

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Smorada

**Kozaiův-Lidovův mechanismus v
post-newtonovské aproximaci
obecné relativity**

Astronomický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Ladislav Šubr, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: FP

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Týmto by som rád podakoval môjmu vedúcemu práce doc. RNDr. Ladislavovi Šubrovi, Ph.D. za jeho trpezlivosť, množstvo rád a dohľad počas tvorby tejto práce. Moja vďaka taktiež patrí mojej rodine a priateľom za ich podporu počas štúdia.

Název práce: Kozaiův-Lidovův mechanismus v post-newtonovské aproximaci obecné relativity

Autor: Jakub Smorada

Ústav: Astronomický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Ladislav Šubr, Ph.D., Astronomický ústav UK

Abstrakt: Pri obehu častice okolo dominantného telesa, v dvojčasticovom systéme, je dráha obiehajúcej častice pri jednom obehu približne keplerovská elipsa. Ak je tento systém porušený tretím telesom, orbitálne elementy dráhy častice prechádzajú periodickými zmenami. Tento proces sa nazýva Kozaiov-Lidovov mechanizmus. Cieľom tejto práce je štúdium najtesnejších priblížení, spôsobené týmto vývojom, testovacej častice k dominantnému telesu sústavy, v hierarchickom trojčasticovom systéme, a jeho porovnanie medzi newtonovskou mechanikou a postnewtonovskou aproximáciou všeobecnej relativity.

Klíčová slova: Nebeská mechanika, trojčasticové systémy, Kozaiove-Lidovove oscilácie, galaktické centrum, všeobecná teória relativity

Title: Kozai-Lidov mechanism in post-newtonian approximation of the general relativity

Author: Jakub Smorada

Institute: Astronomical Institute of Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Ladislav Šubr, Ph.D., Astronomical Institute of Charles University

Abstract: In two body systems, the orbit of the particle orbiting the dominant body is, during one orbit, approximately a keplerian ellipse. If the system contains a third, perturbing, body, orbital elements of the orbit of the test particle start to periodically evolve. This process, called Kozai-Lidov mechanism, leads to the closest approaches of the test particle to the dominant body of the system. In this work, I study these closest approaches and their difference between newtonian mechanics and postnewtonian approximation of general relativity.

Keywords: Celestial mechanics, triples, Kozai-Lidov oscillations, galactic nucleus, general theory of relativity

Obsah

Predslov	2
1 Úvod	4
1.1 Kozaiov-Lidovov mechanizmus	4
1.1.1 Kruhová porucha	4
1.1.2 Excentrická porucha	7
1.2 Post-Newtonovská aproximácia teórie relativity	8
2 Metóda a výsledky	12
2.1 Metóda	12
2.2 Model	14
2.3 Výsledky	15
Záver	19
Zoznam použitej literatúry	20

Predslov

Jednou zo základných úloh či už klasickej alebo nebeskej mechaniky je problém dvoch telies, ktorý bol prvý krát vyriešený Isaacom Newtonom. V tomto probléme dochádza k interakcii medzi dvoma hmotnými telesami, ktoré sa navzájom ovplyvňujú gravitačnou silou. Príkladom dvojčasticového problému je napríklad Keplerova úloha, pri ktorej dochádza k obehu planéty okolo Slnka, ktoré je pevne v centre sústavy (tj. pohyb telesa o zanedbateľne malej hmotnosti okolo dominantného telesa sústavy). Z Keplerovej úlohy sa dajú, vo vhodných súradniciach, triviálne odvodiť Keplerove zákony.

Zovšeobecnením Keplerovej úlohy sa zo systému dvoch telies, z ktorých bolo jedno dominantné, pevne v centre, stáva problém dvoch telies, ktoré majú porovnateľné hmotnosti a navzájom sa oba gravitačne ovplyvňujú, čím dochádza k zmene pohybu oboch telies. Týmto zovšeobecnením sa zo systému s troma stupňami voľnosti stáva problém so šiestimi. Vhodnou voľbou súradníc ide opäť o relatívne triviálny problém, ktorý má taktiež, ako Keplerova úloha, analytické riešenie.

Rozšírením dvojčasticového systému o ďalšie teleso sa z problému stáva problém troch telies, ktorý má deväť stupňov voľnosti a neexistuje dostatočný počet integrálov pohybu, aby bolo možné získať analytické riešenie. Vo vhodných nastaveniach systému je možné získať analytické riešenie, ale vo všeobecnosti je nutné využiť vhodné aproximatívne metódy, prípadne riešiť úlohu numericky (integrátorom).

Vývoj trojčasticového systému je všeobecne chaotický, ale v istých prípadoch, napríklad v prípade trojčasticového hierarchického systému (s vhodným nastavením inklinácie) dochádza k periodickému vývoju orbitálnych elementov dráhy testovacej častice. Tento proces bol prvý krát popísaný v 60. rokoch 20 storočia Kozaiom a Lidovom a z tohto dôvodu sa tento proces nazýva Kozaiov-Lidovov mechanizmus (resp. Kozaiove-Lidovove oscilácie).

Kozai študoval gravitačné vplyvy Slnka (ako dominantného telesa) a Jupitera (ako poruchového telesa) na asteroid a Lidov študoval vplyvy Zeme a Mesiaca na družicu obiehajúcu okolo Zeme. V týchto prípadoch bolo uvažované, že excentricita dráh poruchových telies (Jupiter a Mesiac) je nulová, resp. tieto telesá sa pohybujú po kruhovej dráhe, a testovacia častica má zanedbateľne malú hmotnosť voči centrálnemu telesu a poruche. Tieto predpoklady umožnili aproximovať hamiltonián systému do najnižšieho, tzv. kvadrupólového radu. Kozai a Lidov ukázali, že sa v tejto aproximácii vynoria z pohybových rovníc tri integrály pohybu - veľkosť hlavnej polosi dráhy poruchy a testovacej častice, zložka orbitálneho momentu hybnosti, kolmá na rovinu, po ktorej poruchové teleso obieha dominantné teleso sústavy (označované ako Kozaiov integrál) a vystredovaný poruchový potenciál. Naviac ukázali, že ak je systém dostatočne hierarchický a inklinácia dráhy testovacej častice je $i \in [39.2, 140.8]^\circ$, orbitálne elementy dráhy testovacej častice sa začnú, na väčších časových intervaloch, vyvíjať, čo znamená, že dôjde ku kvalitatívnej zmene topológie dráhy testovacej častice v priestore $e - \omega$.

V prípade, že nie je splnená aspoň jedna z týchto podmienok (Naoz a kol., 2011), orbitálna zložka momentu hybnosti, kolmá na referenčnú rovinu, prestáva byť konštantná. Ďalej, vplyv poruchy na testovacie teleso môže excentricitu jeho

dráhy limitne priblížiť k 1 a hodnotu inklinácie môže zvýšiť nad hodnotu $i = 90^\circ$, čím dôjde k preklopeniu dráhy z prográdnej na retrográdnú. V týchto prípadoch je hamiltonián systému nutné aproximovať do vyššieho rádu a tento proces sa nazýva oktapólový Kozaiov-Lidovov mechanizmus. Pri tomto procese dochádza navyše k ďalšiemu periodickému vývoju excentricity a inklinácie, ktorý sa prejavuje na väčších časových intervaloch (rádovo jednotky až desiatky kvadrupólových Kozaiovských periód).

Kozaiov-Lidovov mechanizmus má význam vo veľkom množstve astrofyzikálnych odvetví a súčasných problémov astrofyziky, ako napríklad slapové trhanie hviezd a emitovanie gravitačných vln, ku ktorým dochádza pri tesných priblíženiach hviezd k supermasívnym čiernym dieram (napr. Chen a kol., 2009; Antonini a Perets, 2012; Petrovich, 2015), ktoré sú dnes detekovateľné detektormi LIGO a VIRGO. Ďalej môže vplyvom Kozaiovho-Lidovovho mechanizmu dochádzať k spájaniu čiernych dier (napr. Antognini a kol., 2014; Antonini a kol., 2016; Hoang a kol., 2018), prípadne ním môžu byť skúmané vývoje trojčasticových systémov a študované horúce Jupitera, čo sú exoplanéty, ktorých hmotnosti sú podobné hmotnosti Jupitera a ich periódy obehov okolo hviezd, v ich systémoch, sú v ráde dní (napr. Wu a kol., 2007; Naoz a kol., 2012).

Pri štúdiu Kozaiovho-Lidovovho mechanizmu na vhodných systémoch je nutné zohľadniť relativistické vplyvy. Výsledkami mnohých prác je, že v systémoch, kde je uvažovaná relativita, je Kozaiov-Lidovov mechanizmus tlmený (napr. Wu a kol. (2007), Petrovich (2015), Beust a kol. (2012)). Na rozdiel od klasickej mechaniky dochádza (mimo iné) k stáčaniu pericentra, čo môže značne ovplyvniť vývoj orbitálnych elementov. J. Haas and L. Šubr (Haas a Šubr, 2021) študovali analogický problém, v ktorom bol, na rozdiel od relativity, použitý vystredovaný sféricky symetrický potenciál, ktorý, rovnako ako relativita, ovplyvňuje vývoj orbitálnych elementov dráhy testovacej častice. Výsledkom ich práce je, že Kozaiove-Lidovove oscilácie orbitálnych elementov silne závisia na parametroch systému, čo podnecuje k detailnejšiemu štúdiu trojčasticových systémov. Keďže Einsteinove rovnice poľa nie sú riešiteľné v trojčasticových systémoch, je nutné zvoliť ich aproximáciu, ktorou je zvyčajne postnewtonovská aproximácia.

