MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Deyvid Penkov

Integrálně-geometrická míra

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Rataj, CSc.
Studijní program: Obecná matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Velice děkuji prof. RNDr. Jan Rataj, CSc. za ochotu, vstřícnost, náměty, kontroly a rady.

Název práce: Integrálně-geometrická míra

Autor: Deyvid Penkov

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Rataj, CSc., Matematický ústav UK

Abstrakt: Definujeme třídu měr nižších dimenzí pomocí průměrování Lebesgueovy míry z projekce množiny přes všechny ortogonální projekce. Ukážeme některé vztahy s Hausdorffovou měrou a konstruujeme množiny, na kterých se tato míra od Hausdorffovy liší.

Klíčová slova: vnější míra, Hausdorffova míra, integrálně-geometrická míra, nulové množiny

Title: Integralgeometric measure

Author: Deyvid Penkov

Institute: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: prof. RNDr. Jan Rataj, CSc., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: We define a class of lower dimensional measures by averaging the Lebesgue measure from the set projection over all orthogonal projections. We show some relations with the Hausdorff measure and construct sets on which this measure differs from the Hausdorff measure.

Keywords: outer measure, Hausdorff measure, integralgeometric measure, null sets

Obsah

Úvod

Zadání práce

„Student nastuduje definici integrálně-geometrické míry a sepíše přehledný důkaz jejího ekvivalentního vyjádření jako integrál přes Grassmannovu varietu. Dále prozkoumá některé příklady množin s kladnou Hausdorffovou a nulovou integrálně-geometrickou mírou.“

Motivace

Integrální geometrie je část teorie míry zabývající se zaváděním měr na prostorech s grupou symetrií, které jsou invariantní na působení této grupy. V našem případě je to euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ s ortogonální grupou $O(n)$.
V druhé kapitole definujeme míru nižších dimenzí založenou na průměrování velikostí množiny v různých směrech a dokážeme její ekvivalentní vyjádření a některé vztahy s Hausdorffovou měrou. Jako důsledek dostaneme známý a často používaný Croftonův vzorec.
Ve třetí kapitole konstruujeme fraktální množiny, na kterých se bude zavedená míra naopak od Hausdorffovy míry lišit.

Seznam důkazů

Vlastní důkazy jsou v první kapitole u věty 1, lemmatu 8 a věty 12.
V druhé kapitole věta 13, lemma 16, věty 17, 20, 21, 22 s důsledky za ní a věta z oddílu 2.5.
Ve třetí kapitole věta 26 a tvrzení 26, 27 a **??**.
Převzato a zdetailněno je lemma 14, věta 15, oddíl 2.2, lemma 18 a věta 19.

Značení

Je-li (X,ρ) metrický prostor, tak značíme

- potenční množinu X jako $\mathcal{P}(X)$,
- borelovské množiny v X jako $\mathcal{B}(X)$,
- diametr množiny X jest $\operatorname{diam}(X) = \sup\{\rho(x,y),\, x,y \in X\}$,
- Diametr systému množin $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ jest $\operatorname{Diam}(\mathcal{G}) = \sup\{\operatorname{diam}(G),\, G \in \mathcal{G}\}$,
- pro $K,L \in \mathcal{P}(X)$ vzdáleností rozumíme $\operatorname{dist}(K,L) = \inf\{\rho(x,y),\, x \in K, y \in L\}$,
- otevřenou kouli $\mathrm{U}(x,r) = \{y \in X :\ \rho(x,y) < r\}$,
- uzavřenou kouli $\mathrm{B}(x,r) = \{y \in X :\ \rho(x,y) \leq r\}$,

- jsou-li $f, f_k : X \to \mathbb{R},\ \ k \in \mathbb{N}$ funkce, tak píšeme, že:

$$f_k \nearrow_{k\to\infty} f,$$

pokud $\forall x \in X :\ f_k(x) \nearrow_{k\to\infty} f(x)$, tedy bodová monotonní konvergence.

Jako $\operatorname{card}(M)$ pro libovolnou množinu M rozumíme počet prvků v M, což je přirozené číslo (nebo 0) nebo ∞.

Je-li $f : X \to Y$ funkce, $A \subseteq X$ tak $f|_A$ označuje restrikci f na A.

Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lipschitzovská funkce, tak $D_f(x)$ značí matici derivací v bodě $x \in \mathbb{R}^n$, pokud existují.

Jsou-li $n \geq m \geq 1$ přirozená čísla, tak jako $\mathrm{B}^m(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ rozumíme $\mathrm{B}(x,r) \cap \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_m\}$ (tedy m-rozměrný disk).

Na $\mathbb{R}^n$ standardně jako ρ uvažujeme euklidovskou (dvojkovou) metriku, respektive $||\cdot||$ značí euklidovskou normu.

Sféru $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ ||x|| = 1\}$.

Lebesgueovu (vnější) míru na $\mathbb{R}^n$ značíme λ^n. Lze ji definovat jako:

$$\lambda^n(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf\{\sum_{S\in\mathcal{G}} V^n(S) : \quad \mathcal{G} \text{ je systém omezených otevřených kvádrů },$$
$$A \subseteq \cup\mathcal{G},\ \ \operatorname{Diam}(\mathcal{G}) < \delta\}, \quad A \subseteq \mathbb{R}^n,$$

kde V^n přiřazuje omezeným otevřeným kvádrům jejich objem.

1. Preliminá̌re

Nejprve si připomeneme některé základní znalosti, jež budeme potřebovat, které lze nalézt v základních kurzech (jako Matematická analýza a Teorie míry a integrálů). U Minkowského nerovnosti provedeme drobné zobecnění (na nekonečné součty).

Věta (Leviho věta). *Nechť je* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *prostor s mírou.* $f_k : X \to [0,\infty],\ k \in \mathbb{N}$ *monotonní posloupnost měřitelných nezáporných funkcí, takových, že*

$$f_k \nearrow_{k\to\infty} f : X \to [0,\infty].$$

Pak

$$\int_X f_k d\mu \nearrow_{k\to\infty} \int_X f d\mu.$$

Speciálně, i bez požadavku na monotónii $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *platí:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu.$$

Věta 1 (Minkowského nerovnost). $(X,\mathcal{A},\mu)$ *prostor s mírou,* $f,g : X \to [0,\infty]$ *měřitelné nezáporné funkce,* $t \geq 1$ *reálné číslo. Pak platí*

$$\left(\int_X (f+g)^t d\mu\right)^{1/t} \leq \left(\int_X f^t d\mu\right)^{1/t} + \left(\int_X g^t d\mu\right)^{1/t}.$$

Jsou-li $f_k : X \to [0,\infty],\ k \in \mathbb{N}$ *posloupnost měřitelných nezáporných funkcí, tak*

$$\left(\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)^t d\mu\right)^{1/t} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k^t d\mu\right)^{1/t}.$$

Důkaz: Důkaz v případě konečného součtu je součástí základních kurzů. Ukážeme, že platí i pro nekonečny součet. Induktivně platí:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \ : \ \left(\int_X \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^t d\mu\right)^{1/t} &\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\int_X f_k^t d\mu\right)^{1/t} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k^t d\mu\right)^{1/t}. \\ &\Downarrow \\ \left(\lim_{n\to\infty} \int_X \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^t d\mu\right)^{1/t} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k^t d\mu\right)^{1/t}. \end{aligned}$$

Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Z nezápornosti f_k máme:

$$s_n^t \nearrow_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)^t.$$

A tedy z Leviho věty:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X s_n^t d\mu = \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)^t d\mu.$$

$\square$

Další lemma je jen část z pomocného lemmatu které lze najít v souvislosti s Fubiniho větou.

Lemma 2. *Buďte $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ σ-konečné prostory s mírou. Nechť je $E \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, pak*

- $\forall x \in X: \quad E_x \in \mathcal{B}$,
- $\forall y \in Y: \quad E_y \in \mathcal{A}$,
- *funkce $x \to \nu(E_x)$ je měřitelná na $(X,\mathcal{A})$,*
- *funkce $y \to \mu(E_y)$ je měřitelná na $(Y,\mathcal{B})$,*

kde E_x, resp. E_y jsou řezy množinou E v x, resp. v y a $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ je nejmenší σ-algebra na $X \times Y$ obsahující součiny množin z $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

1.1 Carathéodoryho konstrukce

Následující definice a věty je možné nalézt v základním kurzu TMI, někdy se však samotná Carathéodoryho konstrukce přednáší bez požadavku aby byla pokrytí malých diametrů. My to však požadovat budeme, jelikož nám to zajistí aby borelovské množiny byly měřitelné.
Tuto definici lze nalézt také ve Pertti Mattila, 1995, s jediným rozdílem, že se připouští aby $\emptyset \notin \mathcal{F}$ což je potřeba nahradit jinou, složitější, podmínkou.

Definice 1 (Carathéodoryho konstrukce)**.** *X buď metrický prostor, $\mathcal{F}$ systém množin na něm a $\zeta : \mathcal{F} \to [o,\infty]$ splňující:*

- $\emptyset \in \mathcal{F}$ *a* $\zeta(\emptyset) = 0$,
- $\forall \delta > 0\ \exists E_1, E_2 ... \in \mathcal{F}$ *tak, že* $\forall i \in \mathbb{N}:\ \mathrm{diam}(E_i) < \delta$ *a* $X = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$.

Pak řekneme, že množinová funkce

$$\psi(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf\{\sum_{S\in\mathcal{G}} \zeta(S) : \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F},\ A \subseteq \cup\mathcal{G},\ \mathrm{Diam}(\mathcal{G}) < \delta\}, \quad A \subseteq X$$

je dána Carathéodoryho konstrukcí ze ζ na $\mathcal{F}$.

Poznámka.

- $\psi(A)$ je dobře definovaná, jelikož pro menší δ je příslušné infimum větší nebo rovno, tedy $\lim_{\delta\to 0^+}$ lze zaměnit za sup přes $\delta > 0$.
- Je-li X separabilní a $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{F}$ tak je druhá podmínka automaticky splněna. Podrobněji viz lemma 13.

Věta 3. *ψ z definice 1 je vnější míra na X.*
Dále je-li μ^* libovolná vnější míra na X, tak o množině $A \subseteq X$ řekneme, že je μ^*-měřitelná, pokud:

$$\forall E \subseteq X: \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Systém všech μ^*-měřitelných množin označíme $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Pak je

$$(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*)$$

úplný prostor s mírou.

Věta 4. *X buď metrický prostor. O vnější míře na μ^* řekneme, že je metrická, pokud:*

$$\forall A,B \subseteq X: \ \operatorname{dist}(A,B) > 0 \implies \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Platí, že ψ z definice 1 je metrická vnější míra na X.
Dále, je-li libovolná vnější míra μ^* metrická, pak platí:

$$\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

1.2 Hausdorffova míra a dimenze

Ještě ze základního kurzu připomeneme Hausdorffovu míru a dimenzi:

Definice 2 (Hausdorffova míra)**.** *Nechť je X separabilní metrický prostor a $s \geq 0$ reálné číslo. Jako s-rozměrnou Hausdorffovou (vnější) míru nazveme množinovou funkci danou Carathéodoryho konstrukcí z funkce*

$$\zeta^s(S) = \frac{\Gamma(1/2)^s}{2^s \Gamma(s/2+1)} \operatorname{diam}(S)^s, \quad S \subseteq X$$

na systému $\mathcal{P}(X)$ (kde pro $s = 0$ se rozumí $\zeta^0(\emptyset) = 0$ a ζ^0 z jednobodovek jako 1). Značíme ji $\mathcal{H}^s$.

Tedy pro $A \in \mathcal{P}(X)$ je

$$\mathcal{H}^s(A) = \frac{\pi^{s/2}}{2^s \Gamma(s/2+1)} \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(A_i)^s : A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} A_i \ , \ \ \operatorname{diam}(A_i) < \delta \right\}.$$

Poznámka.

- Jelikož se diametr zachová při uzavření množin, lze uvažovat jen pokrytí uzavřenými množinami. Speciálně jen borelovskými, toho využijeme ve větě 21.
- Z věty 3 a 4 plyne, že pro všechna $s \geq 0$ $\mathcal{H}^s$ je mírou zůžíme-li ji na borelovské množiny.
- Konstanta výše je volena tak, aby se pro $m \leq n$ přirozené $\mathcal{H}^m$ shodovala s λ^m speciálně na B(0,1) v $\mathbb{R}^m$, kterou vnoříme do $\mathbb{R}^n$.

Definice 3 (Hausdorffova dimenze)**.** *Jeli $A \subseteq X$, definujeme:*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \sup\{s \geq 0 \ : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$

Platí:

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s \geq 0 \ : \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

Řekneme, že $A \subseteq X$ má Hausdorffovu dimenzi silně rovnou číslu $s \geq 0$ pokud dokonce

$$0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty.$$

S další větou se lze seznámit na kurzu metrické struktury. Lze ji nalézt také v knize John K. Falconer, 1985 jako lemma 1.8.

Věta 5. *Buďte X,Y metrické prostory, $f : X \to Y$ L-lipschitzovské zobrazení na Y pro nějaké $L > 0$, pak*

$$\forall s \geq 0 : \quad \mathcal{H}^s(Y) \leq L^s \mathcal{H}^s(X).$$

Podotkneme, že speciálně ortogonální projekce jsou 1-lipschitzovské.

Důsledek. lipschitzovské zobrazení s lipschitzovským inverzem zachovává $\dim_{\mathcal{H}}$.

1.3 Fraktální dimenze

Obsah tohoto oddílu se lze opět dozvědět na předmětu metrické struktury. Lze je nalézt i s důkazy v knize John K. Falconer, 1985, věty 8.3 a 8.6.

Označme: $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ množinu všech neprázdných kompaktních množin v $\mathbb{R}^n$.

Definice 4. *Buďte $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takové, že*

$$\exists\, r_i \in (0,1) : \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n : \ \rho(f_i(x),f_i(y)) = r_i \rho(x,y) \quad i \in \{1,2,\ldots,m\}.$$

Neboli, f_i jsou podobnosti s podobnostními poměry r_i. Označme zobrazení:

$$f : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$$
$$A \to \bigcup_{i=1}^{m} f_i(A)$$

Takové zobrazení budeme značit jako $\cup_{i=1}^m f_i$. Buď $C \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ ten jediný pevný bod zobrazení f. Fraktální dimenzí množiny C : $\dim_F(C)$ nazveme to jediné číslo $s \geq 0$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1.$$

V této definici samozřejmě není apriori jasné, zda zmíněné C a s opravdu existují jednoznačně, že tomu tak vskutku je je možné se dočíst v odkazované literatuře.
Dodáme, že prvky v $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ jsou uzavřené, tedy borelovsky měřitelné.

Věta 6 (Vztah Hausdorffovy a fraktální dimenze)**.** *Buďte* $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *taková, že*

$$\exists\, r_i \in (0,1): \ \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n: \ \rho(f_i(x),f_i(y)) = r_i\rho(x,y) \quad i \in \{1,2,\ldots,m\}.$$

A nechť existuje $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *otevřená a omezená tak, že*

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,m\}: \quad f_i(G) \subseteq G \ \ \& \ \forall j \in \{1,2,\ldots,m\} \ \ j \neq i: \ \ f_i(G) \cap f_j(G) = \emptyset.$$

Pak pro pevný bod C *funkce* $f = \cup_{i=1}^m f_i$ *platí, že*

$$0 < \mathcal{H}^{\dim_F(C)}(C) < \infty \quad \textit{neboli} \ \dim_{\mathcal{H}}(C) = \dim_F(C) \ \textit{silně.}$$

1.4 Grassmanián, O* a Haarova míra

Věta 7 (Steven Krantz a Harold Parks, 2008, důsledek 3.1.3)**.** *Nechť* G *je kompaktní Hausdorffova topologická grupa, pak na ní existuje jediná Radonova (tj. borelovská, regulární, těsná a konečná na kompaktech) pravděpodobnostní míra invariantní na působení* G*.*

Připomeňme, že $O(n)$ značí grupu ortogonálních zobrazení v $\mathbb{R}^n$. Topologie na $O(n)$ je dána standardní normou lineárních zobrazení.

