeznačení konstanty  $\psi(0) = x_0$  vede k následujícímu řešení diferenciální rovnice (1.2):

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-T)}\xi(T)dT. \quad (2.1)$$

### 2.1.2 Střední hodnota

Nyní počítejme střední hodnotu stavové proměnné  $x(t)$ , s využitím výsledků předchozí sekce a s použitím vlastností gaussovského bílého šumu, definovaného Definicí 1. Aplikujeme-li operátor střední hodnoty na rovnici (2.1), dostáváme následující:

$$\langle x(t) \rangle = \langle x_0 e^{-\lambda t} + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-T)}\xi(T)dT \rangle.$$

Nejdříve využijeme linearitu operátoru střední hodnoty a posléze nulovost střední hodnoty gaussovského bílého šumu dle Definicí 1, což nás vede k následujícímu výsledku:

$$\langle x(t) \rangle = x_0 e^{-\lambda t}. \quad (2.2)$$

### 2.1.3 Korelační funkce

Počítejme korelační funkci stavové proměnné  $x(t)$  v různých časech:  $t, t'$ . Využijeme přitom rovnice (2.1) a vlastností gaussovského bílého šumu, dle Definice 1. Počítejme tedy následující:

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(t') \rangle &= \\ &= \langle (x_0 e^{-\lambda t} + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-T)} \xi(T) dT) (x_0 e^{-\lambda t'} + \sigma \int_0^{t'} e^{-\lambda(t'-T')} \xi(T') dT') \rangle. \end{aligned}$$

Výraz uvnitř operátoru střední hodnoty se po roznásobení rozpadne na čtyři části. Využijeme-li linearity operátoru střední hodnoty, pak všechny členy úměrné  $\xi(t)$  budou rovny nule, neboť střední hodnota gaussovského bílého šumu je nulová, dle Definice 1. Z předchozího výrazu tedy zůstávají následující členy:

$$\langle x_0^2 e^{-\lambda(t+t')} \rangle + \langle \sigma^2 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-\lambda(t-T)} e^{-\lambda(t'-T')} \xi(T) \xi(T') dT dT' \rangle.$$

Nyní využijeme druhé vlastnosti gaussovského bílého šumu dle Definice 1, tedy to, že je delta-korelovaný. Počítejme tedy následující:

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(t') \rangle &= x_0^2 e^{-\lambda(t+t')} + \sigma^2 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-\lambda(t-T)} e^{-\lambda(t'-T')} \langle \xi(T) \xi(T') \rangle dT dT' \\ &= x_0^2 e^{-\lambda(t+t')} + \sigma^2 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-\lambda(t-T)} e^{-\lambda(t'-T')} \delta(T - T') dT dT' \\ &= x_0^2 e^{-\lambda(t+t')} + \sigma^2 e^{-\lambda(t+t')} \int_0^{\min(t,t')} e^{2\lambda T} dT \\ &= x_0^2 e^{-\lambda(t+t')} + \frac{\sigma^2}{2\lambda} e^{-\lambda(t+t')} (e^{2\lambda \min(t,t')} - 1). \end{aligned}$$

Celkově tedy lze upravit výsledek například do následujícího tvaru. Zavedením absolutní hodnoty do vzorce se také zbavíme funkce  $\min(t, t')$ . Korelační funkce stavové proměnné tedy obecně nabývá následující podoby:

$$\langle x(t)x(t') \rangle = (x_0^2 - \frac{\sigma^2}{2\lambda}) e^{-\lambda(t+t')} + \frac{\sigma^2}{2\lambda} e^{-\lambda|t-t'|}. \quad (2.3)$$

### 2.1.4 Variance procesu

Vycházíme-li z výsledků předchozí sekce, snadno určíme varianci studovaného Ornstein-Uhlenbeckova procesu. Využijeme přitom známého vztahu pro výpočet variance:  $V_x(t) = \langle x(t)^2 \rangle - \langle x(t) \rangle^2$ . Výsledná hodnota variance procesu je tedy dána následujícím vztahem:

$$V_x(t) = \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}). \quad (2.4)$$

Provedeme-li dlouhočasovou limitu tohoto vztahu, dostaneme stacionární varianci procesu:

$$V_x^{\text{stac.}}(t) = \frac{\sigma^2}{2\lambda}. \quad (2.5)$$

## 2.2 Bezrozměrný Ornstein-Uhlenbeckův proces

Správnou volbou souřadnic lze zbezrozměrnit Ornstein-Uhlenbeckovu diferenciální rovnici (1.2) tak, abychom se zbavili parametrů  $\lambda$  a  $\sigma$ .

Nejprve provedeme škálování časové souřadnice  $t$  pomocí konstanty  $\lambda$  tak, že platí  $T = \lambda t$ . Můžeme využít řetízkového pravidla s rovností  $\frac{dT}{dt} = \lambda$ , což nás vede k následujícím úpravám rovnice (1.2):

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dT} \frac{dT}{dt} &= -\lambda x(t) + \sigma \xi(t) \\ \frac{dx(t)}{dT} &= -x(t) + \frac{\sigma}{\lambda} \xi(t).\end{aligned}$$

Gaussovský bílý šum  $\xi(t)$  je dle Definice 1 delta-korelovaný v čase  $t$ . Využitím vlastností Dirracova delta funkce dostáváme následující rovnosti:

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t') = \delta\left(\frac{T - T'}{\lambda}\right) = \lambda \delta(T - T').$$

Definujeme-li nyní gaussovský bílý šum  $\epsilon(T)$  v nové časové proměnné  $T$ , pak jistě platí:

$$\langle (\sqrt{\lambda} \epsilon(T)) (\sqrt{\lambda} \epsilon(T')) \rangle = \lambda \langle \epsilon(T), \epsilon(T') \rangle = \lambda \delta(T - T').$$

Dostáváme tedy následující rovnost:

$$\xi(t) = \sqrt{\lambda} \epsilon(T),$$

dle které rovnice (1.2) přejde na následující tvar:

$$\frac{dx(t)}{dT} = -x(t) + \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \epsilon(T).$$

Provedeme-li škálování prostorové souřadnice  $x(t)$  pomocí parametru  $\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}}$  tak, že platí  $x(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} X(T)$ , pak v souladu s předchozím škálováním času  $t = \frac{T}{\lambda}$ , přejde po vykrácení členů s parametry předchozí rovnice na následující bezparametrický tvar:

$$\frac{dX(T)}{dT} = -X(T) + \epsilon(T). \quad (2.6)$$

Stejným postupem bychom se dobrali analogického výsledku, budeme-li vycházet z rovnice (1.1).

Pro zjednodušení analýzy můžeme tedy Ornstein-Uhlenbeckův proces popsany rovnicí (1.1) respektive rovnicí (1.2) převést na bezrozměrný tvar, tedy na rovnici (2.6) a tak se zbavit parametrů  $\mu$ ,  $\lambda$  a  $\sigma$ . Výsledná rovnice je bezparametrická a může být použita pro analýzu procesu bez ohledu na velikost původních parametrů. Pokud chceme pracovat s rovnicemi s nejednotkovými parametry  $\lambda$  a  $\sigma$  a s nenulovou střední hodnotou  $\mu$ , můžeme použít zpětnou modulaci souřadnic, která nám umožní převést výsledky z bezrozměrného tvaru zpět do původních souřadnic. Analogickým způsobem můžeme docílit prakticky libovolné parametrizace Ornstein-Uhlenbeckova procesu. Této vlastnosti bude dále využito v následující kapitole.

## 2.3 Limita Gaussovského bílého šumu

Již víme, že Ornstein-Uhlenbeckův proces je stochastický proces a že se tento proces skládá ze dvou částí: driftové a difúzní části. Drift je deterministickou složkou, která má tendenci navracet proces ke své rovnovážné hodnotě. Difúze pak představuje náhodnou složku, která způsobuje fluktuace kolem této rovnovážné hodnoty.

Proces má korelované hodnoty a nelineární charakteristiku, což ho odlišuje od gaussovského bílého šumu. Nicméně můžeme zde pozorovat limitní vlastnost, kdy proces přechází na gaussovský bílý šum.

Přechod na gaussovský bílý šum se provádí postupným zjemňováním procesu. Tento postup spočívá v postupném zvyšování koeficientu difúze v procesu, což opět vede ke zvětšování amplitudy fluktuací a zmenšování času korelace mezi jednotlivými hodnotami procesu. V limitě, kdy koeficient difúze dosáhne nekonečna, se proces ustálí v limitním stavu gaussovského bílého šumu.

Při tomto přechodu se tak mění statistické vlastnosti procesu, jako například jeho střední hodnota a variance. Hodnoty procesu se stávají na sobě nezávislými, což se projevuje na korelační funkci procesu, která přechází na Diracovo delta funkci.

Dle Definice 1 je náhodný proces gaussovským bílým šumem, pokud splňuje určité definiční podmínky. První důležitá vlastnost je nulovost jeho střední hodnoty. Ornstein-Uhlenbeckův proces definovaný vztahem (2.1), má obecně nenulovou střední hodnotu (2.2). Tato hodnota však exponenciálně ubývá s  $\lambda t$ . V limitním případě tedy můžeme říci, že střední hodnota procesu je nulová. Máme tedy ověřenou první vlastnost gaussovského bílého šumu.

Dále je také nezbytné ověřit, že v limitě přejde korelační funkce procesu na Diracovo delta funkci. Korelační funkce pro různé časy Ornstein-Uhlenbeckova procesu je dána vztahem (2.3). Vidíme, že první část vztahu exponenciálně klesá s  $\lambda(t + t')$ , lze tedy říci, že tato část nebude mít v limitním případě vliv na výslednou hodnotu. Část vztahu s absolutní hodnotou v exponentu však přejde na Diracovo delta funkci. Jediné co musíme ověřit je normování této delta funkce. Počítejme tedy následující integrál přes veškerý čas dle časového rozdílu  $|t - t'|$ :

$$\frac{\sigma^2}{2\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|t-t'|} d|t - t'| = \frac{\sigma^2}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda|t-t'|} d|t - t'| = \frac{\sigma^2}{\lambda^2}.$$

Z tohoto výsledku je tedy patrné, že pokud je velikost driftového parametru  $\lambda$  shodná s velikostí volatility procesu  $\sigma$ , pak je tento integrál normovaný na jednotku. V limitním případě tak přechází na Diracovo delta funkci.

Celkově tedy můžeme říci, že Ornstein-Uhlenbeckův proces, definovaný stavovou proměnou  $x(t)$ , dle diferenciální rovnice (1.2), splňuje následující specifikace:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda=\sigma \rightarrow \infty} \langle x(t) \rangle &= 0, \\ \lim_{\lambda=\sigma \rightarrow \infty} \langle x(t)x(t') \rangle &= \delta(t - t'). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Díky tomu, že stavová proměnná Ornstein-Uhlenbeckova procesu  $x(t)$  je normálně rozdělena a díky vlastnostem (2.7) platí následující limitní přechod:

$$\lim_{\lambda=\sigma \rightarrow \infty} x(t) = \xi(t). \tag{2.8}$$

## 2.4 Fokker-Planckova rovnice

Při popisu stochastického Ornstein-Uhlenbeckova procesu jsme se již setkali s Langevinovou rovnicí. V našem případě je tato rovnice definována vztahem (1.1) resp. (1.2). Ekvivalentní přístup pak může být popis systému pomocí Fokker-Planckovy rovnice (viz. Kampen, 2007, str. 193).

