



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Eliška Hálová

Problém čtyř bodů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.

Studijní program: Obecná matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Především bych chtěla poděkovat panu doc. RNDr. Zbyňku Pawlasovi, Ph.D. za cenné připomínky a skvělé vedení práce. Dále děkuji své rodině za veškerou podporu během mého studia. Nakonec bych chtěla poděkovat Filipovi, Lindě a všem svým kamarádům, kteří mi byli morální oporou a každodenním zdrojem radosti.

Název práce: Problém čtyř bodů

Autor: Eliška Hálová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci se věnujeme známé matematické úloze, která nese název *problém čtyř bodů*. Úloha se ptá na pravděpodobnost, že čtyři náhodně zvolené body v rovině utvoří konvexní čtyřúhelník. Jelikož v zadání úlohy není jasně stanoveno rozdělení daných čtyř bodů, nemá úloha jednoznačné řešení. My se v práci zabýváme třemi různými volbami rozdělení bodů, a to spojitým rovnoměrným rozdělením, diskrétním rovnoměrným rozdělením a dvourozměrným normálním rozdělením, přičemž předpokládáme, že body jsou navzájem nezávislé. Pro každé z rozdělení uvádíme detailní řešení problému čtyř bodů a zmiňujeme některé existující výsledky.

Klíčová slova: geometrická pravděpodobnost, rovnoměrné rozdělení, konvexita

Title: Four-point problem

Author: Eliška Hálová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis we analyze a well-known mathematical question known as *the four point problem*. It asks for the probability that four points taken at random in a plane form a convex quadrilateral. Since there is no concrete distribution of the random points stated in the original question, the problem does not have an unequivocal solution. In this work we consider three different probability distributions of the points, namely, continuous uniform distribution, discrete uniform distribution and bivariate normal distribution. Our assumption is that the points are mutually independent. We derive a detailed solution of the four point problem for each of the distributions. Additionally, we state some already existing results.

Keywords: geometrical probability, uniform distribution, convexity

Obsah

Úvod	2
Značení	3
1 Problém při spojitém rovnoměrném rozdělení	4
1.1 Přímý postup	5
1.2 Postup s využitím Croftonova vzorce	9
2 Problém při diskrétním rovnoměrném rozdělení	22
3 Problém při dvourozměrném normálním rozdělení	33
Závěr	41
Seznam použité literatury	42
A Příloha	43

Úvod

Problém čtyř bodů, jehož autorem je matematik James Joseph Sylvester, zní následovně: *Jaká je pravděpodobnost, že čtyři náhodně zvolené body v rovině vytvoří konvexní čtyřúhelník?* Odpověď na tuto otázku vůbec není jednoznačná, problematický je zde výraz „náhodně zvolené body“. Hodnota pravděpodobnosti totiž závisí na tom, s jakým rozdělením se rozhodneme pracovat, případně jaký tvar roviny zvolíme.

Cílem této práce je rigorózní rozbor několika možných řešení daného problému při úvaze rovnoměrného a normálního rozdělení. Jelikož je téma velmi geometricky zaměřené, je práce doplněna mnoha obrázky objasňujícími daný postup.

V kapitole 1 uvažujeme, že čtyři vzájemně nezávislé náhodné body mají spojitě rovnoměrné rozdělení na nějaké konvexní kompaktní množině s kladnou mírou. Ukazujeme, že afinní transformace množiny nemá vliv na výslednou hodnotu pravděpodobnosti utvoření konvexního čtyřúhelníku. V sekci 1.1 uvádíme způsob výpočtu pravděpodobnosti přímo z definice střední hodnoty, tento postup ilustrujeme na množině tvaru čtverce. V sekci 1.2 potom představujeme Croftonův vzorec, s jehož pomocí ukazujeme další možný způsob výpočtu, tentokrát ilustrovaný na množinách tvaru trojúhelníku a kruhu. Zmiňujeme také vzorec odvozený pomocí Croftonova vzorce, díky němuž lze získat hodnotu pravděpodobnosti pro množinu tvaru pravidelného n -úhelníku. Na závěr kapitoly uvádíme tabulku hodnot pravděpodobnosti pro několik vybraných tvarů množiny. Řešení pro množinu tvaru trojúhelníku je převzaté z knihy Solomon (1978), řešení pro množinu tvaru kruhu částečně přebíráme z knihy Kendall a Moran (1963).

V kapitole 2 uvažujeme, že vzájemně nezávislé body mají diskrétní rovnoměrné rozdělení na $m \times n$ síti. V tomto případě musíme brát v úvahu, že pravděpodobnost shody dvou a více bodů je nenulová. Z tohoto důvodu problém čtyř bodů nepatrně modifikujeme. Hledáme pravděpodobnost, že čtyři náhodné body $m \times n$ sítě utvoří konvexní objekt, tj. čtyřúhelník, trojúhelník, úsečku nebo bod. K nalezení takové pravděpodobnosti stačí určit počet všech možných nekonvexních čtyřúhelníků, které lze z bodů sítě utvořit. Pro tuto hodnotu odvozujeme vzorec, pomocí něhož pak dostáváme předpis pro samotnou pravděpodobnost. Na závěr kapitoly uvádíme graf pravděpodobnosti pro vybrané hodnoty m a n .

V kapitole 3 bereme v úvahu, že čtyři vzájemně nezávislé body mají dvourozměrné normální rozdělení. Zde pro výpočet pravděpodobnosti utvoření konvexního čtyřúhelníku využíváme šikvých transformací souřadnic a nezávislosti veličin. Celé řešení přebíráme z článku Blatter (2008) a doplňujeme některé mezikroky.

Značení

Množinu reálných čísel značíme \mathbb{R} , množinu přirozených čísel \mathbb{N} . Množiny obecně značíme velkými písmeny nebo symboly odkazujícími na tvar. Doplněk, hranici, vnitřek a konvexní obal množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ značíme postupně A^C , ∂A , $\text{int}(A)$ a $\text{conv}(A)$. Symbol \subset vždy značí ostrou inkluzi. Charakteristickou funkci množiny A značíme $\mathbb{1}_A$.

Pro lebesgueovskou měřitelnou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ značíme její n -rozměrnou Lebesgueovu míru $\lambda^n(A)$. Borelovskou σ -algebru na \mathbb{R}^n značíme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Obsahem množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme její Lebesgueovu míru $\lambda^n(A)$.

Body značíme velkými písmeny, vektory malými tučnými písmeny a matice velkými tučnými písmeny, například X , \mathbf{x} a \mathbf{A} . Body i vektory vždy uvažujeme sloupcové. Jednotkovou matici typu $n \times n$ značíme \mathbf{I}_n . Euklidovskou normu vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ značíme $\|\mathbf{x}\|$. Vzdáleností dvou bodů $X, Y \in \mathbb{R}^n$ rozumíme $\|X - Y\|$. Vzdálenost dvou neprázdných množin $A, B \subset \mathbb{R}^n$ chápeme jako $\inf\{\|X - Y\| \mid X \in A, Y \in B\}$ a značíme ji $\text{dist}(A, B)$, vzdálenost bodu $X \in \mathbb{R}^n$ od neprázdné množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ chápeme jako vzdálenost množin $\{X\}, A$ a značíme ji $\text{dist}(X, A)$. Determinant matice \mathbf{A} značíme $\det \mathbf{A}$.

Pravděpodobnost značíme \mathbf{P} a střední hodnotu \mathbf{E} . Náhodné veličiny značíme velkými písmeny. Dále značíme $\mathcal{R}(M)$ rovnoměrné rozdělení na množině M a $\mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ dvojrozměrné normální rozdělení s vektorem středních hodnot $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^2$ a kovarianční maticí $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Budeme značit

$$CQ := [\text{zvolené body vytvořily konvexní čtyřúhelník}],$$

$$RQ := [\text{zvolené body vytvořily nekonvexní čtyřúhelník}] = CQ^C$$

z anglického *convex quadrilateral* a *reentrant quadrilateral*, a dále

$$CO := [\text{zvolené body vytvořily konvexní objekt}],$$

$$RO := [\text{zvolené body vytvořily nekonvexní objekt}] = CO^C.$$

Pro čísla $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ značíme $\text{NSD}(a, b)$ jejich největší společný dělitel. Horní celou část čísla $x \in \mathbb{R}$ značíme $\lceil x \rceil$.

1. Problém při spojitém rovnoměrném rozdělení

Nejprve uvažujme, že nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny A, B, C, D reprezentující čtyři náhodně zvolené body mají spojitě rovnoměrné rozdělení. To ale není definováno na celém prostoru \mathbb{R}^2 , budeme tedy uvažovat nějakou konvexní kompaktní podmnožinu $K \subset \mathbb{R}^2$, pro kterou platí $\lambda^2(K) > 0$, načež veličiny A, B, C, D mají rozdělení $\mathcal{R}(K)$.

Pravděpodobnost, že na množině K vytvoří body konvexní čtyřúhelník, lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} P(CQ) &= 1 - P(RQ) \\ &= 1 - P([A \in \Delta_{BCD}] \cup [B \in \Delta_{ACD}] \cup [C \in \Delta_{ABD}] \cup [D \in \Delta_{ABC}]) \\ &= 1 - 4 P(D \in \Delta_{ABC}) = 1 - 4 \frac{E[\lambda^2(\Delta_{ABC})]}{\lambda^2(K)}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

přičemž využíváme toho, že čtyřúhelník je nekonvexní právě tehdy, když se právě jeden z jeho vrcholů nachází uvnitř trojúhelníku utvořeného z vrcholů ostatních, a také geometrické interpretace pravděpodobnosti při rovnoměrném rozdělení.

Pro další úvahy budeme potřebovat následující tvrzení.

Tvrzení 1.1. *Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je invertovatelné afinní zobrazení. Nechť $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ a $\lambda^n(M_2) > 0$. Potom platí*

$$\frac{\lambda^n(f(M_1))}{\lambda^n(f(M_2))} = \frac{\lambda^n(M_1)}{\lambda^n(M_2)}.$$

Důkaz. Invertovatelné afinní zobrazení lze zapsat ve tvaru $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulární matice a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Z vlastností Lebesgueovy míry (Tvrzení A.1) potom dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^n(f(M_1))}{\lambda^n(f(M_2))} &= \frac{\lambda^n(\{\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \mid \mathbf{x} \in M_1\})}{\lambda^n(\{\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} \mid \mathbf{y} \in M_2\})} = \frac{\lambda^n(\{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in M_1\} + \mathbf{b})}{\lambda^n(\{\mathbf{A}\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in M_2\} + \mathbf{b})} \\ &= \frac{\lambda^n(\{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in M_1\})}{\lambda^n(\{\mathbf{A}\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in M_2\})} = \frac{|\det \mathbf{A}| \lambda^n(M_1)}{|\det \mathbf{A}| \lambda^n(M_2)} = \frac{\lambda^n(M_1)}{\lambda^n(M_2)}. \end{aligned}$$

□

Tvrzení 1.1 říká, že invertovatelné afinní zobrazení f zachovává poměry měr množin. Pokud f aplikujeme na množinu K , zjišťujeme ze vzorce (1.1), že pro množinu K a množinu $f(K)$ se pravděpodobnost $P(CQ)$ neliší. Stačí tedy spočítat pravděpodobnost pro jednu určitou množinu K , stejnou pravděpodobnost potom dostaneme pro všechny její invertovatelné afinní transformace. Pokud například spočítáme pravděpodobnost pro množinu tvaru kruhu o poloměru 1, získáváme pravděpodobnost pro všechny množiny tvaru kruhu nebo elipsy.