Cieľom tejto práce je štúdium Kozaiovho-Lidovovho mechanizmu, analogicky k článku (Haas a Šubr (2021)), a jeho priebehu v porovnaní klasickej mechaniky a s využitím postnewtonovskej aproximácie všeobecnej relativity. Študovaný systém bol motivovaný galaktickým centrom, ktoré je tvorené supermasívnou čiernou dierou Sgr A* a okolo nej obiehajúcimi hviezdami, ktoré dosahujú relativistické rýchlosti.

Štruktúra práce je nasledujúca: V prvej časti práce je uvedený teoretický základ Kozaiovho-Lidovovho mechanizmu a jeho popis v kvadrupólovej a oktapólovej aproximácii a postnewtonovská aproximácia všeobecnej teórie relativity. V druhej časti je popísaná metóda a voľba parametrov, spolu s výsledkami a ich diskusiou.

1. Úvod

1.1 Kozaiov-Lidovov mechanizmus

Kozaiov-Lidovov mechanizmus (ďalej KLM) je proces, pri ktorom dochádza k periodickému sekulárnemu (tj. pomalému a stabilnému) vývoju orbitálnych elementov dráhy testovacej častice obiehajúcej okolo dominantného telesa systému, ktorá je navyše porušená gravitačným vplyvom poruchového telesa. Hamiltonián trojčasticového systému má tvar

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m_i} - \frac{G}{2} \sum_{i,j \neq i}^3 \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (1.1)$$

kde p_i je hybnosť i -tého telesa, m_i je hmotnosť i -tého telesa, G je gravitačná konštanta a r_{ij} je vzdialenosť i -tého a j -tého telesa.

Dostatočne hierarchický trojčasticový systém (napr. Georgakarakos, 2008) môže byť aproximovaný na dva dvojčasticové systémy, z ktorých je jeden tvorený centrálnym telesom a testovacou časticou a druhý je tvorený centrálnym telesom a poruchou. Vzťah (1.1) je potom možné prepísať do tvaru (napr. Harrington, 1968)

$$\mathcal{H} = G \frac{M m_t}{2a_t} + G \frac{M + m_t}{2a_p} m_p + \mathcal{H}_{\text{por}}, \quad (1.2)$$

kde M je hmotnosť centrálného telesa a m_t a a_t , resp. m_p a a_p sú hmotnosti a hlavné polosi testovacej častice, resp. poruchy. Člen \mathcal{H}_{por} je poruchový člen, ktorý reprezentuje interakciu medzi testovacou časticou a poruchou a má tvar

$$\mathcal{H}_{\text{por}} = \frac{G}{r_p} \sum_{k=2}^{+\infty} M_k \left(\frac{r_t}{r_p} \right)^k P_k(\cos \varphi), \quad (1.3)$$

kde r_t a r_p sú vzdialenosti medzi centrálnym a testovacím, resp. poruchovým, telesom, P_k je Legendreov polynóm k -tého radu, φ je uhol medzi \mathbf{r}_t a \mathbf{r}_p a

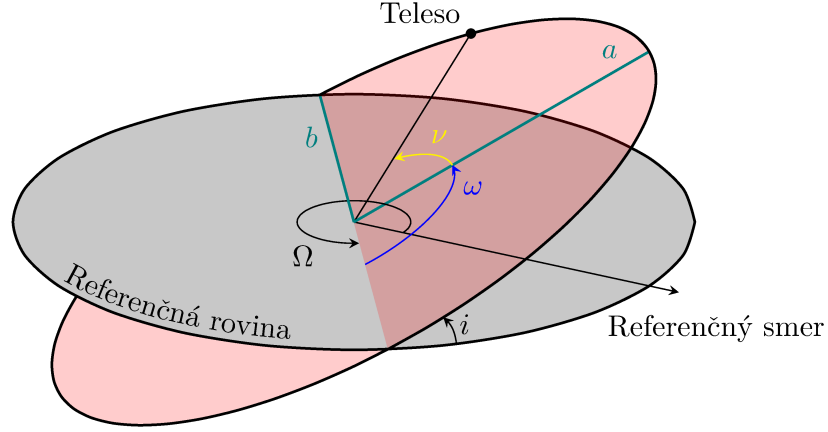
$$M_k = M m_t m_p \frac{M^{k-1} - (-m_t)^{k-1}}{(M + m_t)^k}. \quad (1.4)$$

Úpravou (1.2) dostávame (Naoz, 2016)

$$\mathcal{H} = G \frac{M m_t}{2a_t} + G \frac{M + m_t}{2a_p} m_p + \frac{G}{a_p} \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{a_t}{a_p} \right)^j M_j \left(\frac{r_t}{a_t} \right)^j \left(\frac{a_p}{r_p} \right)^{j+1} P_j(\cos \varphi). \quad (1.5)$$

1.1.1 Kruhová porucha

Členy poruchového hamiltoniánu \mathcal{H}_{por} , vo vzťahu (1.5), sú priamo úmerné $(a_t/a_p)^k$ a vo vhodných astrofyzikálnych systémoch, kde je dráha poruchy kruhová a jej veľká polos je výrazne väčšia, ako veľkosť hlavnej polosi dráhy testovacej



Obr. 1.1: Orbitálne elementy: hlavná polos a , excentricita $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, inklinácia i , dĺžka výstupného uzla Ω , argument pericentra ω a pravá anomália ν .

častice, členy rozvoja hamiltoniánu rýchlo konvergujú a preto môže byť poruchový člen hamiltonián aproximovaný do prvého rádu, ktorý sa nazýva kvadrupólový.

Pri prvých popisoch Kozai a Lidov (Kozai, 1962; Lidov, 1962) predpokladali kruhové dráhy poruchových telies (Jupiter resp. Mesiac), čo umožnilo aproximovať hamiltonián systému do najnižšieho (kvadrupólového) radu, čím sa vzťah (1.5) redukuje na

$$\mathcal{H}_q = G \frac{Mm_t}{2a_t} + G \frac{M + m_t}{2a_p} m_p + \frac{G}{2r_p} \frac{Mm_t m_p}{M + m_t} \left(\frac{r_t}{r_p} \right)^2 (3 \cos^2 \varphi - 1). \quad (1.6)$$

Na úrovni tejto aproximácie bola explicitne odvodená podmienka inklinácie dráhy testovacej častice, pri ktorej dochádza k periodickému vývoju orbitálnych elementov dráhy testovacej častice $\cos i_{\min} = \sqrt{3/5}$ a dôjde k zmene topológie dráhy testovacej častice v priestore $e - \omega$ (viď obr. 1.2). V kvadrupólovej aproximácii sa orbitálne elementy dráhy poruchy, v prípade, že testovacia častica má zanedbateľne malú hmotnosť, v čase nevyvíjajú a vývoj orbitálnych elementov dráhy testovacej častice v čase je daný vzťahmi (napr. Kiseleva a kol., 1998)

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad (1.7)$$

$$\tau \sqrt{1 - e^2} \frac{de}{dt} = 5e (1 - e^2) \sin^2 i \sin \omega \cos \omega, \quad (1.8)$$

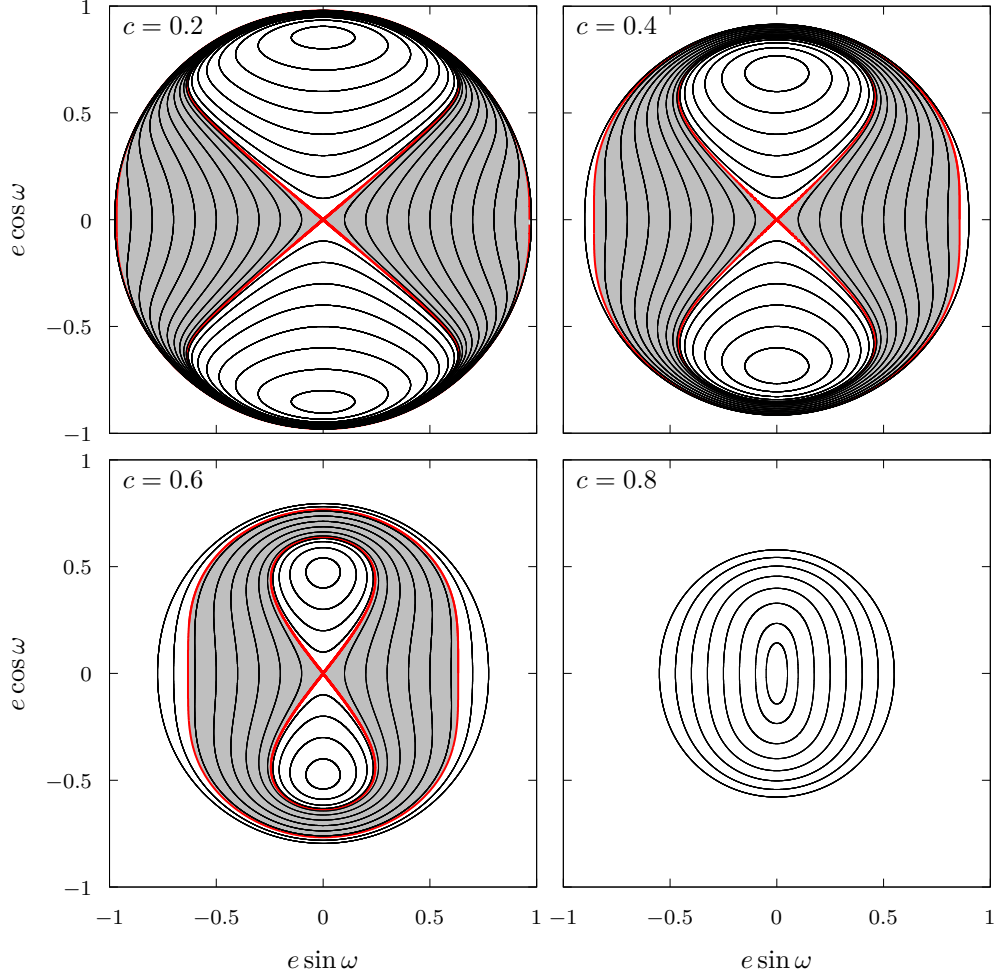
$$\tau \sqrt{1 - e^2} \frac{di}{dt} = -5e^2 \sin i \cos i \sin \omega \cos \omega, \quad (1.9)$$

$$\tau \sqrt{1 - e^2} \frac{d\Omega}{dt} = - [1 + e^2 (5 \sin^2 \omega - 1)] \cos i, \quad (1.10)$$

$$\tau \sqrt{1 - e^2} \frac{d\omega}{dt} = (5 \sin^2 \omega - 1) (e^2 - \sin^2 i) + 1 - e^2 + \cos^2 i, \quad (1.11)$$

kde a je dĺžka veľkej polosi, e je excentricita, i je inklinácia, Ω je dĺžka výstupného uzla, ω je argument pericentra (viď. obr 1.1) a

$$\tau = \frac{2T_p^2}{3\pi T_t} (1 - e_p^2)^{3/2} \frac{M + m_t + m_p}{m_p}, \quad (1.12)$$