Fokker-Planckova rovnice je parciální diferenciální rovnice, která popisuje vývoj pravděpodobnostní hustoty procesu v čase. Vycházíme-li konzistentně s celou prací z diferenciální rovnice (1.2), pak lze příslušnou Fokker-Planckovu rovnici napsat v následujícím tvaru:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} (xP(x, t)) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.9)$$

kde  $P(x, t)$  je pravděpodobnost, s jakou se proces nachází v daném stavu  $x$  v čase  $t$ , neboli pravděpodobnostní hustota Ornstein-Uhlenbeckova procesu.

Stacionární řešení Fokker-Planckovy rovnice představuje řešení, které nezávisí na čase a zůstává tak v čase neměnné. Toto řešení je důležité, protože poskytuje informace o chování procesu v dlouhodobém horizontu. Jedná se o stacionární pravděpodobnostní hustotu procesu, splňující podmínku:

$$\frac{\partial P^{\text{stac.}}(x)}{\partial t} = 0.$$

Pro Ornstein-Uhlenbeckův proces, který je popisován Fokker-Planckovou rovnicí (2.9), existuje stacionární řešení, které má tvar gaussovského rozdělení s parametry střední hodnoty a variance Ornstein-Uhlenbeckova procesu. Pro jeho určení tak využijeme těchto vlastností, které známe, a vyhneme se tak obecně složitějšímu způsobu jeho určení z Fokker-Planckovi rovnice (2.9). Předpokládejme tedy pravděpodobnostní hustotu Ornstein-Uhlenbeckova procesu definovanou následujícím vztahem:

$$P(x, t) = \mathcal{N}(\langle x(t) \rangle, V_x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V_x(t)}} \exp\left(-\frac{(x - \langle x(t) \rangle)^2}{2V_x(t)}\right).$$

Tato pravděpodobnostní hustota je řešením Fokker-Planckovy rovnice (2.9) ve volném prostoru. Střední hodnota  $\langle x(t) \rangle$  a variance  $V_x(t)$  stavové proměnné  $x(t)$  jsou dány vztahy (2.2) a (2.4). Po dosazení tedy dostáváme následující vztah:

$$P_0(x, t) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi\sigma^2(1 - e^{-2\lambda t})}} \exp\left(-\frac{\lambda(x - x_0 e^{-\lambda t})^2}{\sigma^2(1 - e^{-2\lambda t})}\right). \quad (2.10)$$

Provedeme-li dlouhočasovou limitu tohoto vztahu, proces přejde do stacionárního stavu, který je dán následující pravděpodobnostní hustotou:

$$P_0^{\text{stac.}}(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(x, t) \Big|_{x=x_0} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\lambda x_0^2}{\sigma^2}\right). \quad (2.11)$$

## 2.5 Hustota doby prvního dosažení

V této sekci se zaměříme na zkoumání doby dosažení nuly pro Ornstein-Uhlenbeckův proces (1.2). Vycházíme tedy z Fokker-Planckovy rovnice (2.9) na poloprostoru  $\langle 0, \infty \rangle$ , s absorpční okrajovou podmínkou:

$$P(x = 0, t) = 0. \quad (2.12)$$

Pro nalezení řešení tohoto Fokker-Planckova problému využijeme výsledků minulé sekce. Víme že pravděpodobnostní hustota Ornstein-Uhlenbeckova procesu  $P_0(x, t)$  daná vztahem (2.10) řeší Fokker-Planckovu rovnici (2.9) ve volném prostoru. Zúžíme-li vhodně tuto pravděpodobnostní hustotu  $P_0(x, t)$  na poloprostor  $\langle 0, \infty \rangle$ , lze pak docílit identicky nulové hodnoty pro  $x = 0$ . Uvažujme tedy následující zúžení:

$$P(x, t) = P_0(x, t; x_0) - P_0(x, t; -x_0),$$

kteří pak po vyčíslení nabývá následujícího tvaru:

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi\sigma^2(1 - e^{-2\lambda t})}} \left[ \exp\left(-\frac{\lambda(x - x_0 e^{-\lambda t})^2}{\sigma^2(1 - e^{-2\lambda t})}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda(x + x_0 e^{-\lambda t})^2}{\sigma^2(1 - e^{-2\lambda t})}\right) \right]. \quad (2.13)$$

Toto řešení bylo konstruováno tak, aby splňovalo požadované vlastnosti v oblasti zájmu, tedy na poloprostoru  $\langle 0, \infty \rangle$ . Pro  $x = 0$  je hodnota nulová a s časem jdoucím k nule přechází na delta-funkci  $\delta(x - x_0)$ . Hustota pravděpodobnosti průchodu nuly  $\mathcal{P}(t; x_0)$  Ornstein-Uhlenbeckova procesu je pak dána dle následujícího vztahu:

$$\mathcal{P}(t; x_0) = \int_0^\infty \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} dx. \quad (2.14)$$

Protože pravděpodobnostní hustota  $P(x, t)$ , daná vztahem (2.13), řeší Fokker-Planckovu rovnici (2.9) a splňuje okrajové podmínky (2.12), lze vztah (2.14) upravit do následujícího tvaru:

$$\mathcal{P}(t; x_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (2.15)$$

Diferencujeme-li tedy  $P(x, t)$  dle vztahu (2.15), dostáváme pravděpodobnostní hustotu prvního průchodu nulové hodnoty Ornstein-Uhlenbeckova procesu s počáteční hodnotou  $x_0$ :

$$\mathcal{P}(t; x_0) = \frac{2\lambda x_0 e^{\lambda\left(t - \frac{x_0^2}{\sigma^2(e^{2\lambda t} - 1)}\right)}}{\sigma^2(e^{2\lambda t} - 1) \sqrt{\frac{\pi\sigma^2(1 - e^{-2\lambda t})}{\lambda}}}. \quad (2.16)$$

Pro hustotu pravděpodobnosti prvního průchodu nulové hodnoty se stacionárním rozdělení počáteční polohy je pak nutné tento vztah nadále upravit:

$$\mathcal{P}^{\text{stac.}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(t; x_0) P_0^{\text{stac.}}(x_0) dx_0 = 2 \int_0^\infty \mathcal{P}(t; x_0) P_0^{\text{stac.}}(x_0) dx_0.$$

Po vyčíslení integrálů tedy dostáváme následující vztah:

$$\mathcal{P}^{\text{stac.}}(t) = \frac{2\lambda}{\pi\sigma^2} \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{1 - e^{-2\lambda t}}}. \quad (2.17)$$

Z toho, co bylo dosavadně odvozeno, můžeme také určit kumulativní distribuční funkci procesu a to jako časový integrál vztahu (2.16), jež po vyčíslení nabývá následující podoby:

$$\mathcal{F}(t; x_0) = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Erf}\left(\frac{\sqrt{\lambda}x_0}{\sigma\sqrt{e^{2\lambda t} - 1}}\right).$$

Tyto teoretické vztahy popisující pravděpodobnostní hustotu prvního dosažení nulové hladiny pro Ornstein-Uhlenbeckův proces, jež byly v této sekci odvozeny, konkrétně se jedná o vztah (2.16) a vztah (2.17), jsou v souladu s odbornou literaturou (Bray, 2013) a po zpětném přeznačení všech konstant nabývají stejného tvaru.



# 3. Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces

Existuje mnoho zobecnění Ornstein-Uhlenbeckova procesu, jež umožní modelování náhodných procesů v různých oblastech vědy. Jedním ze základních, přímočarých zobecnění je například proces s nestacionárními koeficienty, kde se koeficienty mohou měnit v čase. Toto zobecnění tak umožní modelovat náhodné procesy s proměnlivou volatilitou. Další možností může být například zahrnutí nelinearity do Ornstein-Uhlenbeckova procesu. To se děje pomocí stochastických diferenciálních rovnic, které zahrnují nelineární funkce. Toto zobecnění umožňuje modelovat náhodné procesy s nelineárními vazbami mezi proměnnými.

Celkově lze říci, že existuje více možností zobecnění Ornstein-Uhlenbeckova procesu, jež umožňují modelovat náhodné procesy s různými vlastnostmi. Každé zobecnění má své výhody a je tak potřeba přizpůsobit se vždy danému problému. Motivováni Vincentem Hakimem a jeho přednáškou, blíže zmíněnou v Úvodu, budeme nadále zkoumat zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem.

V tomto zobecnění tak používáme Ornstein-Uhlenbeckův šum, který je definován pomocí Ornstein-Uhlenbeckovy stochastické diferenciální rovnice (1.2). Ornstein-Uhlenbeckův šum má klesající výkon s rostoucí frekvencí, což znamená, že má spektrum, které je vysoké u nízkých frekvencí a nízké u vysokých frekvencí, oproti gaussovskému bílému šumu, který má rovnoměrně rozložený výkon ve všech frekvenčních pásmech, což znamená, že má rovnoměrně rozložené spektrum (proto bílý). Tento Ornstein-Uhlenbeckův šum v Ornstein-Uhlenbeckově rovnici, tak umožní modelovat náhodný pohyb s ne-bílým šumem. Jedna z vlastností tohoto zobecnění je, že umožňuje modelovat procesy s nekonstantním rozptylem šumu. To znamená, že procesy, které jsou charakterizovány náhodným pohybem s proměnlivým rozptylem, mohou být efektivně modelovány pomocí zobecněného OU procesu. Další výhodou tohoto zobecnění je, že umožňuje modelovat náhodné procesy s pamětí. To znamená, že vnitřní stav systému se mění v čase a ovlivňuje budoucí chování systému. Tento faktor může být využit pro modelování náhodného pohybu v systémech s vnitřní strukturou, kde předchozí stav může ovlivnit budoucí chování systému. Námí zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces tak není v obecném případě markovský, jelikož stav systému v daném okamžiku nezávisí pouze na stavu v předchozím okamžiku, ale také na předchozích stavech. To znamená, že tento proces má paměť a stavy z minulosti ovlivňují budoucí chování systému. Tento faktor paměti však může být výhodou při modelování náhodných procesů s vnitřní strukturou a korelacemi mezi proměnnými. Pokud jsou tyto korelace důležité pro daný proces, je vhodnější použít zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces s Ornstein-Uhlenbeckovým šumem, který tyto korelace zahrnuje, než markovský proces, který tyto korelace zanedbává.

Pro zkoumání zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu, který je hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem budeme nadále vycházet z následující dife-

renciální soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -\lambda x(t) + \sigma y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -\frac{y(t)}{\tau} + \rho \xi(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

kde  $x(t)$  je stavová proměnná zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu s driftovým parametrem  $\lambda$  a volatilitou  $\sigma$ , s Ornstein-Uhlenbeckovským šumem  $y(t)$ , popsaným driftovým parametrem  $\frac{1}{\tau}$  a volatilitou  $\rho$ .

