



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Alexandr Dizov

**Deformace Venuše v důsledku změny
povrchového zatížení**

Katedra geofyziky MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: FP (0533RA110001)

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Rád bych poděkoval svému vedoucímu práce za možnost vypracování své bakalářské práce pod jeho vedením, za zajímavé a aktuální téma a veškeré poznámky, připomínky, rady a vysvětlení k práci samotné a tomuto textu.

Název práce: Deformace Venuše v důsledku změny povrchového zatížení

Autor: Alexandr Dizov

Katedra: Katedra geofyziky MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Katedra geofyziky

Abstrakt: Na Venuši je možné provedením analýzy topografie, geoidu a jiných orbitálních měření nalézt dvě oblasti výrazně odlišné od svého okolí. Jedná se o oblasti Ishtar Terra a západní část oblasti Aphrodite Terra. Tyto oblasti jsou výrazně starší, tvořeny nebazaltickými horninami, vykazují nižší sopečnou aktivitu a výrazně nižší admitanci. Jednou z hypotéz je, že dané oblasti byly v dávných dobách kontinenty, jejichž okolí bylo následně zalito bazaltickou povodní. V rámci práce jsme provedli řadu numerických experimentů a stanovili, že daná hypotéza je možná, ovšem to pouze za předpokladu velké tloušťky litosféry, velké tloušťky kůry a vysoké viskozity litosféry. V části práce se také věnujeme možnosti toho, že některé menší útvary na Venuši (Tellus Regio, Imdr Regio) jsou vrcholy starých kontinentů, jež byly důsledkem bazaltické povodně plně zatopeny pod povrchem, ale z porovnání s daty z Venuše se ukazuje, že se o potopené kontinenty nejedná.

Klíčová slova: Venuše viskoelastická deformace numerické modelování gravitační potenciál

Title: Deformation of Venus in response to surface loading

Author: Alexandr Dizov

Department: Department of Geophysics

Supervisor: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Department of Geophysics

Abstract: Analysis of Venus' topography, geoid and other orbital measurements pinpoints two regions considerably different from their surroundings. Regions are Ishtar Terra and western parts of Aphrodite Terra. These regions are notably older, composed from non-basaltic rocks, show far less volcanic activity and relatively low admittance. One of hypotheses explaining such differences is that these regions are ancient continents and their surroundings were at one point flooded with basaltic magma. In this work we carry out series of numerical experiments and show that it is possible if we consider there is a thick, highly viscous lithosphere and thick crust. In parts of this work we also consider possibility, that some other regions (Tellus Regio, Imdr Regio) are hilltops of ancient continents, that were completely sunk by the basaltic flood, but after comparison with measured data from Venus we show it is not the case.

Keywords: Venus viscoelastic deformation numerical modeling gravitational potential

Obsah

Úvod	3
1 Stavba a povrch Venuše	5
1.1 Obecné fyzikální charakteristiky Venuše	5
1.2 Topografie a geoid Venuše	6
1.3 Povrch Venuše	7
1.4 Stáří povrchu	8
1.5 Oblasti Aphrodite Terra a Ishtar Terra	8
2 Užité metodika	13
2.1 Definice řešené úlohy	13
2.2 Časová diskretizace rovnic	14
2.3 Rozložení rovnic do báze sférických harmonických funkcí	14
2.4 Radiální diskretizace rovnic	16
2.5 Numerické řešení rovnic	18
3 Numerické experimenty	21
3.1 Vstupní parametry	21
3.2 Výstupní data	21
3.3 Modely popisující reakci na povrchové zatížení	22
3.3.1 Referenční model V5-1	22
3.3.2 Závislost na hustotě zátěže	22
3.3.3 Závislost na viskozitě	23
3.4 Modely relaxace kontinentů	25
3.5 Modely relaxace kontinentů s dodatečnou zátěží	26
3.5.1 Referenční model kontinentu A	26
3.5.2 Závislosti na množství a hustotě zátěže	26
3.5.3 Závislost na hustotním rozhraní	26
3.5.4 Model s konečnou topografií nulové velikosti	27
4 Diskuze výsledků	36
4.1 Velikosti zkoumaných útvarů na Venuši a typické hodnoty admittancí v těchto oblastech	36
4.2 Reakce Venuše na povrchové zatížení	36
4.3 Vývoj modelových kontinentů a porovnání s daty z Venuše	38
4.4 Zatopené prastaré kontinenty a jejich hledání	39
Závěr	41
Seznam použité literatury	42
Seznam obrázků	44
Seznam tabulek	45

A Přílohy	46
A.1 Zavedení sférických harmonických vektorů a tenzorů	47
A.2 Rozložení rovnic viskoelastické deformace do tvaru sférických harmonických řad	48
A.2.1 Užití vztahy	48
A.2.2 Rozložení rovnice kontinuity	48
A.2.3 Rozložení pohybové rovnice	49
A.2.4 Rozložení reologické rovnice	50
A.2.5 Rozložení na sferoidální a toroidální část	52
A.2.6 Tabulka užitých Wignerových 6j symbolů	54
A.3 Tabulka koeficientů řešené úlohy	55

Úvod

V minulých desetiletích proběhla řada misí zkoumajících Venuši. Nejpočetnější skupinu tvoří mise programu Veněra (Sovětský svaz, 1961-1983), které dokázaly zanalyzovat chemickou strukturu povrchu (silikáty) a atmosféry (převážně CO₂, vysoký obsah deuteria), leč nejpřesnější měření topografie a geoidu dodala až mise Magellan (NASA, 1990-1994). Topografii Venuše sonda Magellan naměřila s přesností 10-25 km v horizontálním směru a 80 m ve směru vertikálním. Geoid byl naměřen s přesností kolem 270 km čili do stupně 80 sférického harmonického rozvoje.

Analýzou těchto naměřených dat bylo učiněno několik klíčových závěrů. Prvním je absence deskové tektoniky na Venuši, tedy její kůra je v současnosti v některém jiném tektonickém režimu, nežli je kůra Země. Dále byly pozorovány některé topografické útvary, například pohoří Ishtar Terra či Afroditina země. Celkově topografie Venuše není plně izostaticky kompenzována, tedy geoid je obecně vyšší v místech s vyšší topografií. Nakonec analýzou impaktních kráterů bylo zjištěno, že povrch na Venuši vznikl poměrně nedávno a jeho stáří se pohybuje v rozmezí od 700 miliónů do 1 miliardy let. Zatímco na Zemi je povrch postupně obnovován právě deskovou tektonikou (starý povrch zaniká v subdukčních zónách a nový povrch vzniká na oceánských hřbetech), na Venuši je tento mechanismus neaktivní. Možným vysvětlením relativně mladého povrchu Venuše je jeho vznik při některém katastrofickém vzniku nového povrchu právě před 700 milióny až 1 miliardou let.

Atmosféra Venuše je velice hustá a povrchové teploty dosahují v průměru 737 K. Rotace Venuše je velice pomalá, dokonce pomalejší nežli jeden její oběh kolem Slunce. Vysoké teploty na povrchu jsou jedním z důvodů, proč nebylo možné měřit žádnou seismickou aktivitu na Venuši. Navíc je pravděpodobné, že útlum seismických vln v plášti Venuše bude výrazně silnější než na Zemi. Pokud by se podařilo umístit na povrch Venuše seismograf, jím naměřená data by proto zřejmě zahrnovala pouze signál ze zdrojů v blízkém okolí. Vzhledem k nízké rychlosti rotace Venuše je problematické provést měření momentu setrvačnosti, který nese významné informace o radiální struktuře Venuše (hustotní profil).

I přes náročnost studia Venuše se v nadcházejících letech chystá řada misí (EnVision, DAVINCI, VERITAS), které, kromě měření meteorologických jevů, mají přinést i výrazné zpřesnění dosavadních topografických a gravitačních dat. Tyto mise jsou podníceny zájmem o Venuši, který v posledních letech významně roste.

Venuše je v mnoha ohledech velice podobná Zemi. Povrch Venuše, stejně jako Země, je převážně tvořen silikáty. Obě planety jsou v habitabilním pásu našeho Slunce. Otázkou tedy je, proč přes veškeré své podobnosti byl vývoj Venuše natolik odlišný. Je možné, že byla Venuše kdysi podobná Zemi, na jejím povrchu se nalézaly kontinenty i oceány, ale před 700 milióny lety proběhlo planetární kataklyzma nejasné povahy, které celkově změnilo tektonický režim, a dnešní Ishtar Terra a Afroditina země jsou pozůstatky pradávných kontinentů?

V této práci zkoumáme gravitační a topografickou odezvu Venuše na dodatečné povrchové zatížení, kterým simulujeme kontinenty a zalití nížin vrstvou bazaltu. Cílem práce je určit, zda topografická a gravitační data obsahují infor-

mace o katastrofických událostech, při kterých vznikl nový povrch na Venuši. Za tímto účelem jsme v rámci práce vytvořili program umožňující numerické simulace a tímto programem jsme také řadu numerických experimentů provedli. V první kapitole se věnujeme Venuši a možnostem porovnání našich výsledků s naměřenými daty. Ve druhé kapitole se věnujeme metodice užitá v práci. Ve třetí kapitole popisujeme provedené numerické experimenty a ve čtvrté kapitole analyzujeme jejich výsledky.

1. Stavba a povrch Venuše

1.1 Obecné fyzikální charakteristiky Venuše

V této sekci se věnujeme ve značné míře faktografii a čerpáme převážně z publikací Rolf a kol. (2022) a Roth a Wall (2012).

Venuše je druhá planeta obíhající Slunce. Její hmotnost, rozměry a řada dalších parametrů jsou významně podobné Zemi, leč v mnoha ohledech je Venuše výrazně odlišná. Modelování Venuše je výrazně ztíženo omezeným množstvím geofyzikálních dat, jejichž přesnost je poměrně nízká a všechna dostupná data pocházejí z orbitálních měření. V tab. 1.1 uvádíme hodnoty význačných parametrů pro Venuši a Zemi, data byla převzata z Taylor a kol. (2018) a Williams (2023).

Tabulka 1.1: Porovnání astronomických a klimatických parametrů pro Venuši a Zemi

Parametr	Venuše	Země
Hmotnost [kg]	4.8673×10^{24}	5.9722×10^{24}
Průměrné povrchové zrychlení [ms^{-2}]	8.87	9.78
Průměrný poloměr [km]	6051.8	6371.0
Zploštění []	0.000	0.00335
Orbitální perioda [den]	224.701	365.256
Rotační perioda [hod]	5832.24	23.29345
Moment setrvačnosti (I/MR^2) []	0.337	0.3308
Hustota slunečního výkonu [W/m^2]	2601.3	1361.0
Tlak atmosféry [Pa]	9.2×10^6	1.01325×10^6
Průměrná teplota atmosféry [K]	737	288
Teplota absolutně černého tělesa [K]	226.6	254.0
Planetární albedo []	0.689	0.434

Jak vidíme z tabulky, hodnoty hmotnosti, poloměru, a odtud i gravitačního zrychlení jsou pro obě tělesa výrazně podobné. Plášť Venuše je, stejně jako zemský, tvořen výhradně silikáty, jádro je tvořeno slitinou niklu a železa. Nejasné je však skupenství a příměsi jádra, jelikož obojí má význačný vliv na generaci magnetického pole, které ovšem na Venuši nepozorujeme. Porovnáme-li však zploštění a rotační periody obou planet vidíme, že zde pozorujeme význačné rozdíly, navíc Venuše rotuje opačným směrem nežli Země. Velmi nízká rotační rychlost Venuše však význačně komplikuje nalezení momentu setrvačnosti, jelikož ten je měřen na základě měření zploštění, které je na Venuši velmi malé. Výsledně se tedy uvádí relativní velikost momentu setrvačnosti jako 0.337, leč měření poukazují na hodnoty v rozmezí od 0.327 do 0.342, což je pro danou veličinu velmi vysoký rozptyl. Z toho důvodu je přesné určení radiální struktury Venuše velmi náročný úkol a měřené hodnoty připouští širokou škálu možných hustotních profilů, což je studováno například v práci Dumoulin a kol. (2017). Stejně vysoké nejistoty měření nastávají i u měření Loveových čísel (Saliby a kol., 2023).

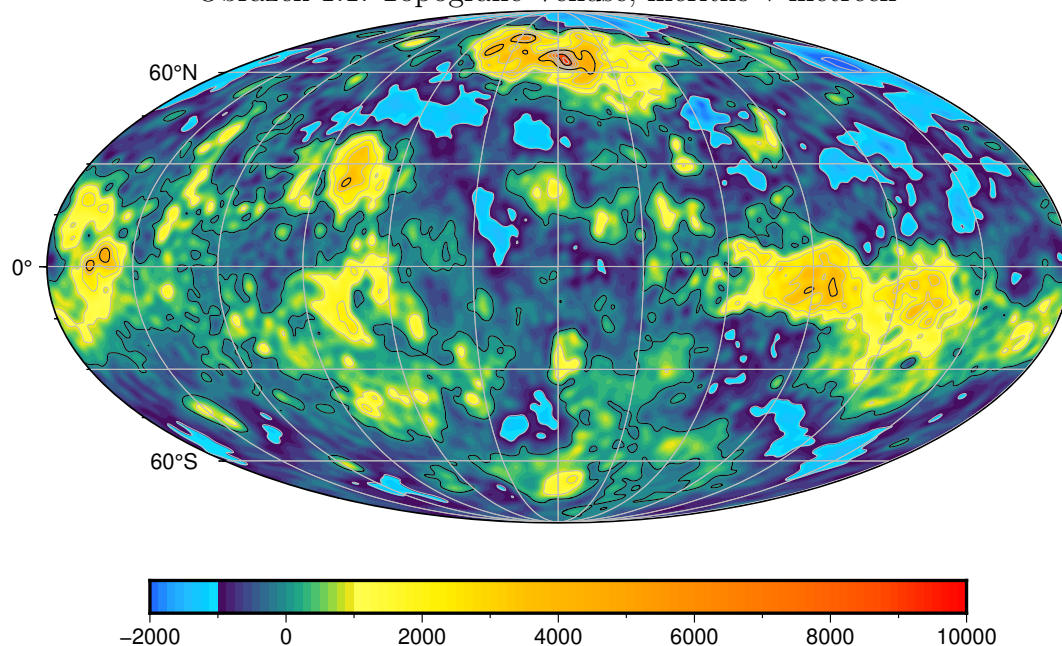
Význačné rozdíly můžeme pozorovat převážně u klimatických parametrů – atmosféra Venuše je výrazně hustější a teplejší, a to i přes vysoké planetární albedo.

Vysoké teploty jsou tedy primárně způsobeny silným skleníkovým efektem, což pozorujeme například při porovnání průměrné teploty atmosféry Venuše a teploty absolutně černého tělesa odpovídající Venuši. Dále se jeví, že na povrchu ani v atmosféře není přítomna voda, což je opět výrazný rozdíl mezi klimatem Země a Venuše. I přesto, že klima není středem našeho zájmu v této práci, povrch planety ovlivňuje děje v plášti a přítomnost (či absence) vody mohou významně ovlivnit viskozitu materiálu kůry a i pláště, a tedy i vliv na vývoj pláště, což je detailně studováno například v práci Taylor a kol. (2018). Vzhledem ke zvýšené koncentraci deuteria na povrchu a absenci vody, v této práci předpokládáme, že voda není ani ukryta nikde v plášti. Nepřítomnost vody vede na zvýšení viskozity, tedy v modelech dovolujeme vyšší hodnoty viskozity materiálů pláště, než pozorujeme na Zemi, stejně jako v práci Saliby a kol. (2023). Současné modely Země udávají viskozitu pláště v rozmezí od 10^{20} Pa s až 10^{24} Pa s.

1.2 Topografie a geoid Venuše

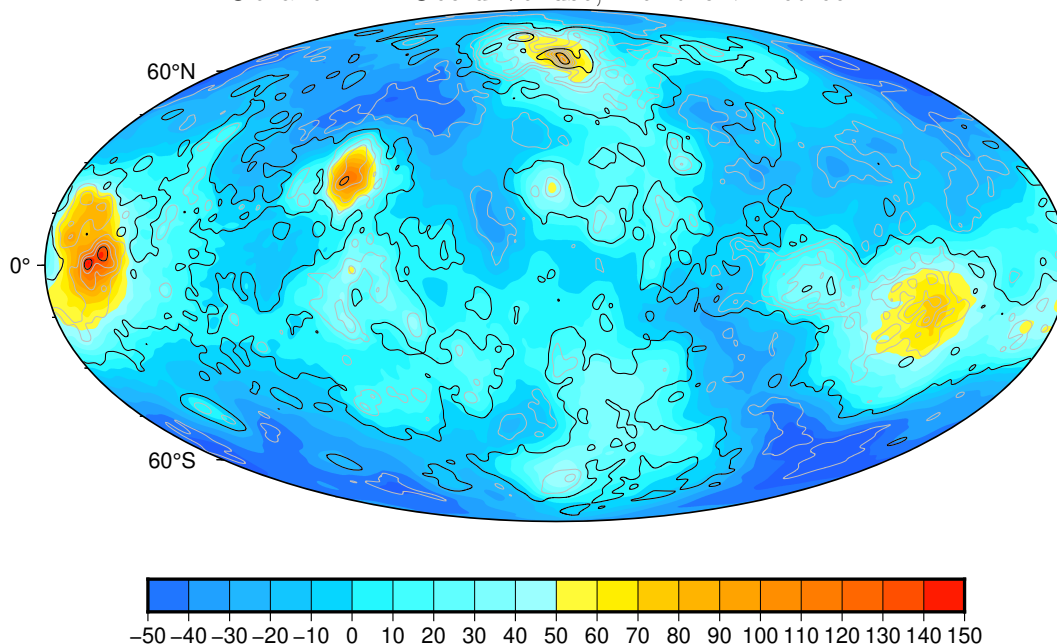
Mise Magellan (1991–1994) poskytla data v koeficientech sférického harmonického rozvoje. V této práci užíváme koeficientů do stupně 80. Útvary, jimiž se zabýváme, odpovídají přibližně stupni 10 až 16, tedy námi zvolené rozlišení je dostačující. Získané mapy topografie uvádíme na obr. 1.1 a geoidu na obr. 1.2, data byla převzata z Magellan (1997).

Obrázek 1.1: Topografie Venuše, měřítko v metrech



Pro jednodušší popis map dále uvažujeme pozemskou terminologii (i přesto, že rotace Venuše probíhá v opačném směru), tedy termínem "sever" označujeme oblast mapy s $\theta \rightarrow 90^\circ \text{N}$ (tedy tu oblast, kterou bychom nazvali severem, pokud by se jednalo o Zemi, na mapě nahoře), termínem "jih" označujeme oblast $\theta \rightarrow 90^\circ \text{S}$, termínem "východ" označujeme oblast $\phi \rightarrow 180^\circ \text{E}$ (na mapě vpravo) a "západ" označuje $\phi \rightarrow 180^\circ \text{W}$ (na mapě vlevo).

Obrázek 1.2: Geoid Venuše, měřítko v metrech



1.3 Povrch Venuše

Jak ukázala měření, rozumnou výškovou klasifikaci představuje členění povrchu na nížiny, planiny a vysočiny. Významné oblasti označované jako vysočiny jsou Ishtar Terra (vysočina na severu Venuše, kolem 60 °N a 0 °E), Aphrodite Terra (vysočina ve východní části ekvatoriální oblasti, kolem 0 °N a 90 °E) a Lada Terra (vyvýšeniny na jihu, kolem 60 °S a 0 °E). Mezi vysočiny jsou také řazeny Beta Regio, Phoebe Regio a Themis Regio, které tvoří pás vyvýšenin od severu k jihu mezi poledníky 90 °W a 60 °W a Atla Regio (na mapě úplně na západě, mezi 30 °N a 30 °S a 180 °W a 150 °W).

Radarová měření dodala informace o hladkosti povrchu a ukazuje se, že povrch je nejrovnější v oblastech nížin, naopak nejméně rovný (což odpovídá vysokému množství trhlin a jiných deformací) je povrch v oblastech Ishtar Terra, Aphrodite Terra, Lada Terra a Atla Regio. Největší sklon povrchu pozorujeme v oblastech Aphrodite Terra, Atla Regio, Beta Regio a Phoebe Regio.

Odrazivost povrchu Venuše je vyšší, nežli je odrazivost Marsu či Měsíce. Měření odrazivosti povrchu, který pro povrchový materiál dovoluje určit elektrickou permitivitu a odtud dále i přibližné geologické složení povrchu, a tedy i povrchovou hustotu, vedou na zjištění, že naprostá většina povrchu Venuše je pravděpodobně tvořena těžkými bazaltickými horninami. Výjimku tvoří nejvyšší oblasti Aphrodite Terra, Atla a Beta Regio a hlavně centrální část Ishtar Terra (centrální pohoří je nazýváno Maxwell Montes), které vykazují výrazně vyšší odrazivost, tedy jsou tvořeny jinými (lehčími) horninami.

Pasivní radarová měření dodala mapu emisivity Venuše. Opět u většiny povrchu byla naměřena vysoká emisivita (až 0.9), leč v již zmíněných vyvýšených oblastech je emisivita výrazně nižší (0.3), což opět odpovídá jinému geologickému složení. Pro nížiny vede měření emisivity opět na bazaltické horniny.