Dále ukážeme dva různé postupy pro výpočet pravděpodobnosti $P(CQ)$. Můžeme buď postupovat přímo a spočítat pravděpodobnost z definice střední hodnoty, nebo lze využít Croftonův vzorec a podmiňování. Prvním postupem lze dostat výsledek snadno pouze v případě velmi jednoduchých tvarů množin, my zde ukážeme výpočet pro K tvaru čtverce o straně délky 1. Pro složitější tvary se vyplatí použít druhý postup, dokonce z něj lze odvodit vzorec pro libovolný pravidelný n -úhelník.

1.1 Příímý postup

Uvažujme množinu $K \subset \mathbb{R}^2$ tvaru čtverce s vrcholy $(0,0)^\top$, $(0,1)^\top$, $(1,0)^\top$ a $(1,1)^\top$, a označme $A = (X_1, Y_1)^\top$, $B = (X_2, Y_2)^\top$, $C = (X_3, Y_3)^\top$. Potom platí

$$\mathbb{E}[\lambda^2(\Delta_{ABC})] = \iiint_{A \in K} \iiint_{B \in K} \iiint_{C \in K} \frac{1}{(\lambda^2(K))^3} \lambda^2(\Delta_{ABC}) dy_3 dx_3 dy_2 dx_2 dy_1 dx_1. \quad (1.2)$$

Pro další postup potřebujeme následující tvrzení.

Tvrzení 1.2. *Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, $A = (x_1, y_1)^\top$, $B = (x_2, y_2)^\top$, $C = (x_3, y_3)^\top$. Potom pro obsah trojúhelníku Δ_{ABC} platí*

$$\lambda^2(\Delta_{ABC}) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \right|. \quad (1.3)$$

Důkaz. Z lineární algebry víme, že pro obsah rovnoběžníku $\square_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$ určeného vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\lambda^2(\square_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = |\det(\mathbf{u} \mid \mathbf{v})|.$$

Označme $\mathbf{a} = (x_1, y_1)^\top$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)^\top$, $\mathbf{c} = (x_3, y_3)^\top$ vektory reprezentující jednotlivé body, potom dostáváme

$$\begin{aligned} \lambda^2(\Delta_{ABC}) &= \frac{1}{2} \lambda^2(\square_{\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}}) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)| \\ &= \frac{1}{2} |y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)| \\ &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

□

Po dosazení vzorce (1.3) do předpisu (1.2) získáme rovnost

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\lambda^2(\Delta_{ABC})] &= \iiint_{A \in K} \iiint_{B \in K} \iiint_{C \in K} \frac{1}{1^3} \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \right| dy_3 dx_3 dy_2 dx_2 dy_1 dx_1 \\ &= \iiint_{A \in K} \iiint_{B \in K} \iiint_{C \in K} \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \right| dy_3 dx_3 dy_2 dx_2 dy_1 dx_1. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Další postup vyžaduje rozdělení integrace na případy, kdy je determinant matice kladný a kdy záporný. Nejprve definujeme následující pojmy.

Definice 1.1. *Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, $A = (x_1, y_1)^\top$, $B = (x_2, y_2)^\top$, $C = (x_3, y_3)^\top$ a necht' Δ_{ABC} je trojúhelník jimi určený. Řekneme, že trojúhelník Δ_{ABC} je kladně orientovaný, jestliže je determinant*

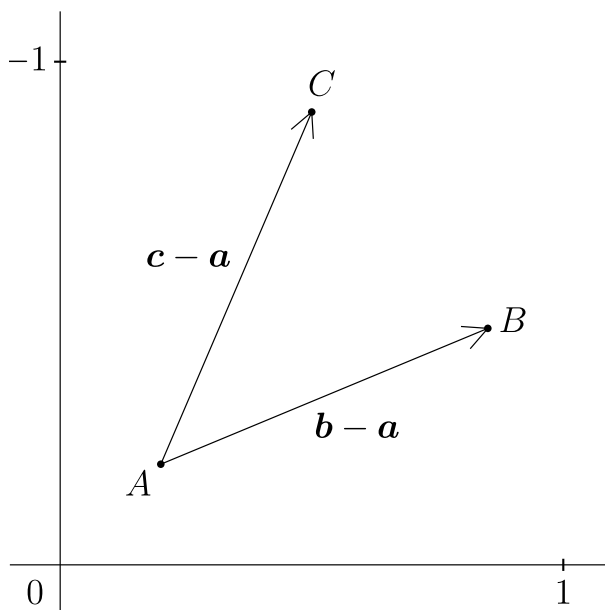
$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

kladný. V opačném případě řekneme, že trojúhelník Δ_{ABC} je záporně orientovaný.

Všimneme si, že trojúhelník Δ_{ABC} je kladně orientovaný právě tehdy, když jsou jeho vrcholy pojmenovány proti směru hodinových ručiček, neboli když vektory $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)^\top$ a $\mathbf{c} - \mathbf{a} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)^\top$ tvoří kladně orientovanou bázi $\{\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}\}$ (viz Obrázek 1.1). Determinant je totiž roven determinantu matice přechodu od báze $\{\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}\}$ ke kanonické bázi, neboli

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \det(\mathbf{b} - \mathbf{a} \mid \mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

Pokud je báze $\{\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}\}$ kladně, resp. záporně orientovaná, je i determinant kladný, resp. záporný.



Obrázek 1.1: Znárodněná situace, kdy $\{\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}\}$ tvoří kladně orientovanou bázi. Vidíme, že se vytvoří trojúhelník s vrcholy pojmenovanými proti směru hodinových ručiček.

Chceme vědět, v jakých případech body A, B, C vytvoří kladně orientovaný trojúhelník, a kdy naopak záporně orientovaný trojúhelník. Rozdělíme si integraci ve vzorci (1.4) na šest případů:

$$\begin{array}{ll} (X1) & x_1 \leq x_2 \leq x_3 & (X4) & x_2 \leq x_3 \leq x_1 \\ (X2) & x_1 \leq x_3 \leq x_2 & (X5) & x_3 \leq x_1 \leq x_2 \\ (X3) & x_2 \leq x_1 \leq x_3 & (X6) & x_3 \leq x_2 \leq x_1 \end{array}$$

Každý ještě rozdělíme na šest podmnožností:

$$\begin{aligned} (Y1) \quad y_1 \leq y_2 \leq y_3 & & (Y4) \quad y_2 \leq y_3 \leq y_1 \\ (Y2) \quad y_1 \leq y_3 \leq y_2 & & (Y5) \quad y_3 \leq y_1 \leq y_2 \\ (Y3) \quad y_2 \leq y_1 \leq y_3 & & (Y6) \quad y_3 \leq y_2 \leq y_1 \end{aligned}$$

Celkem dostáváme 36 různých kombinací nerovností. Stačí ale vyřešit jen případ (X1) a jeho podmnožnosti, ostatní případy dostáváme přejmenováním vrcholů trojúhelníku.

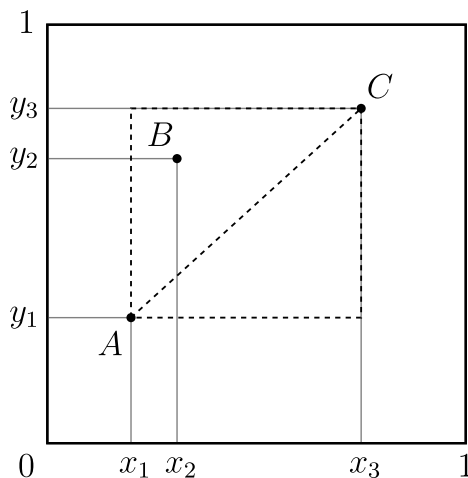
Nejprve vyřešíme případ (X1) a (Y1). Trojúhelník \triangle_{ABC} může být kladně, ale i záporně orientovaný (viz Obrázek 1.2). Kladně orientovaný je tehdy, když se bod B nachází pod úhlopříčkou obdélníku $[x_1, x_3] \times [y_1, y_3]$, v opačném případě je záporně orientovaný. Pro kladně orientovaný trojúhelník dostáváme integrál

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_1}^{x_3} \int_0^1 \int_{y_1}^1 \int_{y_1+(x_2-x_1)\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}}^{y_1} \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} dy_2 dy_3 dy_1 dx_2 dx_3 dx_1 = \\ & = \int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_1}^{x_3} \int_0^1 \int_{y_1}^1 \frac{(x_2-x_1)^2 (y_3-y_1)^2}{4(x_3-x_1)} dy_3 dy_1 dx_2 dx_3 dx_1 \\ & = \int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_1}^{x_3} \int_0^1 \frac{(x_2-x_1)^2 (1-y_1)^3}{12(x_3-x_1)} dy_1 dx_2 dx_3 dx_1 \\ & = \int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_1}^{x_3} \frac{(x_2-x_1)^2}{48(x_3-x_1)} dx_2 dx_3 dx_1 = \int_0^1 \int_{x_1}^1 \frac{(x_3-x_1)^2}{144} dx_3 dx_1 \\ & = \int_0^1 \frac{(1-x_1)^3}{432} dx_1 = \frac{1}{1728}, \end{aligned}$$

pro záporně orientovaný trojúhelník bychom obdobně spočítali integrál

$$\int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_1}^{x_3} \int_0^1 \int_{y_1}^1 \int_{y_1+(x_2-x_1)\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}}^{y_3} -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} dy_2 dy_3 dy_1 dx_2 dx_3 dx_1$$

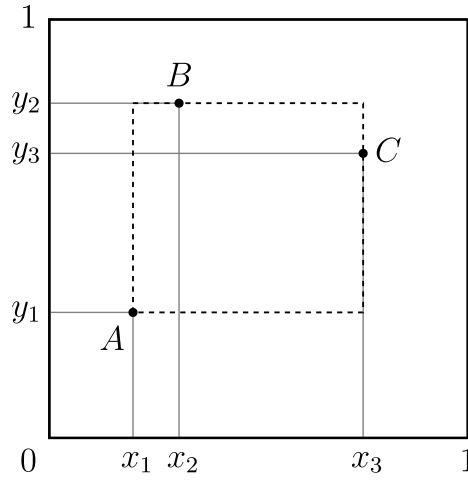
a obdrželi stejný výsledek. Dohromady dostáváme pro případ (X1) a (Y1) hodnotu $2/1728 = 1/864$.



Obrázek 1.2: Znázorněný případ (X1) a (Y1). Bod B se může nacházet nad i pod úhlopříčkou ohraničené oblasti. Podle toho se potom odvíjí znaménko determinantu.

Dále vyřešíme případ (X1) a (Y2). Při této kombinaci je trojúhelník \triangle_{ABC} záporně orientovaný (viz Obrázek 1.3), dostáváme tedy integrál

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_1}^{x_3} \int_0^1 \int_{y_1}^1 \int_{y_1}^{y_2} -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} dy_3 dy_2 dy_1 dx_2 dx_3 dx_1 = \\
& = - \int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_1}^{x_3} \int_0^1 \int_{y_1}^1 \frac{1}{4} (x_1 + x_2 - 2x_3)(y_2 - y_1)^2 dy_2 dy_1 dx_2 dx_3 dx_1 \\
& = - \int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_1}^{x_3} \int_0^1 \frac{1}{12} (x_1 + x_2 - 2x_3)(1 - y_1)^3 dy_1 dx_2 dx_3 dx_1 \\
& = - \int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_1}^{x_3} \frac{1}{48} (x_1 + x_2 - 2x_3) dx_2 dx_3 dx_1 \\
& = - \int_0^1 \int_{x_1}^1 -\frac{1}{32} (x_3 - x_1)^2 dx_3 dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{96} (1 - x_1)^3 dx_1 = \frac{1}{384}.
\end{aligned}$$



Obrázek 1.3: Znázorněný případ (X1) a (Y2). Vidíme, že touto kombinací vzniká záporně orientovaný trojúhelník.