Definice 5. *Jsou li* $n \geq m \geq 1$ *přirozená čísla, tak definujeme následující prostory:*

$$\begin{aligned} G(n,m) &= \{V: \ V \textit{ je } m\textit{-dimenzionální vektorový podprostor } \mathbb{R}^n\}, \\ O(n,m) &= \{f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \ \textit{ lineární, prosté a zachovávající skalární součin}\}, \\ O^*(n,m) &= \{f^* \ : \ f \in O(n,m)\}, \end{aligned}$$

kde * *označuje operátor jenž lineární funkci* $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *přiřadí lineární funkci* $f^*: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *takovou, že*

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \ \forall x \in \mathbb{R}^m \ \ \langle f(x),y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

Topologii na $G(n,m)$ *a* $O^*(n,m)$ *dostaneme pomocí standardní normy lineárních zobrazení, když ztotožníme prvky* $G(n,m)$ *s ortogonálními projekcemi na ně.*

Lze si rozmyslet, že vskutku $O(n) = O(n,n) = O^*(n,n)$.
V následujícím lemmatu si zpřesníme představu o prostoru $O^*(n,m)$, kterou si dokážeme.

Lemma 8. *Jsou li* $n \geq m \geq 1$*, tak*

$$O^*(n,m) = \{p_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ \textit{ortogonální projekce na } V, \ V \in G(n,m)\},$$

kde ztotožňujeme $\mathbb{R}^m$ *s* V *volbou pevné báze.*

Důkaz: Je-li $p_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ OG. projekce na V, tak položme f_V jako přechodové zobrazení z báze V do báze $\mathbb{R}^n$ (Neboli přirozené vnoření $V \subseteq \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$). Pak $f_V \in O(n,m)$. Pro $y \in V^{\perp}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m: \ \langle f_V(x),y\rangle = 0 = \langle x,0\rangle = \langle x,p_V(y)\rangle.$$

Pro $y \in V$, díky tomu, že f_V zachovává skalární součin:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m : \ \langle f_V(x), y\rangle = \langle f_V(x), f_V(p_V(y))\rangle = \langle x, p_V(y)\rangle.$$

A libovolné $y \in \mathbb{R}^n$ lze rozložit na součet prvku V a $V^\perp$. Tedy z linearity skalárního součinu $p_V = f_V^*$.
Naopak, je-li $f \in O(n,m)$, tak definujeme $V = f(\mathbb{R}^m)$. Pak $V \in G(n,m)$, neboť f je lineární a zachová ortonormálnost báze $\{e_1, \ldots, e_m\}$, a tedy i dimenzi. Ukážeme, že f^* je OG. projekce na V, neboli

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \ \langle y - f(f^*(y)), f(f^*(y))\rangle = 0,$$

kde f vystupuje, aby $f \circ f^*$ byla projekce $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

$$\langle f(f^*(y)), f(f^*(y))\rangle = \langle f^*(y), f^*(y)\rangle = \langle f(f^*(y)), y\rangle = \langle y, f(f^*(y))\rangle,$$

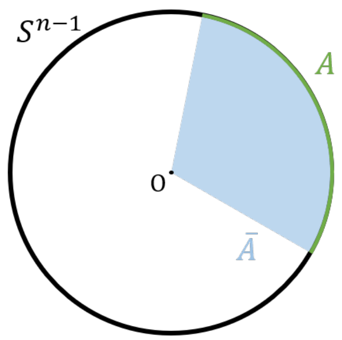
kde druhá rovnost je z definice f^* speciálně pro $x = f^*(y)$ Nyní už stačí jen odečíst.

□

Z knihy Steven Krantz a Harold Parks, 2008, oddíl 3.2:
Označme pro $A \subseteq S^{n-1}$: (viz obrázek 1.1)

$$\overline{A} = \{ta : \ a \in A, t \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

A definujeme σ_{n-1} jako následující množinovou funkci, pro $A \subseteq S^{n-1}$:



Obrázek 1.1: Konstrukce míry na sféře

$$\sigma_{n-1}(A) = \frac{\lambda^n(\overline{A})}{\lambda^n(\mathrm{B}(0,1))},$$

kde λ^n se případně uvažuje jako vnější míra. Očividně $\sigma_{n-1}(S^{n-1}) = 1$ a σ_{n-1} je rotačně invariantní, tj.

$$\forall g \in O(n) : \sigma_{n-1}(A) = \sigma_{n-1}(g(A)) \ \ A \subseteq S^{n-1}.$$

Zvolíme pevně oblíbený bod $s \in S^{n-1}$. Definujeme množinovou funkci $\theta(n)$ na $O(n)$:

$$\theta_n(A) = \sigma_{n-1}\left(\{g(s) : \ g \in A\}\right), \ \ A \subseteq O(n).$$

Podobně zafixujeme libovolný prvek $H \in G(n,m)$ a $p \in O^*(n,m)$ a definujeme:

$$\begin{aligned}\gamma_{n,m}(A) =&\theta_n\left(\{g \in O(n) :\ g(H) \in A\}\right), \quad A \subseteq G(n,m),\\ \theta^*_{n,m}(A) =&\theta_n\left(\{g \in O(n) :\ p \circ g \in A\}\right), \quad A \subseteq O^*(n,m).\end{aligned} \tag{1.1}$$

Ve skutečnosti je množinová funkce θ_n tou mírou z věty 7, což nám dá příslušné vlastnosti i pro $\gamma_{n,m}$ a $\theta^*_{n,m}$.
Tím jsme naznačili konstrukci borelovských regulárních rotačně invariantních pravděpodobnostních měr na prostorech z definice 5, kterých budeme využívat v druhé kapitole.

1.5 Rektifikovatelnost

Definice 6 (Pertti Mattila, 1995, definice 15.3)**.** *Množinu $E \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme m-rektifikovatelnou pro přirozené číslo m, pokud existuje (nejvýše) spočetně lipschitzovských zobrazení $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \quad i \in \mathbb{N}$ takových, že:*

$$\mathcal{H}^m\left(E \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\left(\mathbb{R}^m\right)\right) = 0.$$

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme ryze m-nerektifikovatelnou, pokud pro libovolnou $E \subseteq \mathbb{R}^n$ m-rektifikovatelnou:

$$\mathcal{H}^m\left(F \cap E\right) = 0.$$

Poznámka. To co výše nazýváme m-rektifikovatelností je v knize Herbert Federer, 1996 označováno jako spočetná $(\mathcal{H}^m, m)$-rektifikovatelnost. Jako $(\mathcal{H}^m, m)$-rektifikovatelnost se tam označuje naše m-rektifikovatelnost a navíc se požaduje konečná $\mathcal{H}^m$ míra.

Věta 9 (Federer-Bezikovičova věta, Pertti Mattila, 1995 věta 18.1)**.**
Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{H}^m$-měřitelná, $\mathcal{H}^m(A) < \infty$.

- *A je m-rektifikovatelná právě tehdy když $\mathcal{H}^m(p(B)) > 0$ pro skoro všechna $p \in O^*(n,m)$ kdykoliv je $B \subseteq A$ $\mathcal{H}^m$-měřitelná, $\mathcal{H}^m(B) > 0$.*
- *A je ryze m-nerektifikovatelná právě tehdy když $\mathcal{H}^m(p(A)) = 0$ pro skoro všechna $p \in O^*(n,m)$.*

Věta 10 (John K. Falconer, 1985 věty 6.13 a 6.14 spojené)**.**
Nechť je $E \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathcal{H}^1$-měřitelná, $\dim_{\mathcal{H}}(E) = 1$ silně.
Pokud existují $r,q \in O^*(2,1)$ různé, takové, že $\lambda^1(r(E)) = \lambda^1(q(E)) = 0$, tak $\lambda^1(p(E)) = 0$ pro skoro všechna $p \in O^*(n,m)$.

Poznámka. Ve větě můžeme λ^1 chápat jako vnější míru. V další kapitole se však dozvíme, že množiny $p(E)$ jsou λ^1-měřitelné pro každé $p \in O^*(n,m)$, kdykoliv E je $\mathcal{H}^1$-měřitelná.

1.6 Suslinovy mnoziny

Tato kapitola je převzata z knihy Steven Krantz a Harold Parks, 2008. Nejprve zaveďme značení pro:

$$\begin{aligned}\mathbb{N}^{\mathbb{N}} &\ldots \text{množina všech nekonečných posloupností přirozených čísel,}\\ \mathbb{N}^{\mathbb{K}} &\ldots \text{množina všech konečných posloupností přirozených čísel,}\end{aligned}$$

Je-li $\mathcal{M}$ množina, tak:

$$\mathcal{M}^{\mathbb{N}^{\mathbb{K}}} \ldots \text{množina všech funkcí z } \mathbb{N}^{\mathbb{K}} \text{ do } \mathcal{M}.$$

Definice 7 (Steven Krantz a Harold Parks, 2008: 1.7.6)**.** *Buď $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ a nechť*

$$\begin{aligned}\nu : \mathbb{N}^{\mathbb{K}} &\to \mathcal{M}\\ (n_1,n_2,n_3,\ldots,n_k) &\to M_{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_k}.\end{aligned}$$

Takové funkce se nazývají determinačním systémem. Definujeme jádro ν

$$N(\nu) = \bigcup_{(n_1,n_2,n_3,\ldots)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} M_{n_1} \cap M_{n_1,n_2} \cap M_{n_1,n_2,n_3} \cap \ldots.$$

A Suslinův (nebo také Alexandrův) operátor:

$$\begin{aligned}(A) : \mathcal{M}^{\mathbb{N}^{\mathbb{K}}} &\to \mathcal{P}(X)\\ \nu &\to N(\nu)\end{aligned}$$

Množinu $N(\nu)$ nazveme Suslinovou množinou generovanou $\mathcal{M}$ (pro nějaký determinační systém ν). Jako $\mathcal{M}_{(A)}$ označíme systém všech Suslinových množin generovaných $\mathcal{M}$.
A konečně, je-li X topologický (či metrický) prostor, tak množinu nazveme Suslinovu, pokud je generována systémem uzavřených množin v X.

Poznámka. Můžeme si všimnout, že Suslinovy množiny v topologickém prostoru jsou kontinuum mohutná sjednocení spočetných průniků uzavřených množin.

Věta 11 (Steven Krantz a Harold Parks, 2008: 1.7.9, 1.7.12, 1.7.18)**.**

- *Každá borelovská množina v $\mathbb{R}^n$ je Suslinova.*
- *Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ spojitá, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ Suslinova, pak $f(S)$ je Suslinova podmnožina v $\mathbb{R}^m$.*
- *Je-li μ borelovsky regulární míra na topologickém prostoru X, tak je každá Suslinova množina v X μ-měřitelná.*

1.7 Sardova věta

Potřebovat budeme jenom následující zjednodušenou verzi Sardovy věty.

Věta (Pertti Mattila, 1995, věta 7.6)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ je lipschitzovské. Pak*

$$\mathcal{H}^k\left(\{f(x) :\ x \in \mathbb{R}^k,\ \dim D_f(x)(\mathbb{R}^k) < k\}\right) = 0,$$

kde dim *označuje dimenzi lineárního prostoru, což lze zaměnit s* $\dim_{\mathcal{H}}$*.*

A provedeme následující drobnou modifikaci:

Věta 12. *Buď $U \subseteq \mathbb{R}^k$ otevřená, $f : U \to \mathbb{R}^l$ je lokálně lipschitzovská (tj. lipschitzovská na kompaktech). Pak*

$$\mathcal{H}^k\left(\{f(x) :\ x \in U,\ \dim D_f(x)(\mathbb{R}^k) < k\}\right) = 0.$$

Důkaz: $\mathbb{R}^k$ má spočetnou bázi otevřených množin a je lokálně kompaktní, takže je každá otevřená množina σ-kompaktní, neboli

$$\exists K_1, K_2, \ldots, \subseteq \mathbb{R}^k :\ \ U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i.$$

Předpokládejme, že jsou všechny K_i neprázdné, jinak bychom je vynechali a případně bychom pracovali jen s konečnou podmnožinou $\mathbb{N}$.
Pro všechna $i \in \mathbb{N}$ je $f|_{K_i}$ lipschitzovské. Rozšíříme jej na $\overline{f_i} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ lipschitzovskou (lipschitzovskou funkci mezi euklidovskými prostory lze vždy lipschitzovsky rozšířit). Na ně použijeme Sardovu větu, která je výše:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^k\left(\{f(x) : x \in K_i,\ \ \dim D_f(x)(\mathbb{R}^k) < k\}\right. \leq \\
&\qquad \leq \mathcal{H}^k\left(\left\{\overline{f_i}(x) :\ x \in \mathbb{R}^k,\ \ \dim D_f(x)(\mathbb{R}^k) < k\right\}\right) = 0,\ \ \forall i \in \mathbb{N}. \\
&\mathcal{H}^k\left(\{f(x) : x \in U,\ \dim D_f(x)(\mathbb{R}^k) < k\}\right. \leq \\
&\qquad \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k\left(\left\{f(x) :\ x \in K_i,\ \ \dim D_f(x)(\mathbb{R}^k) < k\right\}\right) = 0.
\end{aligned}$$

□

1.8 Gamma funkce

A na závěr zmíníme tak zvanou gamma a beta funkci (neplést s $\beta_t(n,m)$ v definici 9):

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^t dt \quad z \in \mathbb{C},\ \ \Re(z) > 0,$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad x,y \in \mathbb{C},\ \ \Re(x) > 0,\ \Re(y) > 0,$$

kde $\Re$ značí reálnou část z komplexního čísla. Platí (lze nahlédnout v knize Milton Abramowitz a Irene A. Stegun, 1972):

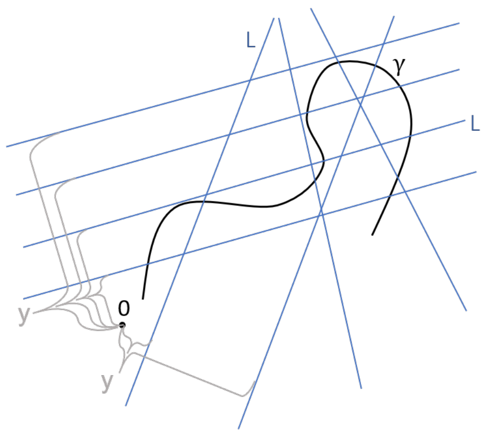
$$\begin{aligned}
&\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \\
&\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ \ \Re(z) > 0, \\
&\Gamma(n) = (n-1)!,\ \ n \in \mathbb{N}, \\
&\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\ \ \Re(x) > 0,\ \Re(y) > 0.
\end{aligned}$$

2. Integrálně-geometrická míra

Motivačně ukážeme Croftonův vzorec. Tedy, že „délku“ (pro jednoduchost uvažme $\mathcal{H}^1$) spojitě diferencovatelné křivky $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ lze spočíst, až na konstantní násobek, přeintegrováním počtu bodů v průniku $\gamma \cap L$ vhodnou měrou přes všechny afinní 1-dimenzionální podprostory. Přesněji tedy:

$$\mathcal{H}^1(\gamma) = \frac{\pi}{2} \int\limits_{Af(2,1)} \operatorname{card}(\gamma \cap L) d\mu_{2,1}(L),$$

kde $Af(2,1) = \{V + y : V \in G(2,1), y \in V^{\perp}\}$ a $\mu_{2,1}$ je míra na něm odpovídající λ^1 a $\theta^*_{2,1}$ ve smyslu desintegrace. Podrobněji v oddílu 2.5 níže.
Tento vzorec má uplatnění například v informatice, právě k počítání délky křivky v počítači pomocí spočtení bodů v průniků. Leč jen s konečně mnoha různými afinními přímkami, vhodně zvolenými tak, aby co nejpřesněji reprezentovali celý nekonečný prostor $Af(2,1)$.