Analýzou snímků povrchu dodaných misí Magellan bylo na Venuši nalezeno několik typů povrchových útvarů, jako jsou impaktní krátery, sopky, coroneae,

novae, rifty a jiné.

Charakter a počet impaktních kráterů je na Venuši výrazně odlišný od kráterů na jiných tělesech sluneční soustavy. Na Venuši chybí krátery malých rozměrů, což je vysvětlováno vysokou hustotou atmosféry, v níž malé asteroidy shoří ještě před dopadem. Počet kráterů zůstává i tak relativně malý (mise Magellan našla kolem 900 kráterů, přibližně devět krát více, než mise předcházející). Samotné krátery vykazují další netypické charakteristiky, jako jsou například výtoky (dlouhé až 600 km), které jsou pravděpodobně způsobeny natavením horniny v oblasti dopadu a jejím následným výtokem z kráteru, což je umožněno vysokou teplotou povrchu. Také jsou pozorovány efekty kolem kráterů, které vznikají nejspíše rázovými vlnami v atmosféře. Současně nalézáme charakteristické útvary, způsobené rázovými vlnami a pozůstatky asteroidů, které shořely v atmosféře. Zajímavou vlastností kráterů na Venuši je jejich relativní netknutost, která může poukazovat na vysokou viskozitu materiálu na povrchu.

Sopky na Venuši jsou opět výrazně odlišné od sopek v jiných oblastech Sluneční soustavy. Jejich charakteristická výška dosahuje nejvýše 1.5 km, ale magmatické řeky a jezera se rozprostírají na desítky až stovky kilometrů od středu sopky. Dle posledních dat je počet sopek na Venuši kolem 85 tisíc a naprostá většina z nich se nachází v oblastech mimo Ishtar Terra a Aphrodite Terra. Přítomny jsou také rifty, které se vyskytují ve východní části Aphrodite Terra a v oblasti Atla Regio (Hahn a Byrne, 2023).

1.4 Stáří povrchu

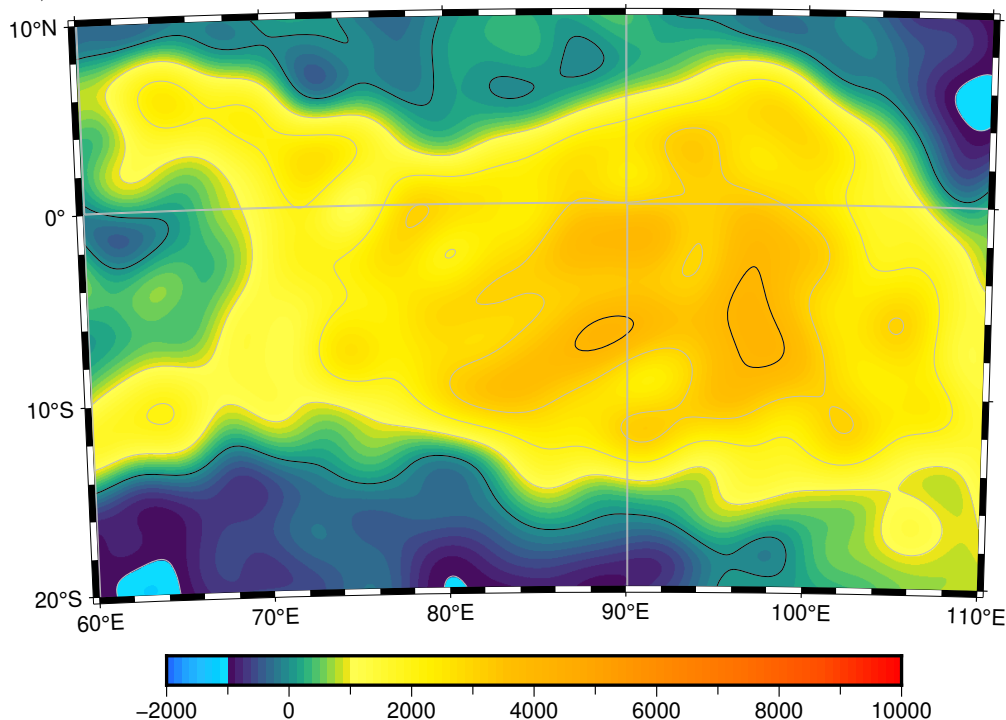
Zdrojem informací o stáří jednotlivých oblastí na povrchu Venuše může sloužit kráterová statistika. Pádem meteoritu vzniká impaktní kráter, který zůstává viditelný na povrchu i po mnohých miliónech let, leč pokud dochází k zalití dané oblasti magmatem, impaktní krátery v dané oblasti zanikají. Místa s vysokou hustotou kráterů jsou tedy výrazně starší nežli místa s nízkou hustotou. Na Venuši pozorujeme výrazně vyšší hustotu impaktních kráterů v oblastech Aphrodite Terra a i Ishtar Terra, naopak nízká je v oblastech okolních nížin. Toto naznačuje, že stáří povrchu v nížinách je zhruba 700 miliónů let, zatímco Ishtar Terra a Aphrodite Terra jsou výrazně starší (viz např. Price a Suppe, 1995).

1.5 Oblasti Aphrodite Terra a Ishtar Terra

Jak již z předchozí sekce vyplývá, oblasti vysočin jsou v mnoha ohledech výrazně odlišné od zbytku povrchu. Nejvýznamnější z těchto oblastí jsou nazývány Terry (v překladu "země") a Regia. Terry jsou uvažovány tři - Aphrodite Terra v ekvatoriálním pásu, Ishtar Terra v severní oblasti a Lada Terra v jižní oblasti. Planeta Venuše obdržela své jméno podle římské bohyně krásy, a tak se v této tradici pokračovalo: Aphrodite Terra obdržela své jméno od řecké bohyně krásy, Ishtar Terra od množiny mezopotámských bohyň krásy a Lada Terra od slovanské bohyně krásy.

V naší práci se věnujeme převážně oblastem Ishtar Terra a Aphrodite Terra. Regionální mapy topografie obou oblastí uvádíme na obr. 1.3 a 1.4.

Obrázek 1.3: Regionální mapa topografie Venuše pro západní oblast Aphrodite Terra, měřítko v metrech



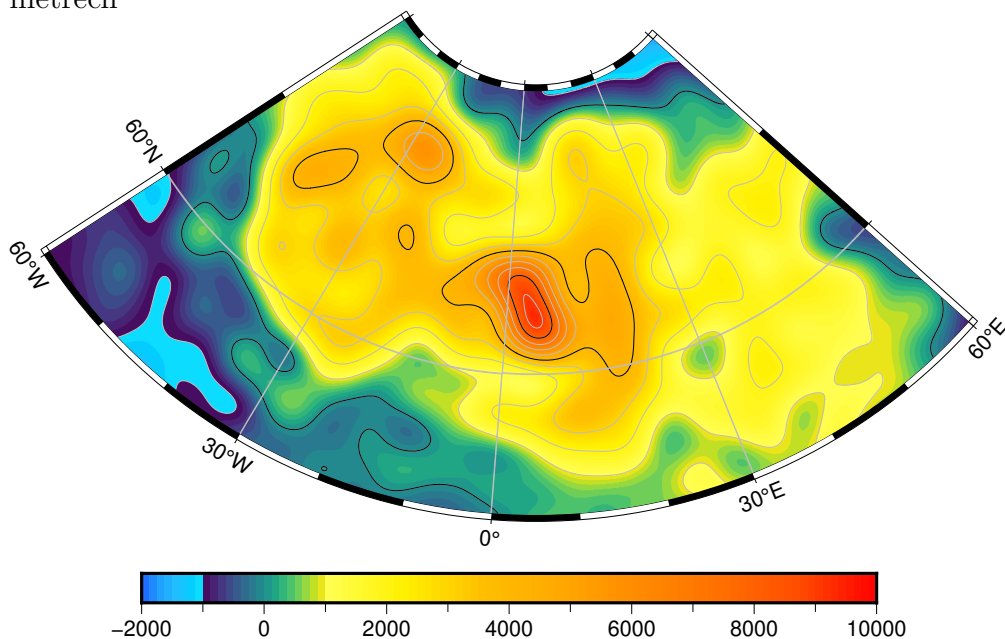
Význačné se tyto oblasti jeví hned z mnoha důvodů – jsou, jak již bylo řečeno, vysoké, vrásčité, mají výrazně jiné geologické složení a jsou významně starší. Nižší vulkanická aktivita v těchto oblastech také může poukazovat na vyšší tloušťku kůry. Další výraznou odlišnost nalezneme, pokud vytvoříme mapu lokální admittance. Lokální admittance definujeme jako:

$$A(\theta, \phi) = \frac{h(\theta, \phi)}{t(\theta, \phi)},$$

kde θ, ϕ jsou zeměpisná šířka a délka, A je lokální admittance, t je topografie a h je výška geoidu. Mapu lokální admittance uvádíme na obr. 1.5.

Na mapě pozorujeme výrazné oblasti přesycené stupnice (červená a modrá) a oblasti přechodu dvojího typu – ostrý přechod, způsobený přechodem topografie přes hodnotu 0, a pozvolný přechod, způsobený přechodem geoidu přes hodnotu 0. Kromě takových přirozených oblastí však také pozorujeme několik oblastí s anomálně nízkou admittancí. Nejvýraznější z nich je právě západní oblast Aphrodite Terra, kde se admittance pohybuje v rozmezí od 0.008 do 0.012. Další oblastí je právě Ishtar Terra s podobnými hodnotami admittance a zajímavými oblastmi jsou menší Tellus Regio (jihovýchodně od Ishtar Terra, severně od Aphrodite Terra) a Imdr Regio (jižně od Atla Regio). Jedná se tedy o oblasti s anomálně nízkou admittancí. Geoid Venuše můžeme pro zjasnění významu nalezených anomálií rozložit na korelovanou a nekorelovanou část, jak je popsáno v Simons a kol. (1997):

Obrázek 1.4: Regionální mapa topografie Venuše pro Ishtar Terra, měřítko v metrech



$$A_j = \frac{\sum_{m=-j}^j h_{jm} t_{jm}^*}{\sum_{m=-j}^j t_{jm} t_{jm}^*}, \quad (1.1)$$

$$h_{jm}^{(c)} = A_j t_{jm}, \quad (1.2)$$

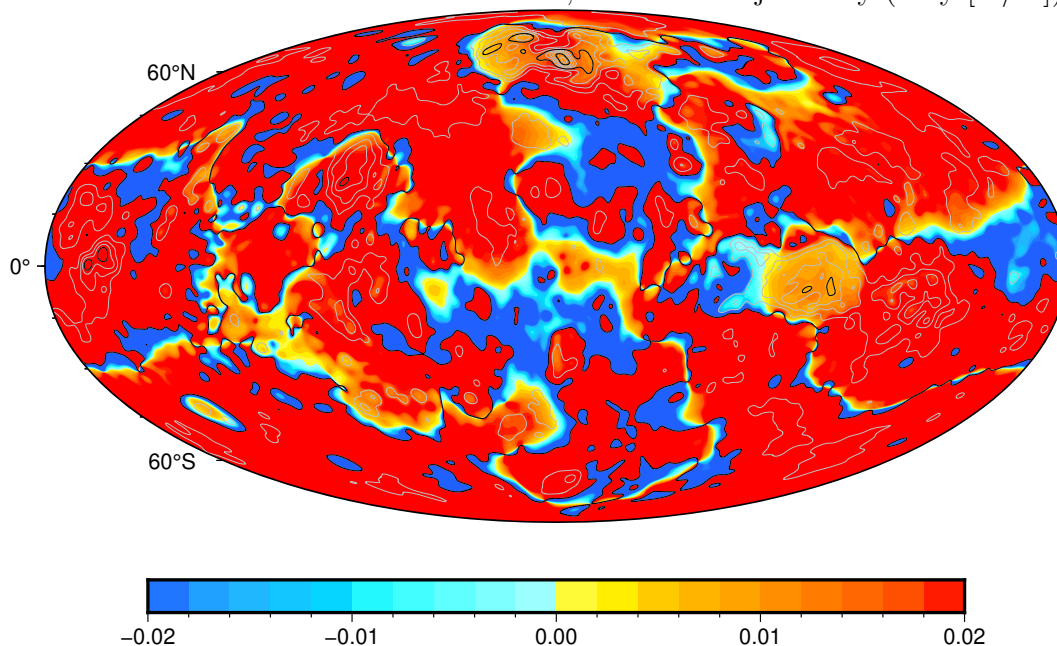
$$h_{jm}^{(n)} = h_{jm} - h_{jm}^{(c)}, \quad (1.3)$$

kde jedním spodním indexem vyznačujeme stupeň sférického harmonického rozvoje, dvěma indexy udáváme stupeň a řád dané veličiny, $h^{(c)}$ je korelovaná část geoidu a $h^{(n)}$ je nekorelovaná část geoidu. Mapy rozložení na korelovanou a nekorelovanou částí uvádíme na obr. 1.6 a 1.7.

Jak pozorujeme z korelované části geoidu v oblastech s vysokou topografií (Ishtar Terra, Aphrodite Terra) dodatečná hmota na povrchu generuje kladné anomálie gravitačního pole, což je přirozené očekávat, leč ve stejných oblastech v nekorelované části geoidu nalzáme záporné anomálie. Na Zemi jsou takové anomálie způsobeny kořeny kontinentů a daný fenomén je označován jako izostatická kompenzace, která je však přímo spojena s deskovou tektonikou. Otázkou, kterou se tedy v této práci zabýváme, je, zda tyto dva regiony (tyto dvě oblasti) jsou izostaticky kompenzovány (stejným mechanismem, jako na Zemi) a tedy zda se jedná o pozůstatky někdejších kontinentů. Ke stejnému možnému závěru také přispívá oblast Maxwell Montes v Ishtar Terra a jiná vysoká pohoří, která nejspíše vznikla podobně, jako Himaláje, tedy výrazným horizontálním posuvem hornin na povrchu, jak zmiňuje Smrekar a kol. (2018).

Dále také víme, že jsou tvořeny pravděpodobně lehčími horninami, než jsou okolní bazaltické nížiny, a jejich stáří je výrazně vyšší, nežli stáří nížin. Bazalt v nížinách tedy vznikl výrazně později, než Ishtar Terra či Aphrodite Terra. V této

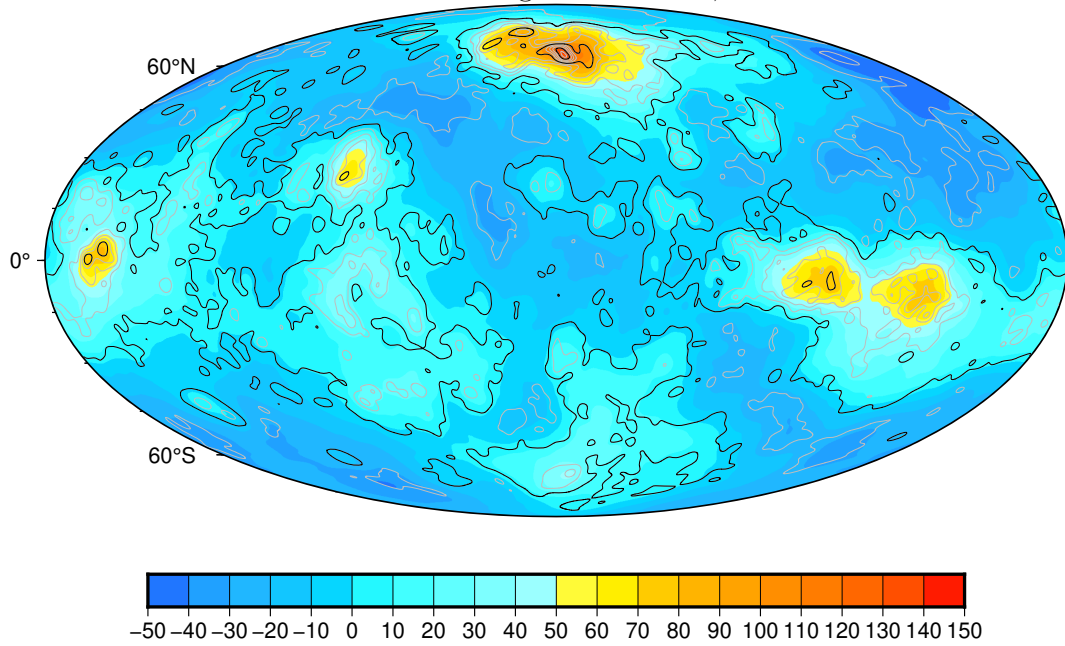
Obrázek 1.5: Lokální admittance Venuše, měřítko bez jednotky (tedy [m/m])



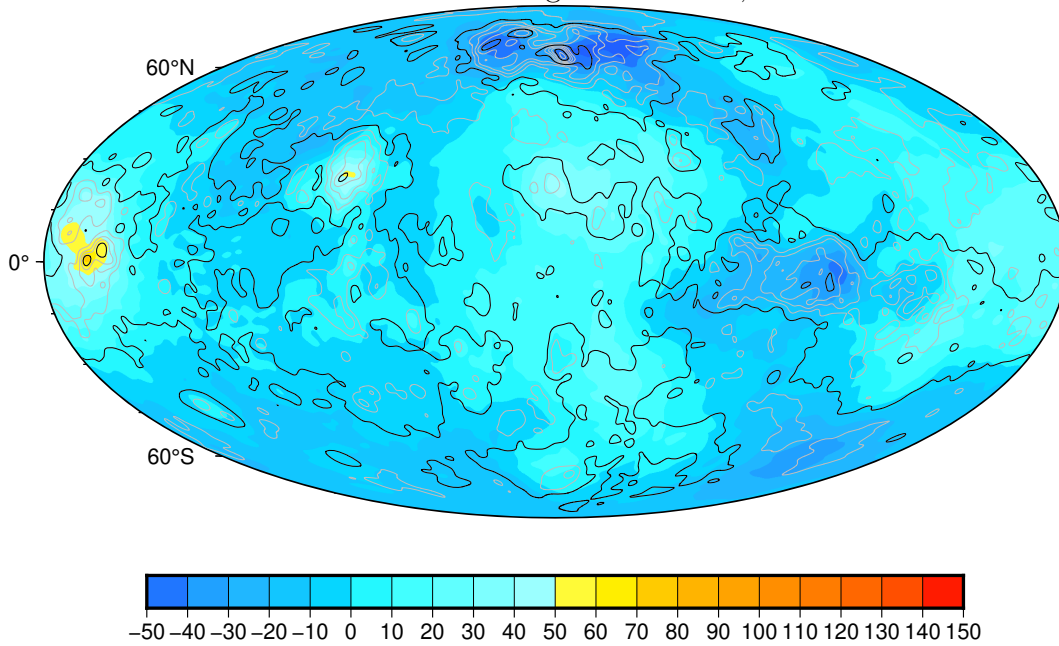
práci se tedy také zabýváme možnostmi, že došlo k náhlému vyvržení bazaltického materiálu v nížinách, a vlivu takového děje na gravitační odezvu a viditelnost kořene v oblastech Ishtar Terra a Aphrodite Terra. Způsobům, kterými mohlo dojít k vyvržení bazaltu na povrch, se v této práci nevěnujeme, ale celkově se uvažují dvě hypotézy: pozvolné zalévání povrchu bazaltem ze sopek, coronaí, riftů a jiných povrchových projevů aktivity pláště, nebo náhlé (katastrofické) vyvržení ohromného množství bazaltu formou bazaltické povodně. V naší práci se věnujeme druhé hypotéze, tedy zkoumáme vliv bazaltické povodně na kontinenty. Je ovšem možné tuto práci přeformulovat a ověřit hypotézu první, což ale pravděpodobně nepovede na výrazně odlišné výsledky.

Numerickou simulací izostáze modelových kontinentů, které jsou rozměrově podobné oblastem Ishtar Terra a Aphrodite Terra, a následným zalitím jejich okolí jsme schopni simulovat vývoj topografie, geoidu a výsledné charakteristické průběhy admittance. Tyto výsledky následně můžeme kvalitativně i kvantitativně porovnat s hodnotami topografie, geoidu a admittance v námi zkoumaných oblastech Ishtar Terra a Aphrodite Terra.

Obrázek 1.6: Korelovaná část geoidu Venuše, měřítko v metrech



Obrázek 1.7: Nekorelovaná část geoidu Venuše, měřítko v metrech



2. Užité metodika

V této kapitole popisujeme metodu, jíž jsme prováděli veškeré naše numerické experimenty. V první části popisujeme zkoumanou úlohu, uvádíme řešené rovnice, zkoumanou oblast a okrajové a počáteční podmínky. Ve druhé části získané rovnice diskretizujeme v čase. V další části se věnujeme rozložení řešeného problému do sférických harmonických funkcí. V poslední části této kapitoly provádíme radiální diskretizaci řešeného problému a uvádíme celkovou sadu rovnic, jež je užita při tvorbě programu.

2.1 Definice řešené úlohy

Plášť Venuše popisujeme jako nestlačitelnou viskoelastickou slupku s radiálně závislými modulem torze, viskozitou a hustotou. Úlohu popisujeme eulerovsky v přednapjatém stavu. Rovnice, jimiž modelujeme chování, jsou:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{t} + \frac{d\rho}{dr} u_r g \vec{e}_r = \vec{0}, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{2\mu} \mathbf{t}^D - \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right] = - \int_0^t \frac{1}{2\eta} \mathbf{t}^D(t') dt', \quad (2.3)$$

kde \vec{u} je vektor posunutí, \mathbf{t} je přírůstek Cauchyho tenzoru napětí v přednapjatém prostředí a \mathbf{t}^D je jeho deviátor, μ je modul torze, η je viskozita, ρ je hustota, g je střední hodnota gravitačního zrychlení na daném poloměru (uvažujeme kladnou hodnotu), u_r je radiální posunutí, \vec{e}_r je radiální jednotkový vektor (Martinec, 2019).