Podobně v případech (X1) a (Y3), (Y4) nebo (Y5) dostáváme hodnotu $1/384$, v případě (X1) a (Y6) pak opět $1/864$. Celkem tedy získáváme

$$\mathbb{E}[\lambda^2(\triangle_{ABC})] = 6 \left(\frac{2}{864} + \frac{4}{384} \right) = \frac{11}{144}.$$

Pravděpodobnost, že body A, B, C, D s rovnoměrným rozdělením na jednotkovém čtverci (a tedy na libovolném rovnoběžníku) utvoří konvexní čtyřúhelník, je potom rovna

$$\mathbb{P}(CQ) = 1 - 4 \mathbb{E}[\lambda^2(\triangle_{ABC})] = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}.$$

Podobný postup lze aplikovat i na množinu K tvaru trojúhelníku, pro jiné tvary je ale přímý postup zbytečně složitý.

1.2 Postup s využitím Croftonova vzorce

V této části budeme využívat Croftonův vzorec. Nejprve uvedeme potřebné definice, následně upravíme verzi vzorce z knihy Solomon (1978, kap. 5) pro náš případ.

Definice 1.2. Řekneme, že funkce $h: \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je symetrická, jestliže pro každé $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$ a každou permutaci π množiny $\{1, \dots, n\}$ platí

$$h(x_1, \dots, x_n) = h(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Definice 1.3. Řekneme, že funkce $h: \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je pozitivně homogenní stupně $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, jestliže pro každé $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$ a $\varrho > 0$ platí

$$h(\varrho x_1, \dots, \varrho x_n) = \varrho^d h(x_1, \dots, x_n).$$

Tvrzení 1.3 (Crofton). Necht $K \subset \mathbb{R}^2$ je konvexní kompaktní množina, která splňuje $\lambda^2(K) > 0$ a $(0, 0)^\top \in \text{int}(K)$. Necht X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na K . Dále uvažujme funkci $h: \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, která je měřitelná, symetrická a pozitivně homogenní stupně 0. Potom pro $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ platí

$$\mathbb{P}(h(X_1, \dots, X_n) \in U) = \mathbb{P}(h(X_1, \dots, X_n) \in U \mid X_1 \in \partial K),$$

přičemž pravděpodobnost $\mathbb{P}(h(X_1, \dots, X_n) \in U \mid X_1 \in \partial K)$ definujeme jako limitu

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(h(X_1, \dots, X_n) \in U \mid X_1 \in K \setminus \varrho K, X_2, \dots, X_n \in \varrho K).$$

Důkaz. Pro $\varrho \in (0, 1)$ uvažujme po dvou disjunktní jevy

$$\begin{aligned} A_\varrho &= [X_1, \dots, X_n \in \varrho K], \\ B_\varrho &= \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} ([X_i \in K \setminus \varrho K] \cap [X_j \in \varrho K \forall j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i]), \\ C_\varrho &= \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} \bigcup_{j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i} [X_i, X_j \in K \setminus \varrho K]. \end{aligned}$$

Z geometrické interpretace pravděpodobnosti a z vlastností Lebesgueovy míry (Tvrzení A.1) dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_\varrho) &= \left(\frac{\lambda^2(\varrho K)}{\lambda^2(K)} \right)^n = \left(\frac{\varrho^2 \lambda^2(K)}{\lambda^2(K)} \right)^n = \varrho^{2n}, \\ \mathbb{P}(B_\varrho) &= \binom{n}{1} \left(1 - \frac{\lambda^2(\varrho K)}{\lambda^2(K)} \right) \left(\frac{\lambda^2(\varrho K)}{\lambda^2(K)} \right)^{n-1} = n(1 - \varrho^2) \varrho^{2(n-1)}, \\ \mathbb{P}(C_\varrho) &= 1 - (\mathbb{P}(A_\varrho) + \mathbb{P}(B_\varrho)) = 1 - \varrho^{2n} - n(1 - \varrho^2) \varrho^{2(n-1)}. \end{aligned}$$

Pro $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ označme $H = [h(X_1, \dots, X_n) \in U]$. Z věty o úplné pravděpodobnosti (Tvrzení A.2) plyne

$$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H \mid A_\varrho) \mathbb{P}(A_\varrho) + \mathbb{P}(H \mid B_\varrho) \mathbb{P}(B_\varrho) + \mathbb{P}(H \mid C_\varrho) \mathbb{P}(C_\varrho).$$

Z předpokladu pozitivní homogenity pro funkci h plyne $P(H) = P(H | A_\varrho)$, tedy

$$P(H) = P(H | B_\varrho) \frac{n(1 - \varrho^2)\varrho^{2(n-1)}}{1 - \varrho^{2n}} + P(H | C_\varrho) \frac{1 - \varrho^{2n} - n(1 - \varrho^2)\varrho^{2(n-1)}}{1 - \varrho^{2n}},$$

neboli

$$P(H) = P(H | B_\varrho) \frac{n\varrho^{2(n-1)}}{1 + \varrho^2 + \dots + \varrho^{2(n-1)}} + P(H | C_\varrho) \left(1 - \frac{n\varrho^{2(n-1)}}{1 + \varrho^2 + \dots + \varrho^{2(n-1)}}\right).$$

Platí

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1^-} \frac{n\varrho^{2(n-1)}}{1 + \varrho^2 + \dots + \varrho^{2(n-1)}} = 1,$$

tedy získáváme $P(H) = \lim_{\varrho \rightarrow 1^-} P(H | B_\varrho)$. Na závěr si uvědomíme, že ze symetrie funkce h platí

$$P(H | B_\varrho) = P(H | X_1 \in K \setminus \varrho K, X_2, \dots, X_n \in \varrho K).$$

□

Díky Tvzení 1.3 můžeme předpokládat, že jeden z bodů A, B, C, D leží na hranici množiny K . Necht se jedná o bod A . Dále podobně jako při odvození rovnosti (1.1) dostáváme

$$\begin{aligned} P(CQ) &= P(CQ | A \in \partial K) = 1 - P(RQ | A \in \partial K) \\ &= 1 - P\left([B \in \Delta_{ACD}] \cup [C \in \Delta_{ABD}] \cup [D \in \Delta_{ABC}] \mid A \in \partial K\right) \\ &= 1 - 3 P(D \in \Delta_{ABC} | A \in \partial K) \\ &= 1 - 3 \frac{E\left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid A \in \partial K\right]}{\lambda^2(K)}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

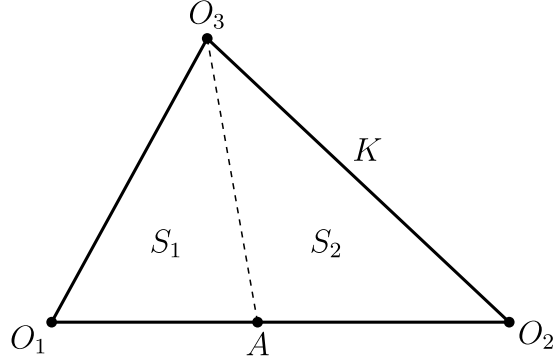
přičemž pro jev H chápeme pravděpodobnost $P(H | A \in \partial K)$ jako limitu

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1^-} P(H | A \in K \setminus \varrho K, B, C, D \in \varrho K),$$

a pro veličinu X chápeme střední hodnotu $E[X | A \in \partial K]$ jako limitu

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1^-} E[X | A \in K \setminus \varrho K, B, C, D \in \varrho K].$$

Ukážeme řešení nejprve pro množinu K tvaru trojúhelníku. Řešení přebíráme z knihy Solomon (1978, str. 101–108) a doplňujeme některé mezikroky. Předpokládáme, že bod A leží na hranici K , množinu pak můžeme rozdělit na dvě podmnožiny podle úsečky spojující A a protilehlý vrchol trojúhelníku. Podmnožiny označíme S_1 a S_2 , vrcholy trojúhelníku K označíme O_1, O_2, O_3 . Vše je znázorněno na Obrázku 1.4.



Obrázek 1.4: Množina K tvaru trojúhelníku rozdělená na dvě podmnožiny S_1, S_2 .

Pokud zafixujeme bod A a označíme střední hodnotu při pevně zvoleném A jako \mathbf{E}_A , můžeme z věty o úplné střední hodnotě (Tvzení A.3) psát

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})] &= \mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_1] \mathbf{P}_A(B, C \in S_1) \\ &\quad + \mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B \in S_1, C \in S_2] \mathbf{P}_A(B \in S_1, C \in S_2) \\ &\quad + \mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B \in S_2, C \in S_1] \mathbf{P}_A(B \in S_2, C \in S_1) \\ &\quad + \mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_2] \mathbf{P}_A(B, C \in S_2), \end{aligned}$$

což je rovno

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_1] \left(\frac{\lambda^2(S_1)}{\lambda^2(K)} \right)^2 \\ &+ 2 \mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B \in S_1, C \in S_2] \frac{\lambda^2(S_1) \lambda^2(S_2)}{(\lambda^2(K))^2} \\ &+ \mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_2] \left(\frac{\lambda^2(S_2)}{\lambda^2(K)} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

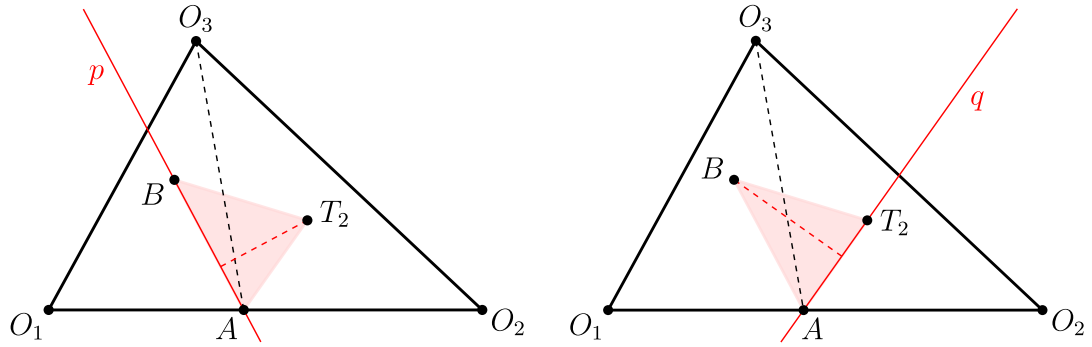
Nejprve spočítáme hodnotu $\mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B \in S_1, C \in S_2]$. Pokud zafixujeme bod $B \in S_1$ a označíme p přímkou procházející body A a B , pak je střední hodnota vzdálenosti přímky p a bodu C rovna vzdálenosti přímky p a těžiště T_2 trojúhelníku S_2 , neboli

$$\mathbf{E}_{A,B} [\text{dist}(C, p)] = \text{dist}(\mathbf{E}_{A,B} C, p) = \text{dist}(T_2, p). \quad (1.7)$$

Zde $\mathbf{E}_{A,B}$ značí střední hodnotu při pevně zvolených bodech A, B . Pro střední hodnotu $\mathbf{E}_{A,B} [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid C \in S_2]$ pak dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{A,B} [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid C \in S_2] &= \frac{1}{2} \|B - A\| \mathbf{E}_{A,B} [\text{dist}(C, p)] \\ &= \frac{1}{2} \|B - A\| \text{dist}(T_2, p) = \lambda^2(\Delta_{ABT_2}) \\ &= \frac{1}{2} \|T_2 - A\| \text{dist}(B, q), \end{aligned}$$

kde q značí přímkou procházející body A a T_2 . Situace je znázorněna na Obrázku 1.5.



(i) Obsah trojúhelníku \triangle_{ABT_2} lze spočítat s využitím vzdálenosti bodu T_2 od přímky p .

(ii) Obsah trojúhelníku \triangle_{ABT_2} lze také spočítat s využitím vzdálenosti bodu B od přímky q .

Obrázek 1.5: Množina K společně s červeně vyznačeným trojúhelníkem \triangle_{ABT_2} . Znázorněny jsou dva různé způsoby výpočtu obsahu trojúhelníku \triangle_{ABT_2} .