Obr. 1.2: Zmena topológie dráhy v priestore $e - \omega$. V každom z panelov je uvedená hodnota Kozaiovho integrálu c (vzťah (1.13)). Jednotlivé čiary predstavujú trajektórie testovacej častice v trojčasticovom hierarchickom systéme. Červené trajektórie predstavujú tzv. separatrix, ktoré rozdeľujú priestor $e - \omega$ na niekoľko oblastí. Tieto trajektórie sú dané kritickými hodnotami inklinácie $\cos i_{\min} = \sqrt{3/5}$. Sivá oblasť predstavuje libračný podpriestor $e - \omega$, v ktorom dochádza ku KLM. Biela oblasť vyjadruje priestor parametrov e a ω , pri ktorých nie je možné dosiahnuť kvadrupólový KLM. V paneli $c = 0.8$ nie sú znázornené separatrix, pretože ich, zo vzťahu (1.13), nie je možné dosiahnuť.

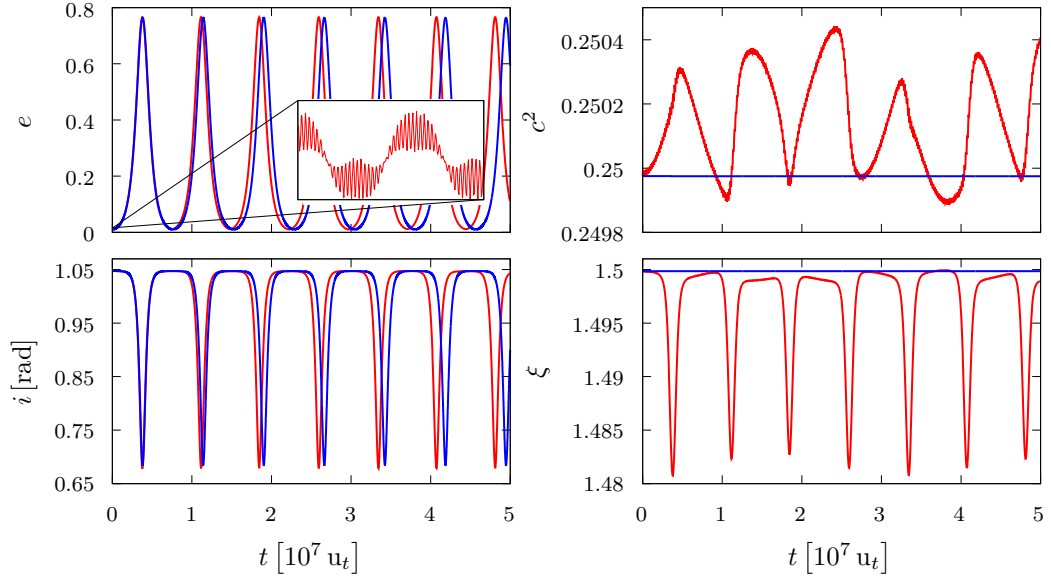
kde T_p a T_t sú obežné doby poruchy a testovacej častice, odpovedá charakteristickej časovej škále, na ktorej dôjde k zmenám orbitálnych elementov.

Okrem veľkosti hlavnej polosi dráhy testovacej častice plynú z rovníc (1.8) - (1.11) ďalšie dva integrály pohybu - zložka orbitálneho momentu hybnosti, ktorá je kolmá na rovinu, po ktorej porucha obieha dominantné teleso, c^2 (c sa niekedy označuje ako Kozaiov integrál) a vystredovaný poruchový potenciál ξ ,

$$c^2 = (1 - e^2) \cos^2 i, \quad (1.13)$$

$$\xi = [5e^2 \sin^2 \omega + 2(1 - e^2)] \sin^2 i. \quad (1.14)$$

Na obr. 1.3 sú (ako príklad) znázornené časové vývoje excentricity a inkli-



Obr. 1.3: Časový vývoj excentricity a inklinácie dráhy (vľavo) a integrálov pohybu (vpravo) testovacej častice (v klasickej mechanike). Červenou farbou sú znázornené závislosti určené vzťahom (1.1) a modrou farbou závislosti určené vzťahmi (1.7)-(1.11). V časovom vývoji excentricity je navyše znázornený jej vývoj na intervale 50 obehov, ktorému odpovedajú zmeny excentricity $\sim 10^{-7}$ medzi jednotlivými obehmi. Nastavenia systému sú ¹: $M = 1 u_m$, $m_t = 10^{-6} u_m$, $m_p = 10^{-3} u_m$, $a_t = 1 u_\ell$, $a_p = 10 u_\ell$, $e_t = 0.01$, $i_t = 60^\circ$, zvyšné orbitálne elementy sú rovné 0 a $u_t = \sqrt{u_\ell^3 / (G u_m)}$.

nácie dráhy a časové vývoje integrálov pohybu (1.13) a (1.14) testovacej častice v systéme s poruchovým telesom pohybujúcim sa po kruhovej dráhe. V grafe je znázornené aj porovnanie medzi integrovaním vzťahu (1.1) a vzťahmi (1.7) - (1.11).

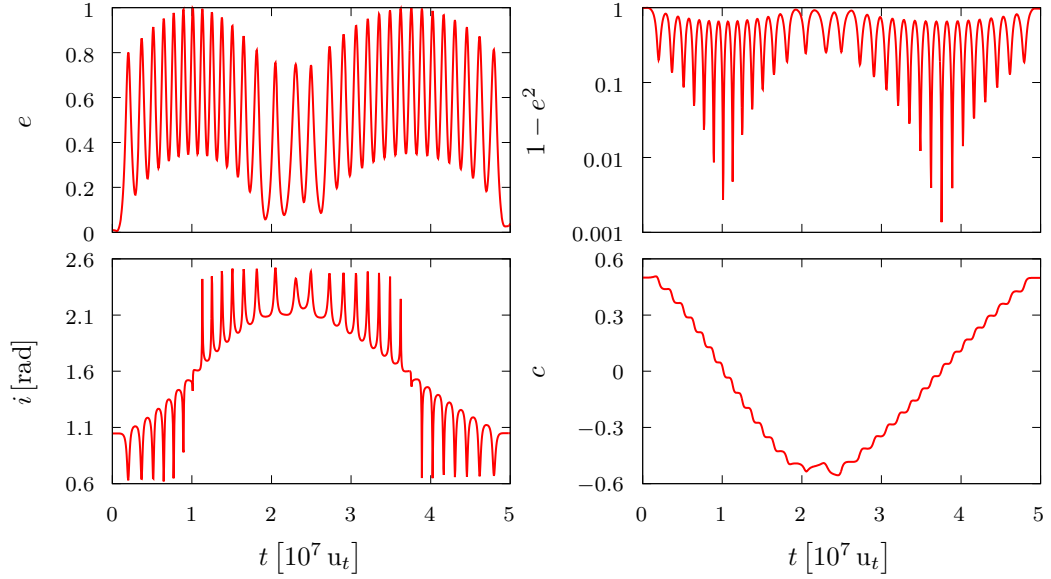
V priebehu excentricity je navyše znázornený jej periodický vývoj na menších časových škálach (jednotky obehov). K takému priebehu dochádza vplyvom poruchového telesa v troj a viac časticových systémoch bez ohľadu na počiatočnú inklináciu dráhy testovacej častice. Na väčších časových škálach ($\sim 10^7$ obehov), za splnenia nutných podmienok, dochádza k väčšiemu vývoju excentricity a ostatných orbitálnych elementov - KLM.

Vidíme, že priebehy excentricity a inklinácie, určené vzťahmi (1.1) a (1.7)-(1.11) majú efektívne rovnaké priebehy s rôznymi periódami. Keďže najtesnejšie priblíženia sú dané maximálnou excentricitou (resp. minimálnym Kozaiovým integrálom c (1.13)), periódy nie sú relevantné a extrémny e a i , určené kvadrupólovou aproximáciou, dostatočne dobre popisujú neaproximovaný priebeh. V priebehu c^2 a ξ vidíme, že dochádza k malému vývoju a v kvadrupólovej aproximácii ide skutočne o integrály pohybu.

1.1.2 Excentrická porucha

V prípade trojčasticového systému, keď sa porucha pohybuje po eliptickej dráhe (alebo ide o vonkajší KLM), dochádza k ďalšiemu (pomalému a stabilnému) vývoju orbitálnych elementov a je nutné zvýšiť rad aproximácie na oktapólový

¹Autonómne jednotky - vysvetlené v časti 2.1



Obr. 1.4: Časový vývoj excentricity, inklinácie a zložky orbitálneho momentu hybnosti dráhy testovacej častice (v klasickej mechanike) v systéme $M = 1 u_m$, $m_t = 10^{-6} u_m$, $m_p = 10^{-3} u_m$, $a_t = 1 u_\ell$, $a_p = 10 u_\ell$, $e_t = 0.01$, $e_p = 0.6$, $i_t = 60^\circ$, zvyšné orbitálne elementy sú rovné 0 a $u_t = \sqrt{u_\ell^3 / (G u_m)}$.