Rovnice (2.1) je rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu. Rovnice (2.2) je pohybová rovnice pro kontinuum v daném bodě. Druhý člen odpovídá vztlakové síle působící na kontinuum v důsledku posunutí hustotního profilu v daném bodě. V pohybové rovnici, vzhledem k nízké rychlosti deformace, zanedbáváme setrvačné síly. Rovnice (2.3) je konstitutivní vztah pro maxwellovský viskoelastický materiál. Profil gravitačního zrychlení počítáme z vybraného hustotního profilu a dále zanedbáváme self-gravitaci, tedy změny gravitačního pole, které jsou způsobeny deformací tělesa (a tedy i deformací hustotního profilu).

Úlohu řešíme v oblasti omezené dvěma koncentrickými sférickými hranicemi. Vnitřní hranice v našem modelu reprezentuje rozhraní jádro-plášť referenčního sféricky symetrického modelu Venuše. Vnější hranice reprezentuje povrch referenčního modelu Venuše. Na hranicích uvažujeme napětové hraniční podmínky ve tvaru:

$$-\mathbf{t} \cdot \vec{e}_r + \Delta \rho g u_r \vec{e}_r = \vec{0}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{t} \cdot \vec{e}_r + \rho_p g u_r \vec{e}_r = \vec{F}, \quad (2.5)$$

kde $\Delta\rho$ je hustotní skok na rozhraní jádro-plášť, ρ_p je hustota na povrchu tělesa a \vec{F} je plošné zatížení na horní hranici. První členy v (2.4) a (2.5) odpovídají trakčním vektorům na hranicích a druhé členy popisují plošnou sílu působící na hranici způsobovanou dynamickou topografií. Rozdílná znaménka u prvních členů jsou způsobena rozdílnými znaménky směru normály na obou rozhraních, na vnitřním rozhraní je $\vec{n} = -\vec{e}_r$, na vnějším rozhraní je $\vec{n} = \vec{e}_r$.

Naše úloha je tedy popsána rovnicemi (2.1) až (2.3) a okrajové podmínky na hranicích uvažujeme ve formě (2.4) a (2.5).

2.2 Časová diskretizace rovnic

Časovou integraci provedeme užitím Eulerovy implicitní metody s konstantním časovým krokem. Čas tedy diskretizujeme časovými úseky délky Δt . Rovnice (2.1), (2.2) a okrajové podmínky (2.5) a (2.4) neobsahují explicitně čas, tedy je budeme řešit v každém časovém kroku. Integrál v rovnici (2.3) aproximujeme lichoběžníkovým pravidlem a poslední sčítanec sumy převedeme na levou stranu. Takovým způsobem získáme soustavu lineárních diferenciálních rovnic s časově závislou pravou stranou. Časově diskretizované rovnice modelu v n -tém časovém kroku lze zapsat takto:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_n = 0 \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{t}_n + \frac{d\rho}{dr} u_{rn} g \vec{e}_r = \vec{0} \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta} \right) \mathbf{t}_n^D - \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla} \vec{u}_n + \left(\vec{\nabla} \vec{u}_n \right)^T \right] = -\frac{\Delta t}{4\eta} \mathbf{t}_0^D - \frac{\Delta t}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{t}_k^D, \quad (2.8)$$

$$-\mathbf{t}_n \cdot \vec{e}_r + \Delta\rho g u_{rn} \vec{e}_r = \vec{0}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{t}_n \cdot \vec{e}_r + \rho_p g u_{rn} \vec{e}_r = \vec{F}_n, \quad (2.10)$$

kde dolním indexem n značíme hodnotu veličiny v n -tém časovém kroku. Veličina \mathbf{t}_0^D odpovídá deviatoru napětí před počátkem relaxačních dějů v materiálu (tedy napětí při elastické deformaci tělesa).

2.3 Rozložení rovnic do báze sférických harmonických funkcí

Rovnice (2.6) až (2.10) jsou soustavou parciálních diferenciálních rovnic závislou na r , θ a ϕ . Tuto soustavu diskretizujeme spektrálně v proměnných θ , ϕ a metodou konečných diferencí v proměnné r .

Níže uvádíme spektrální rozklad posunutí \vec{u}_n , tenzoru napětí \mathbf{t}_n a povrchové zátěže \vec{F}_n :

$$\vec{u}_n(r, \theta, \phi) = \sum_{j=0}^N \sum_{m=-j}^j \sum_{l=|j-1|}^{j+1} u_{jm,n}^l(r) \vec{Y}_{jm}^l(\theta, \phi), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{t}_n(r, \theta, \phi) = \sum_{j=0}^N \sum_{m=-j}^j \sum_{k=0, k \neq 1}^2 \sum_{l=|j-k|}^{j+k} t_{jm,n}^{lk}(r) \mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\theta, \phi), \quad (2.12)$$

$$\vec{F}_n(r, \theta, \phi) = \sum_{j=0}^N \sum_{m=-j}^j \sum_{l=|j-1|}^{j+1} F_{jm,n}^l(r) \vec{Y}_{jm}^l(\theta, \phi), \quad (2.13)$$

kde symboly $\vec{Y}_{jm}^l(\theta, \phi)$ a $\mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\theta, \phi)$ jsou sférické harmonické vektory a tenzory, které zavádíme v Apendixu. $u_{jm,n}^l(r)$, $t_{jm,n}^{lk}(r)$ a $F_{jm,n}^l(r)$ jsou odpovídající koeficienty řady, radiálně závislé. N odpovídá hodnotě nejvyšší sférické harmoniky užívané při rozkladu. Při rozkladu uvažujeme $u_{rn} = \vec{e}_r \cdot \vec{u}$.

Rozklady (2.11), (2.12) a (2.13) dosadíme do rovnic (2.6) až (2.10) a po algebraických úpravách (provádíme v Apendixu) získáme soustavu 15 lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu pro každý stupeň a řád sférického harmonického rozvoje. Tyto rovnice je možné rozdělit na dvě skupiny nezávislých rovnic, kde deset rovnic popisuje sféroidální deformace a zbylých pět popisují deformace toroidální. Jelikož v naší úloze uvažujeme pouze normálové zatížení, získáme pro toroidální část vždy nulové řešení, tedy můžeme druhou skupinu rovnic vyřadit. Jako výsledek získáme sadu deseti rovnic:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} t_{jm,n}^{j0} + \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j+1)(2j-1)}} t_{jm,n}^{j2} - \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} t_{jm,n}^{j-2,2} + \\ & \quad + \frac{\Delta \rho g}{2j+1} j u_{jm,n}^{j-1} - \frac{\Delta \rho g}{2j+1} \sqrt{j(j+1)} u_{jm,n}^{j+1} = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} t_{jm,n}^{j0} - \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} t_{jm,n}^{j2} + \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} t_{jm,n}^{j+2,2} + \\ & \quad + \frac{\Delta \rho g}{2j+1} (j+1) u_{jm,n}^{j+1} - \frac{\Delta \rho g}{2j+1} \sqrt{j(j+1)} u_{jm,n}^{j-1} = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} t_{jm,n}^{j0} - \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j+1)(2j-1)}} t_{jm,n}^{j2} + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} t_{jm,n}^{j-2,2} + \\ & \quad + \frac{\rho p g}{2j+1} j u_{jm,n}^{j-1} - \frac{\rho p g}{2j+1} \sqrt{j(j+1)} u_{jm,n}^{j+1} = F_{jm,n}^{j-1}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} t_{jm,n}^{j0} + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} t_{jm,n}^{j2} - \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} t_{jm,n}^{j+2,2} + \\ & \quad + \frac{\rho p g}{2j+1} (j+1) u_{jm,n}^{j+1} - \frac{\rho p g}{2j+1} \sqrt{j(j+1)} u_{jm,n}^{j-1} = F_{jm,n}^{j+1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} = 0, \quad (2.18)$$

$$-\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) t_{jm,n}^{j0} + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-2}{r} \right) t_{jm,n}^{j-2,2} - \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) t_{jm,n}^{j2} = 0, \quad (2.19)$$

$$\sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) t_{jm,n}^{j0} - \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+3}{r} \right) t_{jm,n}^{j+2,2} + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) t_{jm,n}^{j2} = 0, \quad (2.20)$$

$$\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta} \right) t_{jm,n}^{j-2,2} - \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} = \quad (2.21)$$

$$= -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j-2,2} - \frac{1}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j-2,2} \Delta t,$$

$$\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta} \right) t_{jm,n}^{j2} + \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} - \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} = \quad (2.22)$$

$$= -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j2} - \frac{1}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j2} \Delta t,$$

$$\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta} \right) t_{jm,n}^{j+2,2} + \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} = \quad (2.23)$$

$$= -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j+2,2} - \frac{1}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j+2,2} \Delta t,$$

kde (2.14) a (2.15) jsou rovnice popisující okrajovou podmínku na rozhraní jádro-plášť, (2.16) a (2.17) popisují okrajovou podmínku na povrchu tělesa, (2.18) je rovnice kontinuity, (2.19) a (2.20) jsou pohybové rovnice a reologie je popsána rovnicemi (2.21), (2.22) a (2.23).

Takovým způsobem převedeme soustavu parciálních diferenciálních rovnic na sadu soustav diferenciálních rovnic prvního řádu separovanou podle stupně a řádu sférického rozvoje.

2.4 Radiální diskretizace rovnic

Nakonec provedeme radiální diskretizaci rovnic (2.14) až (2.23) v proměnné r . Užijeme metody posunutých sítí s konstantním prostorovým krokem. Plášť roz-

dělíme na K vrstev, na jejichž hranicích definujeme hodnoty tenzoru napětí a předepisujeme hodnoty viskozity, hustoty a modulu torze. Celkem tedy budeme mít množiny diskretizovaných hodnot $t_{jm,n,q}^{kl}, \eta_q, \rho_q, \mu_q$, kde q jde od 1 do $K + 1$, tedy pro každý skalár $K + 1$ hodnot. Na středech vrstev definujeme hodnoty posunutí a předepisujeme hodnoty gravitačního zrychlení a dvě hodnoty nad a pod rozhraními, celkem tedy budeme mít množiny diskretizovaných hodnot $u_{jm,n,q+\frac{1}{2}}^l, g_{q+\frac{1}{2}}$, kde q jde od 0 do $K + 1$, tedy pro každý skalár K skutečných hodnot a 2 pomocné hodnoty. Výrazy $\frac{d\bullet}{dr}$ a $\frac{\bullet}{r}$ aproximujeme následovně:

$$\frac{d\bullet}{dr} \approx \frac{\bullet_{q+\frac{1}{2}} - \bullet_{q-\frac{1}{2}}}{\Delta r}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\bullet}{r} \approx \frac{\bullet_{q+\frac{1}{2}} + \bullet_{q-\frac{1}{2}}}{2r_q}, \quad (2.25)$$

kde r_q je poloměr na rozhraní q . Rovnice (2.18), (2.21), (2.22) a (2.23), vzhledem k vyskytujícím se derivacím, uvažujeme na rozhraních mezi dříve definovanými slupkami, naopak pohybové rovnice (2.19) a (2.20) uvažujeme na středech slupek. Hraníční podmínky uvažujeme na fyzických rozhraních (v referenční konfiguraci), jakožto posunutí na skutečných rozhraních uvažujeme průměr posunutí na středě povrchové slupky a pomocné hodnoty posunutí za fyzickým rozhraním. Šest radiálně diskretizovaných rovnic uvádíme zde:

$$a_1^q u_{jm,n,q-\frac{1}{2}}^{j-1} + a_2^q u_{jm,n,q-\frac{1}{2}}^{j+1} + a_3^q u_{jm,n,q+\frac{1}{2}}^{j-1} + a_4^q u_{jm,n,q+\frac{1}{2}}^{j+1} = 0, \quad (2.26)$$

$$b_1^{q+\frac{1}{2}} t_{jm,n,q}^{j0} + b_2^{q+\frac{1}{2}} t_{jm,n,q}^{j-2,2} + b_3^{q+\frac{1}{2}} t_{jm,n,q}^{j2} + a_5^{q+\frac{1}{2}} u_{jm,n,q+\frac{1}{2}}^{j-1} +$$

$$+ a_6^{q+\frac{1}{2}} u_{jm,n,q+\frac{1}{2}}^{j+1} + b_4^{q+\frac{1}{2}} t_{jm,n,q+1}^{j0} + b_5^{q+\frac{1}{2}} t_{jm,n,q+1}^{j-2,2} + b_6^{q+\frac{1}{2}} t_{jm,n,q+1}^{j2} = 0, \quad (2.27)$$

$$b_7^{q+\frac{1}{2}} t_{jm,n,q}^{j0} + b_8^{q+\frac{1}{2}} t_{jm,n,q}^{j2} + b_9^{q+\frac{1}{2}} t_{jm,n,q}^{j+2,2} + a_7^{q+\frac{1}{2}} u_{jm,n,q+\frac{1}{2}}^{j-1} +$$

$$+ a_8^{q+\frac{1}{2}} u_{jm,n,q+\frac{1}{2}}^{j+1} + b_{10}^{q+\frac{1}{2}} t_{jm,n,q+1}^{j0} + b_{11}^{q+\frac{1}{2}} t_{jm,n,q+1}^{j2} + b_{12}^{q+\frac{1}{2}} t_{jm,n,q+1}^{j+2,2} = 0, \quad (2.28)$$

$$a_9^q u_{jm,n,q-\frac{1}{2}}^{j-1} + b_{13}^q t_{jm,n,q}^{j-2,2} + a_{10}^q u_{jm,n,q+\frac{1}{2}}^{j-1} = -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0,q}^{j-2,2} -$$

$$- \frac{1}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k,q}^{j-2,2} \Delta t, \quad (2.29)$$

$$a_{11}^q u_{jm,n,q-\frac{1}{2}}^{j-1} + a_{12}^q u_{jm,n,q-\frac{1}{2}}^{j+1} + b_{13}^q t_{jm,n,q}^{j2} +$$

$$+ a_{13}^q u_{jm,n,q+\frac{1}{2}}^{j-1} + a_{14}^q u_{jm,n,q+\frac{1}{2}}^{j+1} = -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0,q}^{j2} -$$

$$- \frac{1}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k,q}^{j2} \Delta t, \quad (2.30)$$

$$a_{15}^q u_{jm,n,q-\frac{1}{2}}^{j+1} + b_{13}^q t_{jm,n,q}^{j+2,2} + a_{16}^q u_{jm,n,q+\frac{1}{2}}^{j+1} = -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0,q}^{j+2,2} -$$

$$- \frac{1}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k,q}^{j+2,2} \Delta t, \quad (2.31)$$

kde zavádíme koeficienty a_ξ^ζ a b_ξ^ζ pro jednodušší manipulaci. Tabulku těchto koeficientů uvádíme v Apendixu.

Takovým způsobem jsme zredukovali naši úlohu na soustavu lineárních algebraických rovnic pro radiálně diskretizované koeficienty sférického harmonického rozvoje posunutí a tenzoru napětí.

2.5 Numerické řešení rovnic

Rovnicemi (2.26) až (2.31) formulujeme naši úlohu jako standartní úlohu lineární algebry:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x}_n = \vec{b}_n, \quad (2.32)$$

$$\vec{x}_n = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}_n, \quad (2.33)$$

kde \mathbf{A} je pásová matice obsahující koeficienty a_ξ^ζ a b_ξ^ζ , \vec{x}_n je vektor sestavený ze složek posunutí a tenzoru napětí a \vec{b}_n je vektor pravých stran sestavený z hodnot pravých stran v rovnicích (2.26) až (2.31).

Vektor \vec{x}_n zavádíme následovně:

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} u_{\frac{1}{2}}^{j-1} \\ u_{\frac{1}{2}}^{j+1} \\ t_1^{j,0} \\ t_1^{j-2,2} \\ t_1^{j,2} \\ t_1^{j+2,2} \\ u_{\frac{3}{2}}^{j-1} \\ \vdots \\ t_1^{j+2,2} \\ u_{K+1}^{j-1} \\ u_{K+\frac{3}{2}}^{j+1} \\ u_{K+\frac{3}{2}}^{j+1} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

kde $u_{jm,n,q}^l$ pro usnadnění čtení a snížení počtu indexů zapisujeme jako u_q^l a $t_{jm,n,q}^{lk}$ jako t_q^{lk} . Pravé strany uspořádáme následovně:

$$\vec{b}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0,1}^{j-2,2} - \frac{1}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k,1}^{j-2,2} \Delta t \\ -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0,1}^{j2} - \frac{1}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k,1}^{j2} \Delta t \\ -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0,1}^{j+2,2} - \frac{1}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k,1}^{j+2,2} \Delta t \\ 0 \\ \vdots \\ -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0,K+1}^{j+2,2} - \frac{1}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k,K+1}^{j+2,2} \Delta t \\ F_{jm,n}^{j-1} \\ F_{jm,n}^{j+1} \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

tedy rovnice uspořádáme jako:

rovnice kontinuity (2.26) pro $q = 1$
hraniční podmínka (2.14)
hraniční podmínka (2.15)
reologická rovnice (2.29) pro $q = 1$
reologická rovnice (2.30) pro $q = 1$
reologická rovnice (2.31) pro $q = 1$
rovnice kontinuity (2.26) pro $q = 2$
pohybová rovnice (2.27) pro $q = \frac{3}{2}$
pohybová rovnice (2.28) pro $q = \frac{3}{2}$
reologická rovnice (2.29) pro $q = 2$
\vdots
reologická rovnice (2.31) pro $q = K + 1$
hraniční podmínka (2.16)
hraniční podmínka (2.17)

Tabulka 2.1: Uspořádání rovnic

Nakonec tedy bude matice \mathbf{A} uspořádána ve tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{O} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{O}_{6 \times 2} \\ \mathbf{B}_2^1 & \mathbf{B}_1^1 & \mathbf{B}_3^1 & \ddots & & & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_2^2 & \mathbf{B}_1^2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathbf{B}_1^K & \mathbf{B}_3^K & \mathbf{O}_{6 \times 2} \\ \vdots & & & \ddots & \mathbf{B}_2^{K+1} & \mathbf{B}_1^{K+1} & \mathbf{B}_3^{K+1} \\ \mathbf{O}_{2 \times 6} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{O}_{2 \times 6} & \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

kde zavádíme pomocné matice \mathbf{B}_1^q , \mathbf{B}_2^q , \mathbf{B}_3^q , $\mathbf{B}_3'^q$, \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 a \mathbf{C}_4 . Symbol \mathbf{O} je nulová matice rozměrů 6×6 , $\mathbf{O}_{6 \times 2}$ je nulová matice rozměrů 6×2 a $\mathbf{O}_{2 \times 6}$ je nulová matice rozměrů 2×6 . Zde uvádíme pomocné matice:

$$\mathbf{B}_1^q = \begin{pmatrix} a_1^q & a_2^q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5^{q-\frac{1}{2}} & a_6^{q-\frac{1}{2}} & b_4^{q-\frac{1}{2}} & b_5^{q-\frac{1}{2}} & b_6^{q-\frac{1}{2}} & 0 \\ a_7^{q-\frac{1}{2}} & a_8^{q-\frac{1}{2}} & b_{10}^{q-\frac{1}{2}} & 0 & b_{11}^{q-\frac{1}{2}} & b_{12}^{q-\frac{1}{2}} \\ a_9^q & 0 & 0 & b_{13}^q & 0 & 0 \\ a_{11}^q & a_{12}^q & 0 & 0 & b_{13}^q & 0 \\ 0 & a_{15}^q & 0 & 0 & 0 & b_{13}^q \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{B}_2^q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1^{q-\frac{1}{2}} & b_2^{q-\frac{1}{2}} & b_3^{q-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & b_7^{q-\frac{1}{2}} & 0 & b_8^{q-\frac{1}{2}} & b_9^{q-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{B}_3^q = \begin{pmatrix} a_3^q & a_4^q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10}^q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13}^q & a_{14}^q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{16}^q & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} a_1^q & a_2^q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_3 & d_4 & c_4 & 0 & c_5 & c_6 \\ a_9^q & 0 & 0 & b_{13}^q & 0 & 0 \\ a_{11}^q & a_{12}^q & 0 & 0 & b_{13}^q & 0 \\ 0 & a_{15}^q & 0 & 0 & 0 & b_{13}^q \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} a_3^q & a_4^q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 & d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10}^q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13}^q & a_{14}^q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{16}^q & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} d_5 & d_6 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & 0 \\ d_7 & d_8 & -c_4 & 0 & -c_5 & -c_6 \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} d_5 & d_6 \\ d_7 & d_8 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

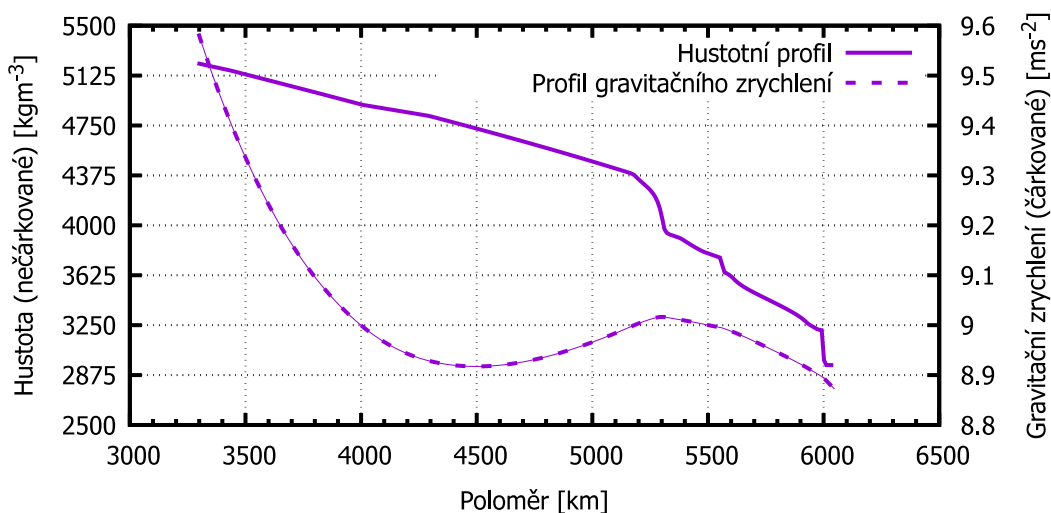
3. Numerické experimenty

V této části se věnujeme popisu námi provedených numerických experimentů.