Obrázek 2.1: Výpočet délky křivky

2.1 Integrálně-geometrická míra

Definice 8. *Buď X metrický prostor.*
Pro $A \in \mathcal{B}(X)$ rozumíme borelovským pokrytím A nejvýše spočetný systém $\mathcal{G}$ množin z $\mathcal{B}(X)$ takový, že $A \subseteq \cup\mathcal{G}$.

Borelovským dělením A pak rozumíme nejvýše spočetný systém $\mathcal{G}$ množin z $\mathcal{B}(X)$ takový, že $A = \cup\mathcal{G}$ a navíc pro všechny $T,S \in \mathcal{G}$ $T \neq S \implies T \cap S = \emptyset$.

Pro $\mathcal{G}$ borelovské pokrytí A značíme $\operatorname{Diam}(\mathcal{G}) = \sup\{\operatorname{diam}(B) : B \in \mathcal{G}\}$.

Poznámka. Jelikož borelovské množiny tvoří σ-algebru, je jasné, že borelovské dělení nalezeme jen pro A borelovské.

Lemma 13. *Je-li X separabilní metrický prostor, $A \subseteq X$ a $\delta > 0$, tak $\exists \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}(X)$ tak, že $\mathcal{G}$ je borelovské pokrytí A a* $\mathrm{Diam}(\mathcal{G}) < \delta$.

Navíc je-li $A \in \mathcal{B}(X)$ pak existuje $\tilde{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{B}(X)$: $\tilde{\mathcal{G}}$ je borelovské dělení A takové, že $\mathrm{Diam}(\tilde{\mathcal{G}}) < \delta$.
Speciálně existuje $(\mathcal{G}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ posloupnost borelovských dělení množiny A takových, že

$$\lim_{j \to \infty} \mathrm{Diam}(\mathcal{G}_j) = 0.$$

a každý prvek $\mathcal{G}_j$ je sjednocením nějakého podsystému z $\mathcal{G}_{j+1}$.

Důkaz:

- Vytvoříme δ-pokrytí celého X:
  Buď $S \subseteq X$ spočetná hustá. Je-li $x \in X$, uvažme $\mathrm{U}(x,\delta)$. To je neprázdná otevřená množina, takže $\exists y \in S \cup \mathrm{U}(x,\delta)$. Takže $x \in \mathrm{U}(y,\delta)$. Dostáváme, že $\{\mathrm{U}(y,\delta) : y \in S\}$ je hledané pokrytí.

- Buď $\mathcal{S}$ spočetné borelovské pokrytí A splňující $\mathrm{Diam}(\mathcal{S}) < \delta$. Seřaďme $\mathcal{S} \cap A = \{S \cap A : \ S \in \mathcal{S}\} = \{S_1, S_2, S_3 \dots\}$. Jedná se o borelovský systém, díky tomu, že A je borelovská.
  Nyní zdisjunktníme: $\mathcal{S}' = \{S_1, S_2 \setminus S_1, S_3 \setminus (S_1 \cup S_2) \dots\}$.
  $\mathcal{S}'$ je hledaným borelovským dělením s diametry $< \delta$.

- Konstruujeme induktivně: (viz obrázek 2.2)
  $n = 1$: Najdeme borelovské dělení $\mathcal{G}_1$ množiny A tak, že $\mathrm{Diam}(\mathcal{G}_1) < 1$.
  $n > 1$: Je-li $\mathcal{G}_{n-1} = \left\{ G_{n-1}^k : \ k \in \mathbb{K}_{n-1} \subseteq \mathbb{N} \right\}$ tak $\forall k \in \mathbb{K}_{n-1}$ najdeme borelovské dělení $\mathcal{G}_n^k$ množiny G_{n-1}^k tak, že $\mathrm{Diam}(\mathcal{G}_n^k) < \frac{1}{n}$. Položíme:

$$\mathcal{G}_n = \bigcup_{k \in \mathbb{K}_{n-1}} \mathcal{G}_n^k.$$

$\square$

Obrázek 2.2: Volba borelovských dělení $\mathcal{G}_j$.

Definice 9. *V prostoru $X = \mathbb{R}^n$ pro přirozené číslo m : $n \geq m \geq 1$, $t \in [1, \infty)$ a $S \subseteq \mathbb{R}^n$ Suslinovu definujeme funkce:*

$$f_S : O^*(n,m) \to [0, \infty]$$
$$f_S(p) = \lambda^m(p(S))$$

$$\zeta_t(S) = \frac{1}{\beta_t(n,m)} \sqrt[t]{\int\limits_{O^*(n,m)} f_S^t(p) d\theta^*_{n,m}(p)},$$

kde korektnost definice (měřitelnost) a volbu konstanty $\beta_t(n,m)$ budeme diskutovat v oddílech 2.2 a 2.3.
Jako m-rozměrnou integrálně-geometrickou míru s exponentem t nazveme míru na borelovských množinách $\mathbb{R}^n$ danou Carathéodoryho konstrukcí ze ζ_t na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Značíme ji
$$\mathcal{F}^m_t.$$

Tedy pro $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je

$$\mathcal{F}^m_t(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \sum_{S \in \mathcal{G}} \zeta_t(S) : \mathcal{G} \textit{ je borelovské pokrytí } A, \ \operatorname{Diam}(\mathcal{G}) < \delta \right\}.$$

A označíme
$$\mathcal{F}^m = \mathcal{F}^m_1.$$

Poznámka.

- $\mathcal{F}^m$ lze uvažovat jako vnější míru na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, tím se ale nebudeme zabývat. Z vět 3 a 4 plyne, že se jedná o borelovskou míru.
- Někdy se $\mathcal{F}^m$ (definované jako ekvivalentní vyjádření ve vetě 15) nazývá Favardovou měrou.
- Je vidět, že $\mathcal{F}^m_t$ je invariantní na působení $O(n)$ díky invariantnosti míry $\theta^*_{n,m}$.
- Translační invariance plyne následovně: Dáno $p \in O^*(n,m)$. Označme jako $V \in G(n,m)$ obraz projekce p přirozeným způsobem vnořený do $\mathbb{R}^n$. Posun $t \in \mathbb{R}^n$ lze rozložit na část ve V a část v ortogonálním doplňku V. Pak z definice f_S a translační invariance λ^m plyne $f_S(p) = f_{S+t}(p)$.
- Lze definovat i pro $t = \infty$. Uváží se:

  $$\zeta_\infty(S) = \frac{1}{\beta_\infty(n,m)} \operatorname{essup}\{f_S(p) \ : \ p \in O^*(n,m)\} \ \textit{vzhledem ke } \theta^*_{n,m}.$$

  A větu 15 by šlo pro $t = \infty$ formulovat a dokázat naprosto podobně. Více se však tímto případem zabývat nebudeme.

Lemma 14 (Herbert Federer, 1996: 2.10.8)**.** *X buď separabilní metrický prostor. ζ ať je jako v definici 1 a navíc splňující:*

$$\zeta(A) \leq \sum_{B \in \mathcal{G}} \zeta(B),$$

pro libovolné $\mathcal{G}$ (spočetné) borelovské pokrytí A. Nechť Ψ je dána Carathéodoryho konstrukcí ze ζ na $\mathcal{B}(X)$. Pak pro $A \in \mathcal{B}(X)$ platí:

$$\psi(A) = \sup\left\{\sum_{B\in\mathcal{G}} \zeta(B) : \mathcal{G} \textit{ je borelovské dělení } A\right\}.$$

Máme-li navíc posloupnost $(\mathcal{G}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ borelovských dělení A, takových, že

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{Diam}(\mathcal{G}_j) = 0,$$

pak:

$$\psi(A) = \lim_{j\to\infty} \sum_{B\in\mathcal{G}_j} \zeta(B).$$

Důkaz: Je-li $\psi(A) = \infty$ tak pro každé $K > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\mathcal{G}$ borelovské pokrytí A takové, že $\mathrm{Diam}(\mathcal{G}) < \delta$ je $\sum_{B\in\mathcal{G}} \zeta(B) > K$. Speciálně toto platí i pro borelovská dělení, proto v takovém případě lemma platí.
Nyní pro $\psi(A) < \infty$. Z předpokladu máme, že platí

$$\zeta(S) \leq \psi(S) \text{ pro libovolnou borelovskou } S, \tag{2.1}$$

jelikož $\psi(S)$ je limitou z infim z členů tvaru $\sum_{B\in\mathcal{G}} \zeta(B)$ a z předpokladu je každý z nich je větší nebo roven$\zeta(S)$.
Buď $\mathcal{H}$ libovolné borelovské dělení A. Víme, že borelovské množiny jsou ψ-měřitelné, a tedy platí σ-aditivita pro A. Následně z nerovnosti výše použité na každý člen v sumě:

$$\psi(A) = \sum_{B\in\mathcal{H}} \psi(B) \geq \sum_{B\in\mathcal{H}} \zeta(B).$$

Nyní buď $\epsilon > 0$. Zdefinice ψ nalezneme $\delta > 0$ takové, že:

$$\begin{aligned}\psi(A) - \epsilon &< \inf\left\{\sum_{S\in\mathcal{G}} \zeta(S) :\ \mathcal{G} \text{ je borelovské pokrytí } A,\ \mathrm{Diam}(\mathcal{G}) < \delta\right\}\\ &\leq \inf\left\{\sum_{S\in\mathcal{G}} \zeta(S) :\ \mathcal{G} \text{ je borelovské dělení } A,\ \mathrm{Diam}(\mathcal{G}) < \delta\right\}.\end{aligned}$$

Podle lemmatu 13 je množina nalevo neprázdná, takže existuje $\mathcal{H}$ borelovské dělení A takové, že

$$\psi(A) - \epsilon < \sum_{S\in\mathcal{H}} \zeta(S).$$

Tím jsme ukázali supremum z definice.
Nyní pro posloupnost $(\mathcal{G}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ze znění platí, že

$$\psi(A) \leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{S\in\mathcal{G}_j} \zeta(S).$$

neboť pro všechna $\delta > 0$ najdeme $j_0 \in \mathbb{N}$, tak, že pro všechna $j \geq j_0$ se $\mathcal{G}_j$ objeví v množině nalevo ze které děláme infimum v definici ψ. Pak z nerovnosti 2.1 a σ-aditivity je

$$\psi(A) \leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{S\in\mathcal{G}_j} \zeta(S) \leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{S\in\mathcal{G}_j} \psi(S) = \liminf_{j\to\infty} \psi(A) = \psi(A).$$

Dále s využitím již dokázaného vztahu v první části věty a triviálních nerovností mezi $\sup, \limsup$ a $\liminf$ máme:

$$\psi(A) \geq \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{S\in\mathcal{G}_j} \zeta(S) \geq \limsup_{j\to\infty} \sum_{S\in\mathcal{G}_j} \zeta(S) \geq \liminf_{j\to\infty} \sum_{S\in\mathcal{G}_j} \zeta(S) \geq \psi(A).$$

Takže limita existuje a platí

$$\psi(A) = \lim_{j\to\infty} \sum_{B\in\mathcal{G}_j} \zeta(B).$$

$\square$

Zaveďme značení pro $f : X \to Y$ a $y \in Y$:

$$\mathrm{N}(f,y) = \mathrm{card}(\{x \in X : f(x) = y\}).$$

Věta 15 (Herbert Federer, 1996. 2.10.15)**.** *Pro přirozená čísla $n \geq m \geq 1$, reálné číslo $t \geq 1$ a $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ položme*

$$g(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{N}(p|_A,y)d\lambda^m(y) \quad p \in O^*(n,m).$$

Pak platí:

$$\mathcal{F}_t^m(A) \geq \frac{1}{\beta_t(n,m)} \sqrt[t]{\int\limits_{O^*(n,m)} g^t(p)\ d\theta^*_{n,m}(p)}.$$

A navíc platí rovnost pokud $t = 1$, to jest:

$$\mathcal{F}^m(A) = \frac{1}{\beta_1(n,m)} \int\limits_{O^*(n,m)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{N}(p|_A,y)d\lambda^m(y)\ d\theta^*_{n,m}(p). \tag{2.2}$$

Důkaz: Zvolme $(\mathcal{G}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ posloupnost borelovských dělení množiny A takových, že

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{Diam}(\mathcal{G}_j) = 0$$

a každý prvek $\mathcal{G}_j$ je sjednocením nějakého podsystému z $\mathcal{G}_{j+1}$ (z lemmatu 13). Buď $p \in O^*(n,m)$ pevné. Pro $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ označme C_S charakteristickou funkci na $p(S)$.

Pozorování.

$$\sum_{S\in\mathcal{G}_j} C_S(y) \nearrow_{j\to\infty} \mathrm{N}(p|_A,y).\ \ y \in \mathbb{R}^m.$$

Z toho také plyne, také že je funkce $\mathrm{N}(p|_A,\cdot)$ měřitelná.

Důkaz:

Pro $y \in \mathbb{R}^m$: Je-li $\mathrm{N}(p|_A,y) < \infty$ tak označme $M = p^{-1}(\{y\}) \cap A$. Tedy platí: $\mathrm{card}(M) = \mathrm{N}(p|_A,y)$. Označme dále:

$$\delta = \begin{cases} \min_{x,z \in M} \rho(x,z)) & \text{pokud } \mathrm{card}(M) \geq 2, \\ 1 & \text{pokud } \mathrm{card}(M) \leq 1. \end{cases}$$

Nalezneme j_0 tak, že $\mathrm{Diam}(\mathcal{G}_{j_0}) < \delta$. Pak ze zjemňování a disjunktnosti

$$\forall j \geq j_0 : \ \forall x \in M \ \exists! S \in \mathcal{G}_j \ \ x \in S.$$

Potom $y = p(x) \in p(S)$ a tedy $C_S(y) = 1$. Dostáváme

$$\forall j \geq j_0 : \ \sum_{S \in \mathcal{G}_j} C_S(y) = \mathrm{card}(M) = \mathrm{N}(p|_A,y).$$

Je-li $\mathrm{N}(p|_A,y) = \infty$ tak buď $K \geq 2$ libovolné přirozené. Nalezneme $M \subseteq p^{-1}(\{y\}) \cap A$ Tak, že $\mathrm{card}(M) = K$. Označme $\delta = \min_{x,z \in M} \rho(x,z)$. Nalezneme j_0 tak, že $\mathrm{Diam}(\mathcal{G}_{j_0}) < \delta$. Pak $y = p(x) \in p(S)$ a tedy $C_S(y) = 1$.

$$\sum_{S \in \mathcal{G}_{j_0}} C_S(y) = \mathrm{card}(M) = K.$$

Takže ze zjemňování platí monotonie a dostáváme:

$$\lim_{j \to \infty} \sum_{S \in \mathcal{G}_j} C_S(y) = \infty = \mathrm{N}(p|_A,y).$$

$\square$

Nyní použijeme Leviho větu.

$$\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{S \in \mathcal{G}_j} C_S(y) d\lambda^m(y) \nearrow_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{N}(p|_A,y) d\lambda^m(y).$$

A prohodíme sumu s integrálem. V případě, že je suma nekonečná (nejvýše však je spočetná) tak znovu použijeme Leviho větu, díky nezápornosti.