(Naoz a kol., 2011, 2013). V tejto aproximácii sa môže excentricita testovacej častice zvýšiť limitne k 1 a inklinácia sa môže dostať nad hodnotu 90° , čím dôjde k preklopeniu dráhy z prográdnej na retrográdnou (napr. Naoz a kol., 2011). Hamiltonián systému je v tejto aproximácii

$$\mathcal{H}_o = G \frac{M m_t}{2a_t} + G \frac{M + m_t}{2a_p} m_p + G \frac{M m_t m_p}{2r_p} \times \left[\frac{1}{M + m_t} (3 \cos^2 \varphi - 1) + \frac{M - m_t}{(M + m_t)^2} (5 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi) \right]. \quad (1.15)$$

Ďalej, v oktapólovej aproximácii prestávajú platiť vzťahy (1.7) - (1.11) a tým pádom vzťahy (1.13) a (1.14) nie sú integrálmi pohybu.

Na obr. 1.4 je znázornený príklad vývoja excentricity a inklinácie v čase. Na menších časových úsekoch, približne $0.15 \times 10^7 u_t$, je vidieť kvadrupólový vývoj a na väčších časových škálach, približne $2.1 \times 10^7 u_t$, ďalší periodický vývoj, ku ktorému dochádza pri excentrickom KLM. V grafickom znázornení časového vývoja excentricity (resp. $1 - e$) je vidieť, že excentricita dosahuje extrémne hodnoty (blížiace sa k 1). V grafickom znázornení časovej závislosti inklinácie je vidieť preklopenie dráhy - inklinácia prekročila hodnotu 90° , čím sa z dráhy v čase približne $1.0 \times 10^7 u_t$ stala retrográdna a v čase približne $3.8 \times 10^7 u_t$ sa opäť stala prográdnou.

1.2 Post-Newtonovská aproximácia teórie relativity

Všeobecná teória relativity prekonala klasickejšiu (newtonovskú) mechaniku a ponúka presnejší popis systémov. Einsteinove rovnice gravitačného poľa nie sú

všeobecne analyticky riešiteľné, až na pár výnimiek, keď je systém dostatočne symetrický. V systéme troch telies je preto nutné využiť ich aproximáciu. Spojením klasickej (newtonovskej) mechaniky a post-newtonovských korekcií dostávame tzv. postnewtonovskú (ďalej PN) aproximáciu všeobecnej relativity. Táto aproximácia rozvíja gravitačné pole faktorom $(v/c)^{2j}$, kde v je rýchlosť telesa, c je rýchlosť svetla a j označuje rad PN korekcie. Rozvoj PN aproximácie má tvar

$$\mathcal{H}_{\text{PN}} = \mathcal{H}_0 + \frac{1}{c^2}\mathcal{H}_1 + \frac{1}{c^4}\mathcal{H}_2 + \frac{1}{c^5}\mathcal{H}_{2.5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right), \quad (1.16)$$

kde \mathcal{H}_0 je klasický hamiltonián popísaný v časti 1.1, c je rýchlosť svetla a index ostatných hamiltoniánov označuje rad PN korekcie.

Hamiltonián prvého radu PN aproximácie je definovaný ako (napr. Lousto a Nakano, 2008)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 = & -\frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 m_i \left(\frac{p_i^2}{m_i^2} \right)^2 - \frac{G}{4} \sum_{i,j \neq i}^3 \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \left[6 \frac{p_i^2}{m_i^2} - 7 \frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j}{m_i m_j} - \frac{(\mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{p}_i)(\mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{p}_j)}{m_i m_j} \right] \\ & + \frac{G^2}{2} \sum_{i,j \neq i, k \neq i}^3 \frac{m_i m_j m_k}{r_{ij} r_{ik}}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

kde \mathbf{p}_i je hybnosť i -tého telesa, \mathbf{r}_{ij} je polohový vektor medzi i -tým a j -tým telesom a $\mathbf{n}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}/r_{ij}$ je jednotkový vektor v smere \mathbf{r}_{ij} .

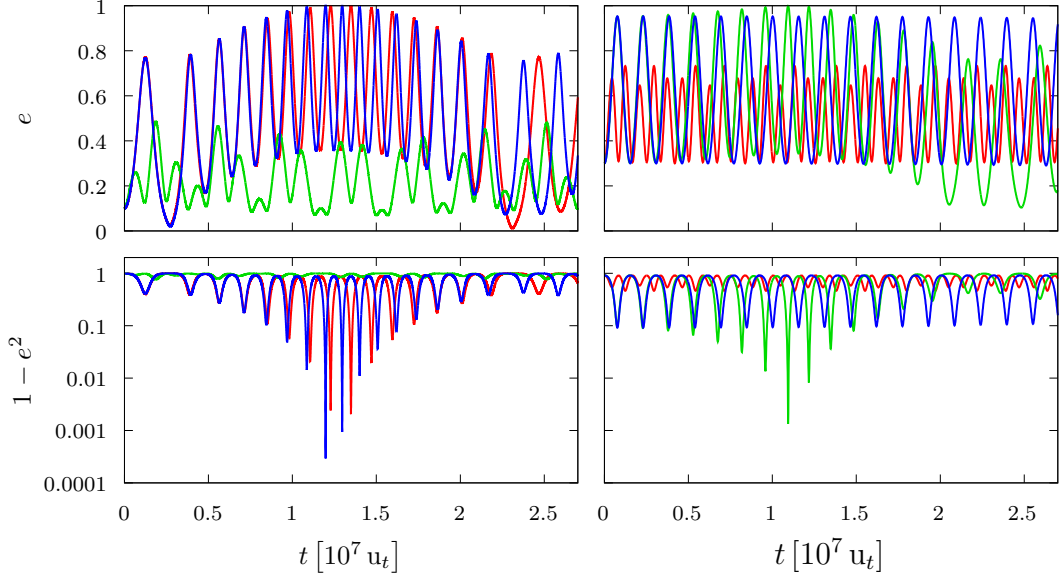
Rozvinutím hamiltoniánu sa, v prvom rade aproximácie, začína prejavovať prvý relativistický vplyv - stáčanie pericentra dráhy testovacej častice. Tento efekt má, v prípade trojčasticového systému, vplyv na zmenu orbitálnych elementov jej dráhy v čase a ich vývoj môže byť odlišný od vývoju v klasickej mechanike. Táto aproximácia je vhodná pre systémy, kde $v \ll c$, resp. pre systémy so slabým gravitačným poľom, ako napríklad Slnecná sústava. Pre systémy, v ktorých telesá dosahujú vyššie rýchlosti, resp. gravitačné pole je silnejšie, je nutné rozšíriť aproximáciu do vyšších radov.

V druhom rade PN aproximácie sa začnú prejavovať ďalšie relativistické efekty. Veľkosť hlavnej polosi prestáva byť konštantná a postupne sa, na veľkých časových škálach, začne meniť. Ďalším efektom je spin-orbitálne pôsobenie centrálného telesa na pohyb obiehajúcich telies v gravitačnom poli.

Rozvinutím hamiltoniánu do 2.5-tého radu PN aproximácie dôjde k presnejšiemu popisu spin-orbitálnej interakcie a začne sa prejavovať ďalší efekt - spin-spinové pôsobenie, kde spin telies ovplyvňuje spin ostatných telies a ich interakcia ovplyvňuje pohyb v gravitačnom poli.

Všetky tieto efekty môžu značne ovplyvniť pohyb testovacieho telesa, v systéme troch telies, v porovnaní s klasickou mechanikou, čo vedie aj na zmenu vývoja orbitálnych elementov.

Na obr. 1.5 sú, ako príklad, znázornené porovnania vývojev excentricity v newtonovskej mechanike a PN aproximácii v trojčasticovom systéme s excentrickou poruchou. Červenou farbou je znázornený priebeh v newtonovskej mechanike, ktorý má neobmedzenú voľnosť v interpretácii v zmysle voľby jednotiek, tj. daný priebeh reprezentuje všetky možné dvojice u_ℓ a u_m . Modrou a zelenou farbou sú znázornené priebehy v PN aproximácii teórie relativity, kde je voľba jednotiek u_ℓ a u_m obmedzená vzťahmi



Obr. 1.5: Časový vývoj excentricity dráhy testovacej častice. Červenou farbou je znázornený priebeh v newtonovskej mechanike. Modrou farbou je znázornený priebeh v PN aproximácii do 2.5-tého radu pre $u_\ell/u_m = G (10\,000 u_v/c)^2$ a zelenou farbou priebeh v PN aproximácii do 2.5-tého radu pre $u_\ell/u_m = G (1\,000 u_v/c)^2$, kde c je rýchlosť svetla (v jednotkách $u_\ell u_t^{-1}$) a G je gravitačná konštanta (v jednotkách $u_\ell^3 u_m^{-1} u_t^{-2}$). Nastavenia systému vľavo sú: $M = 1 u_m$, $m_t = 10^{-6} u_m$, $m_p = 10^{-3} u_m$, $a_t = 1 u_\ell$, $a_p = 10 u_\ell$, $e_t = 0.1$, $e_p = 0.6$, $i_t = 60^\circ$ a zvyšné orbitálne elementy sú rovné 0. Nastavenia systému vpravo sú: $M = 1 u_m$, $m_t = 10^{-6} u_m$, $m_p = 10^{-3} u_m$, $a_t = 1 u_\ell$, $a_p = 10 u_\ell$, $e_t = 0.3$, $e_p = 0.6$, $i_t = 75^\circ$, zvyšné orbitálne elementy sú rovné 0 a $u_t = \sqrt{u_\ell^3/(G u_m)}$.