3.1 Vstupní parametry

Vstupní parametry pro jednotlivé modely jsou hustotní profil, profil viskozity, povrchová hustota zátěže (zátěž modelujeme jako dodatečnou plošnou sílu působící na povrch tělesa), výška zátěže a průměrná hustota jádra. Hustotu jádra volíme takovou, aby na vnějším poloměru Venuše gravitační zrychlení odpovídalo skutečné hodnotě. Jako hustotní profil jsme užili model V5, který uvádíme na obr. 3.1, tento profil přebíráme z práce Dumoulin a kol. (2017). Z tohoto hustotního profilu jsme určili vhodnou hustotu jádra ($10420.64 \text{ kg m}^{-3}$) a radiální závislost velikosti gravitačního zrychlení, kterou uvádíme na obr. 3.1. Hustotní profil užíváme pro modely stejný, ostatní parametry (profil viskozity, hustota zátěže a výška zátěže) uvažujeme pro různé modely různé. Jelikož je výška zátěže laterálně závislá, zátěž rozkládáme do báze sférických harmonických funkcí.

Obrázek 3.1: Radiální profil hustoty a gravitačního zrychlení V5-1



3.2 Výstupní data

Jako výstup z každého modelu dostáváme výšku topografie (tedy součet již zavedeného u_r a výšky zátěže) a dále geoidu. Data o geoidu vypisujeme ve formě admitance A :

$$A = -\frac{V}{t g}, \quad (3.1)$$

kde t je výška topografie, g je gravitační zrychlení a V je gravitační potenciál. Gravitační potenciál samotný je možné nalézt pro každý stupeň a řád sférického harmonického rozvoje vztahem (Cadek a kol., 2021):

$$V_{lm} = -\frac{4\pi G}{(2l+1)R^{l+1}} \int_{r_0}^R \frac{d\rho}{dr} u_{r,lm} r^{l+2} dr - \sum_t \frac{4\pi G}{2l+1} t_{t,lm} \Delta\rho_t - \frac{4\pi G}{2l+1} u_r(R) \Delta\rho_j r_0^2 \frac{r_0^{l+1}}{R^{l+1}}, \quad (3.2)$$

kde V gravitační potenciál, G je gravitační konstanta, R je vnější poloměr Venuše, r_0 je poloměr rozhraní jádra a pláště, ρ je hustotní profil, u_r je profil radiálních posunutí, \sum_t je suma probíhající přes všechny povrchové zátěže, t_t je topografie zátěže t , $\Delta\rho_t$ je hustotní skok mezi materiálem zátěže t a materiálem pod ní a $\Delta\rho_j$ je hustotní skok mezi pláštěm a jádrem.

3.3 Modely popisující reakci na povrchové zatížení

V této části popisujeme relaxaci náhle umístěné zátěže na povrch Venuše. Relaxaci se věnujeme po jednotlivých stupních harmonického rozvoje.

3.3.1 Referenční model V5-1

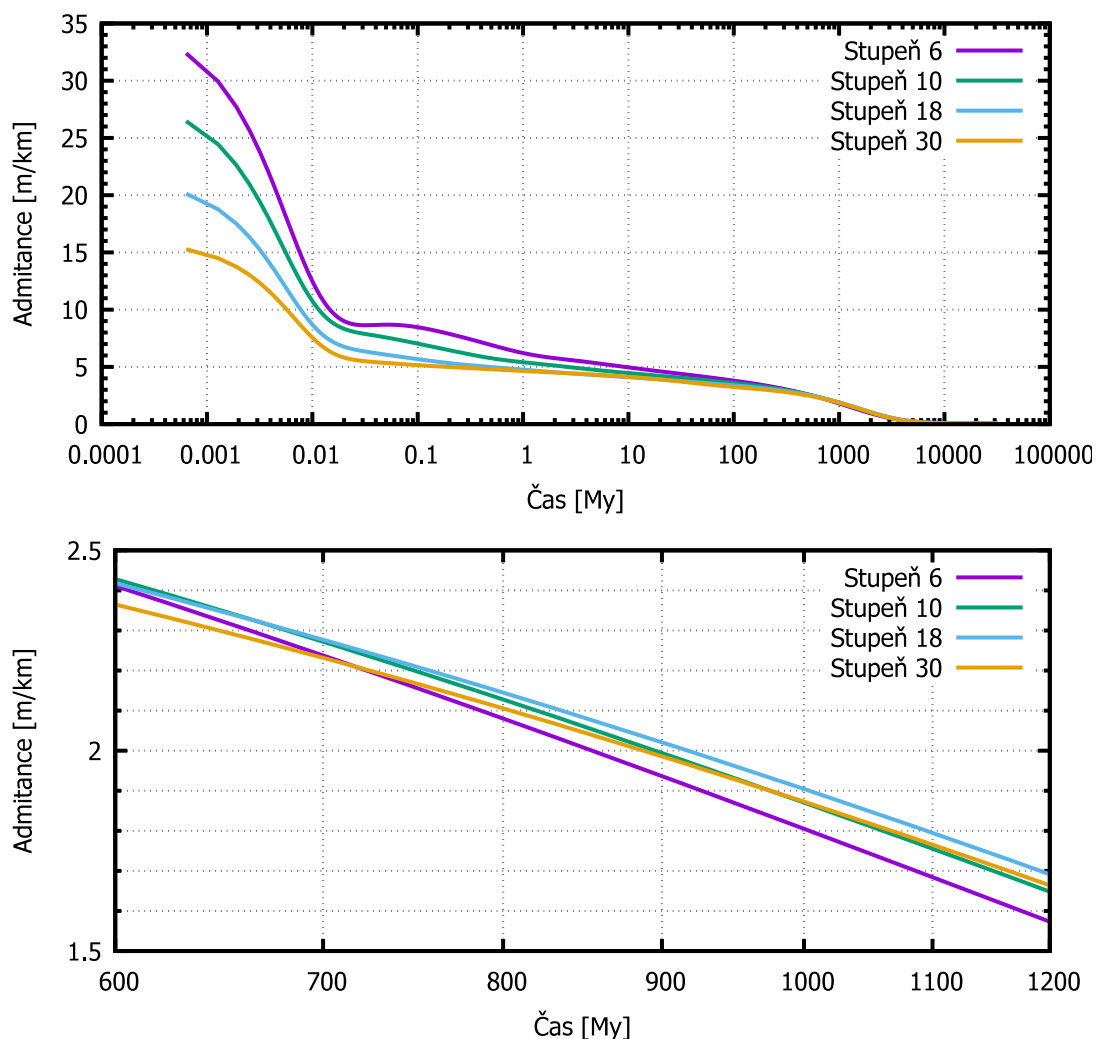
Viskózní profil referenčního modelu V5 – 1 uvažujeme poměrně jednoduchý: 3 různé hodnoty viskozity pro spodní plášť (10^{22} Pa s), svrchní plášť (10^{20} Pa s) a litosféru (10^{24} Pa s). Rozhraní spodního a svrchního pláště uvažujeme na poloměru 4685 km a tloušťku litosféry uvažujeme 100 km. Hustotu povrchové zátěže uvažujeme 2600 kg m^{-3} . Výšku zátěže uvažujeme pro každý stupeň stejnou, a to 1 km. Výsledné relaxační křivky admitance pro vybrané stupně sférického harmonického rozkladu uvádíme na obr. 3.2.

Časové škály, které odpovídají námi zkoumanému období, jsou 700 miliónů až 1 miliarda let. V tomto časovém intervalu admitance modelu V5 – 1 spadá do intervalu od 1.5 m/km do 2.5 m/km, ovšem hodnoty admitance v oblastech Ishtar Terra a Aphrodite Terra spadají do intervalu od 5 m/km do 20 m/km, tedy model V5 – 1 je nutno upravit. Pro zvýšení přehlednosti všech užitých modelů zavádíme tabulku parametrů 3.1.

3.3.2 Závislost na hustotě zátěže

Zásadním parametrem z hlediska velikosti admitance je hustota zátěže, což je zřejmé ze zavedení admitance a faktu, že topografie je dána součtem posunutí povrchu a výšky zátěže, tedy na konci relaxace se ustálí na hodnotě $t_\infty = (\rho - \rho_z) \rho^{-1} d$ (podmínka vyrovnání Archimedovy a gravitační síly), kde ρ je hustota na povrchu Venuše a ρ_z hustota zátěže, d je výška zátěže. Je tedy pochopitelné, že chování (3.1) bude s $\rho_z \rightarrow \rho$ netriviální. V další sérii experimentů se zaměřujeme právě na pozorování chování relaxačních křivek pro různé hustoty zátěže. Viskózní profil uvažujeme stejný, jako v modelu V5 – 1, hustoty zátěže pro jednotlivé modely uvádíme v tab. 3.1. Výsledky experimentů pro relaxační křivky na stupni deset (velikostí odpovídá pozorovaným útvarům na Venuši) uvádíme na obr. 3.3. Z výsledků těchto experimentů plyne, že zvýšením hustoty zátěže se zvýší

Obrázek 3.2: Časový vývoj admittance pro model V5 – 1 a stupně 6, 10, 18 a 30 SH rozvoje a detail období našeho zájmu



hodnota admittance, dále tedy uvažujeme vyšší hodnotu hustoty zátěže, za tímto účelem dále pracujeme s modelem V5 – 3.

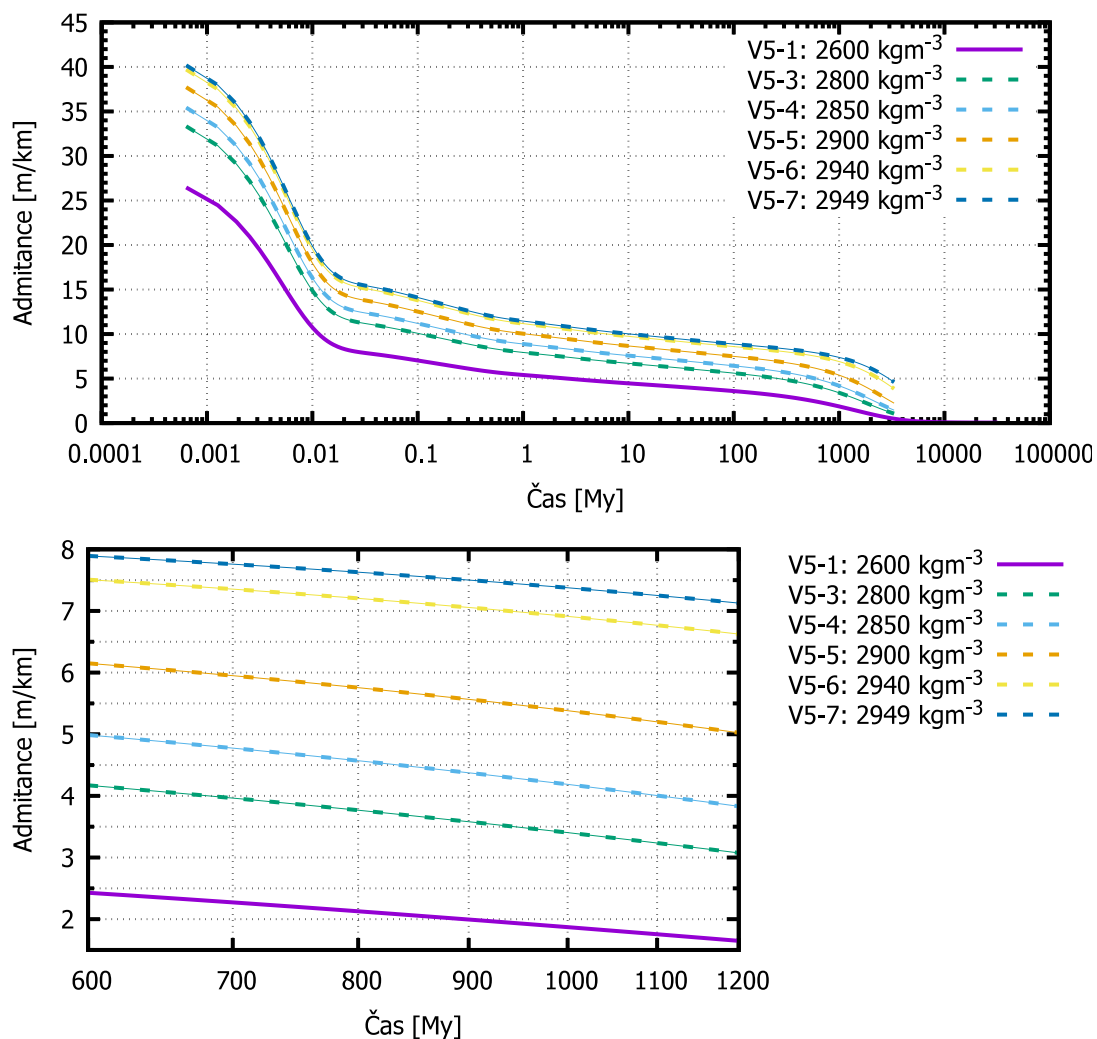
3.3.3 Závislost na viskozitě

Dalšími parametry v námi zavedeném modelu, které mohou významně ovlivnit tvar relaxačních křivek, jsou viskozita spodního pláště η_s , viskozita svrchního pláště η_v , viskozita litosféry η_l , poloměr rozhraní spodního a svrchního pláště r_p a tloušťka litosféry d_l . Postupně se věnujeme zkoumání závislosti modelu V5 – 3 na těchto parametrech.

Prvně se věnujeme viskozitě svrchního pláště. Uvažované modely a hodnoty η_v uvádíme v tab. 3.1. Výsledné relaxační křivky ukazují, že brzký pokles hodnoty admittance v oblasti jednotek tisíců let je způsoben relaxací vrchního pláště a tato relaxace má omezený vliv na hodnotu ve zkoumaném časovém intervalu.

Dále jsme se věnovali viskozitě spodního pláště, kde z výsledků experimentů vyplývá, že viskozita v rozmezí 10^{22} Pa s až 10^{25} Pa s má naprosto zanedbatelný

Obrázek 3.3: Admitanční křivky pro různé hustoty zátěže a detail období našeho zájmu



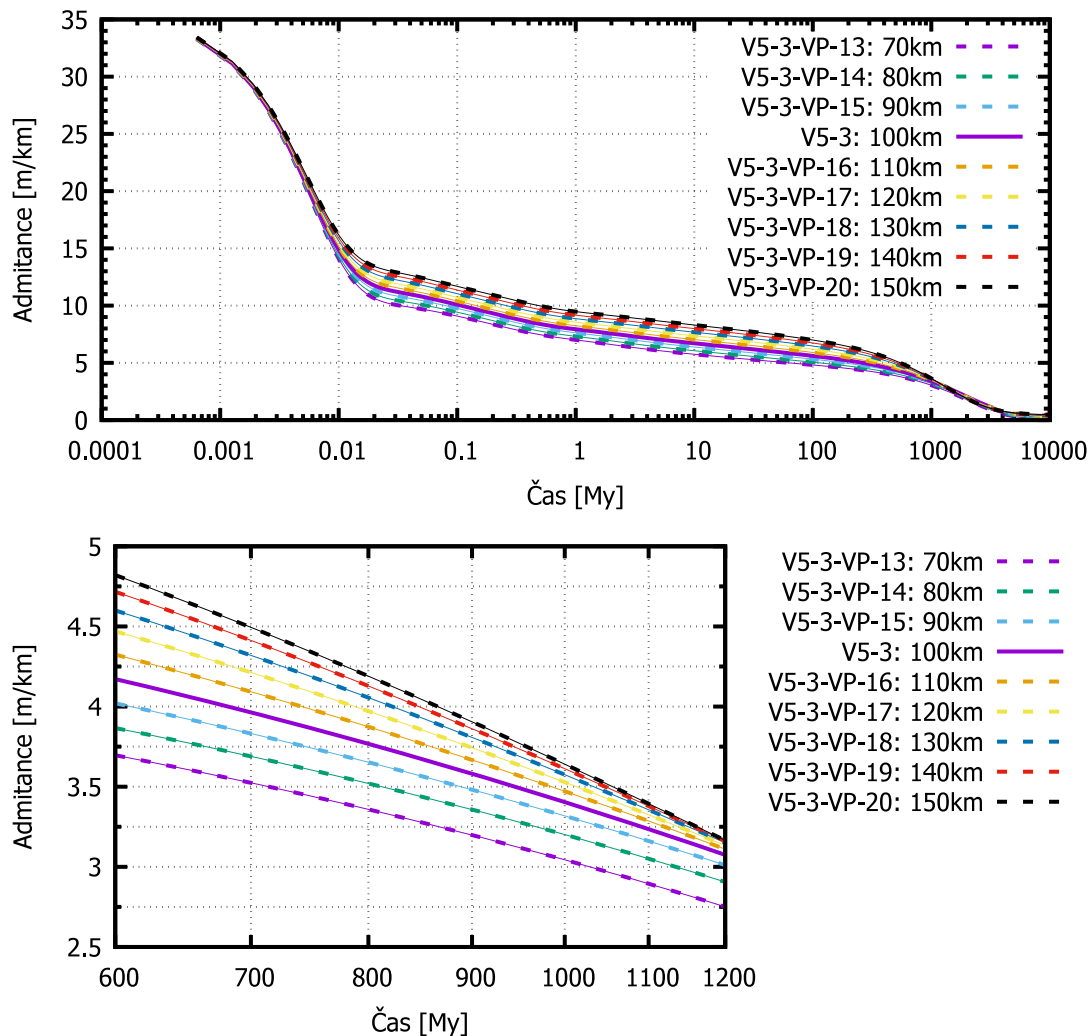
vliv na výsledné tvary relaxačních křivek pro stupeň 10 a vyšší.

Významnou roli hraje tloušťka litosféry d_l . V tab. 3.1 uvádíme volené tloušťky a výsledky numerických experimentů uvádíme v obr. 3.4. Pozorujeme, že s rostoucí tloušťkou roste velikost admitance ve střední části relaxační křivky.

V modelech $V5-3-VP-21$ až $V5-3-VP-28$ sledujeme závislosti relaxace na viskozitě litosféry. Hodnoty viskozity litosféry uvádíme opět v tab. 3.1 a relaxační křivky na obr. 3.5. S rostoucí viskozitou litosféry pozorujeme zvětšování času konečné relaxace.

Nakonec zkoumáme závislost relaxačních křivek na poloze rozhraní spodního a svrchního pláště. Pro velikosti posuvu polohy rozhraní do 400 km pozorujeme jemné změny při relaxaci svrchního pláště, leč ve zkoumané oblasti se jeví, že tyto změny nemají žádný účinek na velikost topografie či geoidu (admitance).

Obrázek 3.4: Admitanční křivky pro různé tloušťky litosféry a detail období našeho zájmu



3.4 Modely relaxace kontinentů

Po počátečním průzkumu chování relaxačních křivek na jednotlivých stupních se dále věnujeme relaxaci modelových útvarů. Hustotní profil uvažujeme stejný jako v předchozích modelech. Viskózní rozhraní mezi svrchním a spodním pláštěm uvažujeme na poloměru 4885 km, tloušťku litosféry 150 km. Viskozitu spodního pláště uvažujeme 1.0×10^{25} Pa s, svrchního pláště 1.0×10^{22} Pa s a litosféry 1.0×10^{27} Pa s. Jako základní modelový útvar bereme pár kruhových kontinentů umístěných na pólech planety. Taková konfigurace umožňuje rozvoj počáteční zátěže do sférických harmonik sudého stupně a nultého řádu (nulovost koeficientů lichých stupňů plyne ze symetrie vůči rovníku, nulovost koeficientů nenulových řádů plyne z nezávislosti zátěže na úhlu ϕ). Rozdělení zátěže po povrchu bereme ve tvaru Gaussovy funkce stupně 6, výšku počáteční zátěže uvažujeme 10000 m a hustotu 2800 kg m^{-3} . Relaxaci takového kontinentu uvádíme v obr. 3.6, kde pozorujeme relaxaci do podoby izostatické rovnováhy.