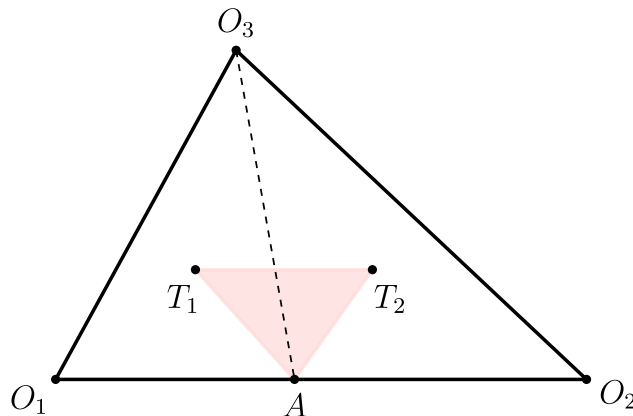
Pokud budeme B opět uvažovat jako náhodnou veličinu, dostaneme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\triangle_{ABC}) \mid B \in S_1, C \in S_2 \right] &= \mathbf{E}_A \left[\mathbf{E}_{A,B} \left[\lambda^2(\triangle_{ABC}) \mid C \in S_2 \right] \right] \\
 &= \mathbf{E}_A \left[\frac{1}{2} \|T_2 - A\| \text{dist}(B, q) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \|T_2 - A\| \text{dist}(T_1, q) \\
 &= \lambda^2(\triangle_{AT_1T_2}), \tag{1.8}
 \end{aligned}$$

jelikož obdobně jako při odvození rovnosti (1.7) platí

$$\mathbf{E}_A \left[\text{dist}(B, q) \right] = \text{dist}(\mathbf{E}_A B, q) = \text{dist}(T_1, q).$$

Výsledný trojúhelník $\triangle_{AT_1T_2}$ můžeme vidět na Obrázku 1.6.



Obrázek 1.6: Množina K s vyznačeným trojúhelníkem $\triangle_{AT_1T_2}$.

Dále chceme vyjádřit poměr obsahů trojúhelníku $\triangle_{AT_1T_2}$ a množiny K . Z vlastností těžiště plyne, že strana T_1T_2 trojúhelníku $\triangle_{AT_1T_2}$ je rovnoběžná se stranou O_1O_2 trojúhelníku K , navíc vzdálenost stran T_1T_2 a O_1O_2 je rovna jedné třetině vzdálenosti vrcholu O_3 a strany O_1O_2 . Z Obrázku 1.7 zároveň vidíme, že délka strany T_1T_2 musí odpovídat $1/2$ ze $2/3$ délky strany O_1O_2 . Dostáváme tedy

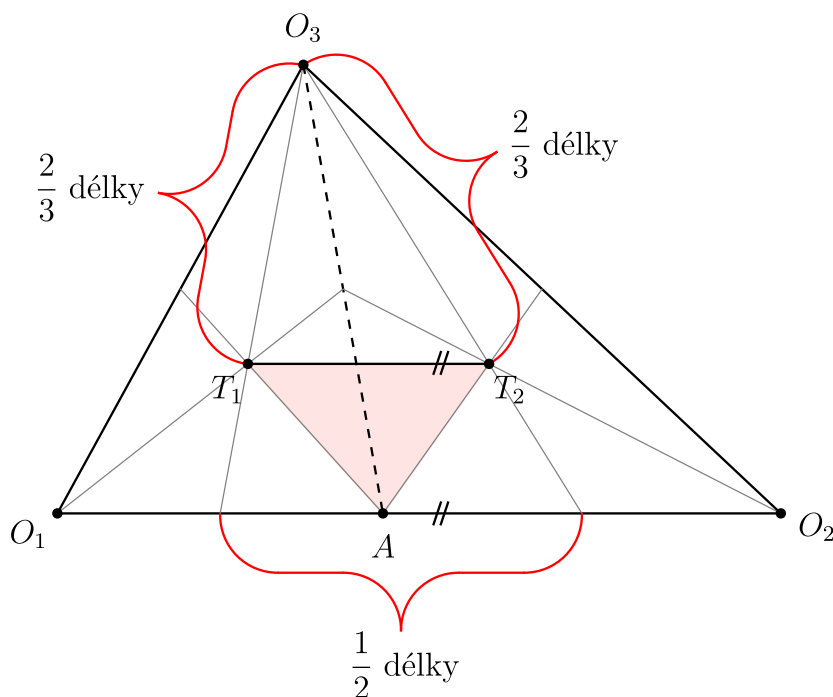
$$\begin{aligned}\lambda^2(\triangle_{AT_1T_2}) &= \frac{1}{2} \text{dist}(T_1T_2, O_1O_2) \|T_2 - T_1\| \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \text{dist}(O_3, O_1O_2) \frac{1}{2} \frac{2}{3} \|O_2 - O_1\| \\ &= \frac{1}{9} \frac{1}{2} \|O_2 - O_1\| \text{dist}(O_3, O_1O_2) = \frac{1}{9} \lambda^2(K),\end{aligned}$$

celkem po dosazení do rovnosti (1.8) získáváme

$$\mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\triangle_{ABC}) \mid B \in S_1, C \in S_2 \right] = \frac{1}{9} \lambda^2(K).$$

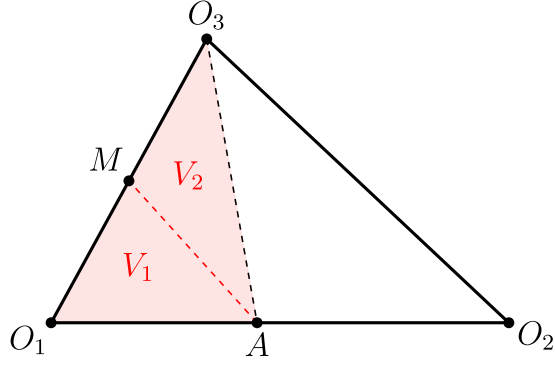
Všimneme si také, že platí

$$\lambda^2(\triangle_{O_3T_1T_2}) = \frac{2}{9} \lambda^2(K).$$



Obrázek 1.7: Trojúhelník K s vyznačenými těžnicemi trojúhelníků S_1 a S_2 , společně s potřebnými vlastnostmi.

Nyní chceme spočítat $\mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\triangle_{ABC}) \mid B, C \in S_1 \right]$. Rozdělíme trojúhelník S_1 na dvě podmnožiny V_1, V_2 podle těžnice spojující střed M strany O_1O_3 a vrchol A . Situaci znázorňuje Obrázek 1.8.



Obrázek 1.8: Rozdělení trojúhelníku S_1 na podmnožiny V_1 a V_2 .

Podobně jako v rozpisu (1.6) dostáváme při předpokladu $B, C \in S_1$ rovnost

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_1 \right] &= \\ &= \mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in V_1 \right] \mathbf{P}(B, C \in V_1) \\ &+ 2 \mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B \in V_1, C \in V_2 \right] \mathbf{P}(B \in V_1, C \in V_2) \\ &+ \mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in V_2 \right] \mathbf{P}(B, C \in V_2), \end{aligned}$$

což lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in V_1 \right] \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ &+ 2 \mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B \in V_1, C \in V_2 \right] \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ &+ \mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in V_2 \right] \left(\frac{1}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

díky tomu, že V_1 a V_2 mají stejný obsah. Z předchozích výpočtů víme, že

$$\mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B \in V_1, C \in V_2 \right] = \frac{2}{9} \lambda^2(S_1),$$

dále stačí uvědomit si, že díky Tvrzení 1.1 platí

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_1 \right]}{\lambda^2(S_1)} &= \frac{\mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in V_i \right]}{\lambda^2(V_i)} \\ &= \frac{\mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in V_i \right]}{\frac{1}{2} \lambda^2(S_1)} \end{aligned}$$

pro $i = 1, 2$, neboli

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_1 \right] &= \mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in V_1 \right] \\ &= \mathbf{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in V_2 \right]. \end{aligned}$$

Po dosazení do rozpisu (1.9) dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_1] &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \mathbb{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_1] \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{9} \lambda^2(S_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbb{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_1] \right), \end{aligned}$$

odkud získáváme

$$\mathbb{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_1] = \frac{4}{27} \lambda^2(S_1).$$

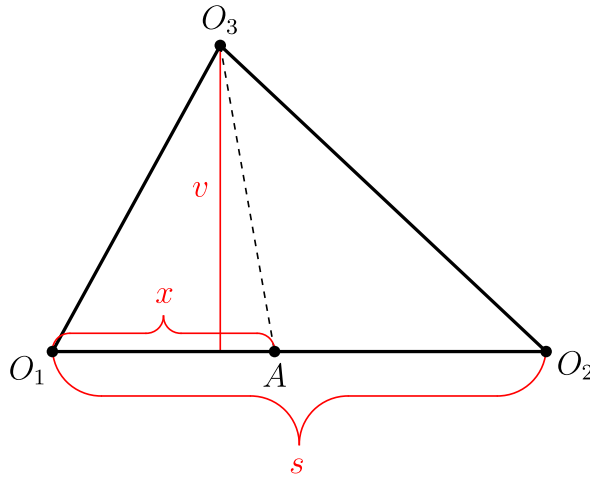
Obdobně bychom spočítali

$$\mathbb{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_2] = \frac{4}{27} \lambda^2(S_2).$$

Všechny výsledky dosadíme do vyjádření (1.6) a dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})] &= \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2(S_1))^3}{(\lambda^2(K))^2} \\ &\quad + \frac{2}{9} \frac{\lambda^2(S_1) \lambda^2(S_2)}{\lambda^2(K)} \\ &\quad + \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2(S_2))^3}{(\lambda^2(K))^2}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Označme s délkou strany O_1O_2 , x vzdálenost bodů O_1 a A , a v vzdálenost vrcholu O_3 a strany O_1O_2 . Situaci znázorňuje Obrázek 1.9.



Obrázek 1.9: Množina K s červeně vyznačenými vzdálenostmi $s = \|O_2 - O_1\|$, $x = \|A - O_1\|$ a $v = \text{dist}(O_3, O_1O_2)$.