### 3.1 Eliminace parametrů procesu

Chceme-li rovnici (3.1) zbezrozměrnit a zbavit se tak parametrů rovnice, jako tomu bylo v případě obyčejného Ornstein-Uhlenbeckova procesu, je nejprve vhodné si uvědomit, jaké vlastnosti od výsledného procesu budeme vyžadovat. Rozdíl při zbezrozměňování souřadnic je oproti minulému případu to, že v minulé sekci jsme se zbavili všech parametrů rovnice (1.1). V našem případě se však nebudeme schopni zbavit všech parametrů rovnic. Zavedeme tak nový, jediný parametr, který bude kombinací driftových parametrů rovnic (3.1). Různé hodnoty tohoto paměťového parametru v procesu pak budou simulovány v následující kapitole. Rozumným požadavkem však zůstává, limitní přechod zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu na obyčejný Ornstein-Uhlenbeckův proces. Proto je nutné při modulaci souřadnic brát v úvahu přechod Ornstein-Uhlenbeckova procesu na gaussovský bílý šum a podmínky k tomu nutné, tedy vztah (2.8).

Samotné zbezrozměnění rovnice (3.1) provedeme obdobným postupem jako při odvozování vztahu (2.6). Nejdříve provedeme modulaci časové souřadnice. Zavedeme proto škálování časové souřadnice  $t$  pomocí konstanty  $\lambda$  tak, že platí  $T = \lambda t$ . Můžeme využít řetízkového pravidla s rovností  $\frac{dT}{dt} = \lambda$ , což nás po převedení členu  $\frac{dT}{dt} = \lambda$  na pravou stranu vede k následující soustavě rovnic:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dT} &= -x(t) + \frac{\sigma}{\lambda} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dT} &= -\frac{1}{\tau\lambda} y(t) + \frac{\rho}{\lambda} \xi(t).\end{aligned}$$

Gaussovský bílý šum  $\xi(t)$  je dle Definice 1 delta-korelovaný v čase  $t$ . S využitím vlastností Diracovy delta funkce zavedeme nový gaussovský bílý šum  $\epsilon(T)$  v nové časové proměnné  $T$ . Analogicky obyčejnému Ornstein-Uhlenbeckově procesu dostáváme následující rovnost:

$$\xi(t) = \sqrt{\lambda} \epsilon(T).$$

Dále provedeme modulaci souřadnice Ornstein-Uhlenbeckova šumu. Jedinou podmínkou při této modulaci však zůstává podmínka pro rovnost velikostí nového driftového parametru a volatility Ornstein-Uhlenbeckova šumu. Zvolíme-li proto vhodně nové souřadnice, můžeme tuto podmínku splnit. Substituujeme-li tedy  $y(t) = \rho\tau\sqrt{\lambda}Y(T)$ , kde  $Y(T)$  je nová stavová proměnná Ornstein-Uhlenbeckova šumu v modulovaných souřadnicích, pak soustava rovnic přejde do následujícího

tvaru:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dT} &= -x(t) + \frac{\rho\tau\sigma}{\sqrt{\lambda}}Y(T) \\ \frac{dY(T)}{dT} &= -\frac{1}{\tau\lambda}Y(T) + \frac{1}{\tau\lambda}\epsilon(T).\end{aligned}$$

Nyní se zbavíme parametru volatility pro první diferenciální rovnici. Toho dosáhneme modulací souřadnic stavové proměnné procesu, tedy  $x(t)$ . Uvažujme tedy substituci ve tvaru  $x(t) = \frac{\rho\tau\sigma}{\sqrt{\lambda}}X(T)$ . Poté přejde soustava rovnic (3.1) na následující tvar:

$$\begin{aligned}\frac{dX(T)}{dT} &= -X(T) + Y(T) \\ \frac{dY(T)}{dT} &= -\frac{1}{\tau\lambda}Y(T) + \frac{1}{\tau\lambda}\epsilon(T).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Toto je jedno možné parametrizování zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu hnaného Ornstein-Uhlenbeckovským šumem. Nevýhoda této parametrizace (3.2) je však taková, že stavová proměnná  $X(T)$  tohoto procesu má nekonstantní rozptyl pro různé hodnoty paměťového parametru  $k = \frac{1}{\tau\lambda}$ . Chceme-li docílit konstantního rozptylu, který nezávisí na hodnotě  $k$ , analogicky obyčejnému Ornstein-Uhlenbeckově procesu, musíme poslední substituci provést v jiném tvaru. Uvažujme tedy modulaci prostorové souřadnice, ne v tvaru který vedl ke vztahu (3.2), ale ve tvaru  $x(t) = \frac{\rho\tau\sigma}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\tau+\frac{1}{\lambda}}}X(T)$ , pak soustava rovnic přechází na následující tvar:

$$\begin{aligned}\frac{dX(T)}{dT} &= -X(T) + \sqrt{1 + \frac{1}{\tau\lambda}}Y(T) \\ \frac{dY(T)}{dT} &= \frac{1}{\tau\lambda}(-Y(T) + \epsilon(T)).\end{aligned}\tag{3.3}$$

## 3.2 Odvození základních vlastností

V této sekci budeme zkoumat základní charakteristiky zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu, přesněji jeho modulovanou verzi (3.3), jež byla odvozena v minulé sekci. Po zpětném přeznačení tedy vycházejme z následující soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -x(t) + \sqrt{1 + \frac{1}{k}}y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= k(-y(t) + \xi(t)),\end{aligned}\tag{3.4}$$

kde  $k = \frac{1}{\tau\lambda}$  je jediný, bezrozměrný parametr zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu  $x(t)$  hnaného Ornstein-Uhlenbeckovským šumem  $y(t)$ , jež se vyvíjí z gaussovského bílého šumu  $\xi(t)$ , definovaného dle Definice 1.

Tuto soustavu lze zapsat v kompaktní maticové podobě a to následovně:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(t)}{dt} &= \mathbb{A} \cdot \Pi(t) + \mathbf{b}(t), \\ &\text{resp.} \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \\ 0 & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \xi(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

### 3.2.1 Řešení diferenciální rovnice

Při hledání řešení soustavy diferenciálních rovnic popsané vztahem (3.4) respektive (3.5), budeme postupovat klasickým způsobem. Řešení budeme hledat v maticové podobě pro obě stavové proměnné najednou.

Hledejme tedy nejprve nejprve řešení odpovídající homogenní úlohy:

$$\frac{d\Pi_H(t)}{dt} = \mathbb{A} \cdot \Pi_H(t). \quad (3.6)$$

Abychom určili toto homogenní řešení  $\Pi_H(t)$ , musíme znát vlastní čísla  $n$  a jim odpovídající vlastní vektory  $v$  matice  $\mathbb{A}$ . Postup je přímočarý a klasickými metodami lineární algebry se lze dobrat k následujícímu výsledku, pro stručnost je však postup vynechán:

$$\begin{aligned} n_1 &= -k & n_2 &= -1 \\ v_1 &= \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \\ 1 - k \\ 1 \end{pmatrix} & v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pomocí těchto dat lze napsat řešení homogenní úlohy (3.6) v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} \Pi_H(t) &= c_1 v_1 e^{n_1 t} + c_2 v_2 e^{n_2 t} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}}{1 - k} e^{-kt} + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^{-kt} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nyní hledejme partikulární řešení  $\Pi_P(t)$  úlohy (3.5). Z řešení homogenní úlohy lze určit fundamentální matici soustavy  $\mathbb{F}(t)$ . Tato fundamentální matice nabývá následujícího tvaru:

$$\mathbb{F}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}}{1 - k} e^{-kt} & e^{-t} \\ e^{-kt} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro výpočet partikulárního řešení  $\Pi_P(t)$  úlohy však potřebujeme určit také inverzní matici k fundamentální matici soustavy určené předchozím vztahem. Tuto matici lze určit například pomocí determinantu původní matice a známého vztahu pro matice 2x2. Výsledná inverzní matice tedy nabývá následující podoby:

$$\mathbb{F}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{kt} \\ e^t & \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}}{k - 1} e^t \end{pmatrix}.$$

S těmito mezivýsledky můžeme partikulární řešení vypočítat dle následujícího vztahu:

$$\mathbf{\Pi}_P(t) = \mathbb{F}(t) \cdot \int_0^t \mathbb{F}^{-1}(T) \cdot \mathbf{b}(T) dT = \begin{pmatrix} \frac{e^{-kt}}{1-k} & e^{-t} \\ e^{-kt} & 0 \end{pmatrix} \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & e^{kT} \\ e^T & \frac{e^T}{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \xi(T) dT.$$

Provedeme-li tento výpočet, pak partikulární řešení  $\mathbf{\Pi}_P(t)$  nabývá následující podoby:

$$\mathbf{\Pi}_P(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \frac{1}{k} \frac{k}{k-1}} \int_0^t e^{-t+T} \xi(T) dT - \sqrt{1 + \frac{1}{k} \frac{k}{k-1}} \int_0^t e^{-kt+kT} \xi(T) dT \\ k \int_0^t e^{-kt+kT} \xi(T) dT \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Celkové řešení  $\mathbf{\Pi}(t)$  soustavy (3.5) je pak standardně dáno jako součet homogenního a partikulárního řešení. Výsledek tedy můžeme zapsat v jednotném tvaru:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}(t) &= \mathbf{\Pi}_H(t) + \mathbf{\Pi}_P(t) = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \frac{\sqrt{1+\frac{1}{k}}}{1-k} e^{-kt} + c_2 e^{-t} + \sqrt{1 + \frac{1}{k} \frac{k}{k-1}} \left( \int_0^t e^{-t+T} \xi(T) dT - \int_0^t e^{-kt+kT} \xi(T) dT \right) \\ c_1 e^{-kt} + k \int_0^t e^{-kt+kT} \xi(T) dT \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

kde konstanty  $c_1$  a  $c_2$  lze určit z počátečních podmínek daného problému.

### 3.2.2 Střední hodnota

Obdobně obyčejnému Ornstein-Uhlenbeckově procesu, počítejme střední hodnotu stavového vektoru  $\mathbf{\Pi}(t)$ . Dle výsledků předchozí sekce a vlastnostem gausovského bílého šumu, dle Definice 1 víme, že všechny členy obsahující gausovský bílý šum, aplikováním operátoru střední hodnoty, vypadnou. Partikulární řešení  $\mathbf{\Pi}_P(t)$  obsahuje tento šum v každém členu, kdežto homogenní řešení  $\mathbf{\Pi}_H(t)$  v žádném. Lze tedy říci následující:

$$\langle \mathbf{\Pi}(t) \rangle = \langle \mathbf{\Pi}_H(t) \rangle + \langle \mathbf{\Pi}_P(t) \rangle = \mathbf{\Pi}_H(t) = \begin{pmatrix} c_1 \frac{\sqrt{1+\frac{1}{k}}}{1-k} e^{-kt} + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^{-kt} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

### 3.2.3 Variančně-kovarianční matice

Variančně-kovarianční matice  $\Sigma_{\mathbf{\Pi}}(t)$ , také známá jako kovarianční matice, je matematický koncept používaný ve statistice a teorii pravděpodobnosti. Jedná se o čtvercovou matici, jež shrnuje vztahy mezi dvěma nebo více náhodnými proměnnými, definované náhodným vektorem  $\mathbf{\Pi}(t)$ . Diagonální prvky matice představují rozptyly jednotlivých proměnných, zatímco mimo-diagonální prvky představují kovariance mezi páry těchto proměnných.