3.5 Modely relaxace kontinentů s dodatečnou zátěží

3.5.1 Referenční model kontinentu A

V další části se věnujeme vývoji kontinentů po dodání dodatečné zátěže mimo kontinenty. Tuto dodatečnou zátěž přidáváme po dosažení izostatické rovnováhy a zadáváme ji ve stejném tvaru jako je tvar kontinentu (Gaussova funkce stupně 6), ovšem se zápornou výškou, což odpovídá tomu, že zátěž nedodáváme do stejných míst, v jakých se nachází kontinent, ale právě tam, kde se nenachází. Celkem tedy definujeme kontinent několika parametry: Výška celkové prvotní zátěže, tedy velikost maxima Gaussovy funkce zadávané jako povrchová zátěž na počátku, výška dodatečné zátěže, tedy velikost maxima Gaussovy funkce odečítané od povrchové zátěže po ustálení (izostatické) rovnováhy v modelu, hustota prvotní zátěže a posledním parametrem je hustota dodatečné zátěže. Pro lepší přehled následujících modelů kontinentů zavádíme přehledovou tabulku 3.2.

Dodáním zátěže výšky 1000 m hustoty 3000 kg m^{-3} kolem původního kontinentu vytváříme nový referenční model A. Pro model A uvádíme úhlovou závislost topografie, geoidu a admittance na obr. 3.7.

3.5.2 Závislosti na množství a hustotě zátěže

V následných experimentech zkoumáme závislost velikosti a vývoj geoidu a admittance v oblasti kontinentů na parametrech dodatečné zátěže. Jako první jsme zkoumali závislost na výšce zátěže porovnáním modelů A, B a C. Volené parametry uvádíme v tab. 3.2 a výsledné křivky v námi zkoumaném období uvádíme na obr. 3.8.

V dalších experimentech zkoumáme vývoj kontinentů s dodatečnou zátěží různých hustot pomocí modelů kontinentů A, A_{2900} , A_{2950} , A_{3050} , A_{3100} . Hodnoty parametrů modelů opět uvádíme v tab. 3.2 a výsledky těchto numerických experimentů uvádíme na obr. 3.9.

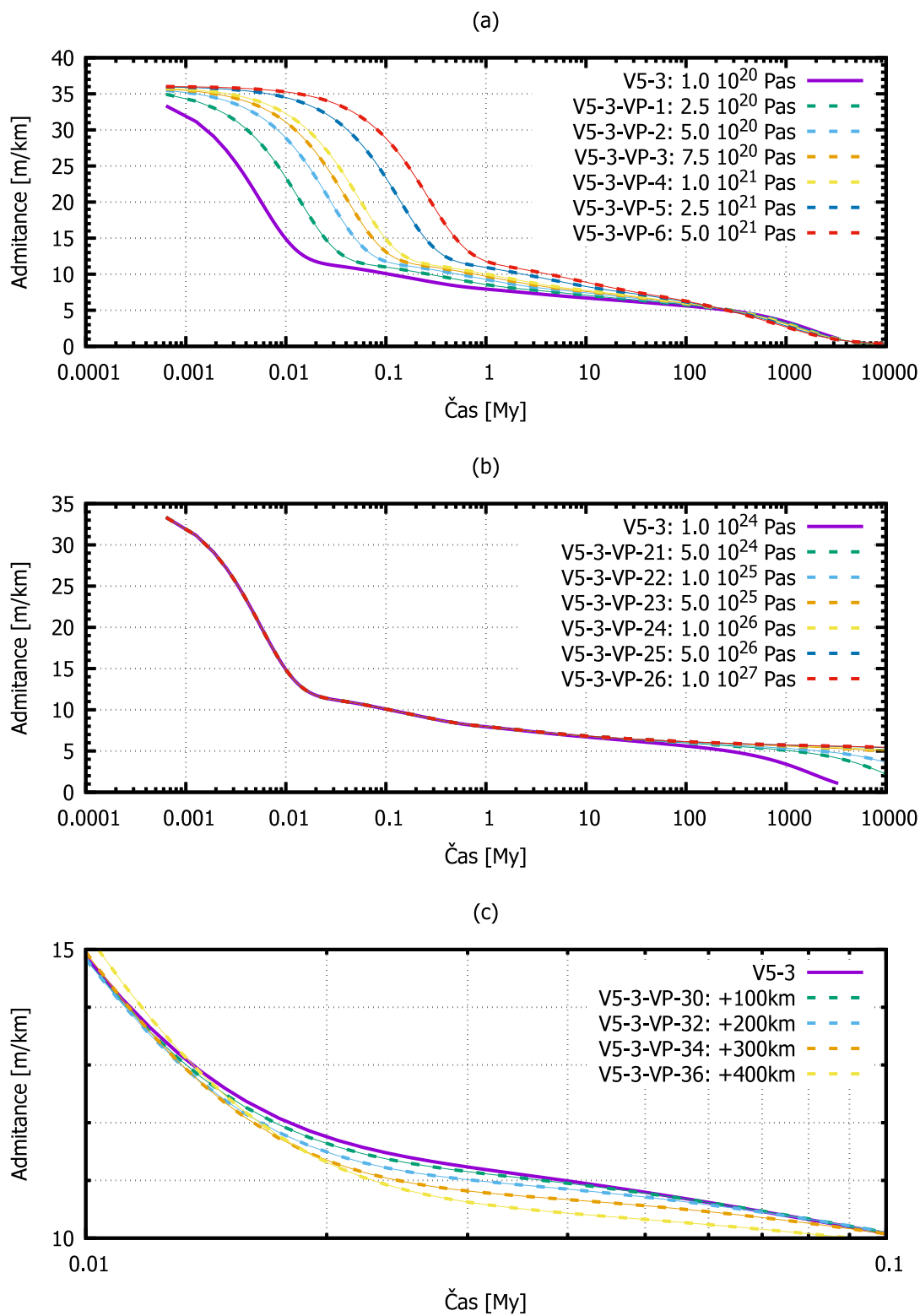
3.5.3 Závislost na hustotním rozhraní

Následně se věnujeme závislosti relaxace na vybraném hustotním profilu, konkrétně na poloze hustotních rozhraní. Doposud jsme ve všech numerických experimentech užívali model V5, jehož hustotní profil je vykreslen v grafu na obr. 3.1. Při pozorném studiu vztahu pro gravitační potenciál v rovnici (3.2) si povšimneme, že je daný vztah pro vyšší stupně harmonického rozvoje silně závislý na hustotních rozhraních blízkých k povrchu. Na současném hustotním profilu si povšimneme výrazného hustotního skoku kolem poloměru 6000 km z hodnoty kolem 3200 kg m^{-3} na hodnotu kolem 2950 kg m^{-3} . Je zřejmé, že tento hustotní skok bude mít výrazné účinky na velikost gravitačního potenciálu. Posunutím tohoto hustotního skoku v modelu kontinentu A o 50 km hlouběji získáváme model kontinentu A_{alt} . Vývoj tohoto kontinentu, stejně jako v předchozích případech, porovnááme s modelem kontinentu A na obr. 3.10.

3.5.4 Model s konečnou topografií nulové velikosti

V poslední sérii experimentů se věnujeme simulaci geoidu a admitance pro kontinent plně zalitý dodatečnou zátěží (což odpovídá přidání takového množství zátěže, pro které výsledná topografie je nulová, či se pohybuje kolem nuly). Za účelem sledování efektů zatopení kontinentu na topografii na kontinentu. Výsledky uvádíme na obr. 3.11.

Obrázek 3.5: Admitanční křivky pro různé viskozity vrchního pláště (a), viskozity litosféry (b) a posuvy rozhraní spodní-svrchní plášť (c)



Tabulka 3.1: Parametry jednotlivých užitých modelů

Model	Hustota zátěže [kg m ⁻³]	Viskozita litostěry [Pa s]	Viskozita vrchního pláště [Pa s]	Viskozita spodního pláště [Pa s]	Tloušťka litostěry [km]	Viskózní rozhraní v plášti [km]
V5 - 1	2600	1.0 × 10 ²⁴	1.0 × 10 ²⁰	1.0 × 10 ²²	100	4685
V5 - 3	2800	1.0 × 10 ²⁴	1.0 × 10 ²⁰	1.0 × 10 ²²	100	4685
V5 - 4	2850	1.0 × 10 ²⁴	1.0 × 10 ²⁰	1.0 × 10 ²²	100	4685
V5 - 5	2900	1.0 × 10 ²⁴	1.0 × 10 ²⁰	1.0 × 10 ²²	100	4685
V5 - 6	2940	1.0 × 10 ²⁴	1.0 × 10 ²⁰	1.0 × 10 ²²	100	4685
V5 - 7	2949	1.0 × 10 ²⁴	1.0 × 10 ²⁰	1.0 × 10 ²²	100	4685
V5 - 3 - VP - 1 až 6	2800	1.0 × 10 ²⁴	2.5 × 10 ²⁰ až 5.0 × 10 ²¹	1.0 × 10 ²²	100	4685
V5 - 3 - VP - 7 až 12	2800	1.0 × 10 ²⁴	1.0 × 10 ²⁰	2.5 × 10 ²² až 1.0 × 10 ²⁵	100	4685
V5 - 3 - VP - 13 až 20	2800	1.0 × 10 ²⁴	1.0 × 10 ²⁰	1.0 × 10 ²²	70 až 150	4685
V5 - 3 - VP - 21 až 28	2800	5.0 × 10 ²⁴ až 1.0 × 10 ²⁸	1.0 × 10 ²⁰	1.0 × 10 ²²	100	4685
V5 - 3 - VP - 29 až 36	2800	1.0 × 10 ²⁴	1.0 × 10 ²⁰	1.0 × 10 ²²	100	4735 až 5085

Tabulka 3.2: Parametry jednotlivých modelových kontinentů

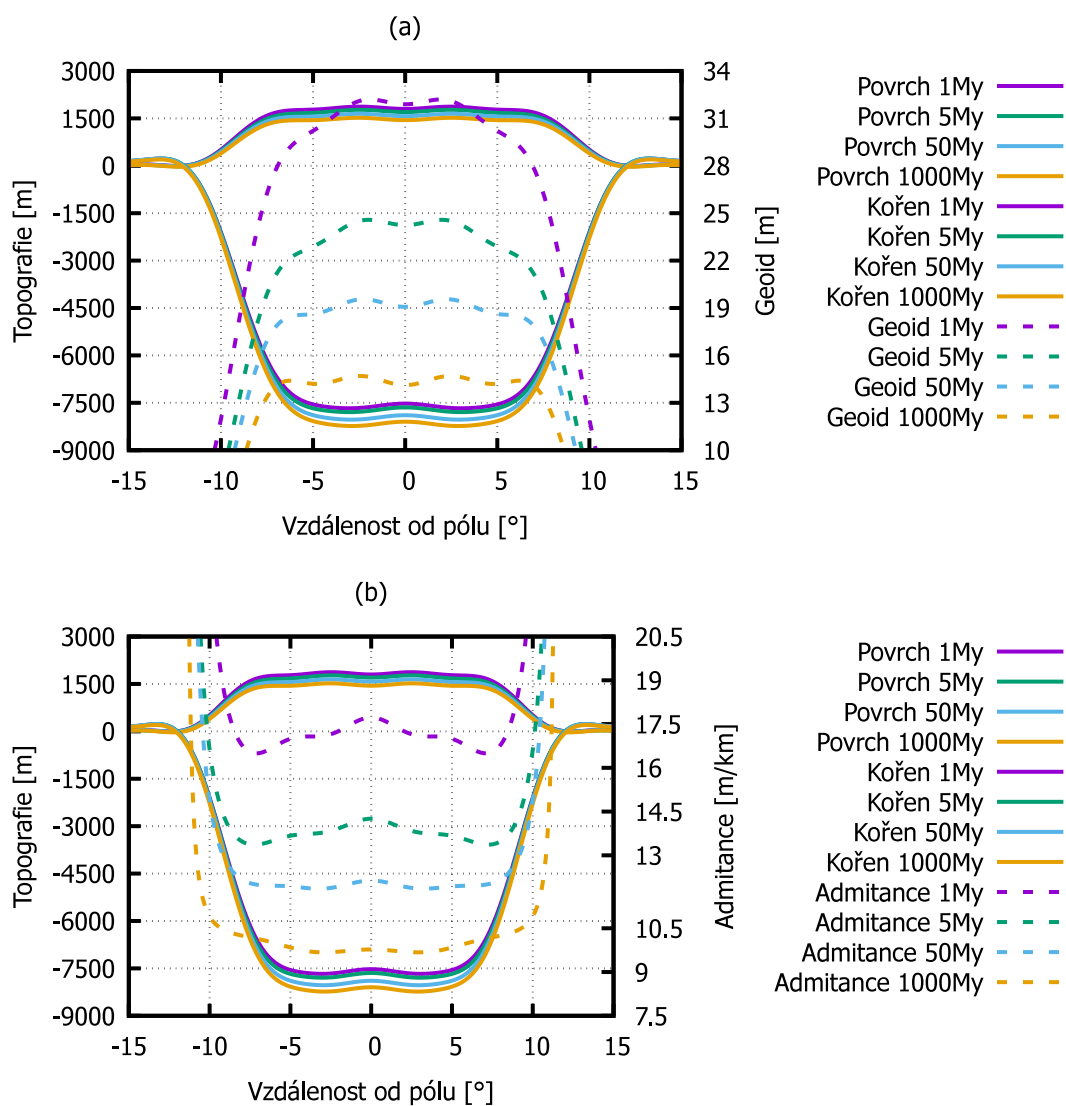
Model kontinentu	Výška celkové prvotní zátěže [m]	Výška dodatečné zátěže [m]	Hustota prvotní zátěže [kg m ⁻³]	Hustota dodatečné zátěže [kg m ⁻³]
A	10000	1000	2850	3000
B	10000	1500	2850	3000
C	10000	5000	2850	3000
A ₂₉₀₀	10000	1000	2850	2900
A ₂₉₅₀	10000	1000	2850	2950
A ₃₀₅₀	10000	1000	2850	3050
A ₃₁₀₀	10000	1000	2850	3100

Tabulka 3.3: Výšky dodatečné zátěže pro kontinenty X

Model kontinentu	Výška dodatečné zátěže [m]
X2	5263
X5	6316
X6	7368
X7	8421
X8	9474

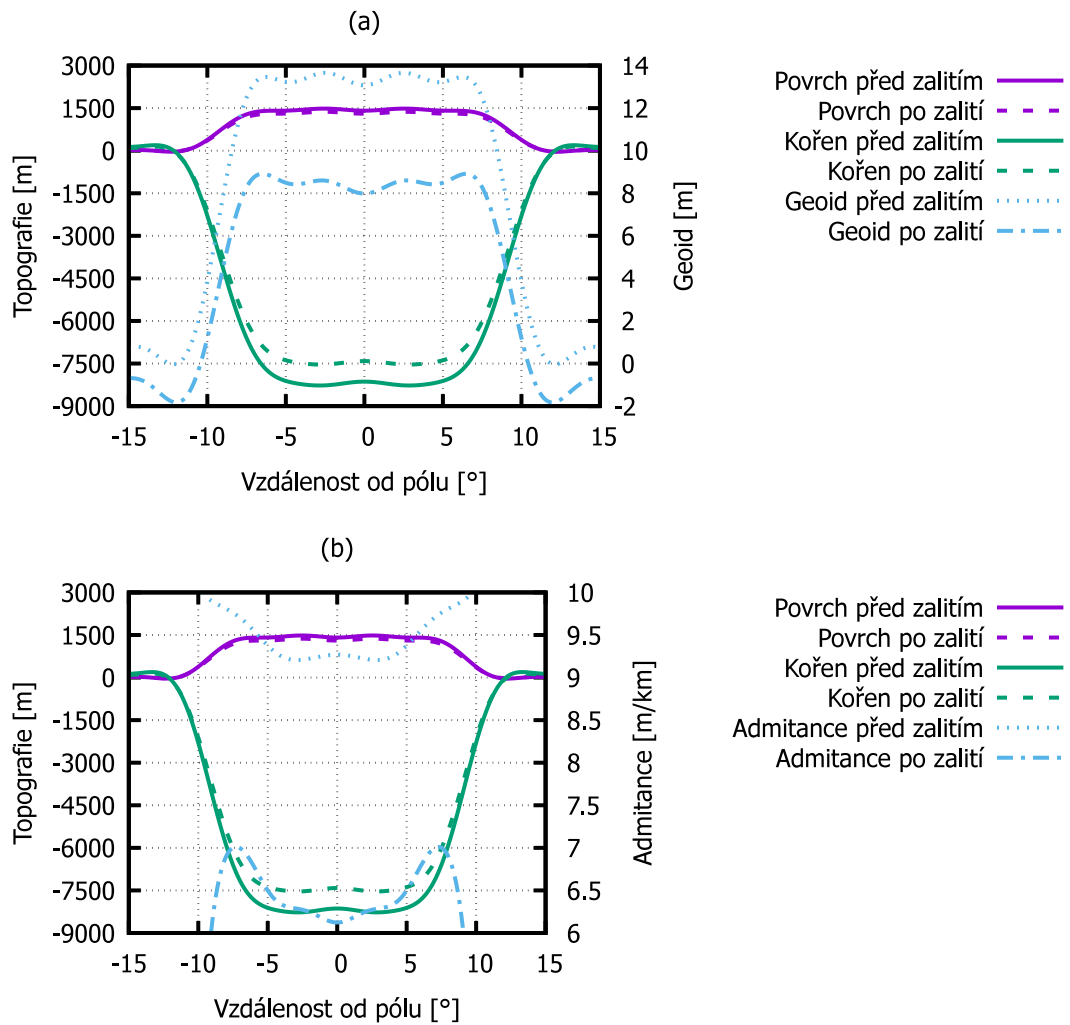
Obrázek 3.6: Relaxace kontinentu

(a) - Vývoj topografie, kořene a geoidu, (b) - Vývoj topografie, kořene a admitance. Žádáme čtenáře věnovat pozornost rychlé relaxaci modelového útvaru do izostatické rovnováhy v rámci desítek My.



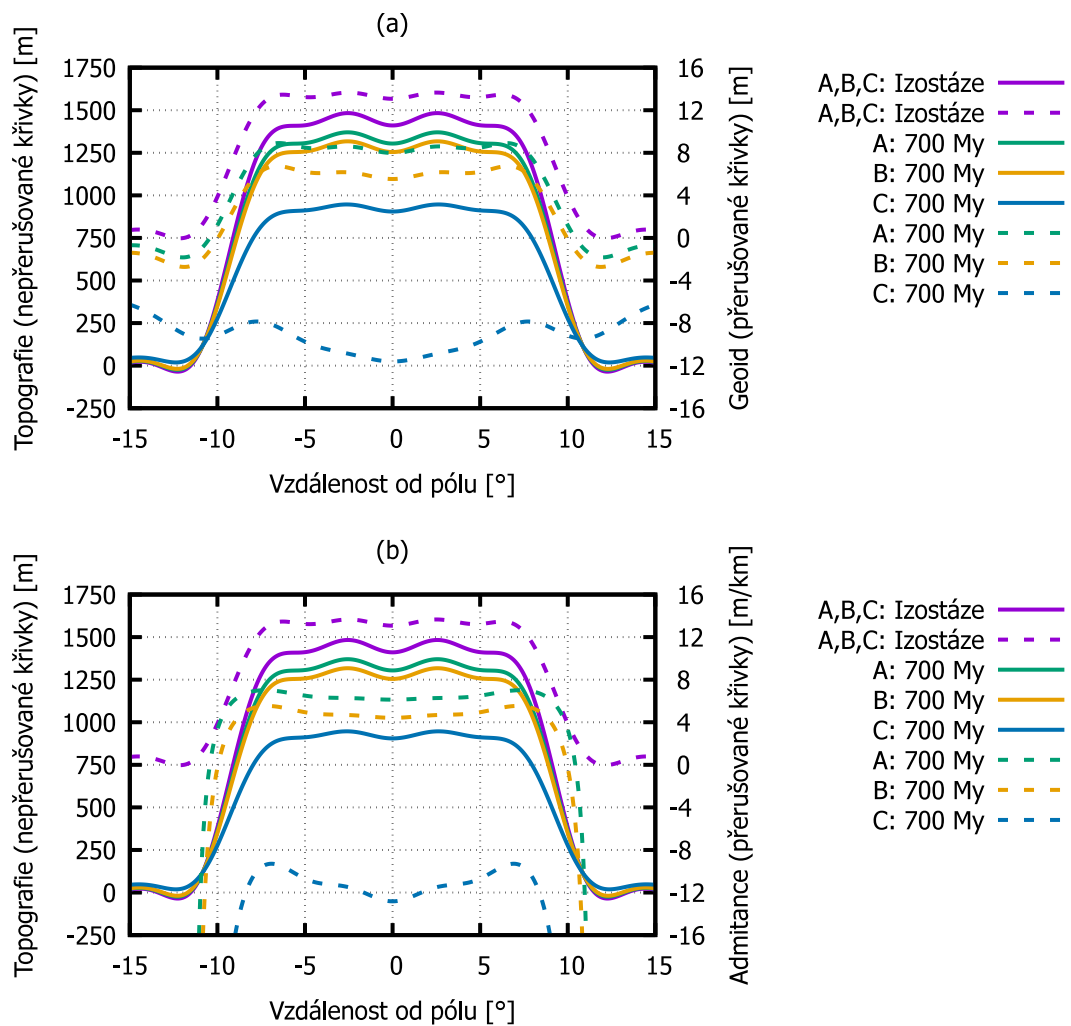
Obrázek 3.7: Vývoj kontinentu A před a po zalití.