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{G}_j} \int_{\mathbb{R}^m} C_S d\lambda^m &\nearrow_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{N}(p|_A,y) d\lambda^m(y), \\ \sum_{S \in \mathcal{G}_j} \lambda^m(p(S)) &\nearrow_{j \to \infty} g(p), \\ \sum_{S \in \mathcal{G}_j} f_S(p) &\nearrow_{j \to \infty} g(p) \quad p \in O^*(n,m). \end{aligned}$$

Z toho dostáváme, také že je funkce g měřitelná. Umocníme na t, znovu použijeme Leviho větu a odmocníme:

$$\sqrt[t]{\int_{O^*(n,m)} \left(\sum_{S \in \mathcal{G}_j} f_S(p) \right)^t d\theta^*_{n,m}(p)} \nearrow_{j \to \infty} \sqrt[t]{\int_{O^*(n,m)} g^t(p) \ d\theta^*_{n,m}(p)}. \tag{2.3}$$

Z Minkowského nerovnosti (Věta 1) máme

$$\sqrt[t]{\int\limits_{O^*(n,m)} \left(\sum_{S\in\mathcal{G}_j} f_S(p)\right)^t d\theta^*_{n,m}(p)} \le \sum_{S\in\mathcal{G}_j} \sqrt[t]{\int\limits_{O^*(n,m)} f_S^t(p) d\theta^*_{n,m}(p)}. \tag{2.4}$$
$$= \sum_{S\in\mathcal{G}_j} \beta_t(n,m)\zeta_t(S)$$
$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[t]{\int\limits_{O^*(n,m)} \left(\sum_{S\in\mathcal{G}_j} f_S(p)\right)^t d\theta^*_{n,m}(p)} \le \lim_{j\to\infty} \sum_{S\in\mathcal{G}_j} \beta_t(n,m)\zeta_t(S).$$

Pozorování. Předpoklad v lemmatu 14 pro ζ_t je splněn.

Důkaz:

Je-li $\mathcal{H}$ borelovské pokrytí $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, pak z Minkowského nerovnosti plyne

$$\sqrt[t]{\int\limits_{O^*(n,m)} \left(\sum_{S\in\mathcal{H}} f_S(p)\right)^t d\theta^*_{n,m}(p)} \le \sum_{S\in\mathcal{H}} \sqrt[t]{\int\limits_{O^*(n,m)} f_S^t(p) d\theta^*_{n,m}(p)}.$$

Z monotonie Lebesgueovy míry je

$$f_A(p) \le \sum_{S\in\mathcal{H}} f_S(p) \quad p \in O^*(n,m).$$

A tedy vskutku:

$$\zeta_t(A) = \frac{\sqrt[t]{\int_{O^*(n,m)} f_A^t d\theta^*_{n,m}}}{\beta_t(n,m)} \le \frac{\sum_{S\in\mathcal{H}} \sqrt[t]{\int_{O^*(n,m)} f_S^t d\theta^*_{n,m}}}{\beta_t(n,m)} = \sum_{S\in\mathcal{H}} \zeta_t(S).$$

□

Takže podle lemmatu 14:

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{S\in\mathcal{G}_j} \beta_t(n,m)\zeta_t(S) = \beta_t(n,m)\mathcal{F}_t^m(A).$$

A podle rovnice 2.3:

$$\sqrt[t]{\int\limits_{O^*(n,m)} g^t(p)\ d\theta^*_{n,m}(p)} \le \beta_t(n,m)\mathcal{F}_t^m(A).$$

V případě $t = 1$ je ve 2.4 přímo rovnost z Leviho věty, která už zůstane i nadále.

□

Poznámka. Z lemmatu 8 plyne, že můžeme psát

$$\mathcal{F}^m(A) = \frac{1}{\beta_1(n,m)} \int\limits_{G(n,m)} \int\limits_V \mathrm{N}(\mathrm{proj}_V|_A, y) d\mathcal{H}^m(y) d\gamma_{n,m}(V), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

kde $\mathrm{proj}_V : \mathbb{R}^n \to V$ značí ortogonální projekci na V.

2.2 Korektnost definice

Idea převzata z Herbert Federer, 1996 2.10.5.:
Jsou-li n,m,t,p,S jako v definici 9, pak $p(S)$ je λ^m-měřitelná množina, díky spojitosti p a větě 11.

Dále označme metrický prostor $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times O^*(n,m)$ a množinu

$$E = \{(x,y,p):\ x \in S,\, p \in O^*(n,m),\, y = p(x)\} = \\ S \times \mathbb{R}^m \times O^*(n,m) \cap \{(x,y,p) \in X:\ y = p(x)\}\,.$$

Z definice Suslinových množin je množina $S \times \mathbb{R}^m \times O^*(n,m)$ Suslinova v X.
Pozorování. $\{(x,y,p) \in X:\ y = p(x)\}$ je uzavřená v X.

Důkaz:

Stačí uvážit libovolnou posloupnost $\big((x_n,y_n,p_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ s vlastností $y_n = p_n(x_n)$ a $(x_n,y_n,p_n) \to_{n\to\infty} (x,y,p) \in X$. Ukážeme, že $y = p(x)$.
Buď $\epsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je $||p_n - p|| < \epsilon/2$ a $||p(x_n) - p(x)|| < \epsilon/2$. Normu na $O^*(n,m)$ uvažujeme supremovou, proto

$$||p_n(x_n) - p(x)|| \leq ||p_n(x_n) - p(x_n)|| + ||p(x_n) - p(x)|| < \epsilon.$$

Jenže $p_n(x_n) = y_n \to_{n\to\infty} y$ a z jednoznačnosti konvergence je pozorování dokázané.

□

Tedy E je průnik Suslinovy a uzavřené množiny v X, je proto sama Suslinovou v X.

Uvažme zobrazení $\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times O^*(n,m) \to \mathbb{R}^m \times O^*(n,m)$ projekci na druhé dvě složky. Π je spojité, proto podle věty 11 je

$$\Pi(E) = \{(y,p):\ p \in O^*(n,m),\, y \in p(S)\}\ \lambda^m \times \theta^*_{n,m}\text{-měřitelná množina.}$$

A podle lemmatu z 2 je funkce

$$p \to \lambda^m((\Pi(E))_p) = \lambda^m(p(S))\ \text{ měřitelná,}$$

kde $(\Pi(E))_p$ je řez množinou $\Pi(E)$ v p.
Ale tato funkce je naše f_S z definice 9. Proto je funkce ζ_t z definice 9 dobře definovaná.
Jistě $\zeta_t(\emptyset) = 0$ a podle lemmatu 13 vždy existují borelovská pokrytí libovolně malých diametrů, tedy lze použít Carathéodoryho konstrukci 1.

2.3 Určení normovací konstanty

V dalších oddílech jsou n,m,t jako v definici 9.
Standardně [Herbert Federer, 1996 2.7.16 (6)] se $\beta_t(n,m)$ volí tak, aby pro každou $\xi \in (\mathbb{R}^n)^m$ lineárně nezávislou m-tici vektorů (reprezentující m-rovnoběžnostěny) platilo:

$$|\xi|\beta_t(n,m) = \sqrt[t]{\int\limits_{O^*(n,m)} |p(\xi)|^t d\theta^*_{n,m}} \ , \tag{2.5}$$

kde $p(\xi) = (p(\xi_1), \ldots, p(\xi_m))$ a $|\nu|$ značí m-rozměrný objem rovnoběžnostěnu $\nu \in (\mathbb{R}^k)^m, k \geq m$, tj označíme-li jako množinu $A_\nu \subseteq \mathbb{R}^m$ konvexní obal z ν, vnořený do $\mathbb{R}^m$ tak (z předmětu Geometrie 2):

$$|\nu| = \lambda^m(A_\nu) = \sqrt{\det\Big((\nu_1|\ldots|\nu_m)^\top(\nu_1|\ldots|\nu_m)\Big)}, \tag{2.6}$$

což bez požadavku na lineární nezávislost může klidně být 0.

Jelikož se λ^m definuje také pomocí Carathéodoryho konstrukce, stačí pro zajištění rovnosti mezi $\mathcal{F}_t^m$ a λ^m (mezi vhodně vnořenýma množinami) aby platila rovnost mezi funkcemi ζ_t a funkcí přiřazující objem kvádrům, na m-rozměrných kvádrech, což je právě speciální případ rovnoběžnostěnů popsaných výše. Do dalšího oddílu však ale budeme potřebovat zajistit tuto rovnost pro libovolný rovnoběžnostěn.

Pozorování. Jsou-li n a t jako v definici 9, pak lze vzít $\beta_t(n,n) = 1$ a navíc tím zajistíme

$$\mathcal{F}_t^n(A) = \lambda^n(A), \ \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Důkaz:

Buď $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Z rotační invariance λ^n:

$$\mathcal{F}_t^n(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf \left\{ \sum_{S\in\mathcal{G}} \lambda^n(S) : \mathcal{G} \text{ je borelovské pokrytí } A, \ \ \mathrm{Diam}(\mathcal{G}) < \delta \right\}.$$

λ^n je σ-subaditivní množinová funkce. Podle lemmatu 14 je

$$\mathcal{F}_t^n(A) = \sup \left\{ \sum_{B\in\mathcal{G}} \lambda^n(B) : \mathcal{G} \text{ je borelovské dělení } A \right\} = \lambda^n(A),$$

jelikož je dokonce σ-aditivní.

□

Lemma 16. *Je-li $k \in (0,\infty)$, tak*

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(\alpha) d\lambda(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\Big((k+1)/2\Big)}{\Gamma\Big(k/2+1\Big)}.$$

Důkaz: Nejprve ze sudosti stačí integrovat jen od 0 do $\frac{\pi}{2}$ a vynásobit dvěma. Pak provedeme substituci $|\sin(\alpha) = \sqrt{t}|$, respektive $|\cos(\alpha) = \sqrt{1-t}|$ a dostaneme

$$\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{(k-1)/2}dt = \mathrm{B}(1/2,(k+1)/2) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2+1)},$$

kde B značí Beta funkci z oddílu 1.8.

□

Věta 17. *Je-li $n \geq 2$ přirozené číslo a t jako v definici 9, tak*

$$\Big(\beta_t(n,1)\Big)^t = \frac{\Gamma((t+1)/2)\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+t)/2)\sqrt{\pi}}.$$

Důkaz: Nejprve zmapujeme $G(n,1)$ pomocí (hyper)sférických souřadnic.
To jest, skoro všem směrům (a až na orientaci)
$(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|(x_1,x_2,\dots,x_n)\|_2 = 1$, $x_1 > 0$ přiřadíme
$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1}) \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{n-1}$ tak, že

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos(\alpha_1)\dots\cos(\alpha_{n-2})\cos(\alpha_{n-1})\\
x_2 &= \cos(\alpha_1)\dots\cos(\alpha_{n-2})\sin(\alpha_{n-1})\\
x_3 &= \cos(\alpha_1)\dots\sin(\alpha_{n-2})\\
&\dots\dots\\
x_n &= \sin(\alpha_1).
\end{aligned}$$

Jakobián induktivně vyjde $\cos^{n-2}(\alpha_1)\cos^{n-3}(\alpha_2)\dots\cos(\alpha_{n-2})$, proto rotačně invariantní měrou na takto parametrizovaném $G(n,1)$ je

$$A \to \int_A \cos^{n-2}(\alpha_1)\cos^{n-3}(\alpha_2)\dots\cos(\alpha_{n-2})d\lambda^{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1}),$$
$$A \in \mathcal{B}\Big(\Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)^{n-1}\Big).$$

Potřebujeme ale míru pravděpodobnostní, proto položme

$$\mu(A) = \frac{\Gamma(n/2)}{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}\int_A \cos^{n-2}(\alpha_1)\cos^{n-3}(\alpha_2)\dots\cos(\alpha_{n-2})d\lambda^{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1}),$$
$$A \in \mathcal{B}\Big(\Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)^{n-1}\Big).$$

Pozorování. Nyní vskutku $\mu\Big(\big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big)^{n-1}\Big) = 1$:

Důkaz:

$$\int\limits_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}} \cos^{n-2}(\alpha_1)\cos^{n-3}(\alpha_2)\dots\cos(\alpha_{n-2})d\lambda^{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1}) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k-1}(\alpha)d\lambda(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\big(k/2\big)}{\Gamma\big((k+1)/2\big)} = \left(\sqrt{\pi}\right)^{n-1}\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(n/2)}.$$

□

Chceme zajistit rovnost 2.5 pro libovolný 1-rovnoběžnostěn, tedy úsečku. Z homogenity na násobky a rotační invariance stačí ověřit jen pro úečku $[0,1] \times \{0\}^{n-1}$. λ^1 míra OG. projekce na přímku danou $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ je

$$\Big\langle \Big(1,0,\dots,0\Big), \Big(\cos(\alpha_1)\dots\cos(\alpha_{n-1}), \cos(\alpha_1)\dots\sin(\alpha_{n-1}), \dots, \sin(\alpha_1)\Big)\Big\rangle = \\ = \prod_{k=1}^{n-1} \cos(\alpha_k).$$

Tedy volíme

$$\beta_t(n,1) = \sqrt[t]{\int\limits_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \cos^t(\alpha_k) d\mu(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})}$$

$$\begin{aligned}\Big(\beta_t(n,1)\Big)^t &= \frac{\Gamma(n/2)}{\Big(\sqrt{\pi}\Big)^n} \int\limits_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \cos^{t+n-k-1}(\alpha_k) d\lambda^{n-1}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}) \\ &= \frac{\Gamma(n/2)}{\Big(\sqrt{\pi}\Big)^n} \prod_{k=1}^{n-1} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{t+n-k-1}(\alpha) d\lambda(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{t+k-1}(\alpha) d\lambda(\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(n/2)}{\Big(\sqrt{\pi}\Big)^n} \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\Big((t+k)/2\Big)}{\Gamma\Big((t+k+1)/2\Big)} = \frac{\Gamma(n/2)}{\Big(\sqrt{\pi}\Big)} \frac{\Gamma\Big((t+1)/2\Big)}{\Gamma\Big((t+n)/2\Big)}.\end{aligned}$$

□

Tím jsme ukázali, že $\beta_t(n,m)$ z rovnice 2.5 vskutku existuje, pokud $m = 1$. V následujícím lemmatu a následující větě nalezneme jen nutné podmínky, které by taková $\beta_t(n,m)$ musela splnit, má-li existovat pro všechny ξ stejná. Existenci ukážeme poté.

Lemma 18 (Herbert Federer, 1996, příklad 2.7.16 (6))**.** *Nechť jsou $k,m,n \in \mathbb{N}$, $k+m \leq n$, $t \in [1,\infty)$, pak nutně*

$$\beta_t(n,m)/\beta_t(n-k,m) = \beta_t(n,k)/\beta_t(n-m,k).$$

Důkaz:

Pozorování. Buďte $\xi = (e_1,e_2,\dots,e_m) \in (\mathbb{R}^n)^m$ kanonická m-tice vektorů (reprezentující „m-rozměrnou krychli“), $\eta = (e_{n-k+1},e_{n-k+2},\dots,e_n) \in (\mathbb{R}^n)^k$, potom platí:

$$\Big(\beta_t(n-k,m)\Big)^t \int\limits_{O(n)} |(g(\xi),\eta)|^t d\theta_n(g) = \Big(\beta_t(n,m)\Big)^t,$$

kde (,) seřadí posloupnosti vektorů za sebe (takže $(g(\xi),\eta)$ má význam $m+k$-rovnoběžnostěnu, klidně degenerovaného) a $|\cdot|$ je definováno v rovnici 2.6.