Zřejmě platí

$$\lambda^2(K) = \frac{1}{2} sv, \quad \lambda^2(S_1) = \frac{1}{2} xv, \quad \lambda^2(S_2) = \frac{1}{2} (s-x)v.$$

Pokud vše dosadíme do rovnosti (1.10), získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})] &= \frac{4}{27} \frac{1}{2} \frac{v}{s^2} x^3 + \frac{2}{9} \frac{1}{2} \frac{v}{s} x(s-x) + \frac{4}{27} \frac{1}{2} \frac{v}{s^2} (s-x)^3 \\ &= \frac{2v}{27s^2} (x^3 + (s-x)^3) + \frac{v}{9s} x(s-x). \end{aligned}$$

Do této chvíle jsme uvažovali zafixovaný bod A . Nyní budeme opět brát bod A jako náhodnou veličinu. Abychom získali $\mathbf{E} [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid A \in \partial K]$, musíme spočítat střední hodnotu z $\mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})]$, tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid A \in \partial K] &= \mathbf{E} [\mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})]] \\ &= \int_0^s \frac{1}{s} \left(\frac{2v}{27s^2} (x^3 + (s-x)^3) + \frac{v}{9s} x(s-x) \right) dx \\ &= \frac{2v}{27s^3} \left(\int_0^s x^3 dx + \int_s^0 -t^3 dt \right) + \frac{v}{9s^2} \int_0^s (sx - x^2) dx \\ &= \frac{4v}{27s^3} \int_0^s x^3 dx + \frac{v}{9s^2} \int_0^s (sx - x^2) dx \\ &= \frac{v}{27s^3} s^4 + \frac{v}{9s^2} \left(\frac{1}{2} s^3 - \frac{1}{3} s^3 \right) \\ &= \frac{1}{27} sv + \frac{1}{54} sv = \frac{1}{9} \frac{1}{2} sv = \frac{1}{9} \lambda^2(K). \end{aligned}$$

Výsledek dosadíme do rovnosti (1.5), odkud dostaneme

$$\mathbf{P}(CQ) = 1 - 3 \frac{\frac{1}{9} \lambda^2(K)}{\lambda^2(K)} = \frac{2}{3}.$$

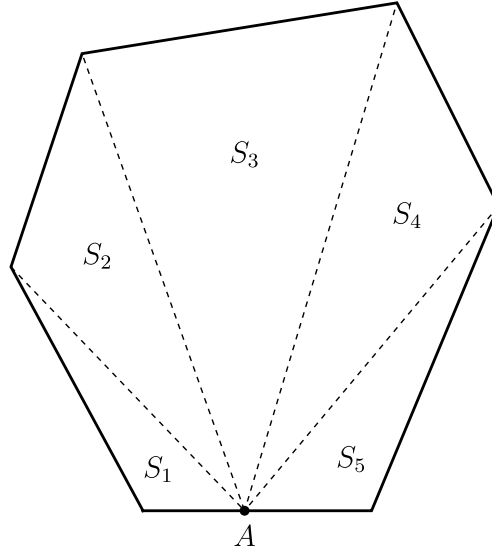
Stejný postup lze aplikovat na K tvaru obecného konvexního n -úhelníku. Nejprve uvažujeme pevně zvolené $A \in \partial K$, podle kterého rozdělíme K na $n-1$ trojúhelníků (viz Obrázek 1.10). Vyjádříme střední hodnotu $\mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})]$ pomocí věty o úplné střední hodnotě (Tvzení A.3) jako

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_i] \mathbf{P}(B, C \in S_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} 2 \mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B \in S_i, C \in S_j] \mathbf{P}(B \in S_i, C \in S_j) \end{aligned}$$

a dopočítáme jednotlivé případy. Střední hodnotu $\mathbf{E} [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid A \in \partial K]$ pak spočítáme jako

$$\mathbf{E} [\mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})]],$$

výsledek nakonec dosadíme do rovnosti (1.5) a získáme $\mathbf{P}(CQ)$.



Obrázek 1.10: Nepravidelný konvexní šestiúhelník rozdělený spojením bodu A na hranici s protilehlými vrcholy na pět trojúhelníků S_1, \dots, S_5 .

Pro K tvaru pravidelného n -úhelníku odvodil finský astronom H. A. Alikoski vzorec

$$P(CQ) = 1 - \frac{9 \cos^2 \phi + 52 \cos \phi + 44}{9 n^2 \sin^2 \phi}, \quad \phi = \frac{2\pi}{n}, \quad (1.11)$$

jeho odvození je možné nalézt v knize Solomon (1978, str. 109–113). Pokud bychom pak chtěli získat pravděpodobnost $P(CQ)$ pro K tvaru kruhu, zřejmě stačí uvažovat

$$\begin{aligned} P(CQ) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{9 \cos^2 \phi + 52 \cos \phi + 44}{9 n^2 \sin^2 \phi} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \cos^2 \phi + 52 \cos \phi + 44}{9 n^2 \sin^2 \phi} \\ &= 1 - \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (9 \cos^2 \phi + 52 \cos \phi + 44)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 9 n^2 \sin^2 \phi} = 1 - \frac{9 \cos^2 0 + 52 \cos 0 + 44}{9 \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin^2 \phi} \\ &= 1 - \frac{105}{9(2\pi)^2} = 1 - \frac{35}{12\pi^2}. \end{aligned}$$

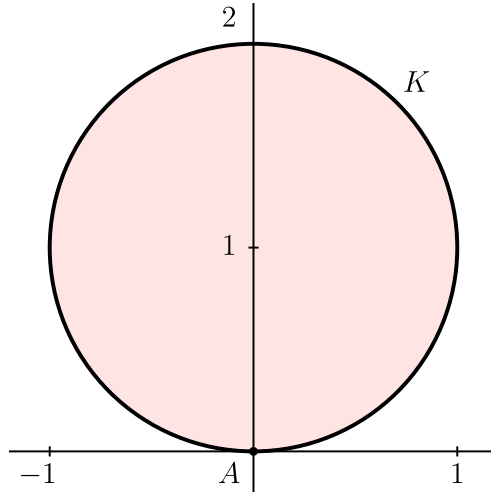
Ukážeme také alternativní řešení pro množinu K tvaru kruhu. Využijeme náznaku řešení z knihy Kendall a Moran (1963, sekce 2.34). Uvažujme tedy

$$K = \left\{ (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 1 \right\}.$$

Opět předpokládáme, že bod A leží na hranici množiny. Všimneme si, že pro libovolné umístění bodu A na hranici dostáváme stejný výsledek. Pro libovolný pevný bod $A \in \partial K$ pak platí

$$\mathbb{E} \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid A \in \partial K \right] = \mathbb{E}_A \left[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \right].$$

Můžeme tedy zvolit $A = (0, 0)^\top$ (viz Obrázek 1.11).



Obrázek 1.11: Množina K tvaru kruhu o poloměru 1 společně s bodem A umístěným do počátku.

Budeme chtít vyjádřit body $B = (X_2, Y_2)^\top$, $C = (X_3, Y_3)^\top$ pomocí polárních souřadnic. Použití klasických polárních souřadnic ale není vhodné. Pokud totiž na náhodnou veličinu s rovnoměrným rozdělením na K a hustotou

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{\{x^2 + (y-1)^2 < 1\}}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

aplikujeme transformaci g_1 s inverzním zobrazením daným předpisem

$$g_1^{-1}(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}, \quad r \in (0, \infty), \phi \in (0, 2\pi),$$

dostáváme transformovanou hustotu tvaru

$$f_1(r, \phi) = \frac{r}{\pi} \mathbb{1}_{(0, 2 \sin \phi) \times (0, \pi)}(r, \phi), \quad r, \phi \in \mathbb{R},$$

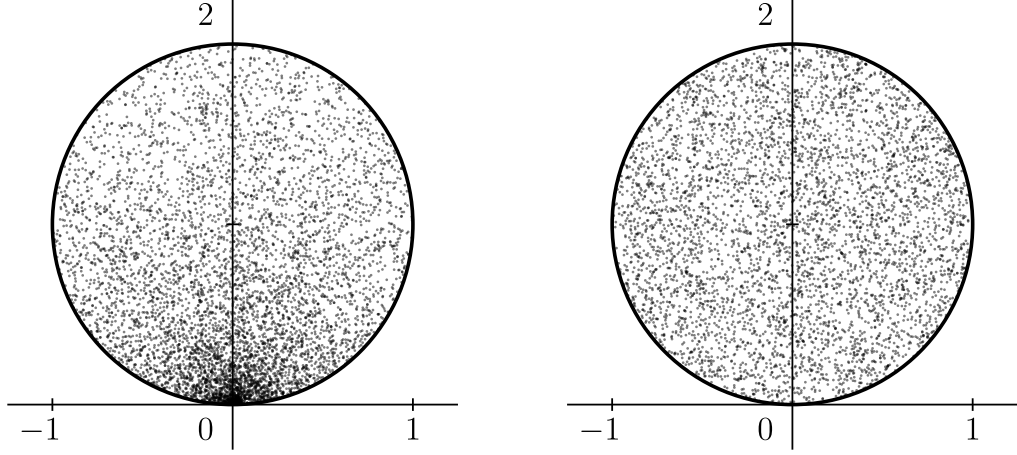
která neodpovídá rovnoměrnému rozdělení. Pokud ale aplikujeme transformaci g_2 s inverzním zobrazením daným předpisem

$$g_2^{-1}(r, \phi) = \begin{pmatrix} \sqrt{r} \cos \phi \\ \sqrt{r} \sin \phi \end{pmatrix}, \quad r \in (0, \infty), \phi \in (0, 2\pi),$$

dostáváme transformovanou hustotu tvaru

$$f_2(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{(0, 4 \sin^2 \phi) \times (0, \pi)}(r, \phi), \quad r, \phi \in \mathbb{R},$$

která již zřejmě odpovídá rovnoměrnému rozdělení, a tuto transformaci tedy můžeme použít. Na Obrázku 1.12 vidíme rozdíl mezi rozdělením klasických a modifikovaných polárních souřadnic.



- (i) Náhodný výběr z rozdělení s hustotou f_1 transformovaný zobrazením g_1 . Vidíme, že body jsou koncentrovány okolo počátku.
- (ii) Náhodný výběr z rozdělení s hustotou f_2 transformovaný zobrazením g_2 . Body jsou zřejmě rovnoměrně rozmístěny.

Obrázek 1.12: Znázorněny jsou dva náhodné výběry z rozdělení klasických a modifikovaných polárních souřadnic.

Použitím modifikovaných polárních souřadnic dostáváme vyjádření

$$B = \left(\sqrt{R_2} \cos \Phi_2, \sqrt{R_2} \sin \Phi_2 \right)^\top \quad \text{a} \quad C = \left(\sqrt{R_3} \cos \Phi_3, \sqrt{R_3} \sin \Phi_3 \right)^\top,$$

kde veličiny R_2, Φ_2, R_3, Φ_3 mají sdruženou hustotu tvaru

$$f_{R_2, \Phi_2, R_3, \Phi_3}(r_2, \phi_2, r_3, \phi_3) = \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{1}_{(0, 4\sin^2 \phi_2) \times (0, \pi)}(r_2, \phi_2) \mathbb{1}_{(0, 4\sin^2 \phi_3) \times (0, \pi)}(r_3, \phi_3)$$

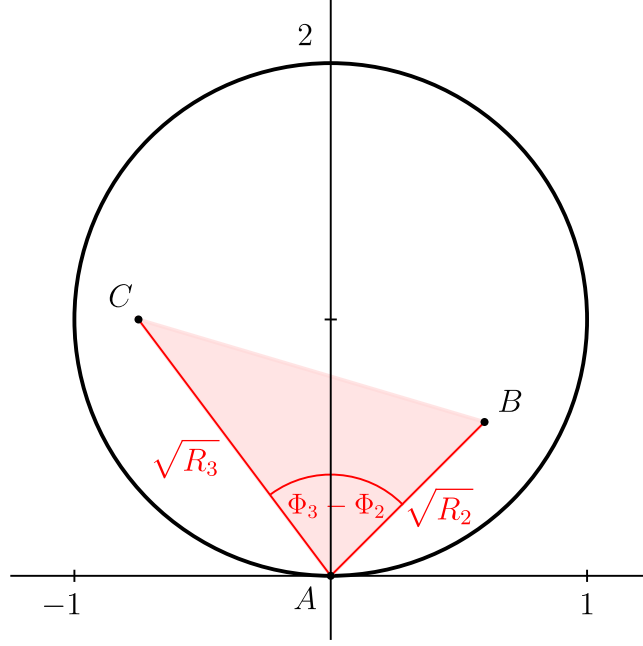
pro $r_2, \phi_2, r_3, \phi_3 \in \mathbb{R}$. Obsah trojúhelníku Δ_{ABC} potom lze vyjádřit jako

$$\lambda^2(\Delta_{ABC}) = \frac{1}{2} \sqrt{R_2} \sqrt{R_3} |\sin(\Phi_3 - \Phi_2)|.$$

Situaci znázorňuje Obrázek 1.13. Celkem tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_A[\lambda^2(\Delta_{ABC})] &= \iint_{B \in \mathbb{R}^2} \iint_{C \in \mathbb{R}^2} f_{R_2, \Phi_2, R_3, \Phi_3}(r_2, \phi_2, r_3, \phi_3) \lambda^2(\Delta_{ABC}) dr_3 d\phi_3 dr_2 d\phi_2 \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{4\sin^2 \phi_2} \int_0^{4\sin^2 \phi_3} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \sqrt{r_2} \sqrt{r_3} |\sin(\phi_3 - \phi_2)| dr_3 dr_2 d\phi_3 d\phi_2 \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{4\sin^2 \phi_2} \int_0^{4\sin^2 \phi_3} \frac{1}{8\pi^2} \sqrt{r_2} \sqrt{r_3} |\sin(\phi_3 - \phi_2)| dr_3 dr_2 d\phi_3 d\phi_2 \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\sin \phi_2} \int_0^{2\sin \phi_3} \frac{1}{8\pi^2} t_2 t_3 |\sin(\phi_3 - \phi_2)| 2t_2 2t_3 dt_3 dt_2 d\phi_3 d\phi_2 \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\sin \phi_2} \int_0^{2\sin \phi_3} \frac{1}{2\pi^2} t_2^2 t_3^2 |\sin(\phi_3 - \phi_2)| dt_3 dt_2 d\phi_3 d\phi_2, \end{aligned} \quad (1.12)$$

kde jsme ve čtvrté rovnosti použili substituci $t_2 = \sqrt{r_2}$ a $t_3 = \sqrt{r_3}$.