(a) - topografie, kořen, geoid, (b) - topografie, kořen a admittance. Zdánlivá změna tloušťky kontinentu před a po zalití je opravdu pouze zdánlivá – topografie po zalití je vykreslována již se započítáním dodatečné okolní zátěže, čímž je poloměr topografie výšky 0 m posouvám dále od středu Venuše. veškeré veličiny po zalití vykreslujeme v čase 700 My, které jsou, vzhledem k rychlé relaxaci, téměř stejné jako v čase 1000 My.



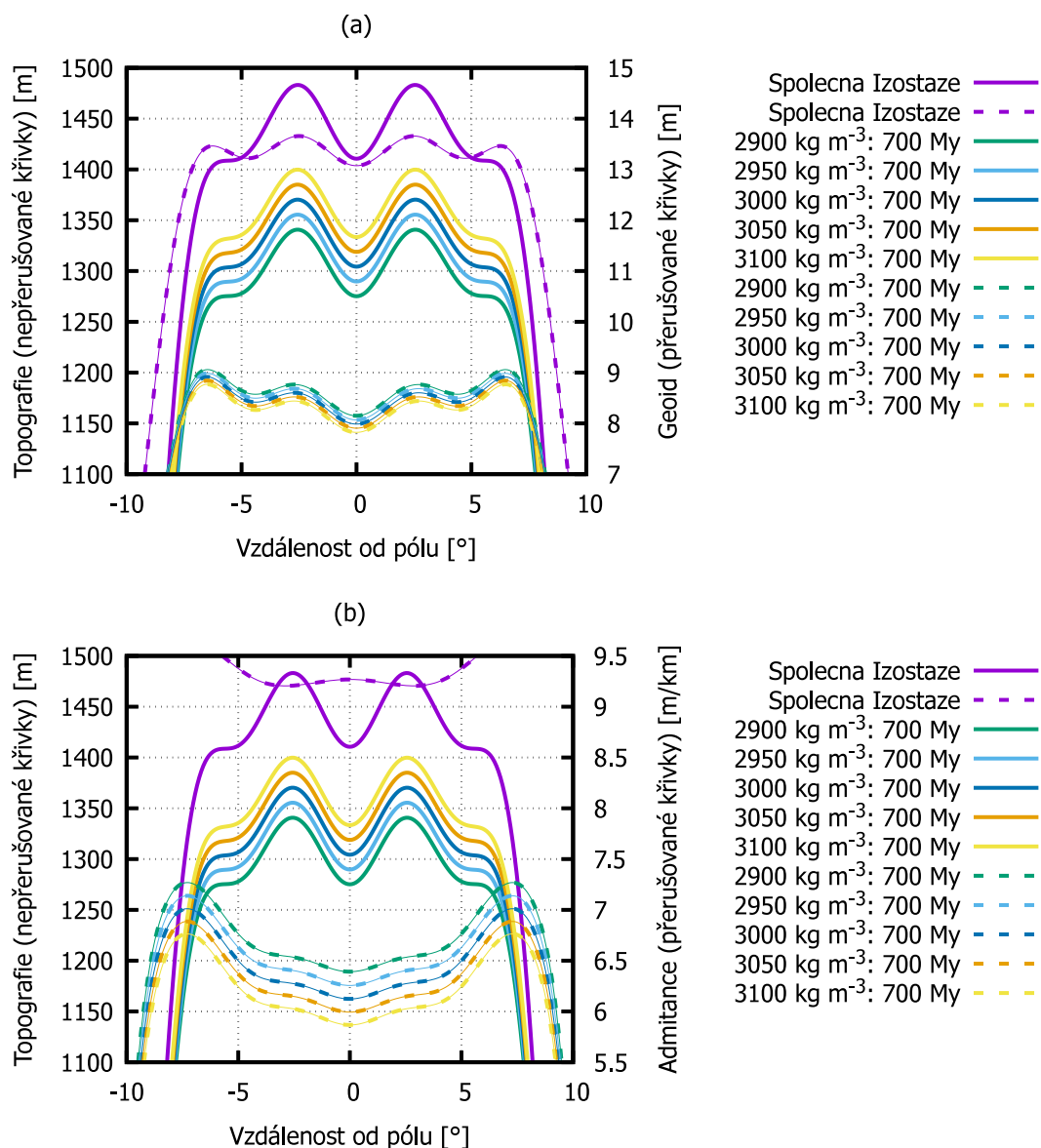
Obrázek 3.8: Vývoje kontinentů *A*, *B* a *C* před a po zalití.

(a) - topografie a geoid, (b) - topografie a admitance. Žádáme čtenáře věnovat pozornost tomu, že dodávaná zátěž výrazněji snižuje geoid (který může přejít až do záporných hodnot) než topografii, odkud také plyne, že přidáním dodatečné zátěže se snižuje admitance.



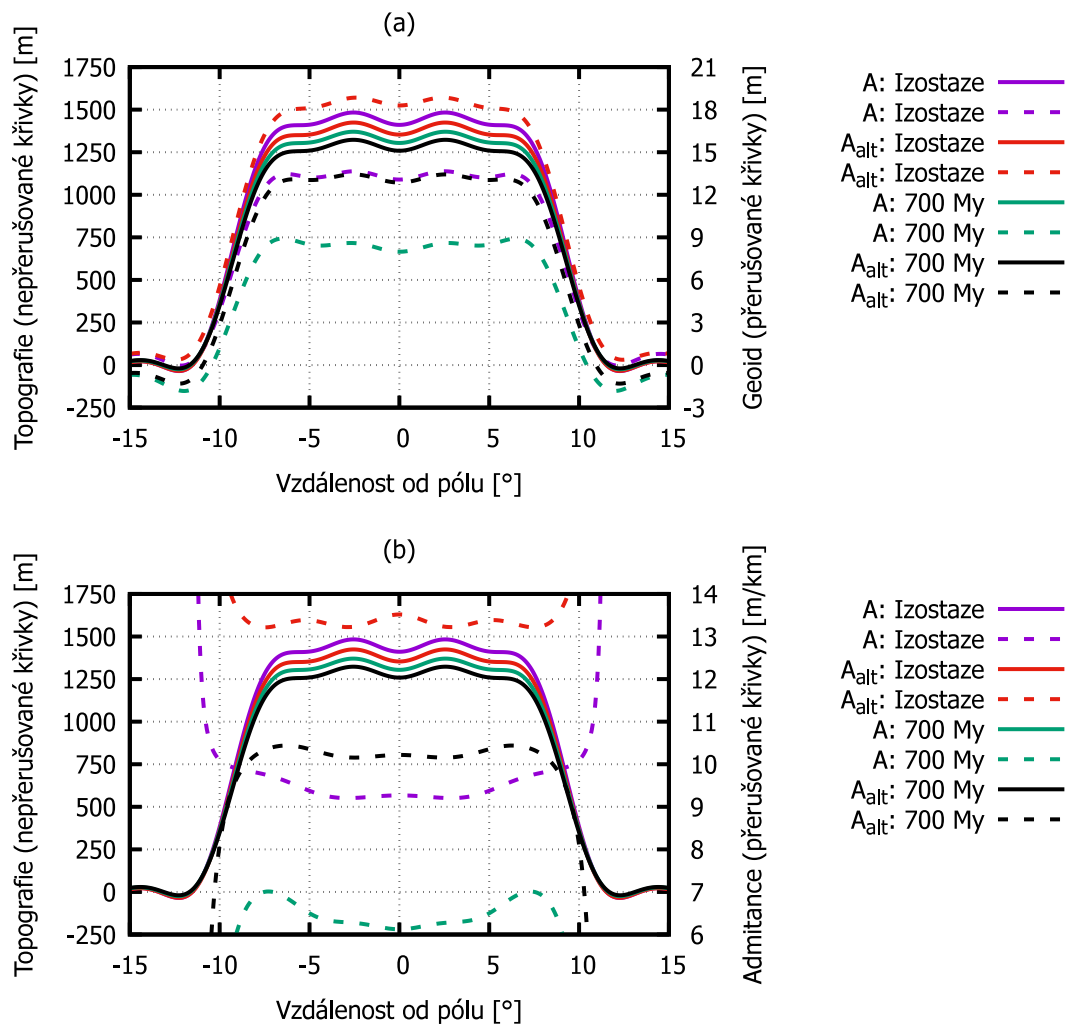
Obrázek 3.9: Vývoje kontinentů A , A_{2900} , A_{2950} , A_{3050} a A_{3100} před a po zalití.

(a) - topografie a geoid, (b) - topografie a admittance. Žádáme čtenáře věnovat pozornost charakteru změn velikostí topografie, geoidu a odtud i admittance modelových kontinentů při změnách hustoty dodatečné zátěže. Při růstu dodatečné zátěže se výsledná topografie zvyšuje a geoid i admittance se zmenšují.



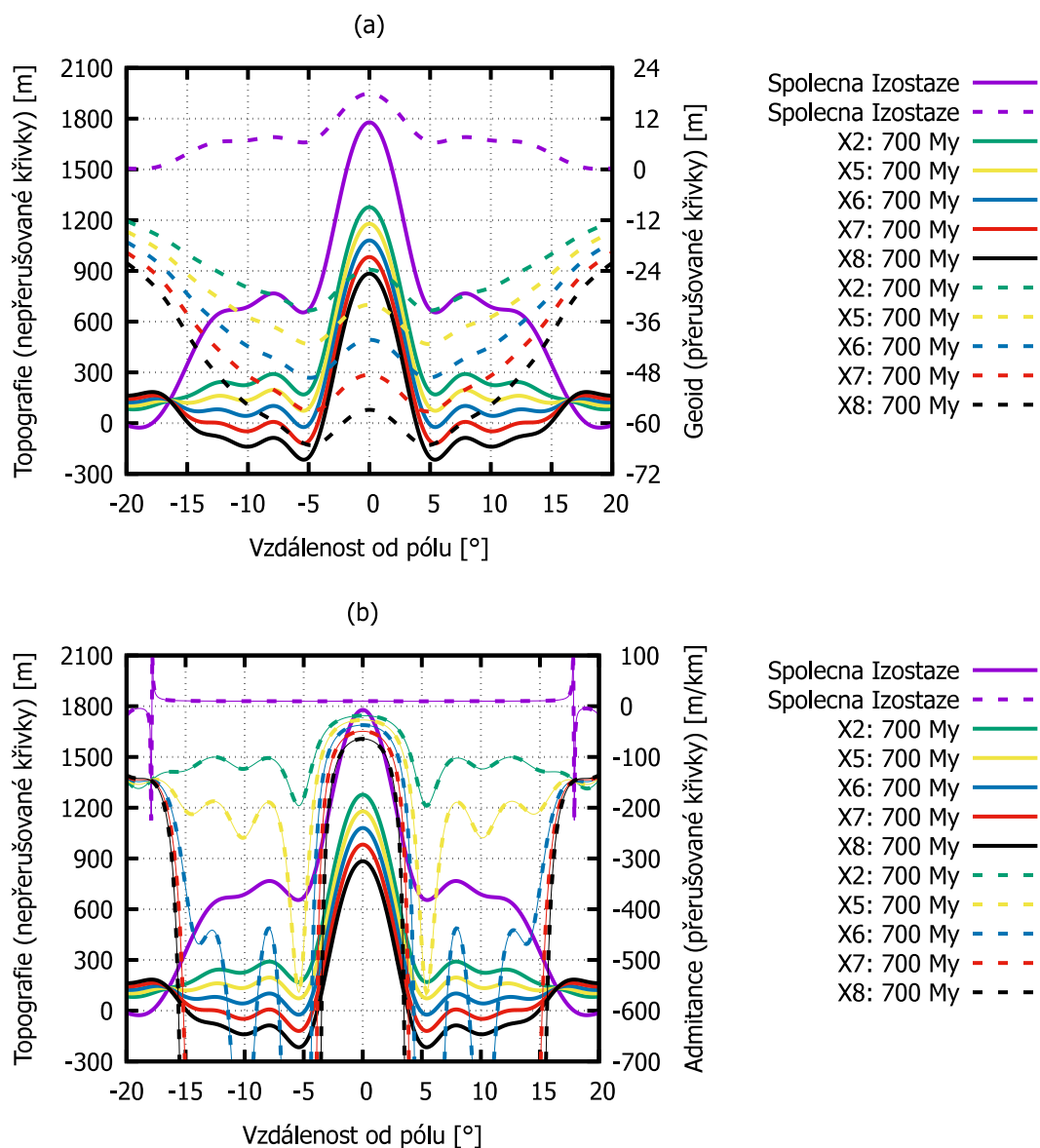
Obrázek 3.10: Vývoje kontinentů A a A_{alt} před a po zalití.

(a) - topografie a geoid, (b) - topografie a admittance. Zde opět žádáme čtenáře věnovat pozornost význačné změně v hodnotě geoidu a hodnotě admittance při posunutí hustotního rozhraní.



Obrázek 3.11: Vývoje kontinentů X před a po zalití.

(a) - topografie a geoid, (b) - topografie a admittance. Žádáme čtenáře věnovat pozornost výrazné zápornosti geoidu potopených kontinentů a odtud plynoucí záporné hodnoty admittance.



4. Diskuze výsledků

V této kapitole se věnujeme rozboru provedených numerických experimentů z předchozí kapitoly a aplikaci získaných závěrů na potenciální kontinenty na Venuši, tedy Aphrodite Terra a Ishtar Terra.

4.1 Velikosti zkoumaných útvarů na Venuši a typické hodnoty admitancí v těchto oblastech

Na Venuši pozorujeme útvary zpravidla velikostí menší, než jsou kontinenty na Zemi. Největší z nich jsou Ishtar Terra a Aphrodite Terra. Z obr. 1.3 nalézáme přibližné hodnoty velikosti Aphrodite Terra, tedy přibližně 20° ve směru zeměpisné šířky a 40° ve směru zeměpisné délky. Z obr. 1.4 nalézáme velikost Ishtar Terra jako 20° ve směru zeměpisné šířky a 80° ve směru zeměpisné délky. Velikost ve směru zeměpisné délky je ovšem závislá na zeměpisné šířce, na níž měříme, proto charakteristickou velikost těchto kontinentů určujeme z rozměrů ve směru zeměpisné šířky. Oba kontinenty mají tedy podobnou velikost odpovídající přibližně sférickému harmonickému stupni 10 a vyšším. Svoji velikostí jsou lehce menší než pozemský indický subkontinent.

Z mapy na obr. 1.5 zjišťujeme, že hodnoty admitance jsou v námi zkoumaných oblastech Ishtar Terra a Aphrodite Terra kolem $10\text{m}/\text{km}$ v centrálních oblastech a klesající ke krajům. Výrazně je toto vidět právě v oblasti Aphrodite Terra. Oblast Ishtar Terra je v tomto smyslu problematičtější, jelikož vidíme znatelné oblasti vysokých admitancí na sever a na jih od Maxwell Montes. Pro lepší rozlišení dodatečně uvádíme mapu admitance pro Ishtar Terra na obr. 4.1.

4.2 Reakce Venuše na povrchové zatížení

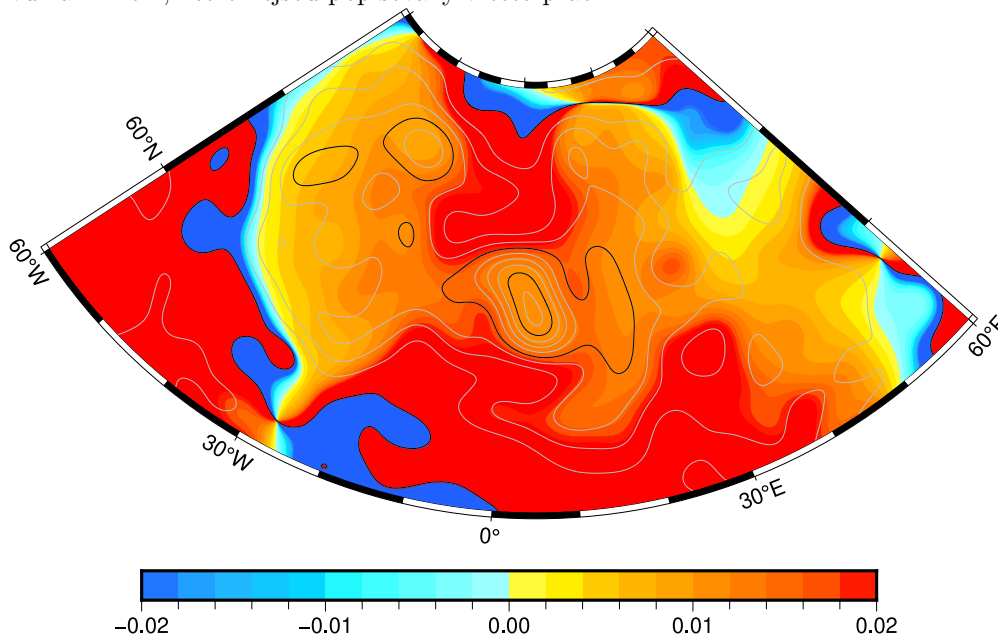
Jak již bylo popsáno, centrem pozornosti našeho zájmu jsou útvary svoji velikostí přibližně odpovídající sférickému harmonickému stupni 10 či vyšším.

Pro kvalitativní analýzu vývoje admitančních křivek na různých stupních je vhodný obr. 3.2. Zajímavé je chování křivek nižších stupňů v oblasti desítek tisíc let, kde dochází nejdříve k relaxaci a následnému vzrůstu hodnoty admitance. Srovnáním s křivkami relaxace hustotního rozhraní jsme usoudili, že se jedná o efekt způsobený relaxací hustotního rozhraní kolem poloměru 5300 km , což je také důvodem, proč podobné chování pozorujeme pouze u admitančních křivek nižších stupňů (ty totiž mají stupeň dostatečně nízký na to, aby rozpoznaly změny v takové hloubce, vzhledem k mocninné závislosti v rov. (3.2)). I přesto, že se jedná o chování v řádech desítek tisíc let po relaxaci, tato analýza pokazuje na to, že velikost admitance (na stupních 10 a vyšších) je málo citlivá na hustotní rozhraní na poloměrech 5300 km . V časových obdobích našeho zájmu jsou hodnoty admitance pro všechny stupně výrazně podobné, a to kolem hodnoty $2\text{m}/\text{km}$, což je ve srovnání s admitancí Aphrodite Terra a Ishtar Terra velmi nízká hodnota.

Z hlediska již zmíněného vulkanizmu je možné usoudit, že v oblastech, kde je sopečná aktivita vysoká, dochází ke zvyšování admitance, jelikož sopečná aktivita se odehrává na malých časových škálách, leč vzhledem k rozměrům sopek, které

Obrázek 4.1: Admitance oblasti Ishtar Terra, měřítko bez jednotky (tedy [m/m])

Na mapě si čtenář povšimne zřetelně nízkých admitancí v západní a východní částech Ishtar Terra a v centrální oblasti Maxwell Montes. Na sever a na jih (až jihozápad) od Maxwell Montes pozorujeme oblasti přesycené stupnice, tedy admitance vyšší než 20 m/km. Po srovnání této mapy s mapou aktivních sopek na Venuši dospíváme ke zjištění, že jižní (jihovýchodní) a částečně i severní části Ishtar Terra jsou vulkanicky aktivní. Odtud se můžeme domnívat, že dané oblasti vysokých admitancí mohou být pod značným vlivem jiných procesů spojených s vulkanizmem, které nejsou popisovány v této práci.



vedou na velmi vysoké stupně sférického harmonického rozvoje, se bude jednat o nižší hodnoty, než které pozorujeme na obr. 3.2.

Dále jsme se věnovali závislosti admitančních křivek na hustotě povrchové zátěže. Jak již bylo zmíněno, je prozkoumání této závislosti zajímavé z toho důvodu, že se zmenšením hustotního skoku mezi kořenem kontinentu a materiálem kůry se zmenšuje i velikost topografie, tedy by admitance dle vztahu v rov. (3.1) mohla růst. Ukazuje se, že při zvyšování hustoty zátěže klesá význam hustotního skoku mezi zátěží a materiálem kůry a naopak (relativně) roste význam hustotního skoku 50 km pod povrchem. Odsud opět dostáváme potvrzení významu tohoto hustotního skoku. Z obr. 3.3 vidíme, že se celková admitance zvýšením hustoty povrchové zátěže až zčtyřnásobí.

V další části jsme se věnovali závislosti velikosti admitance na tloušťce litosféry, tedy vrstvy u povrchu planety s vysokou viskozitou. Výsledek numerických experimentů pro tuto závislost je uveden na obr. 3.4. Z obrázku vidíme, že se zvýšením tloušťky litosféry se zvyšuje i admitance. V obdobích od miliónu let a později již veškeré materiály s viskozitou nižší, než je viskozita litosféry, zrelaxovaly, tedy posunuté na všech hustotních rozhraních mimo litosféru je nulové, což negeneruje žádné gravitační pole (na daném stupni sférického harmonického rozvoje). Zvětšením tloušťky litosféry způsobujeme zpomalení relaxace většího počtu hustotních rozhraní a výsledné zvýšení admitance je přímo způsobeno zvýšením počtu deformovaných hustotních rozhraní generujících gravitační pole. Odtud také zároveň plyne, že pokud bychom tloušťku litosféry snížili pod 50 km, výsledná

admitance by byla způsobena pouze hustotním skokem mezi kůrou a zátěží.