Důkaz:

Označme jako $q \in O^*(n,n-k)$ OG. projekci do $\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_{n-k}\}$ (což jest ortogonální doplněk $\operatorname{span}\{\eta\}$).
Pro libovolné $\tau \in (\mathbb{R}^n)^m$ m-tice vektorů, jednak díky tomu, že objem rovnoběžnostěnu závisí jen na rozměrech ve směrech na sobě kolmých, a také protože $|\eta| = 1$, platí $|(\tau,\eta)| = |(q^*q(\tau),\eta| = |q(\tau))|$, kde $g^* \in O(n,n-k)$ ve smyslu definice 5 (tedy se jedná o vnoření). Proto z rovnice 2.5:

$$\Big(\beta_t(n-k,m)\Big)^t|(\tau,\eta)|^t = \Big(\beta_t(n-k,m)\Big)^t|q(\tau)|^t = \int\limits_{O^*(n-k,m)} |(r\circ q)(\tau)|^t d\theta^*_{n-k,m}(r).$$

Této skutečnosti využijeme pro $\tau = g(\xi)$ pro všechna $g \in O(n)$ přes které přeintegrujeme:

$$\begin{aligned}\Big(\beta_t(n-k,m)\Big)^t \int\limits_{O(n)} |(g(\xi),\eta)|^t d\theta_n(g) = \\ = \int\limits_{O(n)} \int\limits_{O^*(n-k,m)} |(r\circ q\circ g)(\xi)|^t d\theta^*_{n-k,m}(r) d\theta_n(g) = \\ = \int\limits_{O^*(n-k,m)} \int\limits_{O(n)} |(r\circ q\circ g)(\xi)|^t d\theta_n(g) d\theta^*_{n-k,m}(r),\end{aligned}$$

kde byla použita Fubiniho věta. Pro libovolné $r \in O^*(n-k,m)$ platí

$$\int\limits_{O(n)} |(r\circ q\circ g)(\xi)|^t d\theta_n(g) = \int\limits_{O^*(n,m)} |p(\xi)|^t d\theta^*_{n,m}(p) = \beta_t(n,m)|\xi| = \beta_t(n,m),$$

díky jednoznačnosti míry $\theta^*_{n,m}$, jelikož zobrazení

$$\phi : O(n) \to O^*(n,m),\ \phi(g) = r\circ q\circ g$$

je surjektivní a indukuje rotačně invariantní Radonovu míru na $O^*(n,m)$ (viz konstrukce v rovnici 1.1, kde volíme $p = r\circ q$).

□

Pozorování. Pro libovolné $g \in O(n)$:

$$|(g(\xi),\eta)| = |(\xi, g^{-1}(\eta))| = |(g^{-1}(\eta),\xi)|.$$

Důkaz:

Druhá rovnost platí, jelikož objem (definovaný v rovnici 2.6) „nezávisí na pořadí“.
První rovnost platí, jelikož stačí celý rovnoběžnostěn zobrazíme při g, které zachovává objem (Z definice $O(n)$: $g^*g = Id$, kde * odpovídá transponování, když ztotožníme g s maticí).

□

Nyní už je důkaz lemmatu hotov, neboť stačí použít první pozorování dvakrát, jednou se zaměněnou rolí m a k, a podle druhého pozorování vyjdou příslušné integrály totožné.

□

Věta 19 (Herbert Federer, 1996, příklad 2.7.16 (6))**.** *Nechť jsou n,m,t jako v definici 9, potom už musí*

$$\left(\beta_t(n,m)\right)^t = \prod_{j=m+1}^{n} \frac{\Gamma(j/2)\Gamma((t+j-m)/2)}{\Gamma((j-m)/2)\Gamma((t+j)/2)}.$$

Speciálně

$$\beta_1(n,m) = \frac{\Gamma((m+1)/2)\Gamma((1+n-m)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma((n+1)/2)}.$$

Důkaz: Použijeme lemma pro $k = 1$ a indukcí podle n. Je-li $n = 1$, pak jedině $m = 1$, volili jsme $\beta_t(1,1) = 1$ což je v souladu s dokazovaným vzorcem (prázdný součin se rozumí jako 1). Nechť $n > 1$, je-li $m = n$, volili jsme $\beta_t(n,n) = 1$ což je opět v souladu s dokazovaným vzorcem. Dále stačí dokazovat jen pro $m \leq n-1$. Podle lemmatu 18 pro $k = 1$, indukčního předpokladu a věty 17:

$$\begin{aligned}
\left(\beta_t(n,m)\right)^t &= \left(\beta_t(n-1,m)\right)^t \left(\beta_t(n,1)\right)^t / \left(\beta_t(n-m,1)\right)^t = \\
&= \left(\prod_{j=m+1}^{n-1} \frac{\Gamma(j/2)\Gamma((t+j-m)/2)}{\Gamma((j-m)/2)\Gamma((t+j)/2)}\right) \frac{\Gamma((t+1)/2)\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+t)/2)\sqrt{\pi}} \cdot \\
&\qquad \cdot \frac{\Gamma((n-m+t)/2)\sqrt{\pi}}{\Gamma((t+1)/2)\Gamma((n-m)/2)} = \\
&= \left(\prod_{j=m+1}^{n-1} \frac{\Gamma(j/2)\Gamma((t+j-m)/2)}{\Gamma((j-m)/2)\Gamma((t+j)/2)}\right) \frac{\Gamma(n/2)\Gamma((n-m+t)/2)}{\Gamma((n+t)/2)\Gamma((n-m)/2)} = \\
&= \prod_{j=m+1}^{n} \frac{\Gamma(j/2)\Gamma((t+j-m)/2)}{\Gamma((j-m)/2)\Gamma((t+j)/2)}.
\end{aligned}$$

V případě $t = 1$ se „křížem“ zkrátí všechny členy, až na čtyři členy z krajních případů $j = m+1$ a $j = n$.

□

Věta 20. *Nechť jsou n,m,t jako v definici 9, pak $\beta_t(n,m)$ definovaná v rovnici 2.5 vskutku existuje nezávislá na ξ.*

Důkaz: Z rotační invariance $\theta^*_{n,m}$ stačí ukázat nezávislost na ξ jen pro ξ jejichž složky leží v libovolném pevném m-dimenzionálním podprostoru $\mathbb{R}^n$.

Nejsnadněji se následující ukáže pomocí vnějšího součinu, zkusíme to ale i bez jeho použití (abychom nemuseli v práci zavádět vnější algebru apod.).

Zafixujme nejprve libovolný $V \in G(n,m)$. Uvažme L prostor m-tic z V, kde ztotožníme dva prvky, pokud mají stejný m-rozměrný objem (zavedený výše). Na L zavedeme operaci násobení skalárem z $\mathbb{R}$ tak, že skalárem vynásobíme libovolnou složku libovolného reprezentanta.
Jako M označme stejnou konstrukci (faktorizaci) provedenou na m-tice z $\mathbb{R}^m$. Zvolíme libovolný nenulový prvek $l \in L$ a $m \in M$. Pak každý prvek L, respektive M je nezáporným násobkem l, respektive m. Kdybychom definici L a M dotáhli

na vektorový prostor, mohli bychom říct, že jejich dimenze je 1. Tolik ale nepotřebujeme, takhle nám to stačí.

Zvolme $p \in O^*(n,m)$. Přirozeným způsobem dostaneme (faktorizované) zobrazení $\overline{p} : L \to M$. $\overline{p}$ je lineární na násobky, proto existuje $t_p \in \mathbb{R}$ (dokonce $t_p \in [0,1]$) reprezentující $\overline{p}$.

To dokazuje, že pro libovolné $\xi \in V^m$ lineárně nezávislou m-tici je $|p(\xi)|/|\xi|$ stejné (závislé jen na p).

□

Poznámka. Na závěr oddílu ještě pro zajímavost zmíníme, že se standardně volí $\beta_\infty(n,m) = 1$ pro všechna $n,m \in \mathbb{N}$.

2.4 Vztah s Hausdorffovou měrou

Věta 21. *Jsou-li n,m,t jako v definici 9, pak platí*

$$\beta_t(n,m)\mathcal{F}_t^m \leq \mathcal{H}^m.$$

Důkaz: Z definice $\mathcal{F}_t^m$ a $\mathcal{H}^m$ (a první poznámky za definicí $\mathcal{H}^m$) stačí ukázat jen

$$\beta_t(n,m)\zeta_t(A) \leq \frac{\pi^{m/2}}{2^m\Gamma(m/2+1)} \operatorname{diam}^m(A)$$

pro libovolnou $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Z třetí poznámky plyne, že

$$\frac{\pi^{m/2}}{2^m\Gamma(m/2+1)} \operatorname{diam}^m(A) = \lambda^m(\mathrm{B}^m(0, \operatorname{diam}(A)/2)).$$

Pro každé $p \in O^*(n,m)$ je p 1-lipschitzovská, proto je $\operatorname{diam}(p(A)) \leq \operatorname{diam}(A)$. Podle slavné izodiametrické nerovnosti (předmět Konvexní tělesa, nebo viz Herbert Federer, 1996 2.10.33) je

$$f_A(p) = \lambda^m(p(A)) \leq \lambda^m\Big(\mathrm{B}(0, \operatorname{diam}(p(A))/2)\Big) \leq \lambda^m\Big(\mathrm{B}(0, \operatorname{diam}(A)/2)\Big).$$

Umocníme na t, přeintegrujeme $\theta^*_{n,m}$ a odmocníme:

$$\beta_t(n,m)\zeta_t(A) \leq \lambda^m\Big(\mathrm{B}^m(0, \operatorname{diam}(A)/2)\Big).$$

□

Připomeneme, že pro S jednoduchou m-plochu třídy (aspoň) C^1 definujeme míru na ploše μ_S jako

$$\mu_S(B) = \int\limits_{g^{-1}(B)} J_g d\lambda^m = \int\limits_{g^{-1}(B)} \sqrt{\det(D_g(u)^\top D_g(u))} d\lambda^m(u),$$

pro $B \subseteq S$ (relativně) borelovskou a libovolnou $g : U \to S$ mapu plochy S třídy C^1, kde je $U \subseteq \mathbb{R}^m$ otevřená. A definujeme plošný integrál

$$\int_S f ds = \int_S f d\mu_S,$$

pro $f : S \to R$ borelovsky měřitelnou.

Věta 22. *Jsou-li $n > m$ přirozená čísla, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je jednoduchá m-plocha třídy C^1, pak*

$$\mathcal{F}_1^m(S) = \mu_S(S)$$

Důkaz: Zafixujme $p \in O^*(n,m)$. Označíme $S_p = \{x \in S : \ p(T_x S) = \mathbb{R}^m\}$, kde $T_x S$ značí (m-dimenzionální) tečný prostor S v bodě $x \in S$.
S_p je otevřená (v S), a tedy měřitelná, jelikož doplněk S_p lze vyjádřit jako vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení přiřazující bodu z S úhel tečné roviny od prostoru vlastních vektorů příslušející vlastními číslu 0 projekce p.

Pozorování. Ze Sardovy věty plyne:

$$\lambda^m\Big(p(S \setminus S_p)\Big) = 0. \tag{2.7}$$

Důkaz:

Máme $U \subseteq \mathbb{R}^m$ otevřenou a

$$h : U \to S \text{ homeomorfismus, třídy } C^1 \text{ a rank}\,(D_h(u)) = m \; \forall u \in U.$$

Použijeme modifikovanou Sardovu větu 12 pro $k = l = m$ a $f = p \circ h$. $p \circ h$ je lokálně lipschitzovské jelikož p je lipschitzovské a h je lokálně lipschitzovské, neboť je spojitě diferencovatelné.

$$\begin{aligned} 0 =& \mathcal{H}^m\left(\{f(u) : \ u \in U, \dim(D_f(u)(\mathbb{R}^m)) < m\}\right) = \\ =& \lambda^m\left(\{p(h(u)) : \ u \in U, \dim(D_p(h(u))D_h(u)(\mathbb{R}^m)) < m\}\right) = \\ =& \lambda^m\Big(\{p(h(u)) : \ u \in U, \dim(D_p(h(u))(T_{h(u)}S)) < m\}\Big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(S \setminus S_p) =& p(\{x \in S : \ p(T_x S) \neq \mathbb{R}^m\}) = p(\{x \in S : \ \dim(p(T_x S)) < m\}) = \\ =& (\{p(h(u)) : \ u \in U, \dim(p(T_{h(u)}S)) < m\}). \end{aligned}$$

A nyní si už jen stačí uvědomit, že p je lineární, proto $D_p(x) = p$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}^n$, speciálně naše $h(u)$, $u \in U$.

□

Pozorování. Je-li $G \subseteq S_p$ souvislá a (relativně) otevřená, pak $p|_G$ je prostá.

Důkaz:

Sporem, nechť existují různá $x,y \in G$ taková, že $p(x) = p(y)$. Nalezneme křivku $\gamma : [0,1] \to G$ třídy C^1 takovou, že $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ (například lze difeomorfně zobrazit $h^{-1}(G)$ (pro nějakou C^1 mapu okolí h) na $\mathbb{R}^m$, kde je spojíme úsečkou).
Uvažme funkci

$$r(\alpha) = \rho\Big(p(\gamma(\alpha)), p(y)\Big) = \operatorname{dist}\Big(\{\gamma(\alpha)\}, [x,y]\Big),\ \alpha \in [0,1].$$

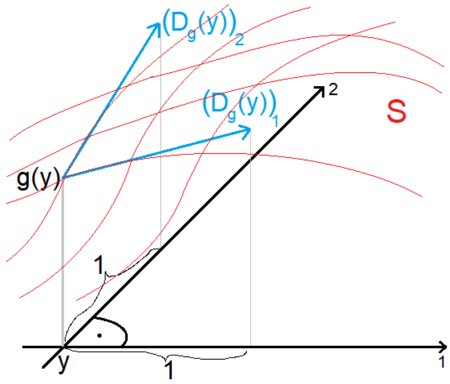
Jistě $r(0) = r(1) = 0$. Pokud je r konstantní funkce, bude další úvaha automaticky splněna. Předpokládejme proto, že není.
Ze spojitosti na kompaktu nabývá extrémů. Maximum není v krajních bodech, označme $\alpha_0 \in (0,1)$ bod maxima. Kvůli spojité diferencovatelnosti musí $r'(\alpha_0) = 0$.
Tedy tečný prostor S_p v $\gamma(\alpha_0)$ je rovnoběžný s $[x,y]$, proto projekce tečného prostoru v $\gamma(\alpha_0)$ je nižší dimenze, neboli $\gamma(\alpha_0) \notin S_p$. Spor s definicí γ. $\square$

Disjunktně rozložme na komponenty souvislosti:

$$S_p = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_p^i.$$

Komponent je jen spočetně, jelikož mapa je homeomorfismus, (tedy zachovává počet komponent) ale do $\mathbb{R}^m$ se více nežli spočetně mnoho disjunktních otevřených množin nevejde. (Alternativně by šlo rozložit na podplochy pro které je p^{-1} mapou i bez diskutování komponent přímo, ale takhle jsme rozklad provedli „optimálně“).