Obrázek 1.13: Množina K s vyznačenými body A, B, C a příslušnými veličinami.

Po vyjádření

$$\int_0^{2 \sin \phi} t^2 dt = \frac{8}{3} \sin^3 \phi$$

a dosazení do rovnosti (1.12) získáváme

$$\mathbb{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})] = \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{32}{9\pi^2} \sin^3 \phi_2 \sin^3 \phi_3 |\sin(\phi_3 - \phi_2)| d\phi_3 d\phi_2.$$

Všimneme si, že pro $\phi_2 < \phi_3$ je $\sin(\phi_3 - \phi_2) > 0$, pro $\phi_2 > \phi_3$ naopak platí $\sin(\phi_3 - \phi_2) < 0$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})] &= \int_0^\pi \int_0^{\phi_2} \frac{32}{9\pi^2} \sin^3 \phi_2 \sin^3 \phi_3 (-\sin(\phi_3 - \phi_2)) d\phi_3 d\phi_2 \\ &\quad + \int_0^\pi \int_{\phi_2}^\pi \frac{32}{9\pi^2} \sin^3 \phi_2 \sin^3 \phi_3 \sin(\phi_3 - \phi_2) d\phi_3 d\phi_2 \\ &= 2 \int_0^\pi \int_{\phi_2}^\pi \frac{32}{9\pi^2} \sin^3 \phi_2 \sin^3 \phi_3 \sin(\phi_3 - \phi_2) d\phi_3 d\phi_2 \\ &= \frac{64}{9\pi^2} \int_0^\pi \int_{\phi_2}^\pi \sin^3 \phi_2 \sin^3 \phi_3 \sin(\phi_3 - \phi_2) d\phi_3 d\phi_2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Platí

$$\begin{aligned} &\int_{\phi_2}^\pi \sin^3 \phi_3 \sin(\phi_3 - \phi_2) d\phi_3 = \\ &= \int_{\phi_2}^\pi \frac{1}{8} (\cos(4\phi_3 - \phi_2) - 3 \cos(2\phi_3 - \phi_2) - \cos(2\phi_3 + \phi_2) + 3 \cos \phi_2) d\phi_3 \\ &= \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{4} (\sin 3\phi_2 + \sin \phi_2) + 3 \sin \phi_2 + \frac{1}{2} (\sin 3\phi_2 - \sin \phi_2) + 3(\pi - \phi_2) \cos \phi_2 \right) \\ &= \frac{1}{32} (\sin 3\phi_2 + 9 \sin \phi_2 + 12(\pi - \phi_2) \cos \phi_2), \end{aligned}$$

a dále

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^3 \phi_2 \frac{1}{32} (\sin 3\phi_2 + 9 \sin \phi_2 + 12(\pi - \phi_2) \cos \phi_2) d\phi_2 &= \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{32} (9 \sin^4 \phi_2 + \sin 3\phi_2 \sin^3 \phi_2 + 12(\pi - \phi_2) \sin^3 \phi_2 \cos \phi_2) d\phi_2 \\ &= \frac{1}{32} \left(\frac{27\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \frac{36\pi}{32} \right) = \frac{35\pi}{256}. \end{aligned}$$

Po dosazení do vyjádření (1.13) dostáváme

$$\mathbb{E} [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid A \in \partial K] = \mathbb{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})] = \frac{64}{9\pi^2} \frac{35\pi}{256} = \frac{35}{36\pi},$$

dosazením do vzorce (1.5) pak získáváme

$$P(CQ) = 1 - 3 \frac{35}{36\pi^2} = 1 - \frac{35}{12\pi^2}.$$

Na závěr uvedeme pravděpodobnost $P(CQ)$ pro několik vybraných tvarů množiny K (viz Tabulka 1.1).

	Trojúhelník	Čtverec	Pětiúhelník	Šestiúhelník	Kruh
$P(CQ)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{36-2\sqrt{5}}{45}$	$\frac{683}{972}$	$1 - \frac{35}{12\pi^2}$
\doteq	0.667	0.694	0.701	0.703	0.704

Tabulka 1.1: Pravděpodobnost $P(CQ)$ pro vybrané tvary množiny K .

Můžeme si všimnout, že s přibývajícimi vrcholy pravidelného n -úhelníku se pravděpodobnost $P(CQ)$ zvětšuje. To plyne z toho, že funkce ve vzorci (1.11) je ostře rostoucí. Nakonec, rakouský matematik W. Blaschke dokázal platnost následujícího tvrzení, které se neomezuje na pravidelné n -úhelníky.

Tvrzení 1.4. *Nechť K je konvexní kompaktní podmnožina \mathbb{R}^2 splňující $\lambda^2(K) > 0$. Označme $P_K(CQ)$ pravděpodobnost, že čtyři nezávislé stejně rozdělené náhodné body s rozdělením $\mathcal{R}(K)$ utvoří konvexní čtyřúhelník. Potom platí*

- $P_K(CQ) \geq P_\Delta(CQ)$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když je K tvaru trojúhelníku,
- $P_K(CQ) \leq P_\circ(CQ)$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když je K tvaru kruhu nebo elipsy.

Důkaz. Pfeifer (1989, sekce 3)

□

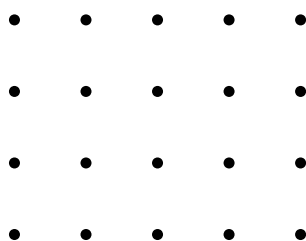
2. Problém při diskretním rovnoměrném rozdělení

V této kapitole se budeme zabývat problémem čtyř bodů při diskretním rovnoměrném rozdělení. Nejprve ale musíme zavést několik pojmů.

Definice 2.1. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ definujeme $m \times n$ síť jako množinu

$$\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \{1, \dots, m\}, y \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Pro $m = n = 1$ je 1×1 síť zřejmě množina obsahující pouze bod $(1, 1)^\top$. Příklad 5×4 sítě můžeme vidět na Obrázku 2.1.



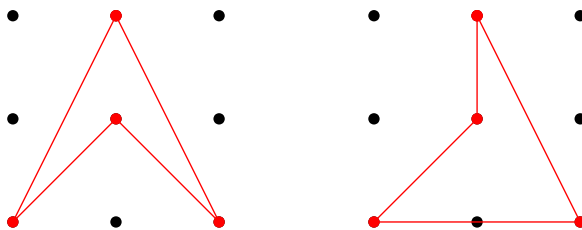
Obrázek 2.1: Ukázka 5×4 sítě.

Definice 2.2. Nechť K je $m \times n$ síť a body A, B, C, D leží na síti K . Řekneme, že body A, B, C, D vytvořily nekonvexní objekt, jestliže platí

$$\exists X \in \{A, B, C, D\}: X \in \text{int}\left(\text{conv}\left(\{A, B, C, D\}\right)\right).$$

V opačném případě řekneme, že A, B, C, D vytvořily konvexní objekt.

Je dobré si uvědomit, že při vytvoření nekonvexního objektu nezáleží na tom, jakým způsobem mezi body položíme strany. Záleží pouze na dané kombinaci bodů. Znázorňuje to Obrázek 2.2.



Obrázek 2.2: Vidíme dva různé způsoby umístění stran mezi body 3×3 sítě. Ačkoliv se výsledné čtyřúhelníky liší, jde o stejnou kombinaci bodů, jedná se tedy o tentýž nekonvexní objekt.

Uvažujme nyní $m \times n$ síť K a nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny A, B, C, D s rozdělením $\mathcal{R}(K)$. Jak napovídá předchozí definice, nebudeme hledat odpověď k původnímu problému čtyř bodů, ale k jeho následující modifikované formě:

Jaká je pravděpodobnost, že body A, B, C, D na síti K vytvoří konvexní objekt?

Zřejmě se totiž může stát, že některé z bodů budou totožné, případně že budou ležet na jedné přímce. Tyto jevy mají při spojitém rovnoměrném rozdělení nulovou pravděpodobnost, při diskrétním rovnoměrném rozdělení tomu tak již není.

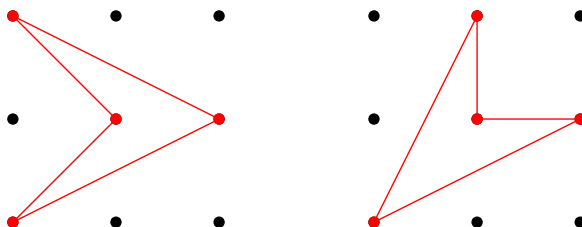
Pravděpodobnost, že na $m \times n$ síti vytvoří body konvexní objekt, lze vyjádřit jako

$$P(CO) = 1 - P(RO) = 1 - \frac{24 S_{m \times n}}{(mn)^4},$$

kde $S_{m \times n}$ značí počet všech různých nekonvexních objektů v $m \times n$ síti vytvořených body A, B, C, D bez ohledu na pojmenování vrcholů. Číslo $24 = 4!$ pak reprezentuje počet všech způsobů, kterými lze ve čtyřúhelníku vrcholy pojmenovat. Pro získání pravděpodobnosti tedy zřejmě stačí určit hodnotu $S_{m \times n}$.

Pokud m nebo n nabývá hodnoty 1 nebo 2, zřejmě platí $S_{m \times n} = 0$, tedy $P(CO) = 1$. Pro $m = n = 3$ již nacházíme celkem osm kombinací bodů tvořících nekonvexní objekt (viz Obrázek 2.3), neboli $S_{3 \times 3} = 8$, odkud potom

$$P(CO) = 1 - \frac{24 S_{3 \times 3}}{9^4} = \frac{2123}{2187} \doteq 0.971.$$



Obrázek 2.3: Znázorněny jsou jediné dvě kombinace bodů (až na rotaci) ve 3×3 síti, které vytvoří nekonvexní objekt.

Pro obecná $m, n > 2$ odvodíme vzorec pro výpočet $S_{m \times n}$. Nejprve ale definujeme potřebné pojmy.