V posledních několika experimentech vyobrazených na obr. 3.5 pozorujeme jevy, které již nemají významný vliv na admitanci v námi zkoumaném období, ale opět pomáhají k lepšímu pochopení relaxačních procesů pod povrchem. Na obr. (a) pozorujeme efekty oddálení relaxace hustotních rozhraní ve svrchním plášti, tedy jejich deformace ovlivňuje gravitační pole po delší dobu, na obr. (b) pozorujeme oddálení relaxace litosféry, tedy povrchová hustotní rozhraní ovlivňují gravitační pole po delší dobu a na obr. (c) pozorujeme vliv času relaxace hustotních rozhraní kolem rozhraní mezi spodním a vrchním pláští.

4.3 Vývoj modelových kontinentů a porovnání s daty z Venuše

V této práci zavádíme několik druhů kontinentů. Z numerických důvodů umísťujeme kontinenty na pólech planety (na samotný vývoj kontinentu toto nemá vliv, leč z početního hlediska je daný způsob výrazně jednodušší). Průměry kontinentů *A* a jeho variant, *B* a *C* jsou přibližně 20° , kontinenty jsou kruhové a velikostí tedy přibližně odpovídají Ishtar Terra a Aphrodite Terra.

V grafech na obr. 3.6 můžeme pozorovat postupnou relaxaci celého kontinentu, respektive jeho zanořování do pláště Venuše. Stejně jako u admitančních křivek vidíme i zde rychlou relaxaci spodního pláště. U vývoje geoidu i admitance jsme schopni pozorovat změnu tvaru křivky ve středu kontinentu, což je způsobeno různou rychlostí relaxace různých stupňů sférického harmonického rozvoje. Jedná se o efekty přímo závislé na konkrétním kontinentu a v případě rozšiřování této práce v budoucnu by se mohlo jednat o jeden ze směrů, ve kterém by bylo možné dané téma rozvíjet. V této práci se však zabýváme pouze charakteristickými velikostmi efektů, tedy jemné změny v průběhu kontinentu zanedbáváme.

Zajímavější jsou však ostatní experimenty s kontinenty. Na obr. 3.7 pozorujeme reakci kontinentu na zalití jeho okolí bazaltem. Bazalt jsme uvažovali vyšší hustoty než materiál kontinentu, v analogii se Zemí. Zdánlivě podezřelé je chování tloušťky kontinentu (tedy vzdálenost mezi povrchem a kořenem), u které se zdá, že se v průběhu zalití mění. Toto je způsobeno tím, že po dosažení izostatické rovnováhy je celková síla působící na kontinent nulová, tedy Archimédova síla působící na kořen kontinentu je velikostí rovna gravitační síle působící na část kontinentu nad původním povrchem (stejně jako u ledovce). Dodáním dodatečné zátěže kolem kontinentu se ovšem situace mění a Archimédova síla působící na kořen přeroste sílu gravitační. Celkem tedy začne okolní magma kontinent vytlačovat výše nad sebe, tedy jeho topografie vzhledem k původnímu povrchu vzroste a kořen se posune blíže k původnímu povrchu. V grafu ovšem udáváme topografii povrchu vůči aktuálnímu povrchu a kořen vůči původnímu povrchu, tedy zdánlivá tloušťka kontinentu po zalití magmatem je o tloušťku nově dodané vrstvy magmatu menší.

Na obr. 3.8 pozorujeme závislosti velikostí geoidu a admitance na množství magmatu, kterým kontinent zaléváme. Vidíme, že s přibývajícím magmatem se geoid stává stále menší a menší, což je přesně opačný efekt, než který předpokládáme by mohl vést k admitanci, kterou pozorujeme v oblastech Ishtar Terra a Aphrodite Terra. Proto se jeví, že pokud se v dávných dobách jednalo o konti-

nenty, musela být jejich admitance vyšší, než je dnes. Současným modelem dokážeme predikovat admitanci kontinentů před zalitím magmatem kolem 10 m/km, což je přibližně hodnota dnes pozorovaná. Předchozím zjištěním však bylo, že zalitím nížin magmatem se admitance zmenší, tedy námi predikovaná admitance je příliš malá. Jak ukazují grafy na obr. 3.9, hustota vyvrženého magmatu má vliv na výslednou admitanci, který ale není dostatečně silný na to, aby vysvětlil admitanci pozorovaných oblastí. Jediné vysvětlení pozorované admitance může být takové, že hustotní rozhraní, které drží kořen, je ve větší hloubce, a tedy jeho signál nedosahuje povrchu v dostatečné síle. Toto je ilustrováno v grafech na obr. 3.10, kde vidíme výraznou změnu v admitanci při posunutí hustotního rozhraní a při hlubším hustotním rozhraní jsou predikované hodnoty admitance po zalití bazaltem právě v oblasti 10 m/km.

Výsledně se nám tedy podařilo objasnit několik klíčových poznatků. Pokud by oblasti Ishtar Terra a Aphrodite Terra měly být původní kontinenty, musí být splněno několik kritérií pro kůru a litosféru Venuše. Hustota materiálu kontinentu nemůže být výrazně odlišná od hustoty materiálu kůry. Toto by mělo být možné ověřit přímo radarovými snímky a analýzou emisivity hornin, což již bylo zmiňováno v kapitole o povrchu Venuše. Tloušťka litosféry musí být dostatečně velká na to, aby zahrnovala hlavní podpovrchové hustotní rozhraní, ve kterém se nachází kořen kontinentu a hlavní hustotní rozhraní se musí nacházet v dostatečné hloubce pod povrchem, aby byl omezen signál kořene pro vyšší stupně sférického harmonického rozvoje. Samozřejmě také viskozita litosféry musí být dostatečně vysoká na to, aby nenechala kontinenty se v námi pozorovaných časových škálách roztéci po kůře, což ovšem je vysoce pravděpodobné vzhledem k nízkému obsahu vody na povrchu a také je potvrzováno pomalou relaxací impaktních kráterů.

Vrátíme-li se k mapám Venuše, konkrétně k mapě na obr. 1.5, můžeme si povšimnout, že u krajů kontinentů admitance klesá. V provedených experimentech, například na obr. 3.10 pozorujeme, že je admitance všude v kontinentu přibližně stejná a na obr. 3.11 dokonce pozorujeme, že výrazné topografické výkyvy tuto skutečnost nenarušují. Vysvětlení tohoto poklesu hodnoty admitance můžeme hledat například v tom, že kůra a litosféra v oblasti pod kontinenty může mít některé další prostorové variace tloušťky než pouze radiální, což v této práci nepředpokládáme. Pokud by tloušťka kůry i litosféry byla ve středech kontinentů větší (dosahující až 100 km) a postupně by klesala ke krajům kontinentů, předpokládáme, že bychom následně pozorovali právě takové chování, jaké pozorujeme na Venuši. Opět se může jednat o další podněty k budoucímu rozšiřování této práce. Oblast Ishtar Terra se však takovým způsobem, vzhledem k výrazně nekompensovaným topografiím na severu a jihozápadu, vysvětlit nedá, ovšem hypotézou, kterou by bylo opět možné v budoucnu studovat, je již zmíněný možný vliv sopečné aktivity na admitanci.

4.4 Zatopené prastaré kontinenty a jejich hledání

V poslední sérii experimentů jsme ověřovali, zda nemohl existovat některý pradávný kontinent, který byl v důsledku přepovrchování tlustou vrstvou magmatu plně ponořen a pozorovány by zůstaly pouze pozůstatky prvků topografie

ve středu kontinentu. Tuto hypotézu jsme ověřovali na experimentech X1 až X8, výsledky simulací byly uvedeny v grafech na obr. 3.11. Jak pozorujeme ihned z grafu (a), i pro málo ponořené kontinenty (X2, X5), získáváme v oblasti původního kontinentu význačně záporný geoid (kolem hodnot -30 m/km v jeho středu). Obrátíme-li se na mapu geoidu Venuše na obr. 1.2, vidíme, že se na ní opravdu vyskytují oblasti s admitancí odpovídající hodnotám získaným na simulaci, leč v těchto oblastech by musela být nulová či lehce záporná admitance, což na Venuši nepozorujeme.

V grafu (b) na obr. 3.11 můžeme pozorovat výrazné prostorové změny admitance v oblastech mezi $\pm 5^\circ$ a $\pm 15^\circ$. Toto je důsledkem malých výchylek topografie, které jsou způsobeny příliš nízkým stupněm rozkladu centrálního píku, což je jednoduše pochopitelné ze zavedení admitance v rov. (3.1). Z tohoto důvodu analyzujeme hodnoty admitance pouze v oblasti centrálního píku, kde hodnoty výsledné topografie nejsou oscilující kolem nuly. V těchto oblastech pozorujeme admitanci v rozsahu hodnot od -20 m/km do -80 m/km. Tedy v případě zatopení kontinentu se jeho původní vyvýšeniny stávají oblastmi s kladnou topografií a výrazně zápornou admitancí. Při porovnání s mapou admitance na obr. 1.5 docházíme k závěru, že takové oblasti nepozorujeme. Slabou schodu s numerickým experimentem můžeme nalézt v oblastech Tellus Regio a Imdr Regio, kde pozorujeme při kladné topografii záporný geoid, ovšem pro skutečně zatopené kontinenty by oblasti musely být rozlehlejší a navíc topografie ani geoid jejich okolí nepřipomínají průběhy pozorované v simulaci na obr. 3.11.

Závěr

V rámci vypracování této práce se nám podařilo úspěšně vytvořit program pro numerickou simulaci viskoelastické deformace pláště Venuše. Tento program jsme dále využili pro prozkoumání chování závislosti časového vývoje topografie, geoidu a admitance (relaxačních křivek) na velikosti povrchové zátěže a radiální struktuře pláště Venuše. Podařilo se zjistit několik zákonitostí chování relaxačních křivek, jako jsou závislosti na hustotě povrchové zátěže, viskózním profilu a hustotním profilu pláště Venuše. V další části jsme se věnovali numerické simulaci několika možných scénářů katastrofického přepovrchování Venuše a sledováním výsledné topografie, geoidu a admitance. Ve všech případech se ukazuje, že vyvržením lávy do nížin se celková admitance a geoid v oblasti původního kontinentu sníží, tedy kataklyzma má opačný vliv, než který bychom potřebovali pro vysvětlení admitancí v oblastech Ishtar Terra a Aphrodite Terra. Nicméně, za předpokladu dostatečně tlusté litosféry a kůry a vysoké viskozity litosféry, pozorujeme v numerických modelech stejné hodnoty admitance a geoidu, jako ve zkoumaných oblastech. Závěrem tedy je, že za splnění určitých podmínek mohou být současné Ishtar Terra a západní část Aphrodite Terra pozůstatky pradávných kontinentů, jejichž okolní nížiny byly náhle zality basaltem.

Dodatečně jsme se věnovali možnosti existence prastarých kontinentů, které byly při bazaltické povodni plně zality magmatem. Ovšem porovnáním s měřenými daty na Venuši jsme charakteristické průběhy admitance a geoidu pro daný vývoj nikde neobjevili. Jistou podobnost nalézáme u oblastí Tellus Regio a Imdr Regio, ale v daném případě se jedná o příliš malé regiony a charakter geoidu potopeného kontinentu neodpovídá geoidu v těchto oblastech.

Seznam použité literatury

- CADEK, O., KALOUSOVA, K., KVORKA, J. a SOTIN, C. (2021). The density structure of titan's outer ice shell. *ICARUS*, **364**. ISSN 0019-1035. doi: 10.1016/j.icarus.2021.114466.
- DUMOULIN, C., TOBIE, G., VERHOEVEN, O., ROSENBLATT, P. a RAMBAUX, N. (2017). Tidal constraints on the interior of venus. *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH-PLANETS*, **122**(6), 1338–1352. ISSN 2169-9097. doi: 10.1002/2016JE005249.
- HAHN, R. M. a BYRNE, P. K. (2023). A morphological and spatial analysis of volcanoes on venus. *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH-PLANETS*, **128**(4), e2023JE007753. doi: <https://doi.org/10.1029/2023JE007753>. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2023JE007753>. e2023JE007753 2023JE007753.
- MAGELLAN (1997). Magellan spherical harmonics, topography, and gravity data. dostupné z: https://pds-geosciences.wustl.edu/missions/magellan/shadr_topo_grav/index.htm.
- MARTINEC, Z. (2019). *Principles of Continuum Mechanics, A Basic Course for Physicists*. Springer Nature.
- PRICE, M. a SUPPE, J. (1995). Constraints on the resurfacing history of venus from the hypsometry and distribution of volcanism, tectonism, and impact craters. *EARTH MOON AND PLANETS*, **71**(1-2), 99–145. ISSN 0167-9295. doi: 10.1007/BF00612873.
- ROLF, T., WELLER, M., GULCHER, A., BYRNE, P., O'ROURKE, J. G., HERRICK, R., BJONNES, E., DAVAILLE, A., GHAIL, R., GILLMANN, C., PLESA, A.-C. a SMREKAR, S. (2022). Dynamics and evolution of venus' mantle through time. *SPACE SCIENCE REVIEWS*, **218**(8). ISSN 0038-6308. doi: 10.1007/s11214-022-00937-9.
- ROTH, L. E. a WALL, S. D. (2012). *The Face of Venus, the Magellan radar-mapping mission*. Createspace Independent Publishing Platform, Scotts Valley. ISBN 978-1478350637.
- SALIBY, C., FIENGA, A., BRIAUD, A., MÉMIN, A. a HERRERA, C. (2023). Viscosity contrasts in the venus mantle from tidal deformations. *PLANETARY AND SPACE SCIENCE*, **105677**. ISSN 0032-0633. doi: <https://doi.org/10.1016/j.pss.2023.105677>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032063323000466>.
- SIMONS, M., SOLOMON, S. a HAGER, B. (1997). Localization of gravity and topography: constraints on the tectonics and mantle dynamics of venus. *GEOPHYSICAL JOURNAL INTERNATIONAL*, **131**(1), 24–44. ISSN 0956-540X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb00593.x.

- SMREKAR, S. E., DAVAILLE, A. a SOTIN, C. (2018). Venus interior structure and dynamics. *SPACE SCIENCE REVIEWS*, **214**, 88. ISSN 0038-6308. doi: 10.1007/s11214-018-0518-1.
- TAYLOR, F. W., SVEDHEM, H. a HEAD, J. W. (2018). Venus: The atmosphere, climate, surface, interior and near-space environment of an earth-like planet. *SPACE SCIENCE REVIEWS*, **214**, 35. doi: 10.1007/s11214-018-0467-8.
- VARŠALOVIČ, D. A., MOSKALEV, A. N. a CHERSONSKIJ, V. K. (1974). *Kvantovaja teorija uglovogo momenta*. Nauka.
- WILLIAMS, D. R. (2023). *Venus Fact Sheet*. NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, dostupné z <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/venusfact.html>.
- ČADEK, O. (2022). *Spektrální metody řešení parciálních diferenciálních rovnic v geofyzice*. rukopis, dostupné z: <https://geo.mff.cuni.cz/~oc/Metody01.pdf> až <https://geo.mff.cuni.cz/~oc/Metody10.pdf>.

Seznam obrázků

1.1	Topografie Venuše, měřítko v metrech	6
1.2	Geoid Venuše, měřítko v metrech	7
1.3	Regionální mapa topografie Venuše pro západní oblast Aphrodite Terra, měřítko v metrech	9
1.4	Regionální mapa topografie Venuše pro Ishtar Terra, měřítko v metrech	10
1.5	Lokální admitance Venuše, měřítko bez jednotky (tedy [m/m]) . .	11
1.6	Korelovaná část geoidu Venuše, měřítko v metrech	12
1.7	Nekorelovaná část geoidu Venuše, měřítko v metrech	12
3.1	Radiální profil hustoty a gravitačního zrychlení V5-1	21
3.2	Časový vývoj admitance pro model V5 – 1 a stupně 6, 10, 18 a 30 SH rozvoje a detail období našeho zájmu	23
3.3	Admitanční křivky pro různé hustoty zátěže a detail období našeho zájmu	24
3.4	Admitanční křivky pro různé tloušťky litosféry a detail období našeho zájmu	25
3.5	Admitanční křivky pro různé viskozity vrchního pláště (a), viskozity litosféry (b) a posuvy rozhraní spodní-svrchní pláště (c)	28
3.6	Relaxace kontinentu	30
3.7	Vývoj kontinentu <i>A</i> před a po zalití.	31
3.8	Vývoje kontinentů <i>A</i> , <i>B</i> a <i>C</i> před a po zalití.	32
3.9	Vývoje kontinentů <i>A</i> , <i>A</i> ₂₉₀₀ , <i>A</i> ₂₉₅₀ , <i>A</i> ₃₀₅₀ a <i>A</i> ₃₁₀₀ před a po zalití. .	33
3.10	Vývoje kontinentů <i>A</i> a <i>A</i> _{alt} před a po zalití.	34
3.11	Vývoje kontinentů <i>X</i> před a po zalití.	35
4.1	Admitance oblasti Ishtar Terra, měřítko bez jednotky (tedy [m/m])	37

Seznam tabulek

1.1	Porovnání astronomických a klimatických parametrů pro Venuši a Zemi	5
2.1	Uspořádání rovnic	19
3.1	Parametry jednotlivých užitých modelů	29
3.2	Parametry jednotlivých modelových kontinentů	29
3.3	Výšky dodatečné zátěže pro kontinenty X	29

A. Přílohy

A.1 Zavedení sférických harmonických vektorů a tenzorů

Téma zde popisované je podrobně popisováno v knize Varšalovič a kol. (1974).

Pro zavedení sférických harmonických je nutné prvně zavést (komplexní) cylindrickou bázi. Kovariantní a kontravariantní cylindrické bázové vektory zavádíme pomocí vztahů s bázovými vektory kartézské báze:

$$\vec{e}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + i\vec{e}_y), \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{e}_0 = \vec{e}_z, \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - i\vec{e}_y), \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{e}^{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - i\vec{e}_y), \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{e}^0 = \vec{e}_z, \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{e}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + i\vec{e}_y), \quad (\text{A.6})$$

kde \vec{e}_{+1} , \vec{e}_0 , \vec{e}_{-1} jsou kovariantní bázové vektory, \vec{e}^{+1} , \vec{e}^0 , \vec{e}^{-1} jsou kontravariantní bázové vektory, \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z jsou kartézské bázové vektory. Těto báze dále využíváme jako báze vektorové.

Jako bázi tenzorovou používáme (opět komplexní) ireducibilní tenzorovou bázi, tedy tenzory rozkládáme na část izotropní (tedy skalár), část antisymetrickou (tedy axiální vektor) a část symetrickou:

$$e_{jk} = \sum_{\mu\nu} C_{1\mu 1\nu}^{jk} \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu, \quad (\text{A.7})$$

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} = \langle j_1 m_1 | \langle j_2 m_2 | JM(j_1, j_2) \rangle, \quad (\text{A.8})$$

kde e_{jk} je bázový tenzor, e_{00} je izotropní část, e_{1m} , $m \in \{-1, 0, 1\}$ je antisymetrická část a e_{2m} , $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ je symetrická část báze, \vec{e}_μ jsou již zavedené kovariantní cylindrické bázové vektory a symbol $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM}$ je Clebsh-Gordánův koeficient.

V těchto bázích zavádíme sférické harmonické vektory a tenzory následovně:

$$\vec{Y}_{jm}^\xi(\theta, \phi) = \sum_{\mu\nu} C_{\xi\nu 1\mu}^{jm} Y_{\mu\nu}(\theta, \phi) \vec{e}_\mu, \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{Y}_{jm}^{\xi k}(\theta, \phi) = \sum_{\mu\nu} C_{\xi\mu k\nu}^{jm} Y_{\xi\mu}(\theta, \phi) \mathbf{e}_{k\nu}, \quad (\text{A.10})$$

kde $\vec{Y}_{jm}^\xi(\theta, \phi)$ je sférický harmonický vektor ($\xi \in \{j-1, j, j+1\}$) a $\mathbf{Y}_{jm}^{\xi k}(\theta, \phi)$ je sférický harmonický tenzor ($k \in \{0, 1, 2\}$, $l \in \langle j-k, j+k \rangle \cup \mathbb{N}$).