Označíme $g_p^i = \left(p|_{S_p^i}\right)^{-1}$. g_p^i jest mapou S_p^i. Jakobián g_p^i v bodě $g_p^i(y) \in S_p^i$ je $\sqrt{\det\left(D_{g_p^i}(y)^\top D_{g_p^i}(y)\right)}$ což jsme v rovnici 2.6 psali jako $|D_{g_p^i}(y)|$, pokud matici $D_{g_p^i}(y)$ typu $n \times m$ ztotožníme s m-ticí n-vektorů.
$|D_{g_p^i}(y)| < \infty$ jelikož díky volbě množiny S_p se nám nemůže stát, aby se m-



Obrázek 2.3: Význam $D_g(y)$ pro nějakou mapu g parametrizující jako graf.

rozměrný rovnoběžnostěn zobrazil na méně, nežli m-rozměrný rovnoběžnostěn. A $|D_{g_p^i}(y)| > 0$ jelikož g_p^i je mapa, tedy rank $D_{g_p^i}(y) = m$. Funkce $y \to |D_{g_p^i}(y)|$ je spojitá (jelikož plocha je třídy C^1), tedy i měřitelná. Pak podle definice plošného integrálu:

$$\int\limits_{S_p^i} \frac{1}{\left|D_{g_p^i}\Big((g_p^i)^{-1}(x)\Big)\right|} dS(x) = \int\limits_{(g_p^i)^{-1}(S_p^i)} \frac{|D_{g_p^i}(y)|}{|D_{g_p^i}(y)|} d\lambda^m(y) = \int\limits_{(g_p^i)^{-1}(S_p^i)} d\lambda^m(y).$$

Označíme $j : S_p \to \mathbb{N}$ funkci takovou, že $\forall x \in S_p :\ x \in S_p^{j(x)}$.

$$\int\limits_{S_p} \frac{1}{\left|D_{g_p^{j(x)}}(p(x))\right|} dS(x) = \int\limits_{S_p} \frac{1}{\left|D_{g_p^{j(x)}}\Big((g_p^{j(x)})^{-1}(x)\Big)\right|} dS(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{(g_p^i)^{-1}(S_p^i)} d\lambda^m(y) =$$
$$= \int\limits_{p(S_p)} \operatorname{card}\{i \in \mathbb{N} :\ y \in (g_p^i)^{-1}(S_p^i)\} d\lambda^m(y) = \int\limits_{p(S_p)} \operatorname{card}\{S_p \cap p^{-1}(y)\} d\lambda^m(y), \tag{2.8}$$

kde 2. rovnost je díky disjunktnosti rozkladu a na každé komponentě použijeme předchozí rovnost zvlášť, 3. je díky volbě množiny S_p, akorát body, kde projekce $(g_p^i)^{-1} = p$ není jednoznačná, započítáváme vícekrát.
Pro $x \in S$ nalezneme maximální otevřenou (a tedy měřitelnou) množinu $M_x \subseteq O^*(n,m)$ tak, že $\theta^*_{n,m}(M_x) = 1$ a pro všechna $p \in M_x : p(T_x S) = \mathbb{R}^m$ (což lze, jelikož stačí vynechat projekce na prostory mající nějaký normálový vektor v $T_x S$).
Systémy množin $\{M_x,\ x \in S\}$ a $\{S_p,\ p \in O^*(n,m)\}$ jsou řezy téže množiny $\{(x,p) \in S \times O^*(n,m) :\ \ p(T_x S) = \mathbb{R}^m\}$.
Nyní rovnost 2.8 přeintegrujeme přes všechna $p \in O^*(n,m)$ a nalevo použijeme Fubiniho větu.

$$\int\limits_{S}\int\limits_{M_x} \frac{1}{\left|D_{g_p^{j(x)}}(p(x))\right|} d\theta^*_{n,m}(p) dS(x) = \int\limits_{O^*(n,m)} \int\limits_{p(S_p)} \operatorname{card}\{S_p \cap p^{-1}(y)\} d\lambda^m(y) d\theta^*_{n,m}(p).$$

Nic nepřidáme když napíšeme:

$$= \int\limits_{O^*(n,m)} \int\limits_{p(S_p)} \operatorname{card}\{S \cap p^{-1}(y)\} d\lambda^m(y) d\theta^*_{n,m}(p).$$

Z monotonie λ^m a rovnice 2.7 máme, že $\lambda^m\Big(p(S) \setminus p(S_p)\Big) \le \lambda^m\Big(p(S \setminus S_p)\Big) = 0$, proto můžeme integrovat přes větší množinu $p(S)$:

$$= \int\limits_{O^*(n,m)} \int\limits_{p(S)} \operatorname{card}\{S \cap p^{-1}(y)\} d\lambda^m(y) d\theta^*_{n,m}(p). \tag{2.9}$$

Zvolme $x \in S$ a nějaké libovolné $\xi \in (T_x S)^m$ lineárně nezávislou m-tici vektorů z tečného prostoru.

Pozorování.

$$|D_{g_p^{j(x)}}(p(x))| = \frac{|\xi|}{|p(\xi)|} \quad \forall p \in M_x.$$

Důkaz:

Nahlédnout tento geometrický fakt můžeme, uvážíme-li lineární prostor T_xS jako plochu s mapou $g = (p|_{T_xS})^{-1}$ pro libovolné $p \in M_x$. Jako množinu $A \subseteq T_xS$ označme konvexní obal ξ. Pak z definice plošného integrálu

$$|\xi| = \int_A dS = \int_{p(A)} |D_g(y)| d\lambda^m(y) = |D_g(0)|\lambda^m(p(A)) = |D_g(0)||p(\xi)|,$$

jelikož je jakobián na této ploše všude stejný.

$\square$

Potom z definice $\beta_1(n,m)$:

$$\beta_1(n,m) = \int\limits_{O^*(n,m)} \frac{|p(\xi)|}{|\xi|} d\theta^*_{n,m}(p) = \int\limits_{M_x} \frac{|p(\xi)|}{|\xi|} d\theta^*_{n,m}(p) = \int\limits_{M_x} \frac{1}{|D_{g_p^{j(x)}}(p(x))|} d\theta^*_{n,m}(p),$$

kde druhá rovnost platí, jelikož pro $p \in O^*(n,m) \setminus M_x$ má $p(\xi)$ m-rozměrný objem roven nule. $\beta_1(n,m)$ nezávisí na x (jak jsme ukázali v předchozím oddílu), takže v rovnici 2.9 jí vydělíme a dostáváme

$$\mu_S(S) = \int_S dS = \frac{1}{\beta_1(n,m)} \int\limits_{O^*(n,m)} \int\limits_{p(S)} \operatorname{card}\{S \cap p^{-1}(y)\} d\lambda^m(y) d\theta^*_{n,m}(p) = \mathcal{F}^m(S).$$

$\square$

Důsledek. Nechť jsou $n > m$ přirozená čísla, S buď jednoduchá m-plocha třídy C^1, $A \subseteq S$ (relativně) borelovská podmnožina. Pak

$$\mathcal{F}_1^m(A) = \mu_S(A).$$

Důkaz: Důkaz provedeme stejně, jako v předchozí větě, ale na místo S s množinou A. Používat budeme stejné značení, jako $A_p = \{x \in A : \; p(T_xS) = \mathbb{R}^m\}$ pro $p \in O^*(n,m)$. Již víme:

$$\lambda^m\Big(p(A \setminus A_p)\Big) \le \lambda^m\Big(p(S \setminus S_p)\Big) = 0, \;\; p \in O^*(n,m).$$

A opět disjunktně rozložíme

$$A_p = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_p^i, \;\; p \in O^*(n,m),$$

tak, že pro všechna $i \in \mathbb{N} : \;\; p|_{A_p^i}$ je prostá.
Označíme stejně g_p^i mapu S_p^i, funkci $j : S_p \to \mathbb{N}$ a množiny $M_x \subseteq O^*(n,m)$ pro $x \in S$. Podle definice plošného integrálu je

$$\int\limits_{A_p} \frac{1}{\left|D_{g_p^{j(x)}}(p(x))\right|} dS(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{(g_p^i)^{-1}(A_p^i)} d\lambda^m(y) =$$

$$= \int\limits_{p(A_p)} \operatorname{card}\{i \in \mathbb{N} : \; y \in (g_p^i)^{-1}(A_p^i)\} d\lambda^m(y) = \int\limits_{p(A_p)} \operatorname{card}\{A_p \cap p^{-1}(y)\} d\lambda^m(y).$$

Systémy množin $\{M_x,\ x \in A\}$ a $\{A_p,\ p \in O^*(n,m)\}$ jsou řezy téže množiny $\{(x,p) \in A \times O^*(n,m) :\ p(T_xS) = \mathbb{R}^m\}$. Z Fubiniho věty:

$$\int_A \int_{M_x} \frac{1}{\left|D_{g_p^{j(x)}}(p(x))\right|} d\theta^*_{n,m}(p) dS(x) = \int_{O^*(n,m)} \int_{p(A_p)} \operatorname{card}\{A_p \cap p^{-1}(y)\} d\lambda^m(y) d\theta^*_{n,m}(p)$$
$$= \int_{O^*(n,m)} \int_{p(A)} \operatorname{card}\{A \cap p^{-1}(y)\} d\lambda^m(y) d\theta^*_{n,m}(p).$$

Pro libovolný $x \in S$ jsme měli

$$\beta_1(n,m) = \int_{M_x} \frac{1}{|D_{g_p^{j(x)}}(p(x))|} d\theta^*_{n,m}(p).$$

A tedy opět:

$$\mu_S(A) = \int_A dS = \frac{1}{\beta_1(n,m)} \int_{O^*(n,m)} \int_{p(A)} \mathrm{N}(p|_A,y) d\lambda^m(y) d\theta^*_{n,m}(p) = \mathcal{F}^m(A).$$

□

Na další důsledek budeme navíc potřebovat následující známý vztah:

Věta 23 (Herbert Federer, 1996 3.2.3 (1))**.** *Jsou-li $n \geq m$ přirozená čísla, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lipschitzovské zobrazení a $B \subseteq \mathbb{R}^m$ λ^m-měřitelná, tak*

$$\int_B J_f d\lambda^m = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{N}(f|_B,y) d\mathcal{H}^m(y),$$

kde jest (m-rozměrný) jakobián $J_f(u) = \sqrt{\det(D_f(u)^\top D_f(u))}$, $u \in A$.

Poznámka. Ten použijeme na prostou funkci f třídy C^1. Pak je pravá strana rovna $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{f(B)} d\mathcal{H}^m(y) = \mathcal{H}^m(f(B))$, kde χ značí charakteristickou funkci.
A pokud je $S = f(U)$ C^1 m-plochou pro nějakou $B \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^m$ otevřenou, tak levá strana jest $\int_{f(B)} dS$, kdykoliv je $f(B)$ (relativně) borelovská, neboli

$$\mu_S(A) = \mathcal{H}^m(A),$$

pro A (relativně) borelovskou podmnožinu jednoduché C^1 m-plochy S.

Důsledek. Nechť jsou $n > m$ přirozená čísla, $S_1,S_2,\ldots$ buďte jednoduché m-plochy třídy C^1. $S = \bigcup_{i=1}^\infty S_i$ (což nemusí být ani plocha). Pak

$$\mathcal{F}_1^m(S) = \mathcal{H}^m(S).$$

Důkaz: Provedeme standardní zdisjunktnění:
Pro $i \in \mathbb{N}$ označme $B_i = S_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} S_k$. Pak B_i je (relativně) borelovská v S_i a máme disjunktní sjednocení

$$S = \bigcup_{i=1}^\infty B_i.$$

Proto podle předchozího důsledku a věty 23 je

$$\mathcal{F}_1^m(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_1^m(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{S_i}(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^m(B_i) = \mathcal{H}^m(S).$$

□

Další větu uvedeme jen pro úplnost, dokazovat nebudeme.

Věta 24 (Herbert Federer, 1996. 3.2.26)**.** *Jsou-li n,m jako v definici 9, $t \in [1, \infty]$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je m-rektifikovatelná a $H^m(A) < \infty$, pak*

$$\mathcal{F}_t^m(A) = \mathcal{H}^m(A).$$

Poznámka. Nahlednéme-li však na důkaz této věty ve Herbert Federer, 1996, nejsme si jisti, zda je kompletní, aspoň v případech $t > 1$. Zdálo by se, že jedna nerovnost je ukázaná jen obsahujíc navíc konstantu $\beta_t(n,m)$.

2.5 O motivaci ze začátku kapitoly

Věta 25. *Je-li γ m-plocha v $\mathbb{R}^n$ třídy C^1, tak*

$$\beta_1(n,m)\mathcal{H}^m(\gamma) = \int\limits_{Af(n,m)} \mathrm{card}(\gamma \cap L) d\mu(L),$$

kde $Af(n,m) = \{V + y : V \in G(n,n-m), y \in V^{\perp}\}$ a $\mu_{n,m}$ je míra dána vztahem

$$\int\limits_{Af(n,m)} f(L)\mu_{n,m}(L) = \int\limits_{G(n,n-m)} \int\limits_{V^{\perp}} f(V+y) d\mathcal{H}^m(y) d\theta^*_{n,n-m}(V),$$

pro každou měřitelnou funkci $f : Af(n,m) \to \mathbb{R}$.

Důkaz: Z vět 22 a 15 a poznámky za ní máme

$$\begin{aligned}\beta_1(n,m)\mathcal{H}^m(\gamma) &= \int\limits_{G(n,m)} \int\limits_{V} \mathrm{N}(\mathrm{proj}_V|_{\gamma}, y) d\mathcal{H}^m(y) d\gamma_{n,m}(V) \\ &= \int\limits_{G(n,m)} \int\limits_{V} \mathrm{card}\left(\gamma \cap (\mathrm{proj}_V)^{-1}(\{y\})\right) d\mathcal{H}^m(y) d\gamma_{n,m}(V).\end{aligned}$$

Pro $V \in G(n,m)$, $y \in V$ je $(\mathrm{proj}_V)^{-1}(\{y\})$ afinní prostor $V^{\perp} + y \subseteq \mathbb{R}^n$. Naopak, je-li $L \in Af(n,m)$, tak položíme $y = \mathrm{proj}_L(0)$ a $V = (L-y)^{\perp}$. y a V jednoznačně určují L. To nám určuje, jakou míru musíme na $Af(n,m)$ uvážit.

□

Poznámka. Dodáme jen, že z poznatků z oddílu 2.3 plyne $\beta_1(2,1) = \frac{2}{\pi}$.
Použitím věty 24 bychom tento vztah dostali i pro m-rektifikovatelné množiny v $\mathbb{R}^n$ konečné $\mathcal{H}^m$-míry.

3. Konstrukce množin

Nyní budeme hledat množiny, pro které je integrálně-geometrická míra (jen pro $t = 1$) nulová a Hausdorffova (stejně „rozměrná“) kladná. Speciálně už víme, že musíme hledat množiny které nejsou rektifikovatelné. Dokonce musí být ryze nerektifikovatelné jak zjistíme z dalšího lemmatu.