Definice 2.3. *Nechť K je $m \times n$ síť. Uvažujme objekt na síti K tvořený body $(x_1, y_1)^\top, \dots, (x_k, y_k)^\top \in K$, $k \in \mathbb{N}$. Definujeme šířku objektu jako*

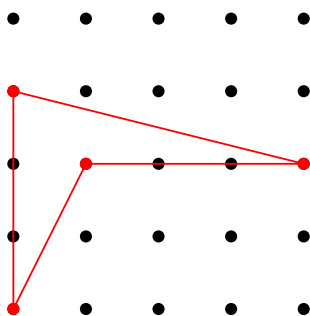
$$\max \left\{ |x_i - x_j| + 1 \mid i, j \in \{1, \dots, k\} \right\},$$

a výšku objektu jako

$$\max \left\{ |y_i - y_j| + 1 \mid i, j \in \{1, \dots, k\} \right\}.$$

Každý nekonvexní objekt na $m \times n$ síti má nějakou šířku $s \in \{3, \dots, m\}$ a výšku $v \in \{3, \dots, n\}$ (viz Obrázek 2.4). Projdeme postupně všechny hodnoty s, v a určíme, kolik nekonvexních objektů se šířkou s a výškou v se v $m \times n$ síti

nachází. K tomu zřejmě stačí určit, kolik nekonvexních objektů se šířkou s a výškou v se nachází v $s \times v$ síti, a příslušné číslo potom vynásobit počtem možných umístění $s \times v$ sítě do $m \times n$ sítě.



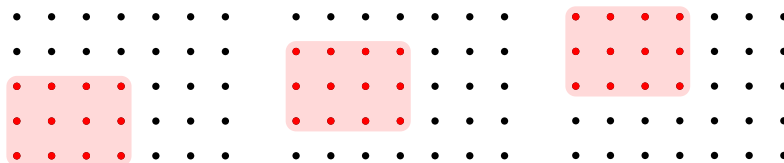
Obrázek 2.4: Nekonavní objekt v 5×5 síti, jehož šířka je 5 a výška 4.

Označme tedy $B_{s \times v}$ počet všech nekonvexních objektů v $s \times v$ síti, které mají šířku s a výšku v , a $a_{s \times v}$ počet všech možných umístění $s \times v$ sítě do $m \times n$ sítě. Celkem dostáváme

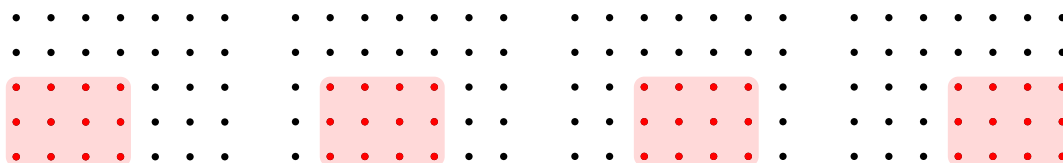
$$S_{m \times n} = \sum_{s=3}^m \sum_{v=3}^n a_{s \times v} B_{s \times v}.$$

Nejprve určíme hodnotu $a_{s \times v}$. Pokud umístíme $s \times v$ síť do levého dolního rohu $m \times n$ sítě, můžeme ji zřejmě $(m - s)$ -krát posunout o jeden bod doprava a $(n - v)$ -krát o jeden bod nahoru (viz Obrázek 2.5). Dohromady pak

$$a_{s \times v} = (m - s + 1)(n - v + 1), \quad s \in \{3, \dots, m\}, v \in \{3, \dots, n\}.$$



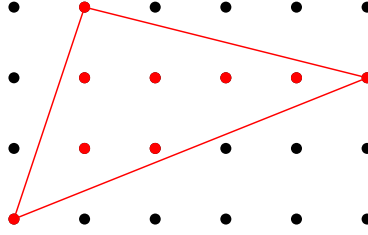
(i) Posun 4×3 sítě ve vertikálním směru.



(ii) Posun 4×3 sítě v horizontálním směru.

Obrázek 2.5: Ukázka možných vertikálních a horizontálních posunutí 4×3 sítě v 7×5 síti, pokud je počáteční poloha v levém dolním rohu. Dohromady dostáváme $3 \cdot 4 = 12$ možných umístění 4×3 sítě do 7×5 sítě.

Dále chceme určit hodnotu $B_{s \times v}$ pro $s \in \{3, \dots, m\}$ a $v \in \{3, \dots, n\}$. Uvažujme tedy $s \times v$ síť. Hodnotu $B_{s \times v}$ odvodíme tak, že nalezneme všechny trojúhelníky v $s \times v$ síti se šířkou s a výškou v a následně spočítáme body sítě nacházející se uvnitř daných trojúhelníků (viz Obrázek 2.6).



Obrázek 2.6: Tři body na 6×4 síti tvořící trojúhelník se šířkou 6 a výškou 4. Uvnitř trojúhelníku leží 6 bodů, přidáním každého z nich k dané trojici bodů dostáváme 6 různých nekonvexních objektů.

Aby měl trojúhelník v $s \times v$ síti šířku s a výšku v , zřejmě se alespoň jeden z jeho vrcholů musí nacházet v rohu sítě. Necht se jedná o roh $(1, 1)^\top$. Umístění do ostatních rohů získáme případným zrcadlením. Další postup rozdělíme na čtyři možnosti (až na případná zrcadlení) podle polohy zbylých dvou vrcholů trojúhelníku:

- (i) Jako druhý vrchol zvolíme bod $(1, v)^\top$. Třetí vrchol volíme z množiny

$$\{(s, j)^\top \mid j \in \{2, \dots, n-1\}\}.$$

- (ii) Jako druhý vrchol zvolíme bod $(s, 1)^\top$. Třetí vrchol volíme z množiny

$$\{(i, v)^\top \mid i \in \{2, \dots, m-1\}\}.$$

- (iii) Druhý vrchol volíme z množiny $\{(s, j)^\top \mid j \in \{2, \dots, n-1\}\}$, třetí vrchol z množiny $\{(i, v)^\top \mid i \in \{2, \dots, m-1\}\}$.

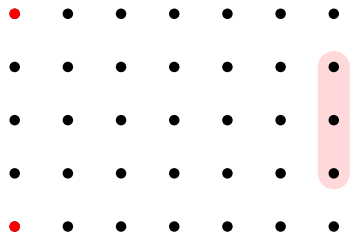
- (iv) Jako druhý vrchol volíme bod $(s, v)^\top$. Třetí vrchol volíme z množiny

$$\left\{ (i, j)^\top \mid i \in \{2, \dots, m\}, j \in \left\{ 1, \dots, \left\lceil (v-1) \frac{(i-1)}{(m-1)} \right\rceil \right\} \right\}.$$

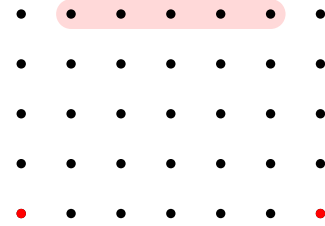
Jednotlivé možnosti můžeme vidět na Obrázku 2.7. Označme postupně $M_{s \times v}^1$, $M_{s \times v}^2$, $M_{s \times v}^3$ a $M_{s \times v}^4$ počet nekonvexních čtyřúhelníků při možnostech (i), (ii), (iii) a (iv). Z Obrázku 2.7 také vidíme, že při možnosti (i) lze každý nekonvexní objekt zrcadlit podle vertikální osy, při možnosti (ii) pak podle horizontální osy. Při možnostech (iii) a (iv) můžeme nekonvexní objekty zrcadlit podle vertikální i horizontální osy. Dohromady tedy dostáváme

$$B_{s \times v} = 2M_{s \times v}^1 + 2M_{s \times v}^2 + 4M_{s \times v}^3 + 4M_{s \times v}^4.$$

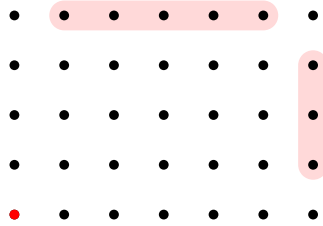
Zbývá určit hodnotu $M_{s \times v}^k$ pro jednotlivá $k = 1, 2, 3, 4$. K výpočtu využijeme vzorec, který odvodil rakouský matematik G. Pick.



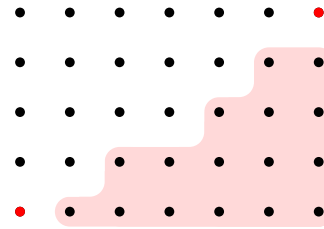
(i) Vyznačené vrcholy $(1, 1)^\top$, $(1, v)^\top$ a množina, ze které vybíráme třetí vrchol.



(ii) Vyznačené vrcholy $(1, 1)^\top$, $(s, 1)^\top$ a množina, ze které vybíráme třetí vrchol.



(iii) Vyznačený vrchol $(1, 1)^\top$ a množiny, ze kterých vybíráme druhý a třetí vrchol.



(iv) Vyznačené vrcholy $(1, 1)^\top$, $(s, v)^\top$ a množina, ze které vybíráme třetí vrchol.

Obrázek 2.7: Jednotlivé možnosti (až na zrcadlení) umístění vrcholů trojúhelníku do 7×5 sítě tak, aby měl trojúhelník šířku 7 a výšku 5.

Tvrzení 2.1 (Pick). *Uvažujme mnohoúhelník M na $m \times n$ síti. Označme u počet bodů sítě, které se nacházejí uvnitř M , a h počet bodů sítě, které leží na některé ze stran mnohoúhelníku M . Potom platí*

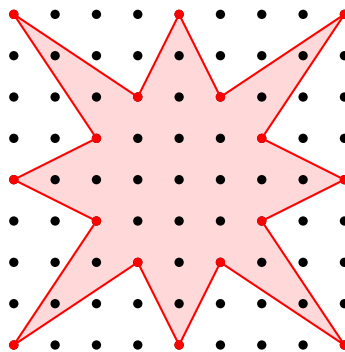
$$\lambda^2(M) = u + \frac{h}{2} - 1.$$

Důkaz. Varberg (1985)

□

Díky Pickovu vzorci lze lehce spočítat obsah složitých mnohoúhelníků. Například na Obrázku 2.8 vidíme mnohoúhelník tvaru hvězdice na 9×9 síti. Na hranici mnohoúhelníku se nachází 16 bodů sítě, uvnitř mnohoúhelníku je pak 25 bodů sítě. Obsah dopočítáme jako

$$25 + \frac{16}{2} - 1 = 32.$$



Obrázek 2.8: Mnohoúhelník tvaru hvězdice tvořený body na 9×9 síti.

Pickův vzorec říká, že počet bodů sítě, které se nacházejí uvnitř trojúhelníku Δ určeného třemi body na síti, je roven

$$u = \lambda^2(\Delta) + 1 - \frac{h}{2}.$$

Tuto rovnost budeme využívat při dalších výpočtech. Potřebujeme také následující tvrzení.

Tvrzení 2.2. *Nechť $(x_1, y_1)^\top, (x_2, y_2)^\top$ jsou body $m \times n$ sítě. Potom úsečka mezi těmito dvěma body obsahuje právě*

$$\text{NSD}(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|) + 1$$

bodů sítě.

Důkaz. Pokud $x_1 = x_2$ nebo $y_1 = y_2$, tvrzení zřejmě platí, jelikož pro libovolné $a \in \mathbb{N}$ je $\text{NSD}(a, 0) = a$, navíc $\text{NSD}(0, 0) = 0$. Nechť tedy $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$, a označme

$$D = \text{NSD}(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|).$$

Uvažujme nejprve $D = 1$. Předpokládejme, že kromě krajních bodů obsahuje úsečka ještě nějaký další bod sítě, označme ho $(c, d)^\top$. Ten můžeme vyjádřit jako

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{i}{K} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

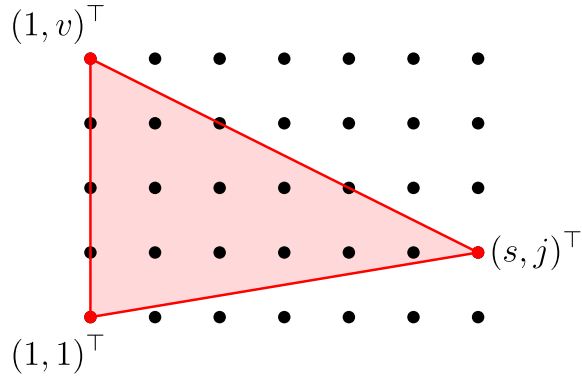
pro nějaké $i \in \{1, \dots, K-1\}$, kde $K = \min\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$. Aby bod $(c, d)^\top$ ležel na síti, musí být $c, d \in \mathbb{N}$, a tedy $\frac{i}{K}(x_2 - x_1), \frac{i}{K}(y_2 - y_1) \in \mathbb{Z}$. To by ale znamenalo, že čísla $|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|$ mají společného dělitele, což je spor s předpokladem nesoudělnosti.