A.2 Rozložení rovnic viskoelastické deformace do tvaru sférických harmonických řad

A.2.1 Užité vztahy

V této podsekcí uvádíme tři diferenciální vztahy pro součiny radiální funkce a sférické harmonické funkce, vektoru či tenzoru, které dále užíváme při rozkladu rovnic viskoelastické deformace do sférických harmonických stupňů. Tyto vztahy jsou:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left[f(r) \vec{Y}^l_{jm}(\theta, \phi) \right] &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left[\sqrt{j} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) \delta_{l,j-1} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{j+1} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) \delta_{l,j+1} \right] f(r) Y_{jm}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left[f(r) \vec{Y}^l_{jm}(\theta, \phi) \right] &= (-1)^{j+l+1} \sum_{k=0,1,2} \sqrt{2k+1} \sqrt{l} \begin{Bmatrix} j & 1 & l \\ 1 & l-1 & k \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r} \right) \times \\ &\quad \times f(r) \mathbf{Y}_{jm}^{l-1,k}(\theta, \phi) + (-1)^{j+l} \sum_{k=0,1,2} \sqrt{2k+1} \sqrt{l+1} \times \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} j & 1 & l \\ 1 & l+1 & k \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{jm}^{l+1,k}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left[f(r) \mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\theta, \phi) \right] &= (-1)^{j+l} \sqrt{2k+1} \left[\sqrt{l+1} \begin{Bmatrix} j & 1 & l+1 \\ 1 & l & k \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) f(r) \times \right. \\ &\quad \left. \times \vec{Y}_{jm}^{l+1}(\theta, \phi) - \sqrt{l} \begin{Bmatrix} j & 1 & l-1 \\ 1 & l & k \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^{l-1}(\theta, \phi) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{pmatrix} Y_{jm} \vec{e}_r \\ \frac{r}{\sqrt{j(j+1)}} \vec{\nabla} Y_{jm} \\ -\frac{r}{\sqrt{j(j+1)}} \vec{e}_r \times \vec{\nabla} Y_{jm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j}{2j+1}} & 0 & -\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \\ \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} & 0 & \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{Y}_{jm}^{j-1} \\ \vec{Y}_{jm}^j \\ \vec{Y}_{jm}^{j+1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

kde $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$ je Wignerův 6j-symbol popsáný například v knize Varšalovič a kol. (1974), vztahy je v této podobě nalézt například v Čadek (2022), přednáška 3.

A.2.2 Rozložení rovnice kontinuity

V této podsekcí se věnujeme rozložení rovnice kontinuity (2.6). Užitím rozkladu (2.11) a vztahu (A.11) získáváme:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_n &= \sum_{jml} \vec{\nabla} \cdot \left(u_{jm,n}^l \vec{Y}_{jm}^l \right) = \\ &= \sum_{jm} \left[\sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} \right] Y_{jm}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Rozložená rovnice kontinuity vede na sadu rovnic pro $j \in \mathbb{N}$, $m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$:

$$\sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} = 0. \quad (\text{A.16})$$

A.2.3 Rozložení pohybové rovnice

V této podsekcí rozkládáme pohybovou rovnici (2.7). Při rozkladu užíváme vztahů (A.13) a (A.14). Při odvození postupuje následovně:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{t} &= \sum_{jmk} \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{lk} \mathbf{Y}_{jm}^{lk} \right) = \\ &= \sum_{jm} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j0} \mathbf{Y}_{jm}^{j0} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j-1,1} \mathbf{Y}_{jm}^{j-1,1} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j,1} \mathbf{Y}_{jm,n}^{j,1} \right) + \right. \\ &+ \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j+1,1} \mathbf{Y}_{jm,n}^{j+1,1} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j-2,2} \mathbf{Y}_{jm,n}^{j-2,2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j-1,2} \mathbf{Y}_{jm,n}^{j-1,2} \right) + \\ &\left. + \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j2} \mathbf{Y}_{jm,n}^{j2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j+1,2} \mathbf{Y}_{jm,n}^{j+1,2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j+2,2} \mathbf{Y}_{jm,n}^{j+2,2} \right) \right] = \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{jm} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j0} \mathbf{Y}_{jm}^{j0} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j-2,2} \mathbf{Y}_{jm,n}^{j-2,2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j-1,2} \mathbf{Y}_{jm,n}^{j-1,2} \right) + \right. \\ &\left. + \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j2} \mathbf{Y}_{jm,n}^{j2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j+1,2} \mathbf{Y}_{jm,n}^{j+1,2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(t_{jm,n}^{j+2,2} \mathbf{Y}_{jm,n}^{j+2,2} \right) \right] = \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{jm} \left\{ \vec{Y}_{jm}^{j+1} \left[\sqrt{j+1} \begin{Bmatrix} j & 1 & j+1 \\ 1 & j & 0 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) t_{jm,n}^{j0} + \right. \right. \\ &+ \sqrt{5} \sqrt{j+1} \begin{Bmatrix} j & 1 & j+1 \\ 1 & j & 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) t_{jm,n}^{j2} - \\ &- \left. \sqrt{5} \sqrt{j+2} \begin{Bmatrix} j & 1 & j+1 \\ 1 & j+2 & 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+3}{r} \right) t_{jm,n}^{j+2,2} \right] + \\ &+ \vec{Y}_{jm}^j \left[\alpha^- t_{jm,n}^{j-1,2} + \alpha^+ t_{jm,n}^{j+1,2} \right] + \\ &+ \vec{Y}_{jm}^{j-1} \left[-\sqrt{j} \begin{Bmatrix} j & 1 & j-1 \\ 1 & j & 0 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) t_{jm,n}^{j0} + \right. \\ &+ \sqrt{5} \sqrt{j-1} \begin{Bmatrix} j & 1 & j-1 \\ 1 & j-2 & 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-2}{r} \right) t_{jm,n}^{j-2,2} - \\ &- \left. \sqrt{5} \sqrt{j} \begin{Bmatrix} j & 1 & j-1 \\ 1 & j & 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) t_{jm,n}^{j2} \right] \Big\} = \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{jm} \left\{ \vec{Y}_{jm}^{j+1} \left[\sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) t_{jm,n}^{j0} + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) t_{jm,n}^{j2} - \right. \right. \\ &- \left. \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+3}{r} \right) t_{jm,n}^{j+2,2} \right] + \vec{Y}_{jm}^j \left[\alpha^- t_{jm,n}^{j-1,2} + \alpha^+ t_{jm,n}^{j+1,2} \right] + \\ &+ \vec{Y}_{jm}^{j-1} \left[-\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) t_{jm,n}^{j0} + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-2}{r} \right) t_{jm,n}^{j-2,2} - \right. \\ &- \left. \left. \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) t_{jm,n}^{j2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

kde při přechodu od výrazu (A.17) k výrazu (A.18) užíváme symetrie tenzoru napětí, tedy nulovosti antisymetrických složek. V dalším kroku rozkládáme vztah pro gravitační síly působící na rozhraních následovně:

$$u_{r,n}\vec{e}_r = (\vec{e}_r \cdot \vec{u}_n)\vec{e}_r = \quad (\text{A.21})$$

$$= \sum_{jml} u_{jm,n}^l \vec{e}_r \cdot \vec{Y}_{jm}^l \vec{e}_r = \quad (\text{A.22})$$

$$= \sum_{jm} \left[\sqrt{\frac{j}{2j+1}} u_{jm,n}^{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} u_{jm,n}^{j+1} \right] \times \\ \times \left[\sqrt{\frac{j}{2j+1}} \vec{Y}_{jm,n}^{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \vec{Y}_{jm,n}^{j+1} \right] = \quad (\text{A.23})$$

$$= \sum_{jm} \left\{ \vec{Y}_{jm}^{j-1} \left[\frac{j}{2j+1} u_{jm,n}^{j-1} - \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} u_{jm,n}^{j+1} \right] + \right. \\ \left. + \vec{Y}_{jm}^{j+1} \left[-\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} u_{jm,n}^{j-1} + \frac{j+1}{2j+1} u_{jm,n}^{j+1} \right] \right\}. \quad (\text{A.24})$$

Rozložená pohybová rovnice tedy vede na sadu rovnic opět pro $j \in \mathbb{N}, m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$:

$$-\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) t_{jm,n}^{j0} + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-2}{r} \right) t_{jm,n}^{j-2,2} - \\ -\sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) t_{jm,n}^{j2} + \frac{d\rho}{dr} \frac{gj}{2j+1} u_{jm,n}^{j-1} - \\ -\frac{d\rho}{dr} \frac{g\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} u_{jm,n}^{j+1} + f_{jm,n}^{j-1} = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$\alpha^+ t_{jm,n}^{j+1,2} + \alpha^- t_{jm,n}^{j-1,2} + f_{jm,n}^j = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$\sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) t_{jm,n}^{j0} - \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+3}{r} \right) t_{jm,n}^{j+2,2} + \\ + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) t_{jm,n}^{j2} - \frac{d\rho}{dr} \frac{g\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} u_{jm,n}^{j-1} + \\ + \frac{d\rho}{dr} \frac{g(j+1)}{2j+1} u_{jm,n}^{j+1} + f_{jm,n}^{j+1} = 0. \quad (\text{A.27})$$

A.2.4 Rozložení reologické rovnice

Nakonec provádíme rozklad reologické rovnice (2.8). Při rozkladu užíváme vztahu (A.12).

Zapůsobíme-li na libovolný tenzor operátorem $\hat{S} : \mathbf{X} \rightarrow \frac{1}{2} [\mathbf{X} + \mathbf{X}^T]$, výsledkem obdržíme tenzor, který byl očištěn od antisymetrických složek. Při rozkladu do ireducibilních složek působí operátor \hat{S} následovně:

$$\hat{S} \sum_{jm} \sum_{k=0,1,2} \sum_{l=|j-k|}^{j+k} X_{jm}^{lk} \mathbf{e}_{jm}^{lk} = \sum_{jm} \sum_{k=0,2} \sum_{l=|j-k|}^{j+k} X_{jm}^{lk} \mathbf{e}_{jm}^{lk}. \quad (\text{A.28})$$

Užitím této vlastnosti získáváme:

$$\frac{1}{2} \left[\vec{\nabla} \vec{u}_n + (\vec{\nabla} \vec{u}_n)^T \right] = \sum_{jml} \vec{\nabla} \left(u_{jm,n}^l \vec{Y}_{jm,n}^l \right) = \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{jm} \left\{ \mathbf{Y}_{jm,n}^{j-2,2} \left[\sqrt{5} \sqrt{j-1} \begin{Bmatrix} j & 1 & j-1 \\ 1 & j-2 & 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} \right] + \right. \\
&+ \mathbf{Y}_{jm,n}^{j-1,2} \left[-\sqrt{5} \sqrt{j} \begin{Bmatrix} j & 1 & j \\ 1 & j-1 & 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) u_{jm,n}^j \right] + \\
&+ \mathbf{Y}_{jm,n}^{j2} \left[-\sqrt{5} \sqrt{j} \begin{Bmatrix} j & 1 & j-1 \\ 1 & j & 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} + \right. \\
&+ \left. \sqrt{5} \sqrt{j+1} \begin{Bmatrix} j & 1 & j+1 \\ 1 & j & 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} \right] + \\
&+ \mathbf{Y}_{jm,n}^{j+1,2} \left[-\sqrt{5} \sqrt{j+1} \begin{Bmatrix} j & 1 & j \\ 1 & j+1 & 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) u_{jm,n}^j \right] + \\
&+ \mathbf{Y}_{jm,n}^{j+2,2} \left[-\sqrt{5} \sqrt{j+2} \begin{Bmatrix} j & 1 & j+1 \\ 1 & j+2 & 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} \right] + \\
&+ \mathbf{Y}_{jm,n}^{j0} \left[-\sqrt{j} \begin{Bmatrix} j & 1 & j-1 \\ 1 & j & 0 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} + \right. \\
&+ \left. \sqrt{j+1} \begin{Bmatrix} j & 1 & j+1 \\ 1 & j & 0 \end{Bmatrix} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} \right] \left. \right\} = \quad (\text{A.30}) \\
&= \sum_{jm} \left\{ \mathbf{Y}_{jm,n}^{j-2,2} \left[\sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} \right] + \right. \\
&+ \mathbf{Y}_{jm,n}^{j-1,2} \left[\beta^- u_{jm,n}^j \right] + \\
&+ \mathbf{Y}_{jm,n}^{j2} \left[-\sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} + \right. \\
&+ \left. \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} \right] + \\
&+ \mathbf{Y}_{jm,n}^{j+1,2} \left[\beta^+ u_{jm,n}^j \right] + \\
&+ \mathbf{Y}_{jm,n}^{j+2,2} \left[-\sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} \right] + \\
&+ \mathbf{Y}_{jm,n}^{j0} \left[-\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} + \right. \\
&+ \left. \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} \right] \left. \right\}, \quad (\text{A.31})
\end{aligned}$$

odkud již nakonec obdržíme poslední sadu rovnic:

$$\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta}\right) t_{jm,n}^{j-2,2} - \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r}\right) u_{jm,n}^{j-1} = -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j-2,2} - \frac{\Delta t}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j-2,2}, \quad (\text{A.32})$$

$$\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta}\right) t_{jm,n}^{j-1,2} - \beta^- u_{jm,n}^j = -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j-1,2} - \frac{\Delta t}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j-1,2}, \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta}\right) t_{jm,n}^{j2} + \\ & + \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right) u_{jm,n}^{j-1} - \\ & - \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right) u_{jm,n}^{j+1} = -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j2} - \frac{\Delta t}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j2}, \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta}\right) t_{jm,n}^{j+1,2} - \beta^+ u_{jm,n}^j = -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j+1,2} - \frac{\Delta t}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j+1,2}, \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta}\right) t_{jm,n}^{j+2,2} + \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r}\right) u_{jm,n}^{j+1} = -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j+2,2} - \frac{\Delta t}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j+2,2}, \\ & \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta}\right) t_{jm,n}^{j0} + \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} & + \sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right) u_{jm,n}^{j-1} - \\ & - \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right) u_{jm,n}^{j+1} = -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j0} - \frac{\Delta t}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j0}. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Rovnice (A.37) popisuje reologii materiálu při jeho stlačování. Ovšem dle rovnice kontinuity je materiál nestlačitelný. Pokud z (A.37) vytkneme a dosadíme z (A.16), opravdu zjistíme, že řešením pro tlakovou složku tenzoru $t_{jm,n}^{j0}$ je nula.

A.2.5 Rozložení na sferoidální a toroidální část

Dříve odvozené sady rovnic můžeme rozdělit na dvě sady vzájemně nezávislých soustav. První soustavu nazýváme sferoidální a jedná se o rovnice:

$$\sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} = 0, \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) t_{jm,n}^{j0} + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-2}{r} \right) t_{jm,n}^{j-2,2} - \\ & -\sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) t_{jm,n}^{j2} + \frac{d\rho}{dr} \frac{gj}{2j+1} u_{jm,n}^{j-1} - \\ & -\frac{d\rho}{dr} \frac{g\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} u_{jm,n}^{j+1} + f_{jm,n}^{j-1} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) t_{jm,n}^{j0} - \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+3}{r} \right) t_{jm,n}^{j+2,2} + \\ & + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) t_{jm,n}^{j2} - \frac{d\rho}{dr} \frac{g\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} u_{jm,n}^{j-1} + \\ & + \frac{d\rho}{dr} \frac{g(j+1)}{2j+1} u_{jm,n}^{j+1} + f_{jm,n}^{j+1} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta} \right) t_{jm,n}^{j-2,2} - \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} &= -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j-2,2} - \\ & - \frac{\Delta t}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j-2,2}, \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta} \right) t_{jm,n}^{j2} + \\ & + \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm,n}^{j-1} - \\ & - \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} = -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j2} - \\ & - \frac{\Delta t}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j2}, \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta} \right) t_{jm,n}^{j+2,2} + \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) u_{jm,n}^{j+1} &= -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j+2,2} - \\ & - \frac{\Delta t}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j+2,2}, \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Druhou soustavu rovnic nazýváme toroidální a tvoří ji rovnice:

$$\alpha^+ t_{jm,n}^{j+1,2} + \alpha^- t_{jm,n}^{j-1,2} + f_{jm,n}^j = 0, \quad (\text{A.44})$$

$$\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta} \right) t_{jm,n}^{j-1,2} - \beta^- u_{jm,n}^j = -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j-1,2} - \frac{\Delta t}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j-1,2}, \quad (\text{A.45})$$

$$\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\Delta t}{4\eta} \right) t_{jm,n}^{j+1,2} - \beta^+ u_{jm,n}^j = -\frac{\Delta t}{4\eta} t_{jm,0}^{j+1,2} - \frac{\Delta t}{2\eta} \sum_{k=1}^{n-1} t_{jm,k}^{j+1,2}. \quad (\text{A.46})$$

Řešení obou sad rovnic je význačně ovlivňováno hraničními podmínkami. V našem případě udáváme hraniční podmínky ve formě zadání sil na hranicích zkoumané oblasti. Síly na hranicích jsou v našem případě vždy radiální, tedy ze sady toroidálních rovnic obdržíme sadu lineárních algebraických rovnic s nulovou pravou stranou. Toroidálním řešením tedy bude $t_{jm,n}^{j+1,2} = t_{jm,n}^{j-1,2} = u_{jm,n}^j = 0$. Řešení sady sférických rovnic se věnujeme v kapitole 2.

A.2.6 Tabulka užitých Wignerových 6j symbolů

$$\begin{Bmatrix} j & 1 & j+1 \\ 1 & j & 0 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{3(2j+1)}} \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{Bmatrix} j & 1 & j+1 \\ 1 & j & 2 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{j(2j-1)}{30(2j+1)(j+1)(2j+3)}} \quad (\text{A.48})$$

$$\begin{Bmatrix} j & 1 & j+1 \\ 1 & j+2 & 2 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{5(2j+3)}} \quad (\text{A.49})$$

$$\begin{Bmatrix} j & 1 & j-1 \\ 1 & j & 0 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{3(2j+1)}} \quad (\text{A.50})$$

$$\begin{Bmatrix} j & 1 & j-1 \\ 1 & j & 2 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{30(2j-1)j(2j+1)}} \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{Bmatrix} j & 1 & j-1 \\ 1 & j-2 & 2 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{5(2j-1)}} \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{Bmatrix} j & 1 & j-1 \\ 1 & j-2 & 2 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{5(2j-1)}} \quad (\text{A.53})$$

$$\begin{Bmatrix} j & 1 & j-1 \\ 1 & j & 2 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{30(2j-1)j(2j+1)}} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{Bmatrix} j & 1 & j+1 \\ 1 & j & 2 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{(2j-1)j}{30(2j+1)(j+1)(2j+3)}} \quad (\text{A.55})$$

$$\begin{Bmatrix} j & 1 & j+1 \\ 1 & j+2 & 2 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{5(2j+3)}} \quad (\text{A.56})$$

$$\begin{Bmatrix} j & 1 & j-1 \\ 1 & j & 0 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{3(2j+1)}} \quad (\text{A.57})$$

$$\begin{Bmatrix} j & 1 & j+1 \\ 1 & j & 0 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{3(2j+1)}} \quad (\text{A.58})$$

A.3 Tabulka koeficientů řešení úlohy

$$a_{j,1}^q = -\sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{j-1}{2r_q} + \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.59})$$

$$a_{j,2}^q = \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{j+2}{2r_q} + \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.60})$$

$$a_{j,3}^q = -\sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{j-1}{2r_q} - \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.61})$$

$$a_{j,4}^q = \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{j+2}{2r_q} - \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.62})$$

$$a_{j,5}^q = \frac{(\rho_{q+\frac{1}{2}} - \rho_{q-\frac{1}{2}})g}{(2j+1)\Delta r} j, \quad (\text{A.63})$$

$$a_{j,6}^q = -\frac{(\rho_{q+\frac{1}{2}} - \rho_{q-\frac{1}{2}})g}{(2j+1)\Delta r} \sqrt{j(j+1)}, \quad (\text{A.64})$$

$$a_{j,7}^q = -\frac{(\rho_{q+\frac{1}{2}} - \rho_{q-\frac{1}{2}})g}{(2j+1)\Delta r} \sqrt{j(j+1)}, \quad (\text{A.65})$$

$$a_{j,8}^q = \frac{(\rho_{q+\frac{1}{2}} - \rho_{q-\frac{1}{2}})g}{(2j+1)\Delta r} (j+1), \quad (\text{A.66})$$

$$a_{j,9}^q = -\sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{j}{2r_q} - \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.67})$$

$$a_{j,10}^q = -\sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{j}{2r_q} + \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.68})$$

$$a_{j,11}^q = -\sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{j-1}{2r_q} + \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.69})$$

$$a_{j,12}^q = -\sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{j+2}{2r_q} - \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.70})$$

$$a_{j,13}^q = -\sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{j-1}{2r_q} - \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.71})$$

$$a_{j,14}^q = -\sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{j+2}{2r_q} + \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.72})$$

$$a_{j,15}^q = -\sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{j+1}{2r_q} + \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.73})$$

$$a_{j,16}^q = -\sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{j+1}{2r_q} - \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.74})$$

$$b_{j,1}^q = -\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{j+1}{2r_q} - \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.75})$$

$$b_{j,2}^q = -\sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{j-2}{2r_q} + \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.76})$$

$$b_{j,3}^q = -\sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{j+1}{2r_q} - \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.77})$$

$$b_{j,4}^q = -\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{j+1}{2r_q} + \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.78})$$

$$b_{j,5}^q = -\sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{j-2}{2r_q} - \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.79})$$

$$b_{j,6}^q = -\sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{j+1}{2r_q} + \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.80})$$

$$b_{j,7}^q = -\sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left(\frac{j}{2r_q} + \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.81})$$

$$b_{j,8}^q = -\sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{j}{2r_q} + \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.82})$$

$$b_{j,9}^q = -\sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{j+3}{2r_q} - \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.83})$$

$$b_{j,10}^q = -\sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left(\frac{j}{2r_q} - \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.84})$$

$$b_{j,11}^q = -\sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{j}{2r_q} - \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.85})$$

$$b_{j,12}^q = -\sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{j+3}{2r_q} + \frac{1}{\Delta r} \right), \quad (\text{A.86})$$

$$b_{j,13}^q = \left(\frac{1}{2\mu_q} + \frac{\Delta t}{4\eta_q} \right). \quad (\text{A.87})$$