3.1 Charakterizace nulovosti

Věta 26. *Jsou-li n,m,t jako v definici 9, tak platí, že*

$$\mathcal{F}_t^m(A) = 0 \iff \lambda^m(p(A)) = 0 \text{ pro s.v. } p \in O^*(n,m).$$

Důkaz: V důkazu věty 15 jsme dokázali

$$\zeta_t(A) \leq \sum_{B \in \mathcal{G}} \zeta_t(B), \ \mathcal{G} \text{ libovolné borelovské pokrytí } A.$$

Uvažme posloupnost $(\mathcal{G}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ borelovských dělení A z lemmatu 13.
Ať $\lambda^m(p(A)) = 0$ pro s.v. $p \in O^*(n,m)$. Pak z monotonie λ^m : $\forall B \in \mathcal{G}_j$: $\lambda^m(p(B)) = 0$ pro s.v. $p \in O^*(n,m)$. A tedy $\zeta_t(B) = 0$. Potom z lemmatu 14:

$$\mathcal{F}_t^m(A) = \lim_{j\to\infty} \sum_{B \in \mathcal{G}_j} \zeta_t(B) = 0.$$

Nechť $\mathcal{F}_t^m(A) = 0$. Potom z lemmatu 14:

$$0 = \mathcal{F}_t^m(A) = \lim_{j\to\infty} \sum_{B \in \mathcal{G}_j} \zeta_t(B).$$

Nechť $\epsilon > 0$, najdeme $j_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\epsilon > \sum_{B \in \mathcal{G}_j} \zeta_t(B) \geq \zeta_t(A).$$

To platilo pro libovolné $\epsilon > 0$, proto $\zeta_t(A) = 0$. Pak z nezápornosti integrantů $\lambda^m(p(A)) = 0$ pro s.v. $p \in O^*(n,m)$.

□

3.2 Kantorův prach

Příklad. Buďte

$$\begin{aligned} f_1,f_2,f_3,f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \\ f_1(x) &= x/4, \\ f_2(x) &= x/4 + (3/4,0), \\ f_3(x) &= x/4 + (0,3/4), \\ f_4(x) &= x/4 + (3/4,3/4). \end{aligned}$$

Jistě jsou pak f_1,f_2,f_3,f_4 podobnosti (tj. lipschitzovské s lipschitzovským inverzem a s převrácenými lipschitzovskými konstantami) s podobnostním poměrem 1/4 (čísla r_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ v definici 4). $F \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ buď tím jediným pevným bodem zobrazení $f = \cup_{i=1}^4 f_i$. Pak $\dim_F(F) = 1$.

Pozorování. Označíme-li

$$F_1 = [0,1]^2, \quad F_{n+1} = f(F_n), n \geq 2, \quad \overline{F} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

tak platí $\overline{F} = F$.

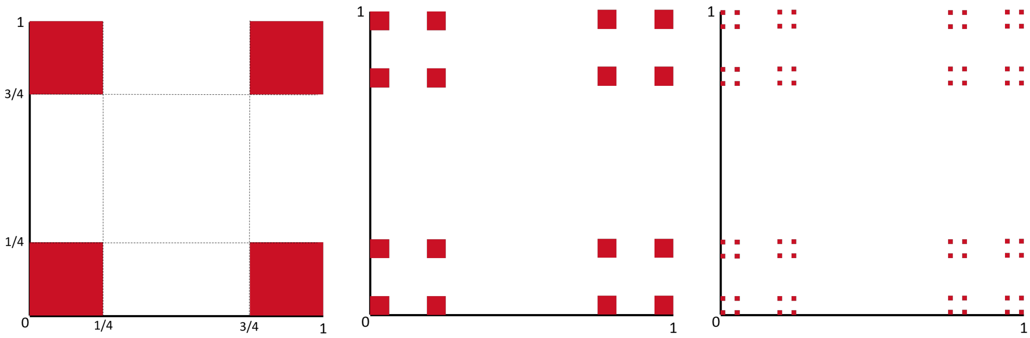
Důkaz:

Stačí ukázat, že $\overline{F}$ je pevným bodem f. Vidíme, že $F_2 \subseteq F_1$, proto:

$$\overline{F} = \bigcap_{n=2}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{n+1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n) = f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = f\left(\overline{F}\right),$$

kde prohodit spočetný průnik a funkci f můžeme, jelikož je f „spojitá" (dokonce 1/4-lipschitzovská), vzhledem k takzvané Hausdorffově metrice (respektive spojitá ve Vietorisově topologii), která je obsažena v kurzech Metrické Struktury, Topologie Kontinua či Konvexní Tělesa a podrobněji to tu nebudeme rozebírat.

$\square$



Obrázek 3.1: Náznak konstrukce Kantorova prachu.

Tvrzení 27. *Buď $F \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ jako výše. Pak*

$$\mathcal{H}^1(F) > 0.$$

Důkaz: Položme $G = (-1,2)^2$. Potom $G \subseteq f(G)$ a $\{f_i(G) : i \in \{1,2,3,4\}\}$ je po dvou disjunktní systém.
Tedy podle věty 6 je $\dim_{\mathcal{H}}(F) = 1$ silně (číslo $s \geq 0$ splňující $1 = 4\frac{1}{4^s}$).

$\square$

Tvrzení 28. *Buď $F \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ jako výše. Pak*

$$\mathcal{F}^1(F) = 0.$$

Důkaz: Uvažme $r \in O^*(n,m)$ ortogonální projekci na první osu, $q \in O^*(n,m)$ OG. projekci na druhou osu.
Uvažme podobnosti:
$$\begin{aligned} &h_1,h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \\ &\quad h_1(x) = x/4, \\ &\quad h_2(x) = x/4 + 3/4, \end{aligned}$$

s podobnostními poměry 1/4. Označme $h = h_1 \cup h_2$. Pak:

$$h_1 \circ r = r \circ f_1 = r \circ f_3,\ \ h_1 \circ q = q \circ f_1 = q \circ f_2,$$
$$h_2 \circ r = r \circ f_2 = r \circ f_4,\ \ h_2 \circ q = q \circ f_3 = q \circ f_4.$$

A tedy:

$$h \circ r = r \circ f,\ \ h \circ q = q \circ f.$$

Takže pevný bod zobrazení h je $r(F) = q(F) = H \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$.
Stejným způsobem zjistíme (jako G bychom volili $(-1,2)$), že $\dim_{\mathcal{H}}(H) = 1/2$ silně (číslo $s \geq 0$ splňující $1 = 2\frac{1}{4^s}$). Neboli $\lambda^1(H) = 0$.
Podle věty 10 a charakterizace 26 výše je

$$\mathcal{F}^1(F) = 0.$$

□

Provedeme myšlenku alternativního důkazu tohoto tvrzení, bez použití věty 10, což ale bude mnohem techničtější.

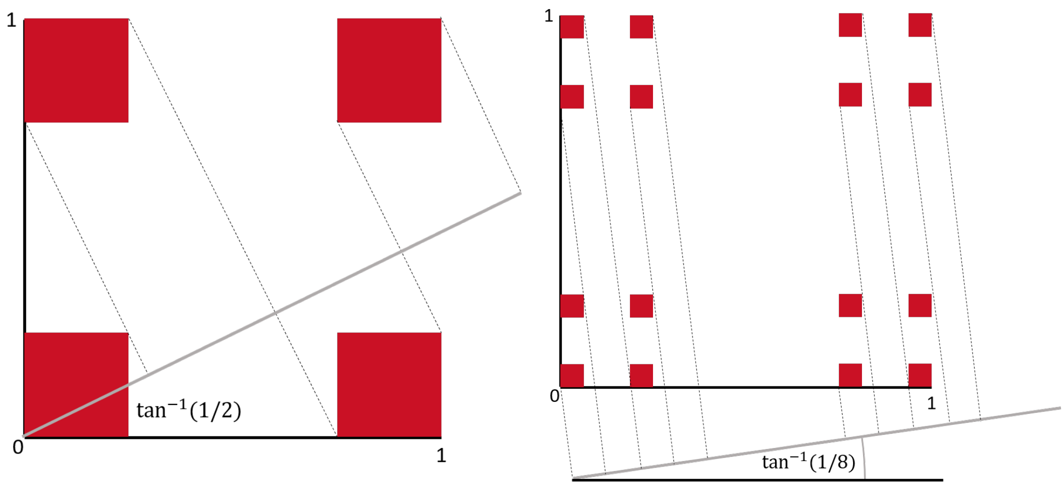
Důkaz: Ze symetrie stačí zkoumat jen projekce na přímky svírající s osou x úhel z intervalu $\alpha \in (0,\pi/4)$ (krajní případy netřeba řešit, neb mají jen nulovou míru). Podíváme se na obrázek s F_2 a provedeme projekci na přímku s úhlem α. To jest

$$(x,y) \to x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha).$$

Stačí zkoumat z každého čtverce jen dva rohy s nejmenšími a s největšími souřadnicemi (obrázek 3.2).
Následně pozorujeme pro jaká α dojde k překrytí. Sepsáním několika nerovností nalezneme, že jedině pro $\alpha = \arctan(\frac{\sqrt{2}}{2})$ nastane situace kdy nám projekce všech čtyř čtverců pokryje celý interval $[0, \cos(\alpha) + \sin(\alpha)]$ a to s překrýváním jen krajních bodů. Ze soběpodobné povahy této množiny je jasné že projekce F_n při tomto úhlu pokryje $[0, \cos(\alpha) + \sin(\alpha)]$ i pro všechna vyšší n.

Podíváme se na projekci z F_3 (obrázek 3.2) a všimneme si, že existuje projekce, při které nevznikne nová „mezera“. To nastane přesně pro arctan(1/8). Taková projekce použitá na F_n pro vyšší n už nebude mít míru konvergující k 0 s $n \to \infty$, i když ještě klesat bude, jelikož nejkrajnější čtverečky nebudou překryty.

Lze usoudit, že v každém ze spočetně mnoha kroků konstrukce přibude jeden takový úhel (z intervalu $(0,\pi/4)$), respektive projekce. To jest množina nulové $\theta^*_{2,1}$-míry.
Kromě těchto úhlů však v každém kroku přibudou další „mezery“ s konstantním



Obrázek 3.2: Ukázka projekcí s kladnou měrou.

poměrem velikosti oproti předchozímu kroku (tedy nevznikne „tlustá“ Kantorova množina, (viz Smith–Volterra–Cantor set) mající kladnou λ^1-míru). To zapříčiní, že výsledná projekce bude mít Hausdorffovu dimenzi menší než 1.

□

Důsledek. Nalezli jsme množinu, pro kterou se integrálně-geometrická liší od Hausdorffovy míry.

Příklad. Pro $\lambda \in (0,1/2)$ značme jako $\mathcal{C}(\lambda) \subseteq [0,1]$ množinu která vznikne iteračním procesem začínající jako $[0,1]$ vyhazováním prostředních $1-2\lambda$ z předchozího kroku.
Takže množinu F z výše můžeme označit jako $(\mathcal{C}(1/4))^2$. A standardní Kantorova množina je $\mathcal{C}(1/3)$.
Kdybychom postupy z tvrzení výše použily na množinu $F = \mathcal{C}(1/3)^2$, analogicky bychom dostali

$$\mathcal{F}^1(F) = 0,\ \mathcal{H}^1(F) = \infty \ \text{(jelikož } \dim_{\mathcal{H}}(F) = 2\log(2)/\log(3)\text{)},$$

což také splňuje zadání práce.

3.3 Troj-rozměrný Kantorův prach

Příklad. Využívajíce značení z předchozího oddílu budeme v tomto oddílu uvažovat množinu

$$F = (\mathcal{C}(1/8))^3.$$

Snadno analogicky bychom nalezli osm generujících podobností, množiny $F_n,\ n \in \mathbb{N}$ a opět bychom analogicky dostali $\dim_{\mathcal{H}}(F) = 1$ silně.
Nyní však nemůžeme použít větu se dvěma směry. Ukážeme, že:

Tvrzení 29. *F je ryze 1-nerektifikovatelná.*

Pak použitím Federer-Bezikovičovy věty 9 a charakterizací nulovosti 26 už dostaneme
$$\mathcal{F}^1(F) = 0.$$

Než začneme důkaz, nejprve si definujme:

Definice 10. *Ať $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je borelovská množina, $a \in A$, L afinní 1-dimenzionální prostor procházející a. Pro $\beta > 0$ definujeme kužel*

$$S(a,L,\beta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(\{x\},L) < \beta ||x - a||\}.$$

Řekneme, že L je aproximativním tečným prostorem v a k A, pokud

- $\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r}\mathcal{H}^1(A \cap \mathrm{B}(a,r)) > 0$ *(Neboli, a je bodem hustoty A).*
- $\forall \beta > 0 : \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\mathcal{H}^1(A \cap \mathrm{B}(a,r) \setminus S(a,L,\beta)) = 0.$

Poznámka. Pro představu: pro $\beta > 1$ je $S(a,L,\beta)$ celý prostor, $S(a,L,\frac{\sqrt{2}}{2})$ je dvoustranný kužel svírající od L úhel $\frac{\pi}{4}$.
1-dimenzionální tečný prostor je aproximativním tečným prostorem, jelikož množina $A \cap \mathrm{B}(a,r) \setminus S(a,L,\beta)$ bude pro dost malé r prázdná.

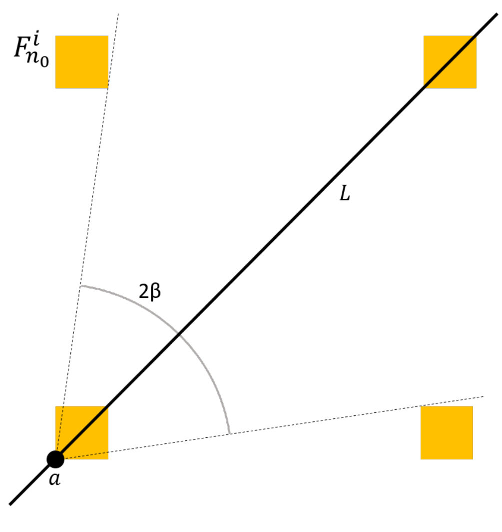
Věta 30 (Pertti Mattila 1995 důsledek 15.20, formulace zjednodušena)**.** *Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^n$ je borelovská splňující $\mathcal{H}^1(E) < \infty$. Pak je E ryze 1-nerektifikovatelná právě tehdy když ve $\mathcal{H}^1$-skoro všech bodech nemá žádný aproximativní tečný prostor.*

Nyní k důkazu tvrzení o naší množině:

Důkaz: Buď $a \in F$ libovolný, L libovolný afinní 1-dimenzionální prostor procházející a. Nejprve ukážeme, že:

Pozorování.
$$\exists \beta > 0 : \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\mathcal{H}^1(F \cap \mathrm{B}(a,r) \setminus S(a,L,\beta)) \neq 0,$$

neboli L není aproximativním tečným prostorem k a.



Obrázek 3.3: Volba úhlu, nakreslena je jen dvou-rozměrná analogie.