$$\text{modrá: } \frac{u_\ell}{u_m} = G \left(\frac{10\,000 u_v}{c} \right)^2, \quad \text{zelená: } \frac{u_\ell}{u_m} = G \left(\frac{1\,000 u_v}{c} \right)^2, \quad (1.18)$$

Ako príklad, pre dvojicu červená a modrá čiara môžeme uviesť voľbu $u_\ell = 1$ au a $u_m = 1 M_\odot$, čo by reprezentovalo systém s centrálnym telesom s hmotnosťou Slnka, testovaciu časticu vo vzdialenosti hlavnej polosi Zeme a hmotnosťou trojnásobku hmotnosti Zeme a poruchovým telesom vo vzdialenosti približne rovnej 1.9-násobku veľkosti hlavnej polosi Jupitera s hmotnosťou Jupitera. Analogicky, pre dvojicu červená a zelená čiara uvedieme príklad so škálovaním vzdialeností na Slnčnú sústavu. Zo vzťahu (1.18) plynie voľbou $u_\ell = 1$ au jednotka hmotnosti $u_m = 101 M_\odot$. To znamená, že uvažujeme systém, ktorého telesá sú 101-krát hmotnejšie, ako v prípade červenej a modrej čiary.

V paneloch vľavo, vplyvom excentrického KLM a PN aproximácie teórie relativity sa, v tomto nastavení systému, excentricita dráhy testovacej častice zvýšila v prípade modrej čiary voči newtonovskej mechanike, čím došlo k tesnejšiemu priblíženiu k centrálnemu telesu. Naopak, v prípade zelenej čiary, ktorá reprezentuje buď hmotnejší, alebo kompaktnejší systém (záleží na tom, ktorý z parametrov u_ℓ a u_m škálujeme), dochádza k tlmeniu oscilácii excentricity a ostatných orbitálnych elementov a tým pádom, z dvojice zelenej a červenej čiary, dôjde k tesnejšiemu priblíženiu v prípade newtonovskej mechaniky.

V paneloch vpravo sa vplyvom PN aproximácie a KLM excentricita zvýši v oboch prípadoch (modrá a zelená čiara) voči newtonovskej mechanike. Najtesnejšie priblíženie tentokrát nastáva v prípade zelenej čiary, tj. kompaktniejšieho, resp. hmotnejšieho systému.

V týchto porovnaníach vidíme, že vplyv a "sila" relativity dokáže výrazným spôsobom zmeniť vývoj orbitálnych elementov a ich amplitúdy a tým pádom môže dôjsť k tesnejším priblíženiam, ako v prípade newtonovskej mechaniky.

2. Metóda a výsledky

2.1 Metóda

Na všetky simulácie, ktorých výsledky sú uvedené v tejto práci, bol využitý integrátor ARWV (Chassonnery a kol., 2019; Mikkola a Aarseth, 2002; Mikkola a Merritt, 2008). Integrátor umožňuje prácu v režime newtonovskej mechaniky a v režime PN aproximácie všeobecnej relativity do 2.5-tého radu.

Okrem štandardného vstupu do integrátora (hmotnosti častíc, počiatkové polohy a rýchlosti) sú súčasťou aj parametre ovplyvňujúce priebeh integrácie, mimo iné parametre `Type of units`, `Tolerance` a `Clight`.

Prvý (fyzikálny) parameter, `Type of units`, definuje jednotky vstupných dát. Prvou možnosťou je využitie astrofyzikálnych jednotiek (pc, M_\odot a km s^{-1}). Druhou možnosťou je voľba tzv. autonómnych jednotiek (u_ℓ a u_m), kde $G = 1$, odkiaľ plynie jednotka času u_t , resp. jednotka rýchlosti u_v (Chassonnery a kol., 2019)

$$u_t = \sqrt{\frac{u_\ell^3}{Gu_m}}, \quad u_v = \frac{u_\ell}{u_t} = \sqrt{\frac{Gu_m}{u_\ell}}. \quad (2.1)$$

Autonómne jednotky tým pádom umožňujú, na rozdiel od astrofyzikálnych jednotiek, interpretáciu výsledkov mnohými spôsobmi a preto bola táto možnosť využitá pri všetkých simuláciách. V prípade newtonovskej mechaniky neexistuje obmedzenie vo voľbe u_ℓ a u_m a preto môžu byť interpretované rôznymi spôsobmi. V prípade PN aproximácie teórie relativity je voľba jednotiek obmedzená rýchlosťou svetla, ktorú vyjadruje parameter `Clight`.

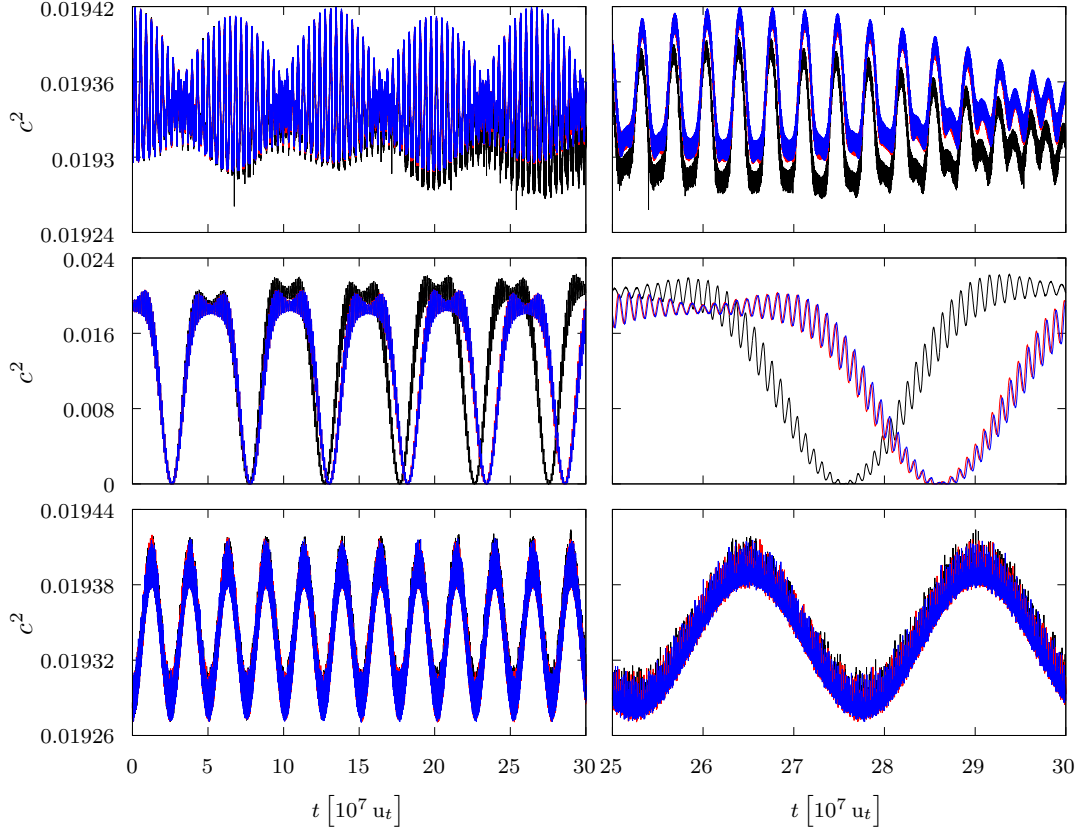
Druhým (fyzikálnym) parametrom je `Clight`, čo je parameter, ktorý vyjadruje rýchlosť svetla v autonómnych jednotkách. Jeho výpočet je daný vzťahom (Chassonnery a kol., 2019)

$$\text{Clight} = c \sqrt{\frac{u_\ell}{Gu_m}}, \quad (2.2)$$

kde c je rýchlosť svetla. Zo vzťahu (2.2) plynie, že systém je škálovaný podľa faktoru u_ℓ/u_m , ktorého zafixovaním je možné výsledky interpretovať mnohými spôsobmi. V prípade, že študovaným systémom je galaktické centrum, je výhodné uvažovať gravitačnú konštantu $G = 4\pi^2 \text{ au}^3 M_\odot \text{ yr}^{-2}$, jednotku hmotnosti rovnú hmotnosti Sgr A*, $u_m = 4 \times 10^6 M_\odot$ a jednotku vzdialenosti rovnú veľkosti hlavnej polosi S2, $u_\ell = 950 \text{ au}$. Dosadením týchto hodnôt a $c = 63\,240 \text{ au yr}^{-1}$ do vzťahu (2.2) dostávame `Clight` = 155. Voľnosť v interpretácii výsledkov podľa faktoru u_ℓ/u_m znamená, že rovnakú hodnotu parametru `Clight` by sme dostali aj v prípade, keby sme ako jednotku hmotnosti zvolili $u'_m = 1 M_\odot$ a vhodne preškálovali jednotku vzdialenosti. Zo vzťahu (2.2) plynie

$$u'_\ell = Gu_m \left(\frac{\text{Clight}}{c} \right)^2 \quad (2.3)$$

čo po dosadení `Clight` = 155 a $u'_m = 1 M_\odot$ dáva $u'_\ell \approx 2.37 \times 10^{-4} \text{ au}$. Tu je však nutné uvažovať, či je daná voľba dvojice u_ℓ a u_m aplikovateľná na reálne systémy. Voľba jednotiek motivovaná galaktickým centrom by preškálovaním odpovedala Slnčnej sústave (voľba $u_m = 1 M_\odot$), v ktorom by sa testovacia častica pohybovala



Obr. 2.1: Časový vývoj c^2 (vzťah (1.13)) s rôznymi nastaveniami parametra **Tolerance**. Čierna farba reprezentuje hodnotu 10^{-9} , červená 10^{-10} a modrá 10^{-11} . V paneloch vľavo sú znázornené vývoje c^2 na intervale $[0, 30] \times 10^7 u_t$ a v paneloch vpravo sú znázornené rovnaké vývoje na intervale $[25, 30] \times 10^7 u_t$. V prvom riadku je znázornený vývoj pre kruhovú poruchu, v druhom riadku vývoj pre excentrickú poruchu a v treťom riadku vývoj pre excentrickú poruchu v PN aproximácii v nastavení **Clight** = 155. Nastavenia systému sú: $M = 1 u_m$, $m_t = 10^{-6}$, $m_p = 10^{-3}$, $a_t = 1 u_\ell$, $a_p = 10 u_\ell$, $e_p^k = 0$, $e_p^e = 0.6$, $i_t = 80^\circ$, zvyšné orbitálne elementy sú rovné 0 a $u_t = \sqrt{u_\ell^3 / (G u_m)}$.