Celkově můžeme tuto variančně-kovarianční matici  $\Sigma_{\mathbf{\Pi}}(t)$  určit standardní cestou, dle následujícího vztahu:

$$\Sigma_{\mathbf{\Pi}}(t) = \langle (\mathbf{\Pi}(t) - \langle \mathbf{\Pi}(t) \rangle) \cdot (\mathbf{\Pi}(t) - \langle \mathbf{\Pi}(t) \rangle)^T \rangle = \begin{pmatrix} \langle a \rangle & \langle b \rangle \\ \langle b \rangle & \langle c \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Nejdříve určíme vektor  $\mathbf{\Pi}(t) - \langle \mathbf{\Pi}(t) \rangle$ . Dle vztahu (3.10) víme, že střední hodnota vektoru  $\mathbf{\Pi}(t)$  je rovna homogennímu řešení  $\mathbf{\Pi}_H(t)$  úlohy (3.5). Proto víme, že platí následující rovnost:

$$\mathbf{\Pi}(t) - \langle \mathbf{\Pi}(t) \rangle = \mathbf{\Pi}_P(t).$$

Počítejme tedy jednotlivé členy  $a, b, c$  matice  $\mathbf{\Pi}_P(t) \cdot \mathbf{\Pi}_P(t)^T$  zvlášť:

$$a = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \left( \int_0^t \int_0^t e^{-2t} e^{T+T'} \xi(T) \xi(T') dT dT' + \right. \\ \left. - 2 \int_0^t \int_0^t e^{-t(1+k)} e^{T+kT'} \xi(T) \xi(T') dT dT' + \right. \\ \left. + \int_0^t \int_0^t e^{-2kt} e^{k(T+T')} \xi(T) \xi(T') dT dT' \right),$$

$$b = \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \left(\frac{k^2}{k-1}\right) \left( \int_0^t \int_0^t e^{-t(1+k)} e^{T+kT'} \xi(T) \xi(T') dT dT' + \right. \\ \left. - \int_0^t \int_0^t e^{-2kt} e^{k(T+T')} \xi(T) \xi(T') dT dT' \right),$$

$$c = k^2 \int_0^t \int_0^t e^{-2kt} e^{k(T+T')} \xi(T) \xi(T') dT dT'.$$

Aplikováním operátoru střední hodnoty na jednotlivé členy dojdeme stejným způsobem, jako tomu bylo při obyčejném Ornstein-Uhlenbeckovskovu procesu, ke značnému zjednodušení. Gaussovský bílý šum je dle Definice 1 delta-korelovaný v čase. Vyintegrováním přes jeden integrál se tedy zbavíme všech čárkovaných proměnných. Zbýlý integrál je přímočarý a po jeho vyčíslení tak dostáváme jednotlivé členy variančně-kovarianční matice  $\Sigma_{\mathbf{\Pi}}(t)$ . Celkově tedy můžeme psát:

$$\Sigma_{\mathbf{\Pi}}(t) = \begin{pmatrix} \langle a \rangle & \langle b \rangle \\ \langle b \rangle & \langle c \rangle \end{pmatrix}$$

kde:

$$\langle a \rangle = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \frac{k^2(1 - e^{-2t})}{2(k-1)^2} - \left(1 + \frac{1}{k}\right) \frac{2k^2(1 - e^{-(1+k)t})}{(k+1)(k-1)^2} + \left(1 + \frac{1}{k}\right) \frac{k(1 - e^{-2kt})}{2(k-1)^2}, \\ \langle b \rangle = \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \frac{k^2(1 - e^{-(1+k)t})}{(k+1)(k-1)} - \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \frac{k(1 - e^{-2kt})}{2(k-1)}, \\ \langle c \rangle = \frac{k(1 - e^{-2kt})}{2}. \tag{3.12}$$

Provedeme-li dlouhočasovou limitu této matice, dostaneme stacionární variančně-kovarianční matici  $\Sigma_{\mathbf{\Pi}}^{\text{stac.}}$ , jež má konstantní hodnotu variance pro stavovou proměnnou  $x(t)$ , analogicky obyčejnému procesu respektive vztahu (2.4):

$$\Sigma_{\mathbf{\Pi}}^{\text{stac.}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{k+1}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{k+1}} & \frac{k}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

## 4. Výsledky simulace

Simulace Ornstein-Uhlenbeckova procesu respektive jeho zobecněné verze a doby prvního dosažení jsou klíčové pro pochopení chování systémů v různých oblastech, včetně fyziky či biologie. Doba prvního dosažení může představovat dobu, kdy systém poprvé překročí určitou úroveň, nebo dobu, kdy se vrátí k předchozí úrovni. Simulace tohoto procesu tak umožňuje zkoumat a predikovat chování systémů v reálném světě. V biologii mohou být simulace Ornstein-Uhlenbeckova procesu a jeho zobecněné verze použity pro predikci budoucího vývoje buněčného pohybu nebo pro odhad rychlosti a směru tohoto pohybu. Obdobně v oblasti fyziky mohou být tyto simulace použity pro pochopení pohybu částic a pro předpovídání budoucího vývoje systémů.

Doba prvního dosažení určité úrovně pro námi zobecněnou verzi Ornstein-Uhlenbeckova procesu s obecným šumem nelze analyticky určit. To je kvůli tomu, že tento proces není markovský proces. Znamená to tedy, že jeho chování závisí nejen na jeho současné hodnotě, ale také na jeho historii. Pro markovské procesy je možné řešit problém nalezení doby prvního dosažení analyticky, pomocí zpětné Fokker-Planckovy rovnice a Fourierovy transformace, ale pro ne-markovské procesy to není možné. Proto je třeba použít numerické simulace či jiné aproximativní metody ke zkoumání či odhadnutí doby prvního dosažení určité úrovně.

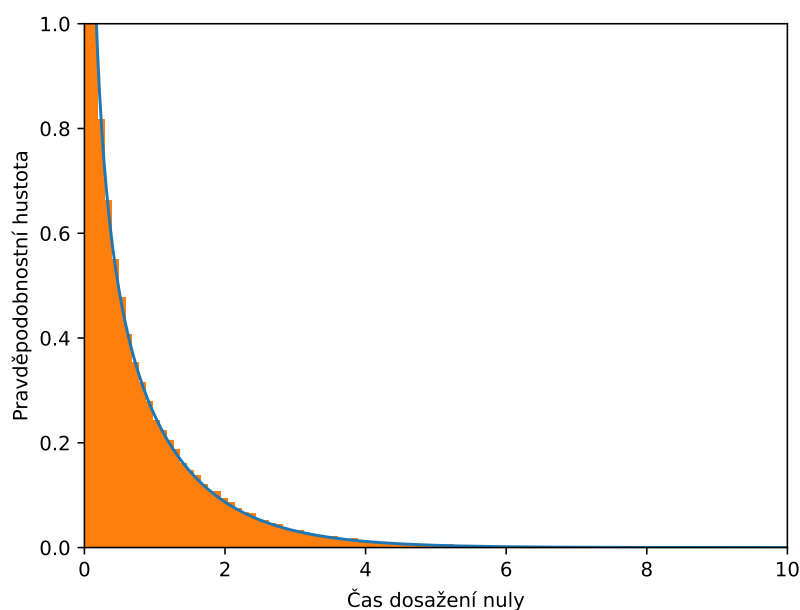
V této kapitole se tak zaměříme na simulace Ornstein-Uhlenbeckova procesu a jeho zobecněné verze hnané Ornstein-Uhlenbeckovým šumem. Cílem této kapitoly je prezentovat výsledky simulací běžného Ornstein-Uhlenbeckova procesu a porovnat je s limitním případem zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu. Tím ověříme, zda zobecněný proces skutečně přechází na klasický proces v limitním případě.

### 4.1 Simulace doby prvního dosažení Ornstein-Uhlenbeckova procesu

V této sekci se zaměříme na simulování Ornstein-Uhlenbeckova procesu definovaného bezparametrickou rovnicí (2.6). Tento vztah byl simulován s fixní počáteční polohou  $x_0$ , a s vystředovanou počáteční polohou dle stacionárního rozdělení. Celkem bylo simulováno  $N = 10^6$  trajektorií. U každé trajektorie pak byla zaznamenána doba, kdy trajektorie přešla přes nulovou hranici. Z těchto dat byla následně udělána statistika. Výsledky pak byly zpracovány pomocí histogramu. Pro srovnání byly proloženy teoretickou závislostí (2.16) respektive (2.17).

#### 4.1.1 Proces se stacionárním rozdělením počáteční polohy

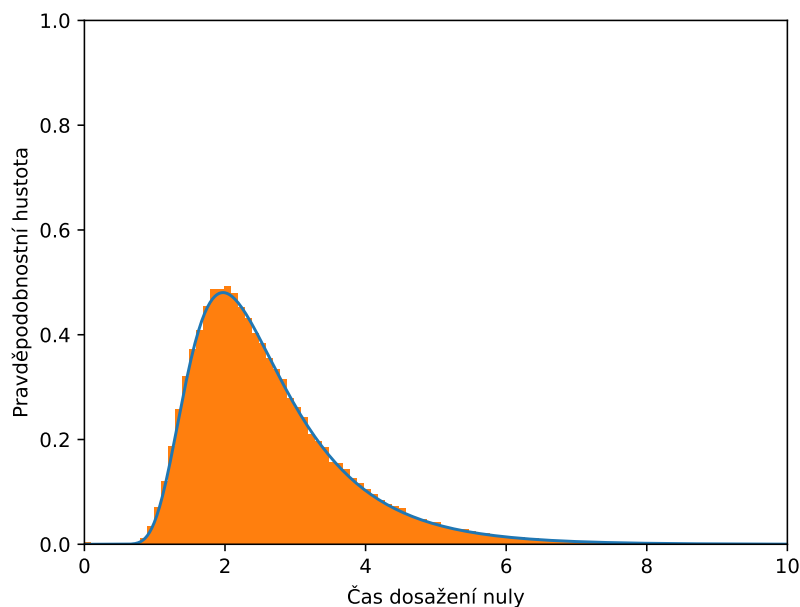
Nejdříve byl simulován proces se stacionárním počátečním rozložením. Počáteční poloha byla volena náhodně pro každou trajektorii a to dle stacionárního gaussovského rozložení s nulovou střední hodnotou a se směrodatnou odchylkou rovnou  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  dle stacionární, dlouhočasové variance procesu (2.5). Výsledky simulace byly zpracovány pomocí histogramu, který byl proložen teoretickou závislostí definovanou vztahem (2.17):



Obrázek 4.1: Ornstein-Uhlenbeckův proces: Histogram doby prvního dosažení nulové hodnoty se stacionárním rozdělením počáteční polohy.

#### 4.1.2 Proces s fixní počáteční polohou

Při simulaci procesu s fixní počáteční polohou byla tato počáteční hodnota zvolena na hodnotu  $x_0 = 5$ . Výsledky simulace byly zpracovány pomocí následujícího histogramu, jež byl proložen teoretickou závislostí (2.16):



Obrázek 4.2: Ornstein-Uhlenbeckův proces: Histogram doby prvního dosažení nulové hodnoty s fixní počáteční polohou  $x_0 = 5$ .



Je vidět, že obě teoretické závislosti dobře modelují námi nasimulované výsledky. Lze předpokládat, že při zvětšeném počtu trajektorií bychom se stále více blížili teoretickému vztahu. Při tomto počtu trajektorií je však shoda již dostatečně přesná.