Důkaz:

Zvolíme $\beta = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{5}{17}\right)$. Nechť pro spor je

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \mathcal{H}^1(F \cap \mathrm{B}(a,r) \setminus S(a,L,\beta)) = 0.$$

Buď $\epsilon > 0$, najdeme $1 > r_0 > 0$ tak, že

$$\frac{1}{r_0} \mathcal{H}^1(F \cap \mathrm{B}(a,r_0) \setminus S(a,L,\beta)) < \epsilon \, \frac{1}{64\sqrt{3}}.$$

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ označme $F_n^1, \dots, F_n^{\left(8^{n-1}\right)}$ jednotlivé krychle v množině F_n. Nalezneme minimální $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že existuje $i \leq 8^{n_0 - 1}$ tak, aby

$$a \in F_{n_0}^i \subseteq \mathrm{B}(a,r_0).$$

Tedy z minimality

$$\frac{1}{8^{n_0-1}} \sqrt{3} < r_0 < \frac{1}{8^{n_0-2}} \sqrt{3}.$$

r_0 lze případně trochu zmenšit, aby $F \cap B(a,r_0) = F \cap F_{n_0}^i$ Díky volbě β (viz obrázek 3.3, jedná se o dvojnásobek úhlu mezi vektory (7,1,1) a (1,7,1)) se nám nemůže stát, aby kužel $S(a,L,\beta)$ protnul všech osm krychliček z F_{n_0+1} ležící ve $F_{n_0}^i$. Proto, využívajíce translační invarianci Hausdorffovy míry, dostaneme druhou nerovnost:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(F) = 8^{n_0-1} \mathcal{H}^1(F \cap F_{n_0}^i) \leq 8^{n_0-1} \mathcal{H}^1(F \cap \mathrm{B}(a,r_0)) \leq \\ \leq 8^{n_0} \mathcal{H}^1(F \cap \mathrm{B}(a,r_0) \setminus S(a,L,\beta)) < 8^{n_0} \epsilon \, \frac{r_0}{64\sqrt{3}} < 8^{n_0} \epsilon \, \frac{1}{8^{n_0}} = \epsilon. \end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ bylo libovolné, proto $\mathcal{H}^1(F) = 0$, spor. □

Tím jsme ukázali, že F nemá aproximativní tečný prostor nikde.
Použitím věty 30 je tvrzení dokázané.

□

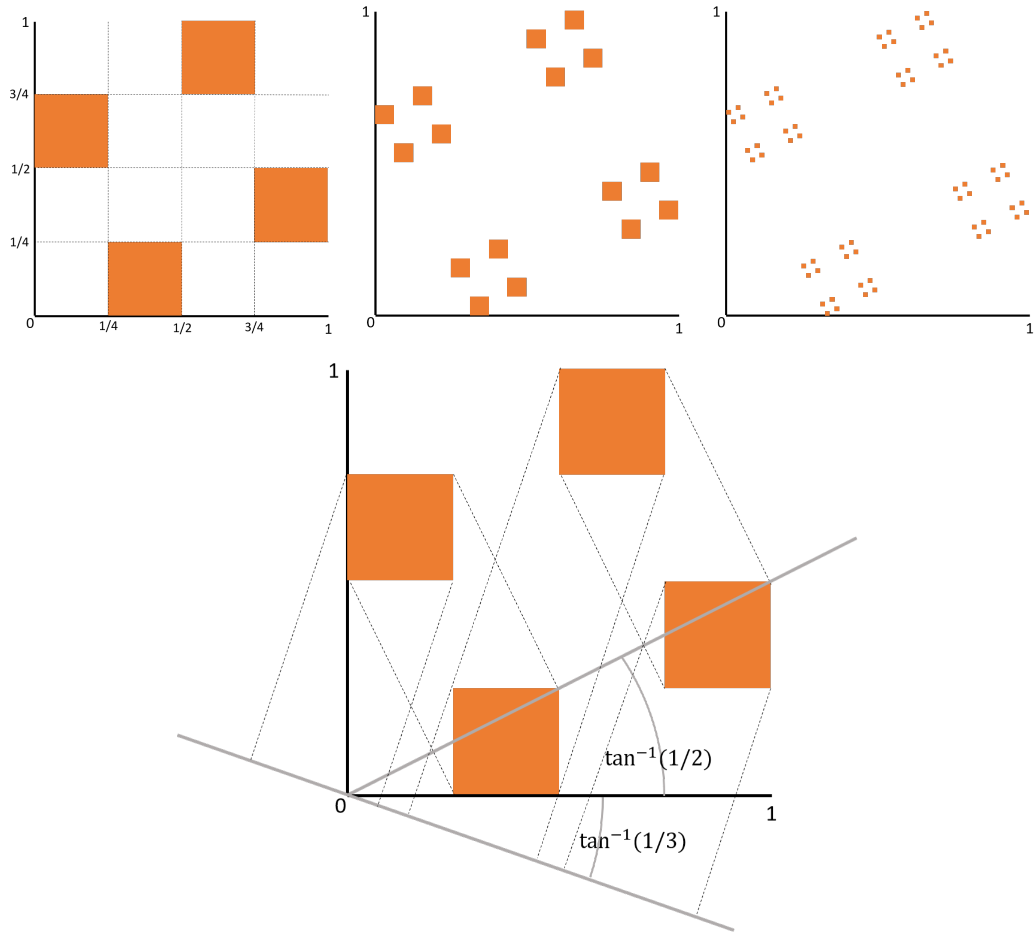
Poznámka. Z knihy Pertti Mattila, 1995 (hned za definicí 15.3) by se mohlo zdát, že lze dokázat ryze 1-nerektifikovatelnost této množiny přímějším způsobem, který ale nevidíme.

3.4 Bestiář množin

Tento oddíl nemá žádný hlubší význam, ale pomůže nám s nabytím intuice.
Příklad. Podobně jako v prvním příkladě uvážíme (jen lehce posunuté):

$$\begin{aligned} & f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \\ & \quad f_1(x) = x/4 + (1/4,0), \\ & \quad f_2(x) = x/4 + (3/4,1/4), \\ & \quad f_3(x) = x/4 + (0,1/2), \\ & \quad f_4(x) = x/4 + (1/2,3/4). \end{aligned}$$

A množinu F pevný bod zobrazení $\cup_{i=1}^{4} f_i$.
Jako G lze zvolit $G = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^2$. Pak podle věty 6 je $dim_{\mathcal{H}}(F) = 1$ silně.



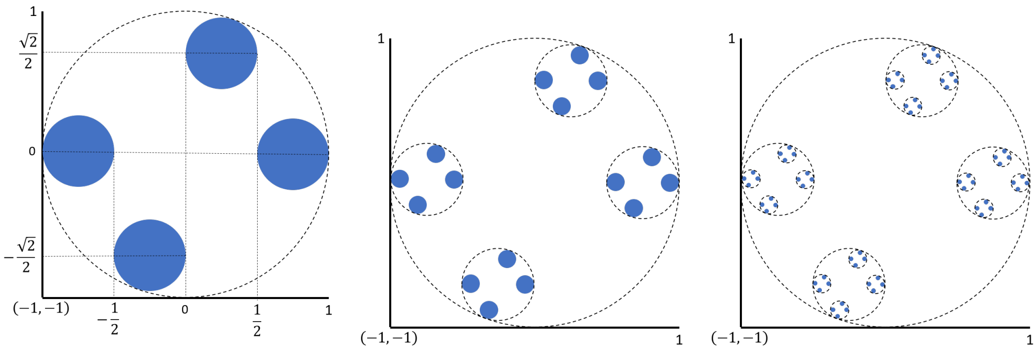
Obrázek 3.4: Náznak konstrukce nakloněného Kantorova prachu a ukázka dvou projekcí s nulovou měrou.

Na obrázku je znázorněná projekce která má Hausdorffovu dimenzi 1/2 (číslo $s \geq 0$ splňující $2\frac{1}{4^s} = 1$) a projekce mající Hausdorffovu dimenzi $\frac{\log(3)}{\log(4)}$ (číslo $s \geq 0$ splňující $3\frac{1}{4^s} = 1$). A to opět stačí k ukázání $\mathcal{F}^1(F) = 0$.

Příklad. Tento příklad je jen na ukázku převzat z Steven Krantz a Harold Parks, 2008, příklad 2.6.1. Jedná se o pevný bod zobrazení f:

$$
\begin{aligned}
f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \\
f_1(x) &= x/4 + (-3/4, 0), \\
f_2(x) &= x/4 + (3/4, 0), \\
f_3(x) &= x/4 + (1/4, \sqrt{2}/2), \\
f_4(x) &= x/4 + (-1/4, -\sqrt{2}/2), \\
f &= \bigcup_{i=1}^{4} f_i.
\end{aligned}
$$

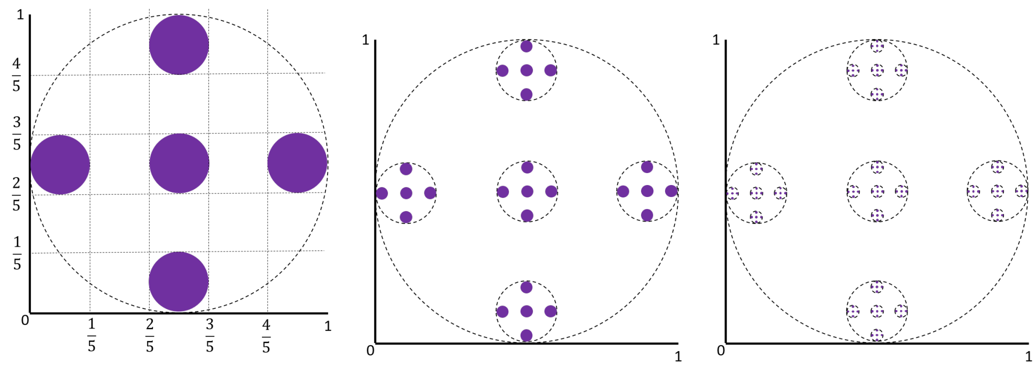
Můžeme si povšimnout, že ačkoliv jednotlivé stupně konstrukce jsou složeny z koulí, výsledná množina (tj. průnik všech jednotlivých stupňů, neboli pevný bod příslušného zobrazení) vyjde stejně, ať už byla počáteční množina koule B(0,1) nebo čtverec $[-1,1]^2$.



Obrázek 3.5: Náznak konstrukce nakloněného čtyř-kulového prachu.

Projekce s nulovou měrou jsou třeba na přímky se směrnicí $-\sqrt{2}$ a $1/\sqrt{2}$.

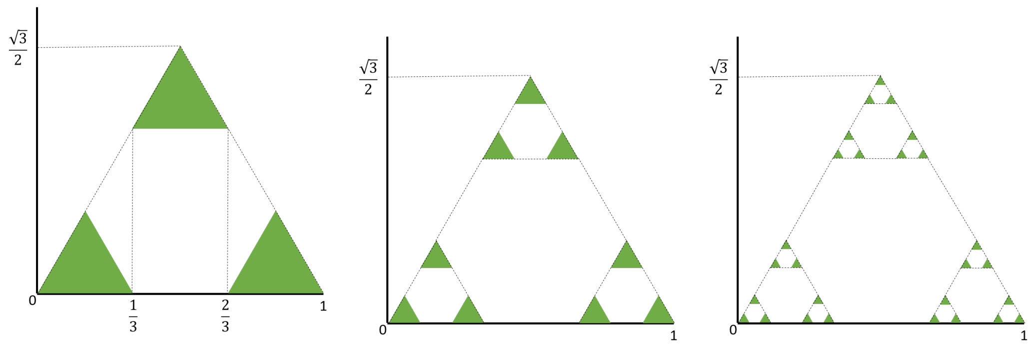
Příklad. Tento příklad je jen lehce inspirován obrázkem 4.2 v Pertti Mattila, 1995.



Obrázek 3.6: Náznak konstrukce pěti-kulového prachu.

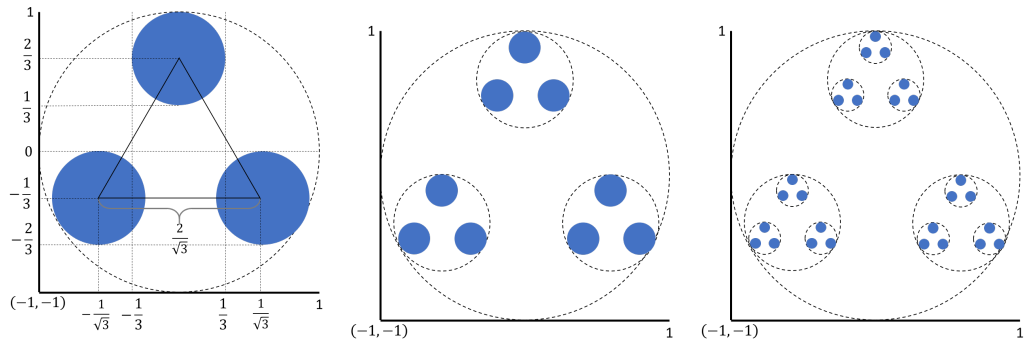
Tentokrát na místo čtyřky máme pětku. Zvolením podobnostního poměru 1/5 zajistíme aby Hausdorffova dimenze byla rovná jedné.
Projekce na souřadné osy mají dimenzi $\frac{\log(3)}{\log(5)}$.

Příklad. Opět postačí definice obrázkem (obrázek 3.7).
Můžeme si všimnout, že projekce na přímky mající úhel $-\pi/6, +\pi/6, \pi/2$ od osy x je přesně Kantorova množina $\mathcal{C}(1/3)$, tedy mají λ^1 míru nulovou.



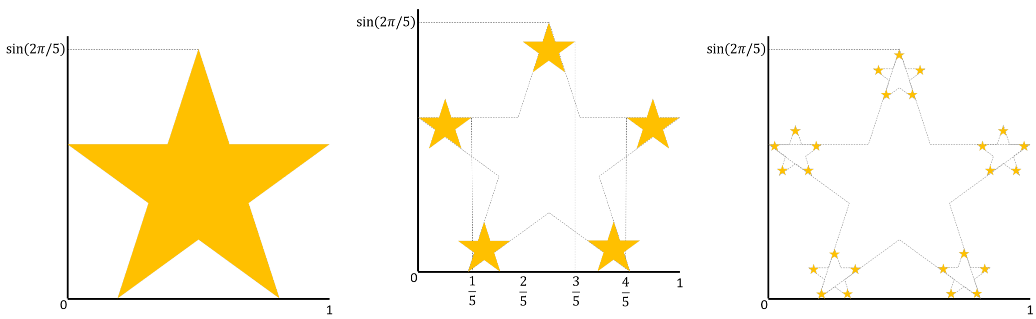
Obrázek 3.7: Náznak konstrukce trojúhelníkového prachu.

Příklad. Konstrukce další množiny sice vypadá jinak, ale až na posun a zmenšení vyjde přesně stejná množina jako v předchozím případě.



Obrázek 3.8: Náznak konstrukce tří-kulového prachu.

Příklad. Následující množina je zajímavá v tom, že jednotlivé iterační kroky, tak jak jsou nakresleny na obrázku, do sebe nejsou zanořené. To ale má za následek, že nemůžeme popsat výslednou množinu pomocí průniků hvězdiček z obrázku. Výslednou množinou ovšem rozumíme stále pevný bod patřičného zobrazení:



Obrázek 3.9: Náznak konstrukce hvězdičkového prachu.

Budeme-li chtít popsat výslednou množinu jako průnik, lze vzít jako počáteční množinu třeba kouli (či cokoliv jiného kompaktního a konvexního) pokrývající naši hvězdičku, ale ne zas moc velkou, aby stále platila podmínka s omezenou otevřenou množinou G.

Seznam použité literatury

Herbert Federer (1996). *Geometric Measure Theory.* Classics in Mathematics. Springer. ISBN 978-3-540-60656-7.

John K. Falconer (1985). *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press. ISBN 0-521-25694-1.

Milton Abramowitz a Irene A. Stegun, editors (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* series 55. National Bureau of Standards Applied Mathematics.

Pertti Mattila (1995). *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces, Fractals and rectifiability.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46576-1.

Steven Krantz a Harold Parks (2008). *Geometric Integration Theory.* Cornerstone. Cambridge University Press. ISBN 978-0-8176-4676-9.

Seznam obrázků