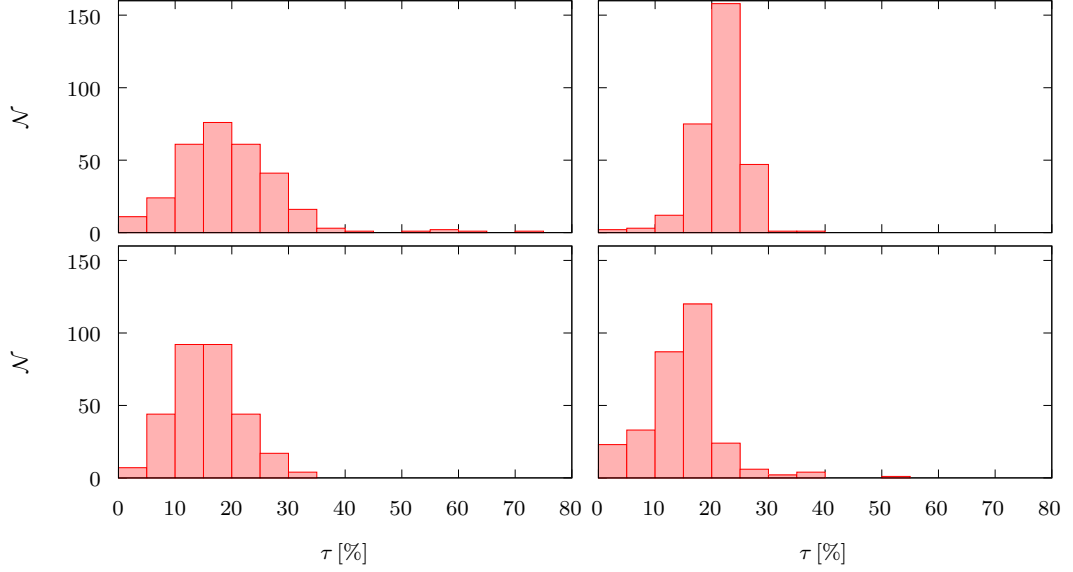
po dráhe, ktorej by odpovedala hlavná polos $a = 1/20 R_\odot$, kde R_\odot je polomer Slnka.

Tu vidíme, že voľba parametrov v skutočnosti odpovedá celej rodine systémov, ktoré spĺňajú podmienku

$$\frac{u_\ell}{u_m} = \frac{u'_\ell}{u'_m}. \quad (2.4)$$

Odtiaľ plynie, že interpretácia výsledkov je, napriek väčšiemu obmedzeniu, ako v prípade klasickej mechaniky, stále relatívne voľná a výsledky môžu byť aplikované na rôzne systémy.

Tretím (technickým) parametrom je **Tolerance**, ktorý ovplyvňuje presnosť a rýchlosť integrácie (presnejšie výsledky vedú k dlhším integráciám). Pred konečným rozhodnutím voľby tohto parametra bolo urobených 300 simulácií pre hodnoty 10^{-9} , 10^{-10} a 10^{-11} , ktorých reálny čas integrácie spĺňal predpoklady na



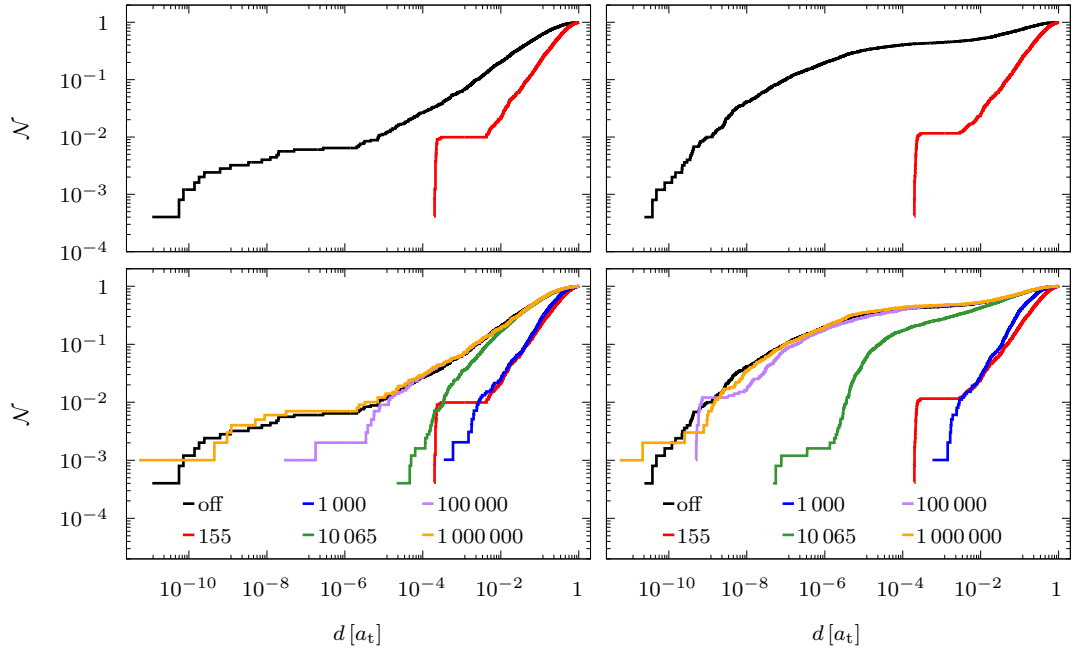
Obr. 2.2: Predĺženie času integrácie pri zmene parametra **Tolerance**. Panely hore odpovedajú predĺženiu integrácie pri zmene z 10^{-9} na 10^{-10} . Panely dole odpovedajú predĺženiu integrácie pri zmene z 10^{-10} na 10^{-11} . Panely vľavo odpovedajú systému s kruhovou poruchou, panely vpravo systému s eliptickou poruchou.

dokončenie dostatočného počtu simulácií na vytvorenie štatistického spracovania najtesnejších priblížení testovacej častice k dominantnému telesu sústavy troch telies. Na obr. 2.1 je (ako príklad) znázornený časový vývoj zložky orbitálneho momentu hybnosti, kolmého na referenčnú rovinu (vzťah (1.13)). V týchto testoch parametra **Tolerance** bola nastavená 2-krát dlhšia doba integrácie, ako v konečných testoch. V týchto porovnaníach, a mnohých ďalších, bol rozdiel medzi hodnotami **Tolerance** 10^{-10} a 10^{-11} veľmi malý a s prihliadnutím na obr. 2.2, kde je znázornené časové predĺženie integrácie (v percentách), pri rôznych hodnotách parametra, bolo usúdené, že presnosť **Tolerance** = 10^{-10} bude, s prihliadnutím na množstvo simulácií, dostačujúca.

2.2 Model

Študovaný systém pozostáva z troch telies, ktorých parametre boli motivované galaktickým centrom - supermasívnou čiernou drierou Sgr A* a okolo nej obiehajúcej hviezdy S2. Dominantné teleso sústavy má vo všetkých prípadoch hmotnosť $M = 1 u_m$ a nachádza sa v počiatku sústavy. Tretím telesom je porucha, ktorej hmotnosť je $m_p = 10^{-3} u_m$, hlavná polos $a_p = 10 u_\ell$ a excentricita $e_p^k = 0.0$ (kruhový Kozaiov-Lidovov mechanizmus), resp. $e_p^e = 0.6$ (excentrický Kozaiov-Lidovov mechanizmus). Hmotnosť testovacej častice, ktorá sa nachádzala medzi dominantným telesom sústavy a poruchou, je $m_t = 10^{-6} u_m$. Orbitálne elementy dráhy častice boli vygenerované náhodne z intervalov $a_t \in [0.5, 1.5] u_\ell$, $e_t \in (0, 1)$, $i \in (0, \pi)$, $\omega \in (0, 2\pi)$, $\Omega \in (0, 2\pi)$ a $\nu \in (0, 2\pi)$. Generovanie parametrov bolo navyše ovplyvnené vzťahmi $n(a) \propto a^{1/2}$ (motivované galaktickým centrom) a $n(e) \propto e$ (termálne rozdelenie - motivované galaktickým centrom).