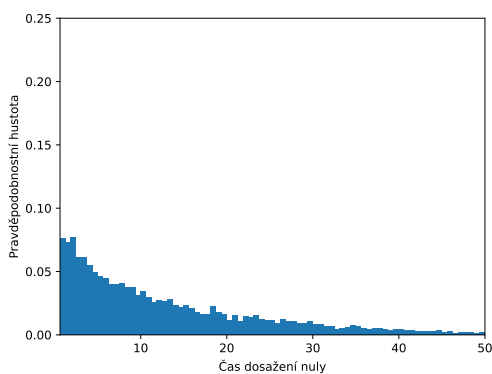
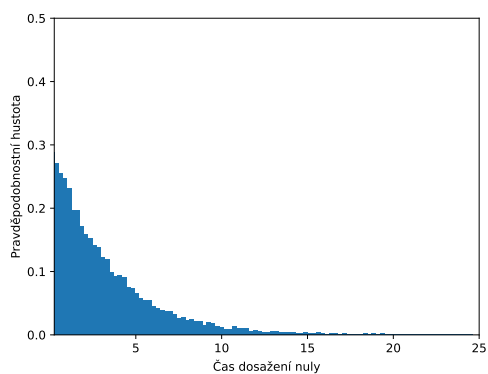
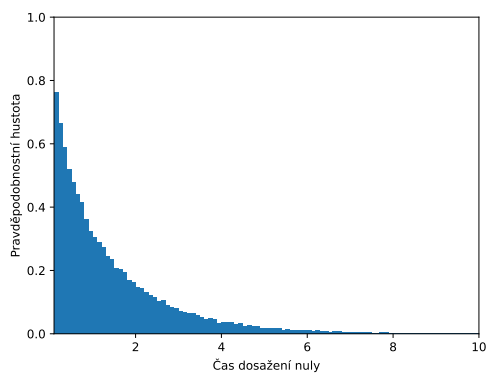
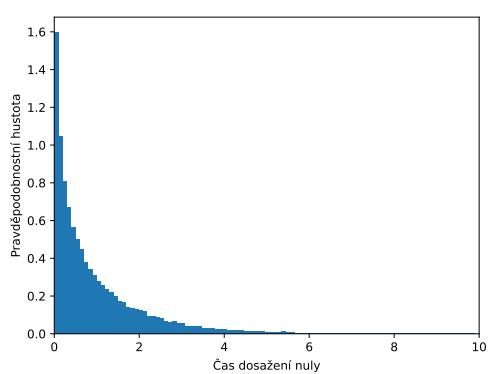
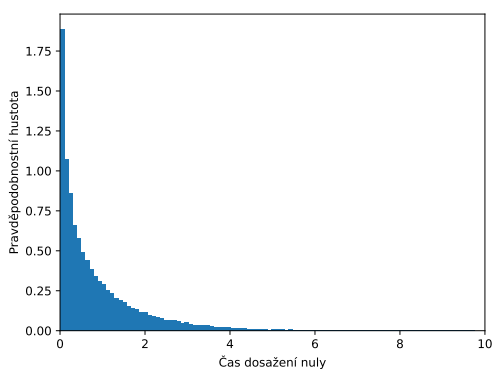
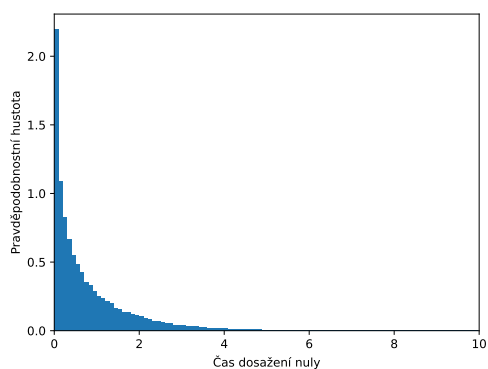
## 4.2 Simulace doby prvního dosažení zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu

Jednou z hlavních částí práce bylo zkoumání vlastností zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu daného vztahem (3.4). V této sekci se zaměříme na simulování tohoto procesu a na zkoumání statistiky doby prvního dosažení pro různé hodnoty parametru  $k$ .

Průběh simulace byl takový, že počáteční polohy  $x_0, y_0$  stavových proměnných  $x, y$  byly voleny analogicky obyčejnému Ornstein-Uhlenbeckově procesu simulovaném v minulé sekci. To znamená že počáteční poloha  $x_0$  byla v jednom případě fixní a počáteční poloha  $y_0$  byla volena ze stacionárního rozložení a v druhém případě byly obě počáteční polohy  $x_0, y_0$  voleny ze stacionárního rozdělení. Obdobně minulé sekci, je toto stacionární rozložení dáno gaussovským rozdělením. V tomto případě však dvou-dimenzionálním gaussovským rozdělením. To je definované stacionární variančně-kovarianční maticí (3.13) a stacionární, tedy nulovou střední hodnotou. Celkem bylo simulováno  $N = 10^5$  trajektorií. Každá trajektorie procesu  $x$  je ovlivněna Ornstein-Uhlenbeckovským šumem  $y$ , který má vlastní stochastickou časovou závislost. Proces byl simulován pro různé hodnoty paměťového parametru  $k$ . V následující sekci jsou prezentované výsledky pro vybrané hodnoty tohoto parametru.

### 4.2.1 Proces se stacionárním rozdělením počátečních poloh procesu $x_0$ a šumu $y_0$

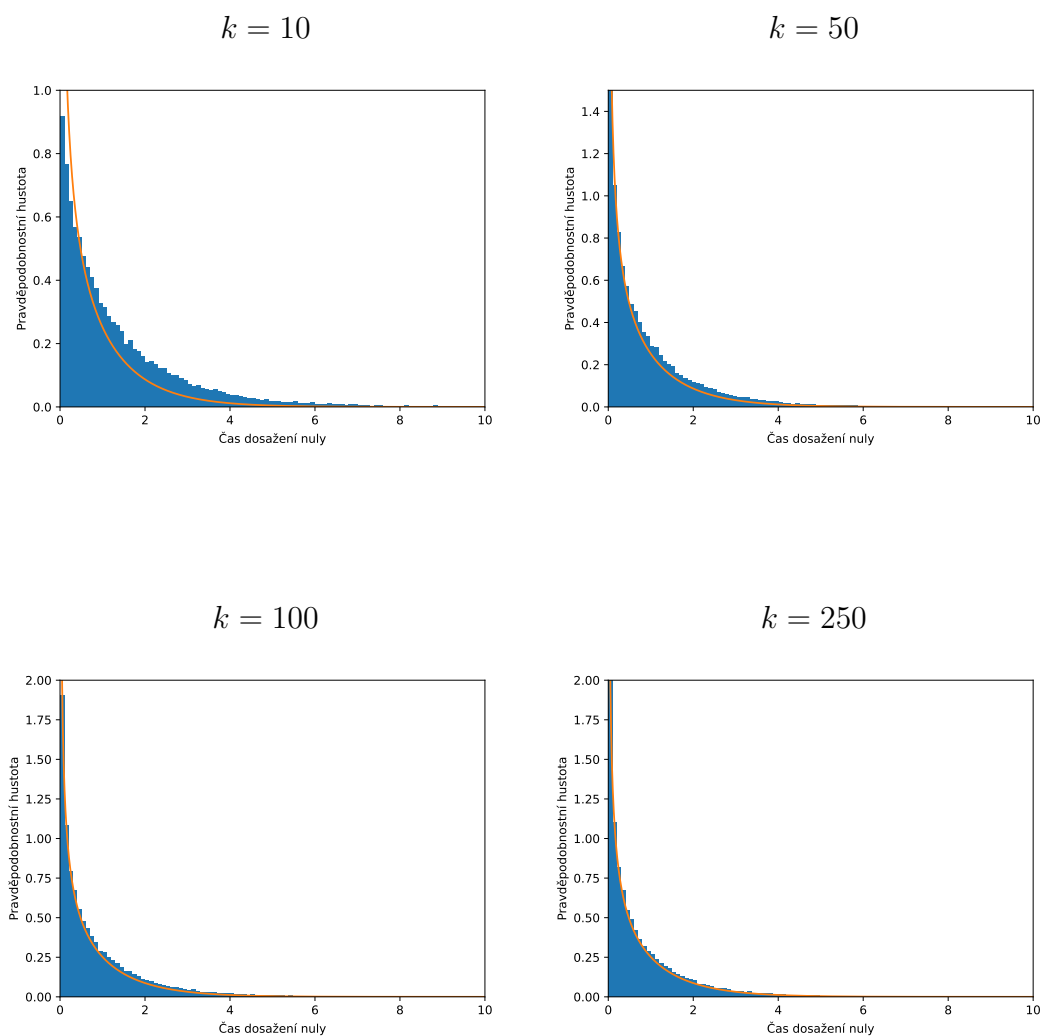
Nejdříve byl simulován proces se stacionárním rozdělením počátečních poloh  $x_0$  a  $y_0$ . Následující obrázek ukazuje rozložení pravděpodobnostní hustoty dosažení nulové úrovně zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu hnaného Ornstein-Uhlenbeckovským šumem. Obrázek je rozdělen na šest částí, každá odpovídá jiné hodnotě paměťového parametru  $k$ . Meze byly voleny různě, aby během časového horizontu stihlo projít nulovou hladinu dostatečné množství simulovaných trajektorií tak, aby byl patrný charakteristický průběh dílčích histogramů.

$k = 0.1$  $k = 1$  $k = 10$  $k = 50$  $k = 100$  $k = 250$ 

Obrázek 4.3: Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem: Histogramy doby prvního dosažení nulové hodnoty pro stacionární rozdělení počátečních poloh, pro různé hodnoty parametru  $k$ .

Na předchozím Obrázku 4.3 vidíme, že pro zkoumané hodnoty parametru  $k$  počínaje hodnotou  $k = 50$ , je průběh prakticky neměnný. Většina trajektorií již stihla projít nulovou hladinu v pozorovaném časovém intervalu a proto je již většina pravděpodobnostní hustoty zobrazena v histogramu. Nedochází tak již k tak velkému "přesunu hmoty".

Pro srovnání byla také vygenerována sada histogramů, jimiž byla proložena závislost, která odpovídá limitě obyčejného Ornstein-Uhlenbeckova procesu, tedy teoretickému vztahu (2.16). Tyto histogramy byly generovány pro různé hodnoty paměťového parametru  $k$ . Meze byly voleny různě, tak aby byl co nejlépe zachycen charakteristický tvar pravděpodobnostní hustoty zkoumaného procesu.



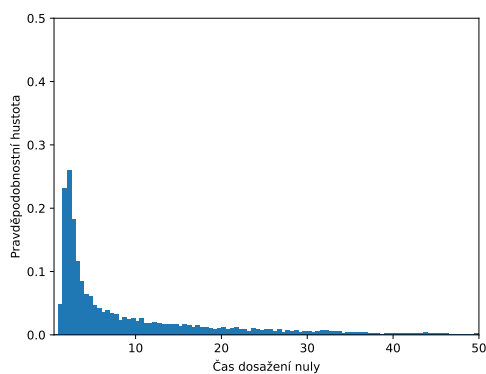
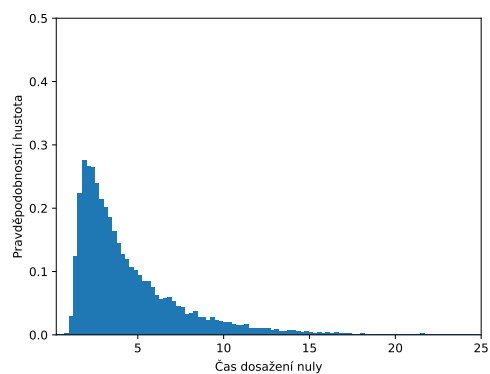
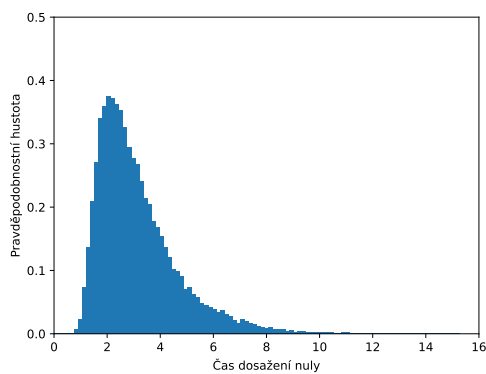
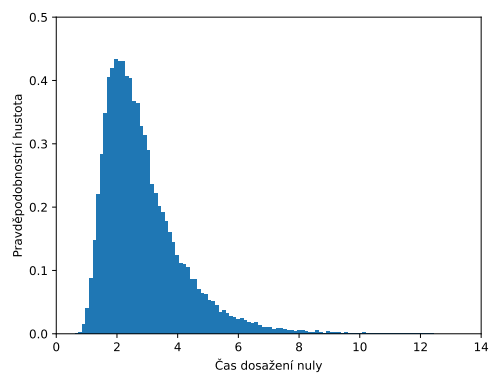
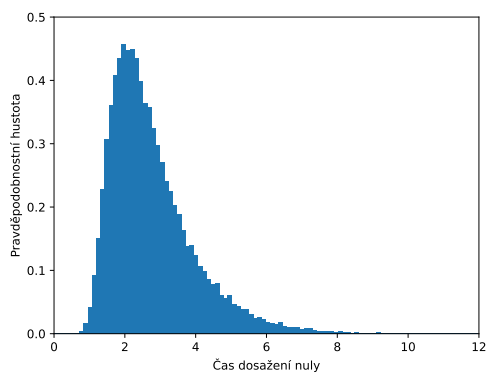
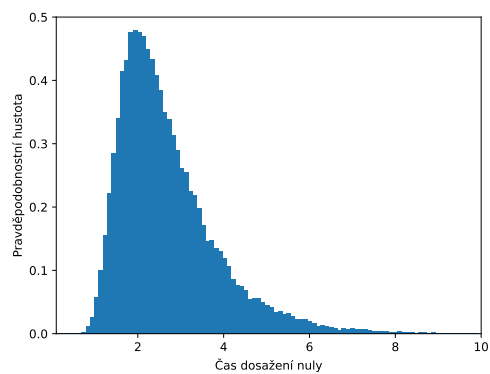
Obrázek 4.4: Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem: Histogramy doby prvního dosažení nulové hodnoty pro stacionární rozdělení počátečních poloh, pro různé hodnoty parametru  $k$ , srovnání s obyčejným Ornstein-Uhlenbeckovským procesem.

Na předchozím Obrázku (4.4) vidíme, že pro hodnoty paměťového parametru  $k > 50$  je shoda s obyčejným Ornstein-Uhlenbeckovským procesem již velmi markantní. Dle teorie lze předpokládat, že pro vyšší hodnoty parametru  $k$  bude průběh stále více podobný obyčejnému Ornstein-Uhlenbeckově procesu.

#### 4.2.2 Proces s fixní počáteční polohou procesu $x_0$ a stacionárním rozdělením počáteční polohy šumu $y_0$

Dále byl simulován proces s fixní počáteční polohou stavové proměnné  $x_0$  a stacionárním rozdělením počáteční polohy šumu  $y_0$ . Počáteční poloha procesu  $x_0$  byla nejprve zvolena na hodnotu  $x_0 = 5$ , obdobně simulacím obyčejného Ornstein-Uhlenbeckova procesu, tedy Obrázku 4.2. Studium zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu probíhalo tak, že nejprve byl zkoumán vývoj pravděpodobnostní hustoty prvního dosažení nulové hladiny pro různé hodnoty paměťového parametru  $k$ , analogicky minulou sekci, tedy Obrázku (4.3). Dle těchto výsledků pak byly vybrány dvě hodnoty paměťového parametru, jedna hodnota odpovídající limitě markovského obyčejného Ornstein-Uhlenbeckova procesu a druhá odpovídající nemarkovské verzi zobecněného procesu s "pamětí".

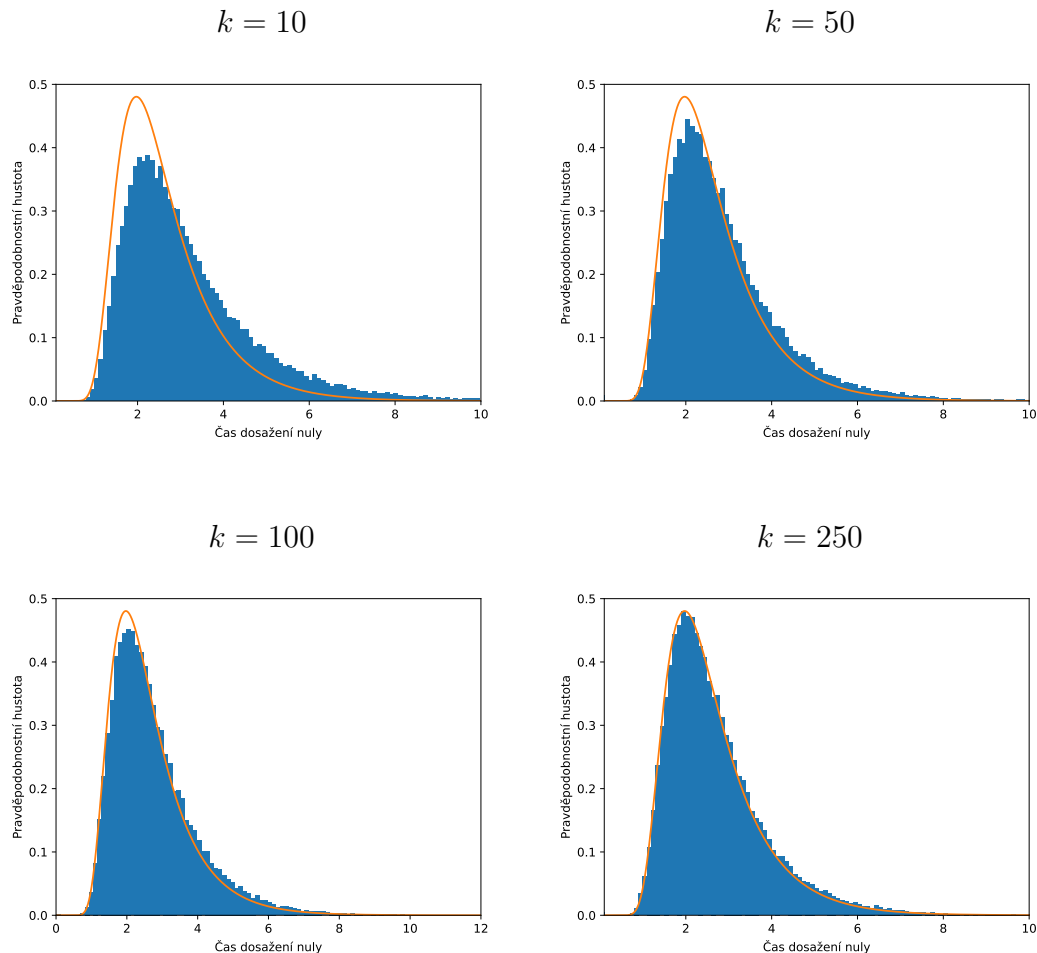
Následující obrázek prezentuje nasimulovaná data a ukazuje vývoj pravděpodobnostní hustoty prvního dosažení nulové úrovně pro zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces, pro různé hodnoty paměťového parametru  $k$ . Obrázek je rozdělen na šest částí, každá odpovídá jiné hodnotě paměťového parametru  $k$ . Časové meze byly voleny různě, aby během časového horizontu stihlo projít nulovou hladinu dostatečné množství simulovaných trajektorií, aby byl patrný charakteristický průběh dílčích histogramů.

$k = 0.1$  $k = 1$  $k = 10$  $k = 50$  $k = 100$  $k = 250$ 

Obrázek 4.5: Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem: Histogramy doby prvního dosažení nulové hodnoty pro fixní počáteční hodnotu procesu  $x_0 = 5$ , pro různé hodnoty parametru  $k$ .

Na předchozím Obrázku 4.5 vidíme, že pro nízké hodnoty parametru  $k$ , je pravděpodobnostní hustota rozložena více rovnoměrně pro vyšší časy. Určité množství trajektorií nestihlo projít nulovou hladinou v pozorovaném časovém intervalu. S rostoucím  $k$  tak roste obsah pravděpodobnostní hustoty v pozorovaném časovém intervalu. Od určité hranice již pak nedochází k velkému "přesunu hmoty" a prakticky celá pravděpodobnostní hustota se nachází v časovém intervalu  $\langle 0, 10 \rangle$ .

Pro srovnání také byla, analogicky minule sekci, vygenerována sada histogramů, jimiž byla proložena závislost, odpovídající limitě obyčejného Ornstein-Uhlenbeckova procesu, tedy teoretickému vztahu (2.17). Tyto histogramy byly generovány pro různé hodnoty paměťového parametru  $k$ . Dle teorie lze předpokládat, že s rostoucí hodnotou parametru  $k$  bude průběh stále více podobný obyčejnému Ornstein-Uhlenbeckově procesu. Následující obrázek ukazuje tuto sadu histogramů. Meze byly voleny různě, tak aby byl co nejlépe zachycen charakteristický tvar pravděpodobnostní hustoty zkoumaného procesu.



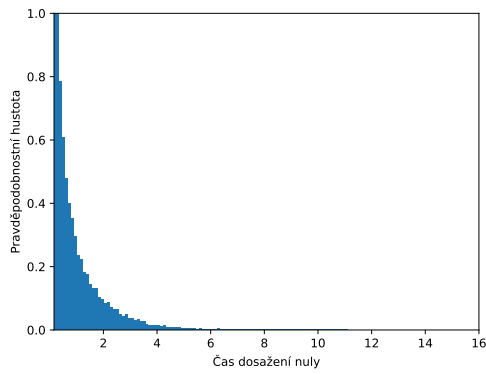
Obrázek 4.6: Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem: Histogramy doby prvního dosažení nulové hodnoty pro fixní počáteční hodnotu procesu  $x_0 = 5$ , pro různé hodnoty parametru  $k$ , srovnání s obyčejným Ornstein-Uhlenbeckovským procesem.

Na předchozím Obrázku 4.6 vidíme, že pro hodnotu paměťového parametru  $k = 250$ , je pravděpodobnostní hustota v pozorovaném rozlišení již prakticky shodná s obyčejným Ornstein-Uhlenbeckovským procesem. S rostoucím  $k$  předpokládáme stále lepší podobnost s touto závislostí danou vztahem (2.16). Pro nízké hodnoty paměťového parametru je patrný silný paměťový charakter procesu a procesu tak trvá průměrně déle, než každá trajektorie projde nulovou hladinou.