Hmotnosť Sgr A* je $u_m \approx 4 \times 10^6 M_\odot$ a hlavná polos dráhy hviezdy S2 (testo-



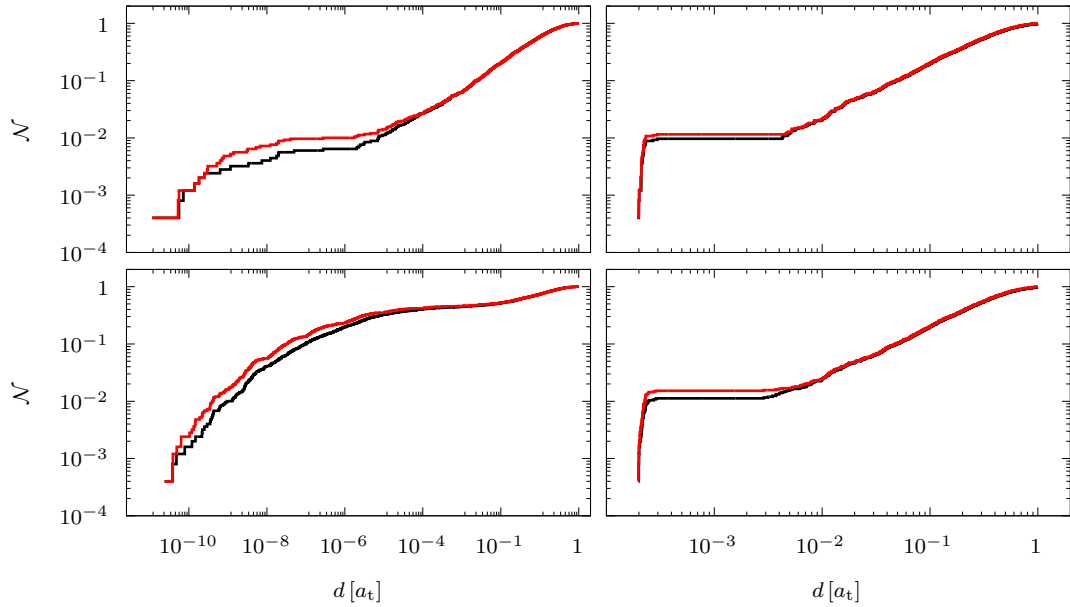
Obr. 2.3: Štatistické rozdelenie najtesnejších priblížení. Panel vľavo hore odpovedá systému motivovaný galaktickým centrom s kruhovou poruchou, panel vpravo hore odpovedá systému s eliptickou poruchou. Panel vľavo dole odpovedá rôznym nastaveniam parametra `Clight` v systéme s kruhovou poruchou, panel vpravo dole odpovedá rôznym nastaveniam parametra `Clight` v systéme s eliptickou poruchou.

vacej častice) je $u_\ell \approx 950$ au. Zo vzťahu (2.2) potom plynie, že parameter rýchlosti svetla bude v tomto nastavení `Clight` = 155. Ako bolo komentované v časti 2.1, zvolené parametre odpovedajú celej rodine systémov a preto môžu byť tieto nastavenia systému, za predpokladu splnenia vzťahu (2.4), interpretované mnohými ďalšími spôsobmi.

2.3 Výsledky

Výsledky práce pozostávajú z troch častí. Prvým výsledkom práce je štatistické spracovanie najtesnejších priblížení v hierarchickom trojčasticovom systéme motivovaným galaktickým centrom - supermasívnou čiernou dierou Sgr A* a okolo nej obiehajúcou hviezdou S2, ktorej vývoj bol naviac porušený stredne hmotnou čiernou dierou. Na zostavenie štatistiky bolo spracovaných 2 500 simulácií. Druhou časťou výsledkov je štatistické spracovanie najtesnejších priblížení v trojčasticovom systéme, pri rôznych nastaveniach parametra `Clight`, ktorého škálovanie odpovedá škálovaniu hmotností, resp. vzdialeností v systéme (viď Časť 2.1). Na zostavenie štatistiky bolo spracovaných 1 000 simulácií. V oboch prípadoch bola zvolená hodnota `Tolerance` = 10^{-10} . Tretou časťou výsledkov sú konvergenčné testy prvej časti výsledkov - konvergenčný test s dvojnásobným časom integrácie a konvergenčný test s vyššou presnosťou integrátora.

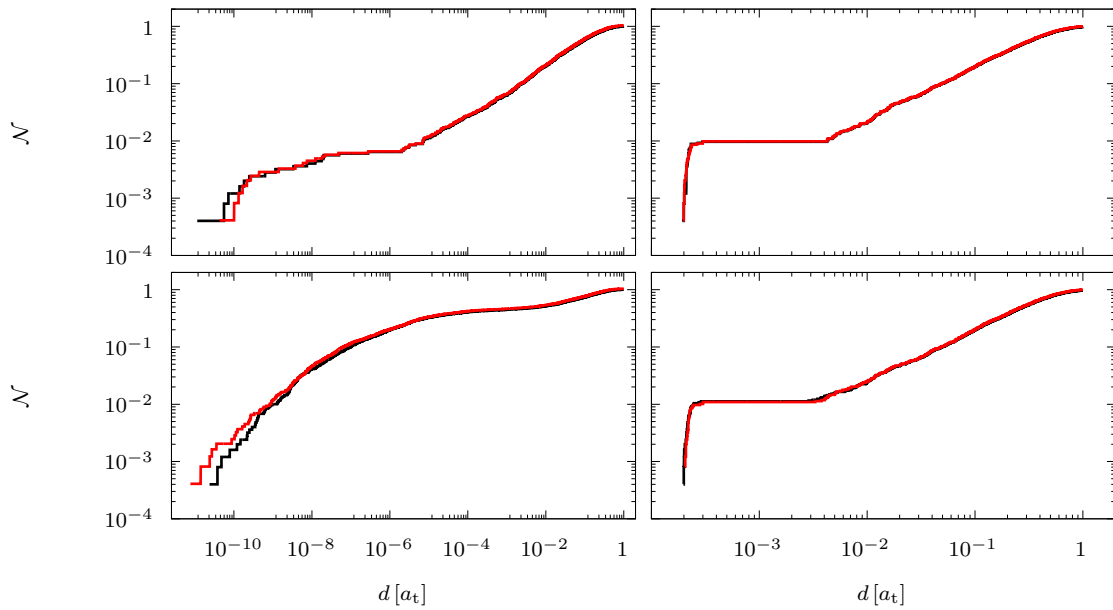
Na obr. 2.3 sú znázornené štatistické spracovania najtesnejších priblížení v trojčasticovom systéme a ich porovnanie medzi klasickou mechanikou a postne-



Obr. 2.4: Konvergenčný test. Čiernou farbou je znázornené štatistické rozdelenie najtesnejších priblížení na odhadnutej časovej škále, na ktorej by malo dôjsť k oktu-pólovému KLM. Červenou farbou je znázornené štatistické rozdelenie na dvojnásobnej časovej dĺžke integrácie. Panel vľavo hore odpovedá systému s kruhovou poruchou v klasickej mechanike, panel vpravo hore odpovedá systému s kruhovou poruchou v PN aproximácii teórie relativity. Panel vľavo dole odpovedá systému s eliptickou poruchou v klasickej mechanike, panel vpravo dole odpovedá systému s eliptickou poruchou v PN aproximácii teórie relativity.

wtonovskou aproximáciou teórie relativity. V porovnaní medzi vývojom v klasickej mechanike a postnewtonovskej aproximácii teórie relativity vidíme, že v rámci štatistiky, v tomto nastavení, relativita skutočne tlmí Kozaiove-Lidovove oscilácie a testovacia častica sa dostane k centrálnemu telesu bližšie v rámci newtonovskej mechaniky. Ako bolo očakávané, v prípade excentrického KLM dochádza k tesnejším priblíženiam ako v prípade poruchy pohybujúcej sa po kruhovej dráhe. Zaujímavá je však podobnosť medzi najtesnejšími priblíženiami v relativistickom režime. V takto silne relativistickom systéme sú Kozaiove-Lidovove oscilácie tak silne tlmené, že ani porucha pohybujúca sa po excentrickej dráhe neumožní ich dostatočný rast.

Na obr. 2.3 je v dolných paneloch znázornené štatistické spracovanie najtesnejších priblížení so škálovaným parametrom `Clight`. Vyššie hodnoty parametra `Clight` reprezentujú systémy, kde sa relativistické vplyvy prejavujú menej. Napriek tomu, že sa dajú nájsť vhodné počiatkové podmienky, pri ktorých relativistické vplyvy zvýšia excentricitu, čím dôjde k tesnejším priblíženiam (viď príklad na obr. 1.5), v týchto grafoch vidíme, že relativita (štatisticky) tlmí Kozaiove-Lidovove oscilácie. Dostatočným zoslabením relativistických vplyvov štatistika konverguje k priebehu v newtonovskej mechanike. Priebeh znázornený zelenou čiarou odpovedá, po preškálovaní, systému Slnko (centrálne teleso), Zem (testovacia častica) a porucha s hmotnosťou Jupitera nachádzajúca sa vo vzdia-



Obr. 2.5: Konvergenčný test. Čiernou farbou je znázornené štatistické rozdelenie najtesnejších priblížení pri nastavení parametra **Tolerance** = 10^{-10} . Červenou farbou je znázornené štatistické rozdelenie pri nastavení parametra **Tolerance** = 10^{-11} . Panel vľavo hore odpovedá systému s kruhovou poruchou v klasickej mechanike, panel vpravo hore odpovedá systému s kruhovou poruchou v PN aproximácii teórie relativity. Panel vľavo dole odpovedá systému s eliptickou poruchou v klasickej mechanike, panel vpravo dole odpovedá systému s eliptickou poruchou v PN aproximácii teórie relativity.

lenosti odpovedajúcej jeho 1.9-násobku veľkosti hlavnej polosi. Preškálovaním tohto systému (vzťah 2.3) na priebeh znázornený oranžovou čiarou, kde parameter **C_{light}** = 1 000 000, bude dĺžková jednotka $u_\ell \approx 10\,000$ au (tzn. systém, v ktorého centre je Slnko, vo vzdialenosti približne 10 000 au sa nachádza testovacie teleso - Zem, a vo vzdialenosti približne 100 000 au sa nachádza porucha s hmotnosťou Jupitera), čo radovo prevyšuje veľkosť Slnčnej sústavy. Takýto systém je však nereálny a tieto výsledky teda vedú k tomu, že (minimálne pre tieto počiatočné podmienky) relativita skutočne tlmí vývoj orbitálnych elementov dráhy testovacej častice a tým pádom štatisticky nedôjde k tak tesnému priblíženiu, ako v prípade newtonovskej mechaniky.