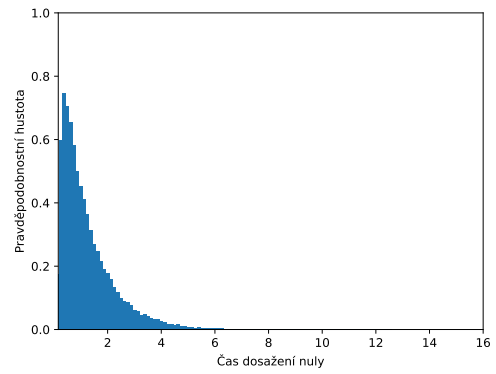
Všechny tyto histogramy (4.5), (4.6) zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu, hnaného Ornstein-Uhlenbeckovským šumem, byly generovány pro fixní hodnotu počáteční polohy  $x_0 = 5$ . Tato hodnota byla zvolena analogicky sekci se simulacemi obyčejného Ornstein-Uhlenbeckova procesu. Proces, tedy rovnice (3.4), ale i pravděpodobnostní hustota prvního dosažení nulové hladiny obyčejného Ornstein-Uhlenbeckova procesu (2.16) obecně závisí na této hodnotě  $x_0$ . Lze tedy předpokládat, že pro vyšší hodnoty počátečních poloh  $x_0$  bude procesu trvat delší dobu, než poprvé projde nulovou hodnotou a pro hodnoty počáteční polohy  $x_0$  blízké nulové hladině bude tato doba kratší, než pro již studovaný případ s počáteční polohou  $x_0 = 5$ .

Jak již bylo v úvodu této sekce řečeno, dále byl simulován proces pro dvě hodnoty paměťového parametru, tak aby jedna hodnota odpovídala limitě markovského, obyčejného Ornstein-Uhlenbeckova procesu a druhá nemarkovskému, zobecněnému Ornstein-Uhlenbeckově procesu. Takto byla tato "markovská" hodnota paměťového parametru stanovena na hodnotu  $k = 250$  a hodnota "nemarkovského" paměťového parametru na  $k = 1$ . Proces byl simulován pro různé hodnoty počáteční polohy  $x_0$ . Nejsilnější změny oproti již prezentovaným výsledkům s fixním  $x_0 = 5$  nastávají pro  $x_0$  blízké nulové hladině. Proto se následující dva obrázky skládají z histogramů, kde většina hodnot počáteční polohy  $x_0$  je v blízkém okolí nulové hladiny. Byla také pro srovnání vygenerována hodnota pro velké  $x_0 = 100$ .

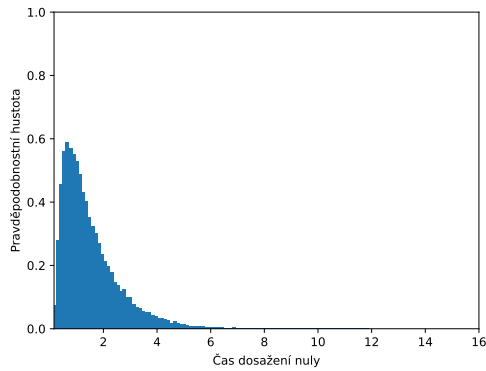
$$x_0 = \frac{1}{2}, k = 250$$



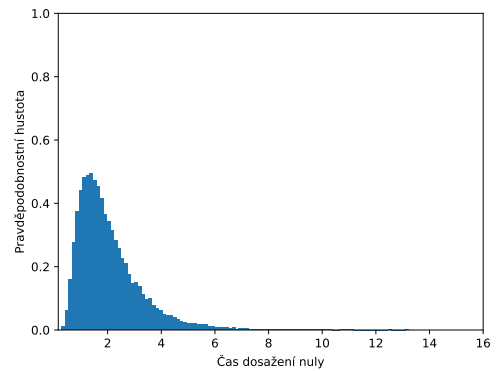
$$x_0 = 1, k = 250$$



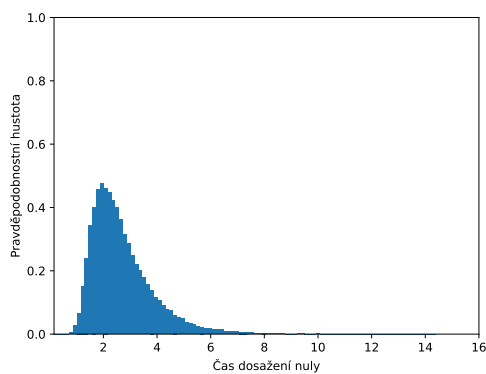
$$x_0 = \sqrt{2}, k = 250$$



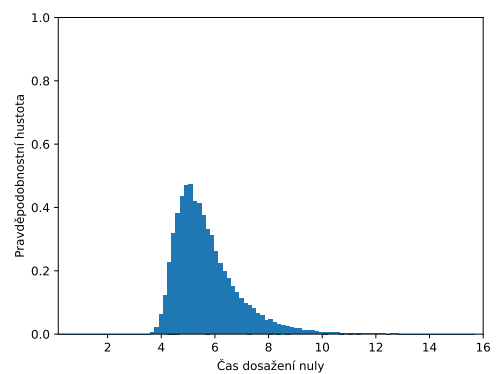
$$x_0 = \frac{5}{2}, k = 250$$



$$x_0 = 5, k = 250$$



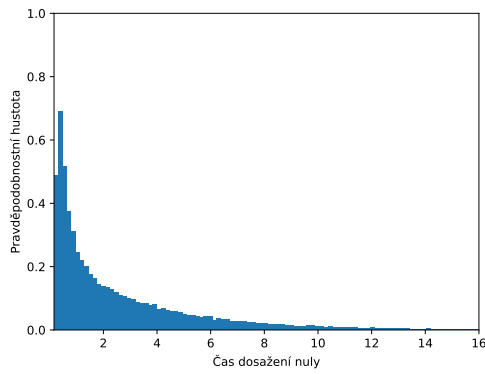
$$x_0 = 100, k = 250$$



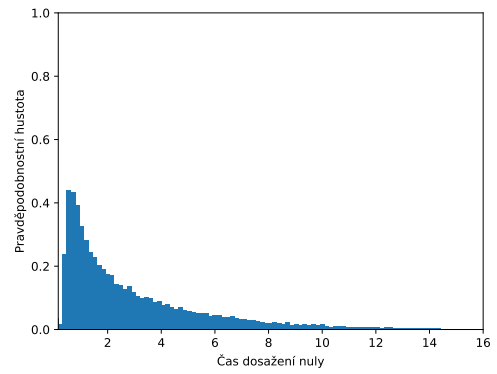
Obrázek 4.7: Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces hnáný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem: Histogramy doby prvního dosažení nulové hodnoty pro různé fixní počáteční hodnoty procesu  $x_0$ , pro "markovskou" hodnotu paměťového parametru  $k = 250$ .



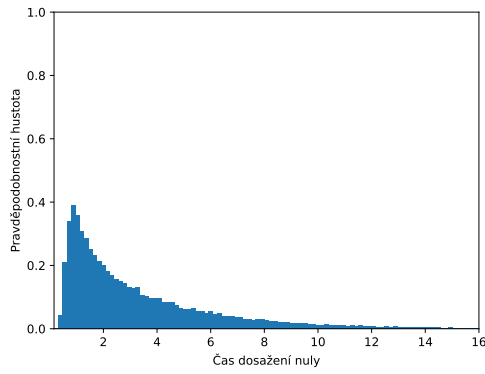
$$x_0 = \frac{1}{2}, k = 1$$



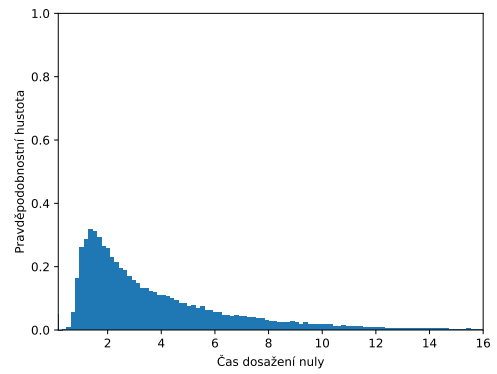
$$x_0 = 1, k = 1$$



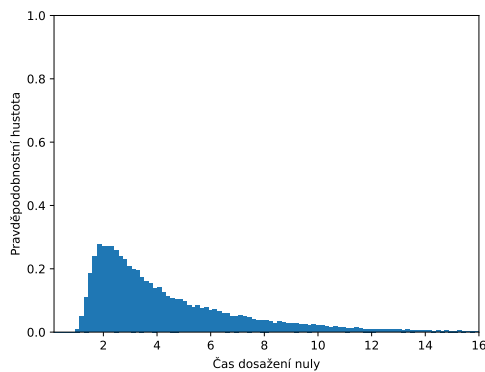
$$x_0 = \sqrt{2}, k = 1$$



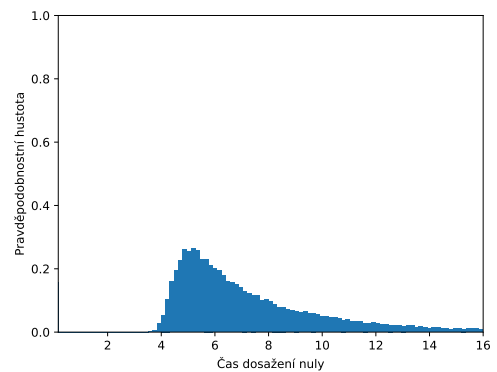
$$x_0 = \frac{5}{2}, k = 1$$



$$x_0 = 5, k = 1$$



$$x_0 = 100, k = 1$$



Obrázek 4.8: Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces hnáný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem: Histogramy doby prvního dosažení nulové hodnoty pro různé fixní počáteční hodnoty procesu  $x_0$ , pro "nemarkovskou" hodnotu parametru  $k = 1$ .

### 4.2.3 Analýza výsledků simulace

Celkově tedy můžeme říci, že Ornstein-Uhlenbeckův proces definovaný stochastickou diferenciální rovnicí (2.6), má rozložení pravděpodobnostní hustoty průchodu nulovou hladinou odpovídající teoretickým vztahům (2.17) resp. (2.16) odvozeným v teoretické sekci. Můžeme také říci, že při zvoleném počtu trajektorií  $N = 10^6$  je statistika z dat již velmi přesná a nedochází tak k anomáliím způsobeným nedostatečným počtem dat.