Prvým konvergenčným testom bola 2-krát predĺžená doba simulácii, ktorá mala ukázať, či bola odhadnutá časová škála nastavená na dostatočnú dĺžku. Výsledky sú spracované na obr. 2.4. Bolo očakávané, že tieto priebehy nebudú identické, ale mali skôr ukázať dostatočne podobný priebeh, za predpokladu dobre odhadnutej dĺžky simulácii, pri ktorých malo dôjsť k oktapólovému Kozaiovmu-Lidovovmu mechanizmu. Rôznosť priebehov je spôsobená technickými aj fyzikálnymi dôvodmi. Pri predĺžení doby simulácie sa prejavujú vplyvy integrátora, ktorý čísla zaokrúhľuje, čo môže viesť na rozdielny priebeh, predovšetkým na dlhších časových škálach, kde sa tieto zaokrúhlenia naakumulujú. Ďalej sú výsledky ovplyvnené tým, že v prípade post-newtonovskej aproximácie teórie relativity sa nezachováva veľkosť hlavnej polosi dráhy testovacej častice a môže tak, na do-

statočne dlhej dobe simulácie, dôjst k tesnejšiemu priblíženiu testovacej častice k centrálnemu telesu. V grafickom znázornení výsledkov je vidieť, že výsledky si sú relatívne podobné a počiatočne zvolená doba simulácie bola dostatočne dlhá.

Druhým konvergenčným testom bol test parametra **Tolerance**. Keďže ide o technický parameter integrátora, ktorý ovplyvňuje presnosť práce s číslami, môže tento parameter taktiež ovplyvniť presnosť na dlhších časových škálach. Z tohto dôvodu boli spracované výsledky s rovnakými počiatočnými podmienkami s vyššou presnosťou. Grafické spracovanie je znázornené na obr. 2.5. V paneloch vpravo (PN aproximácia teórie relativity) sú priebehy takmer identické, narozdiel od porovnania vľavo (newtonovská mechanika), kde sa výsledky spočiatku líšia. Keďže sa ukazuje, že pre počiatočné podmienky motivované galaktickým centrom, relativita tlmí Kozaiove-Lidovove oscilácie a tým pádom nedochádza k väčším vývojom orbitálnych elementov, väčšia presnosť integrácie výrazne neovplyvní štatistiku. Naopak v prípade newtonovskej mechaniky nie je vývoj orbitálnych elementov tlmený a má pre to zmysel zvoliť vyššiu presnosť. Ukazuje sa, že zmena medzi hodnotami 10^{-10} a 10^{-11} výrazne neovplyvňuje štatistiku, až na pár najnižších hodnôt, kde môžeme argumentovať, že ide o štatistiku malých čísel, ktorá spôsobuje jemné rozdiely. Samotné priebehy sú však dostatočne podobné a rôzne hodnoty presnosti integrátora na zvolenej dobe simulácie nevedú k zásadne rôznym výsledkom.

Záver

V tejto práci som skúmal dynamiku hierarchických trojčasticových systémov, konkrétne vývoj dráhy testovacej častice obiehajúcej okolo dominantného telesa sústavy, ktorá bola naviac porušená gravitačným vplyvom tretieho, dostatočne vzdialeného, telesa. Tento vývoj, Kozaiove-Lidovove oscilácie orbitálnych elementov, mení topológiu dráhy testovacej častice, ktorá sa líši v prípade newtonovskej mechaniky a teórie relativity. Preto bol zvolený prístup štatistického spracovania veľkého množstva dát, s rôznymi počiatočnými podmienkami, čo malo ukázať, či relativita tlmí, alebo naopak zvyšuje, tento vývoj. Na simulácie bol využitý integrátor ARWV, ktorého základná verzia simuluje (len) vývoj systémov a preto som kód upravil na hľadanie najtesnejších priblížení

Zo štatistického spracovania simulácii vývoja trojčasticového hierarchického systému, ktorého parametre boli motivované galaktickým centrom, som ukázal, že post-newtonovská aproximácia teórie relativity tlmí vývoj orbitálnych elementov dráhy testovacieho telesa. Napriek tomu, že sa dajú nájsť počiatočné podmienky, pri ktorých dôjde k tesnejšiemu priblíženiu, ukazuje sa, že testovacie teleso sa štatisticky dostane bližšie k dominantnému telesu sústavy v prípade newtonovskej mechaniky. Tento vývoj, a rozdiel medzi newtonovskou mechanikou a relativitou, je však silne závislý na počiatočných podmienkach, ktorých malá zmena môže viesť k zásadne rozličným priebehom a preto je nutné skúmať jednotlivé vývoje a ich porovnania medzi týmito dvoma režimami.

Miera tlmenia Kozaiovych-Lidovovych oscilácií je taktiež silne závislá na "sile" relativity. Ukázal som, že v kompaktnom a veľmi hmotnom systéme, galaktické centrum, je vývoj orbitálnych elementov silne tmený a štatistika kruhového a excentrického KLM je takmer totožná. Škálovaním hmotností, resp. vzdialeností, na menej relativistický systém, sa tmenie týchto oscilácii prejavuje menej a po dostatočnom preškálovaní systému takmer úplne zmizne.

Zoznam použitej literatúry

- ANTOIGNINI, J. M., SHAPPEE, B. J., THOMPSON, T. A. a AMARO-SEOANE, P. (2014). Rapid eccentricity oscillations and the mergers of compact objects in hierarchical triples. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **439**(1), 1079–1091.
- ANTONINI, F. a PERETS, H. B. (2012). Secular evolution of compact binaries near massive black holes: Gravitational wave sources and other exotica. *The Astrophysical Journal*, **757**(1), 27.
- ANTONINI, F., CHATTERJEE, S., RODRIGUEZ, C. L., MORSCHER, M., PATTABIRAMAN, B., KALOGERA, V. a RASIO, F. A. (2016). Black hole mergers and blue stragglers from hierarchical triples formed in globular clusters. *The Astrophysical Journal*, **816**(2), 65.
- BEUST, H., BONFILS, X., MONTAGNIER, G., DELFOSSE, X. a FORVEILLE, T. (2012). Dynamical evolution of the Gliese 436 planetary system. *Astronomy & Astrophysics*, **545**, A88.
- CHASSONNERY, P., CAPUZZO-DOLCETTA, R. a MIKKOLA, S. (2019). ARWV code user manual. URL <https://arxiv.org/abs/1910.05202>.
- CHEN, X., MADAU, P., SESANA, A. a LIU, F. K. (2009). Enhanced tidal disruption rates from massive black hole binaries. *The Astrophysical Journal*, **697**(2), L149–L152.
- GEORGAKARAKOS, N. (2008). Stability criteria for hierarchical triple systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **100**(2), 151–168.
- HAAS, J. a ŠUBR, L. (2021). Enhanced kozai–lidov eccentricity oscillations in nuclear star clusters. *The Astrophysical Journal*, **922**(1), 74.
- HARRINGTON, R. S. (1968). Dynamical evolution of triple stars. *The Astronomical Journal*, **73**, 190–194.
- HOANG, B.-M., NAOZ, S., KOCSIS, B., RASIO, F. A. a DOSOPOULOU, F. (2018). Black hole mergers in galactic nuclei induced by the eccentric kozai–lidov effect. *The Astrophysical Journal*, **856**(2), 140.
- KISELEVA, L. G., EGGLETON, P. P. a MIKKOLA, S. (1998). Tidal friction in triple stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **300**(1), 292–302.
- KOZAI, Y. (1962). Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *The Astronomical Journal*, **67**, 591–598.
- LIDOV, M. L. (1962). The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *Planetary and Space Science*, **9**(10), 719–759.

- LOUSTO, C. O. a NAKANO, H. (2008). Three-body equations of motion in successive post-Newtonian approximations. *Classical and Quantum Gravity*, **25**(19), 4419–4434.
- MIKKOLA, S. a AARSETH, S. (2002). A Time-Transformed Leapfrog Scheme. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **84**, 143–156.
- MIKKOLA, S. a MERRITT, D. (2008). Implementing few body algorithmic regularization with post-newtonian terms. *The Astronomical Journal*, **135**, 2398–2405.
- NAOZ, S. (2016). The Eccentric Kozai-Lidov Effect and Its Applications. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **54**, 441–489.
- NAOZ, S., FARR, W. M., LITHWICK, Y., RASIO, F. A. a TEYSSANDIER, J. (2011). Hot Jupiters from secular planet-planet interactions. *Nature*, **473** (7346), 187–189.
- NAOZ, S., FARR, W. M. a RASIO, F. A. (2012). On the Formation of Hot Jupiters in Stellar Binaries. *The Astrophysical Journal*, **754**(2), L36.
- NAOZ, S., FARR, W. M., LITHWICK, Y., RASIO, F. A. a TEYSSANDIER, J. (2013). Secular dynamics in hierarchical three-body systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **431**(3), 2155–2171.
- PETROVICH, C. (2015). Steady-state planet migration by the Kozai-Lidov mechanism in stellar binaries. *The Astrophysical Journal*, **799**(1), 27.
- WU, Y., MURRAY, N. W. a RAMSAHAI, J. M. (2007). Hot jupiters in binary star systems. *The Astrophysical Journal*, **670**(1), 820–825.