Dále byl simulován zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces, hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem (3.4). Tyto simulace jsou v kontrastu s obyčejným Ornstein-Uhlenbeckovským procesem z výpočetního hlediska náročnější, proto byl celkový počet trajektorií zvolen o něco nižší než v případě obyčejného Ornstein-Uhlenbeckova procesu. Pro počet trajektorií  $N = 10^5$  je však výsledná statistika dostačující, abychom viděli charakteristický průběh procesu. Charakteristika zobecněného procesu závisí na velikosti paměťového parametru  $k$ . Tento parametru má paměťový charakter, což znamená, že obecně nemarkovský zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces definovaný vztahem (3.4) je pro nízké hodnoty parametru  $k$  velmi nemarkovský a s rostoucím parametrem přechází v limitě na plně markovský, obyčejný Ornstein-Uhlenbeckův proces, definovaný neparametrickou rovnicí (2.6). To se nám podařilo ověřit v obou případech, tedy pro zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces s fixní počáteční polohou a se stacionárním rozdělením počáteční polohy. Pravděpodobnostní hustota prvního dosažení nulové hladiny pro zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces s fixní počáteční polohou blízkou nulové hladiny má strmější charakter, než pro vysoké hodnoty této počáteční polohy. V okolí nulové hladiny má i malá odchylka silný dopad na průběh procesu, kdežto pro vysoké hodnoty počáteční polohy je charakteristický tvar histogramu již prakticky neměnný a posouvá se jen pík hustoty doby prvního dosažení nulové hladiny.

# Závěr

Byl studován stochastický Ornstein-Uhlenbeckův proces a také jeho zobecněná verze, hnaná Ornstein-Uhlenbeckovským šumem. V teoretické části práce bylo odvozeno řešení obou problémů, určena střední hodnota procesů a variance, případně variančně-kovarianční matice. Díky těmto vlastnostem byla určena gaussovská pravděpodobnostní hustota Ornstein-Uhlenbeckova procesu, která řeší Fokker-Planckovu rovnici ve volném prostoru. S využitím těchto výsledků byla metodikou obrazů a s použitím Fokker-Planckovy rovnice určena pravděpodobnostní hustota prvního průchodu nulové hladiny. Bylo také odvozeno že obyčejný Ornstein-Uhlenbeckův proces přechází za určitých podmínek v limitním případě na gaussovský bílý šum. Tato vlastnost byla následně přenesena na zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces, neboť díky této vlastnosti lze zařídit limitní přechod zobecněného procesu na obyčejného Ornstein-Uhlenbecka. U obou stochastických rovnic v Langevinově formě popisující vývoj procesu v čase byla provedena eliminace parametrů rovnice. Pro obyčejný Ornstein-Uhlenbeckův proces bylo modulací souřadnic docíleno naprosté eliminace obou parametrů. V případě zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu byl zaveden nový paměťový parametr, jakožto kombinace driftových parametrů procesu. Správnou modulací souřadnic bylo dosaženo toho, že proces má konstantní rozptyl stavové proměnné, analogicky obyčejnému Ornstein-Uhlenbeckově procesu. Tento parametr ovlivňuje paměť procesu. Obecně nemarkovský zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces přechází na plně markovský obyčejný Ornstein-Uhlenbeckův proces v limitním případě kdy tento paměťový koeficient pošleme do nekonečna.

Jedna z použitých metodik studia procesů byla jejich simulace, respektive simulace a následné studium statistiky doby prvního dosažení nulové hladiny. Bylo simulováno dostatečné množství trajektorií, tak aby výsledná statistika byla v rozumných normách. Můžeme říci, že Ornstein-Uhlenbeckův proces má rozložení pravděpodobnostní hustoty průchodu nulovou hladinou odpovídající teoretickým vztahům odvozeným v teoretické sekci. Můžeme také říci, že při zvoleném počtu trajektorií byla statistika z dat již velmi přesná a nedocházelo tak k anomáliím způsobeným nedostatečným počtem dat. Při simulaci Ornstein-Uhlenbeckova procesu s fixní počáteční polohou byla tato poloha zvolena jako střední cesta pro optimální chod programu, co nejnížší náročnost na výpočetní možnosti a optimálním průběhem procesu. Pro vysoké hodnoty by bylo třeba prodloužit celkový čas měření a pro nízké by byla pravděpodobnostní hustota průchodu nulové hladiny situována příliš blízko počátku, což by zhoršovalo naše rozlišovací schopnosti. Simulace zobecněného Ornstein-Uhlenbeckova procesu jsou v kontrastu s obyčejným Ornstein-Uhlenbeckovským procesem z výpočetního hlediska náročnější, proto byl celkový počet trajektorií zvolen o něco nižší, avšak dostačující, abychom viděli charakteristický průběh procesu. Bylo ověřeno, že charakteristika zobecněného procesu závisí na velikosti paměťového parametru. Tento parametru má paměťový charakter, což znamená, že zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces je pro nízké hodnoty paměťového parametru velmi nemarkovský a s rostoucím parametrem přechází v limitním případě na plně markovský, obyčejný Ornstein-Uhlenbeckův proces, avšak již pro konečné hodnoty tohoto parametru je schoda s obyčejným Ornstein-Uhlenbeckovským procesem markantní.

# Seznam použité literatury

BRAY, M. S. (2013). Persistence and first-passage properties in non-equilibrium systems. *Advances in Physics*, **62**(3), 225–361.

GARDINER, C. (1997). *Handbook of stochastic methods*. 4th printing. Springer, Stuttgart Germany. ISBN 3-540-61634-9.

HAKIM (2015). Models of collective cell motion [video]  
přednáška dostupná online: <https://youtu.be/poAHNuCQ7I>.

KAMPEN, N. V. (2007). *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. Revised and enlarged edition. North Holland, The Netherlands. ISBN 0-444-89349-0.

# Seznam obrázků

4.1	Ornstein-Uhlenbeckův proces: Histogram doby prvního dosažení nulové hodnoty se stacionárním rozdělením počáteční polohy. . . .	20
4.2	Ornstein-Uhlenbeckův proces: Histogram doby prvního dosažení nulové hodnoty s fixní počáteční polohou $x_0 = 5$ . . . . .	20
4.3	Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem: Histogramy doby prvního dosažení nulové hodnoty pro stacionární rozdělení počátečních poloh, pro různé hodnoty parametru $k$ . . . . .	22
4.4	Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem: Histogramy doby prvního dosažení nulové hodnoty pro stacionární rozdělení počátečních poloh, pro různé hodnoty parametru $k$ , srovnání s obyčejným Ornstein-Uhlenbeckovským procesem. . .	23
4.5	Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem: Histogramy doby prvního dosažení nulové hodnoty pro fixní počáteční hodnotu procesu $x_0 = 5$ , pro různé hodnoty parametru $k$ . . . . .	25
4.6	Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem: Histogramy doby prvního dosažení nulové hodnoty pro fixní počáteční hodnotu procesu $x_0 = 5$ , pro různé hodnoty parametru $k$ , srovnání s obyčejným Ornstein-Uhlenbeckovským procesem. . .	26
4.7	Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem: Histogramy doby prvního dosažení nulové hodnoty pro různé fixní počáteční hodnoty procesu $x_0$ , pro "markovskou" hodnotu paměťového parametru $k = 250$ . . . . .	28
4.8	Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces hnaný Ornstein-Uhlenbeckovským šumem: Histogramy doby prvního dosažení nulové hodnoty pro různé fixní počáteční hodnoty procesu $x_0$ , pro "nemarkovskou" hodnotu paměťového parametru $k = 1$ . . . . .	29

# A. Kódy v jazyce Python

Ornstein-Uhlenbeckův proces:  
stacionární rozdělení počátečních poloh  $x_0$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

dt = .001
T = 10.
n = int(T / dt)
N = 10**6
t = np.linspace(0, T, n)

x = np.zeros((n,N))
x[0,:] = np.random.normal(loc = 0, size=(1, N), scale=1/np.sqrt(2))

for i in np.arange(n - 1):
    x[i + 1,:] = x[i,:] + dt * ( -x[i,:] ) \
                + np.sqrt(dt) * np.random.randn(1,N)

y = np.where(x[0, :] >= 0,
             t[np.argmax(x<=0,axis=0)],
             t[np.argmax(x>0,axis=0)])

plt.ylim([0, 1]); plt.xlim([0, 10])
plt.hist(y, density = True, bins=100)

plt.xlabel('Čas dosažení nuly')
plt.ylabel('Pravděpodobnostní hustota')

plt.show()
```

## Ornstein-Uhlenbeckův proces: fixní hodnota počátečních poloh $x_0$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

dt = .001
T = 10.
n = int(T / dt)
N = 10**6
t = np.linspace(0, T, n)
x0 = 5.

x = np.zeros((n,N))
x[0,:] = x0

for i in np.arange(n - 1):
    x[i + 1,:] = x[i,:] + dt * ( -x[i,:] ) \
                + np.sqrt(dt) * np.random.randn(1,N)

y = np.where(x[0, :] >= 0,
             t[np.argmax(x<=0,axis=0)],
             t[np.argmax(x>0,axis=0)])

plt.ylim([0, 1]); plt.xlim([0, 10])
plt.hist(y, density = True, bins=100)

plt.xlabel('Čas dosažení nuly')
plt.ylabel('Pravděpodobnostní hustota')

plt.show()
```

## Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces: stacionární rozdělení počátečních poloh $x_0$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

dt = .001
T = 10.
n = int(T / dt)
N = 10**5
t = np.linspace(0, T, n)
k = 1.
mean = [0,0]

cov = [[1/2,np.sqrt(1+1/k)*k/(2*(1+k))],\
       [np.sqrt(1+1/k)*k/(2*(1+k)),k/2]]

x = np.zeros((n,N))
y = np.zeros((n,N))

x0, y0 = np.random.multivariate_normal(mean, cov, N).T
y[0] = y0
x[0] = x0

for j in np.arange(n - 1):
    y[j + 1,:] = y[j,:] + k*( dt * ( -y[j,:])
                          + np.sqrt(dt) * np.random.randn(1,N))
    x[j + 1,:] = x[j,:] + (np.sqrt(1 + 1/k) * y[j,:]- x[j,:]) * dt

z = np.where(x[0, :] >= 0,
            t[np.argmax(x<=0,axis=0)],
            t[np.argmax(x>0,axis=0)])

plt.ylim([0, 1])
plt.xlim([0, 10])
plt.hist(z, density = True, bins=100)

plt.xlabel('Čas dosažení nuly')
plt.ylabel('Pravděpodobnostní hustota')

plt.show()
```



## Zobecněný Ornstein-Uhlenbeckův proces: fixní hodnota počátečních poloh $x_0$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

dt = .001
T = 10.
n = int(T / dt)
N = 10**5
t = np.linspace(0, T, n)
k = 1.
mean = [0,0]
x0 = 5

cov = [[1/2,np.sqrt(1+1/k)*k/(2*(1+k))],\
       [np.sqrt(1+1/k)*k/(2*(1+k)),k/2]]

x = np.zeros((n,N))
y = np.zeros((n,N))

x00, y0 = np.random.multivariate_normal(mean, cov, N).T
y[0] = y0
x[0] = x0

for j in np.arange(n - 1):
    y[j + 1,:] = y[j,:] + k*( dt * ( -y[j,:] )
                          + np.sqrt(dt) * np.random.randn(1,N))
    x[j + 1,:] = x[j,:] + (np.sqrt(1 + 1/k) * y[j, :]- x[j, :]) * dt

z = np.where(x[0, :] >= 0,
            t[np.argmax(x<=0,axis=0)],
            t[np.argmax(x>0,axis=0)])

plt.ylim([0, 1])
plt.xlim([0, 10])
plt.hist(z, density = True, bins=100)

plt.xlabel('Čas dosažení nuly')
plt.ylabel('Pravděpodobnostní hustota')

plt.show()
```