Nyní nechť $D > 1$. Úsečka zřejmě obsahuje všechny body tvaru

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{i}{D} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, D,$$

tedy počet bodů sítě nacházejících se na úsečce je alespoň $D + 1$. Každý další bod sítě ležící na úsečce by se musel nacházet mezi body $(a_i, b_i)^\top, (a_{i+1}, b_{i+1})^\top$ pro nějaké $i \in \{0, \dots, D-1\}$. Hodnoty $|a_{i+1} - a_i|$ a $|b_{i+1} - b_i|$ ale musí být nesoudělné, a tedy z předchozí části se na úsečce mezi body $(a_i, b_i)^\top$ a $(a_{i+1}, b_{i+1})^\top$ žádný další bod sítě nenachází. □

Nyní uvažujme možnost (i) rozložení vrcholů trojúhelníku na $s \times v$ síti. Hledáme hodnotu $M_{s \times v}^1$. Vrcholy trojúhelníku jsou body $(1, 1)^\top, (1, v)^\top$ a $(s, j)^\top$ pro nějaké $j \in \{2, \dots, v-1\}$ (viz Obrázek 2.9).



Obrázek 2.9: Trojúhelník na $s \times v$ síti daný body $(1,1)^\top$, $(1,v)^\top$ a $(s,j)^\top$ pro nějaké $j \in \{2, \dots, v-1\}$.

Obsah trojúhelníku je $\frac{1}{2}(s-1)(v-1)$. Dále potřebujeme zjistit, kolik bodů sítě leží na hranici trojúhelníku, tuto hodnotu označíme h_j^1 . Díky Tvrzení 2.2 víme, že na úsečce mezi body $(1,1)^\top$, $(s,j)^\top$ leží celkem $\text{NSD}(s-1, j-1) + 1$ bodů, na úsečce mezi body $(1,v)^\top$, $(s,j)^\top$ leží celkem $\text{NSD}(s-1, v-j) + 1$ bodů, a na úsečce mezi body $(1,1)^\top$, $(1,v)^\top$ leží zřejmě v bodů. Dohromady

$$h_j^1 = \text{NSD}(s-1, j-1) + \text{NSD}(s-1, v-j) + v - 1.$$

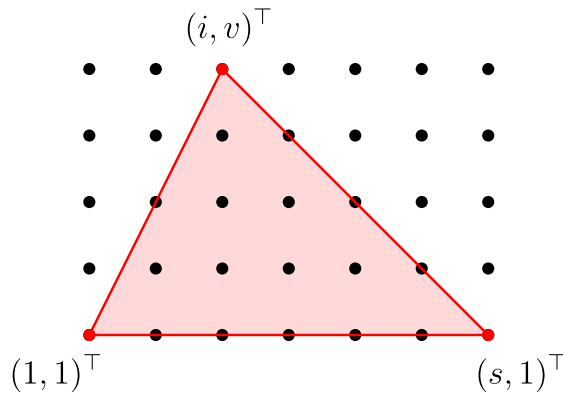
Počet bodů sítě, které leží uvnitř trojúhelníku, potom dle Pickova vzorce spočítáme jako

$$u_j^1 = \frac{1}{2}(s-1)(v-1) + 1 - \frac{h_j^1}{2}.$$

Celkem dostáváme

$$M_{s \times v}^1 = \sum_{j=2}^{v-1} u_j^1.$$

Dále uvažujme možnost (ii) rozložení vrcholů trojúhelníku na $s \times v$ síti. Chceme spočítat hodnotu $M_{s \times v}^2$. Vrcholy trojúhelníku jsou body $(1,1)^\top$, $(s,1)^\top$ a $(i,v)^\top$ pro nějaké $i \in \{2, \dots, s-1\}$ (viz Obrázek 2.10).



Obrázek 2.10: Trojúhelník na $s \times v$ síti daný body $(1,1)^\top$, $(s,1)^\top$ a $(i,v)^\top$ pro nějaké $i \in \{2, \dots, s-1\}$.

Obsah trojúhelníku je opět $\frac{1}{2}(s-1)(v-1)$. Obdobně jako při možnosti (i) odvodíme

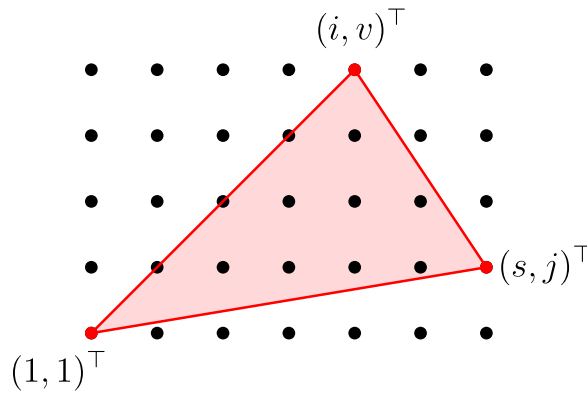
$$h_i^2 = \text{NSD}(i-1, v-1) + \text{NSD}(s-i, v-1) + s-1,$$

$$u_i^2 = \frac{1}{2}(s-1)(v-1) + 1 - \frac{h_i^2}{2}.$$

Celkem dostáváme

$$M_{s \times v}^2 = \sum_{i=2}^s u_i^2.$$

Nyní uvažujme možnost (iii) rozložení vrcholů trojúhelníku na $s \times v$ síti. Hledáme hodnotu $M_{s \times v}^3$. Vrcholy trojúhelníku jsou body $(1, 1)^\top$, $(i, v)^\top$ a $(s, j)^\top$ pro nějaké $i \in \{2, \dots, s-1\}$ a $j \in \{2, \dots, v-1\}$ (viz Obrázek 2.11).



Obrázek 2.11: Trojúhelník na $s \times v$ síti daný body $(1, 1)^\top$, $(i, v)^\top$ a $(s, j)^\top$ pro nějaké $i \in \{2, \dots, s-1\}$ a $j \in \{2, \dots, v-1\}$.

Obsah trojúhelníku získáme tak, že od hodnoty $(s-1)(v-1)$ odečteme obsahy trojúhelníků daných dvěma vrcholy a příslušným rohem sítě. Dostáváme hodnotu

$$(s-1)(v-1) - \left(\frac{1}{2}(s-1)(j-1) + \frac{1}{2}(i-1)(v-1) + \frac{1}{2}(s-i)(v-j) \right).$$

Dále pomocí Tvzení 2.2 spočítáme body na hranici trojúhelníku, tuto hodnotu označíme $h_{i,j}^3$. Platí

$$h_{i,j}^3 = \text{NSD}(s-1, j-1) + \text{NSD}(i-1, v-1) + \text{NSD}(s-1, v-j).$$

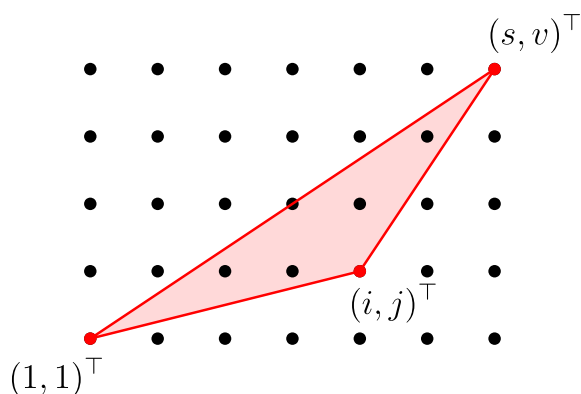
Z Pickova vzorce potom dostáváme

$$u_{i,j}^3 = (s-1)(v-1) - \frac{1}{2} \left((s-1)(j-1) + (i-1)(v-1) + (s-i)(v-j) \right) + 1 - \frac{h_{i,j}^3}{2},$$

a tedy

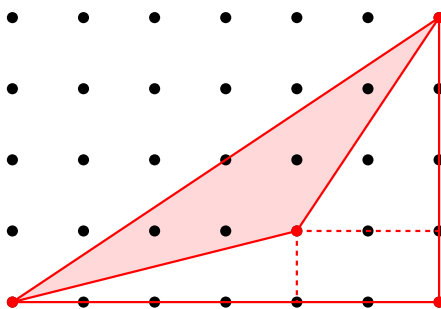
$$M_{s \times v}^3 = \sum_{i=2}^{s-1} \sum_{j=2}^{v-1} u_{i,j}^3.$$

Nakonec uvažujme možnost (iv) rozložení vrcholů trojúhelníku na $s \times v$ síti. Zbývá určit hodnotu $M_{s \times v}^4$. Vrcholy trojúhelníku jsou body $(1, 1)^\top$, $(s, v)^\top$ a $(i, j)^\top$ pro nějaké $i \in \{2, \dots, s\}$ a $j \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor (v-1) \frac{(i-1)}{(m-1)} \right\rfloor \right\}$ (viz Obrázek 2.12).



Obrázek 2.12: Trojúhelník na $s \times v$ síti daný body $(1, 1)^\top$, $(s, v)^\top$ a $(i, j)^\top$ pro nějaké $i \in \{2, \dots, s\}$ a $j \in \left\{1, \dots, \left\lceil (v-1) \frac{(i-1)}{(m-1)} \right\rceil\right\}$.

Obsah trojúhelníku získáme tak, že od hodnoty $\frac{1}{2}(s-1)(v-1)$ odečteme obsah objektu daného vrcholy trojúhelníku a příslušným rohem sítě. Tento objekt lze rozdělit na tři části (viz Obrázek 2.13).



Obrázek 2.13: Trojúhelník společně s objektem daným body $(1, 1)^\top$, $(i, j)^\top$, $(s, v)^\top$ a $(s, 1)^\top$. Ten lze rozdělit na tři části, jejichž obsah již snadno spočítáme.

Obsah trojúhelníku je tedy

$$\frac{1}{2}(s-1)(v-1) - \left(\frac{1}{2}(i-1)(j-1) + \frac{1}{2}(s-i)(v-j) + (s-i)(j-1) \right).$$

Počet bodů na hranici trojúhelníku, který označíme $h_{i,j}^4$, spočítáme díky Tvzení 2.2 jako

$$h_{i,j}^4 = \text{NSD}(s-1, v-1) + \text{NSD}(i-1, j-1) + \text{NSD}(s-i, v-j),$$

z Pickova vzorce potom

$$u_{i,j}^4 = \frac{1}{2}(s-1)(v-1) - \left(\frac{1}{2}(i-1)(j-1) + \frac{1}{2}(s-i)(v-j) + (s-i)(j-1) \right) + 1 - \frac{h_{i,j}^4}{2}.$$

Dohromady

$$M_{s \times v}^4 = \sum_{i=2}^s \sum_{j=1}^{\left\lceil (v-1) \frac{(i-1)}{(m-1)} \right\rceil} u_{i,j}^4.$$

Získali jsme předpis pro všechna $M_{s \times v}^k$, $k = 1, 2, 3, 4$, tedy i vzorec pro výpočet $S_{m \times n}$ pro libovolná $m, n > 2$. Výsledný vzorec pro $m, n \in \mathbb{N}$ má pak tvar

$$S_{m \times n} = \begin{cases} 0, & m \in \{1, 2\} \text{ nebo } n \in \{1, 2\}, \\ \sum_{s=3}^m \sum_{v=3}^n a_{s \times v} B_{s \times v}, & m, n > 2, \end{cases}$$

kde

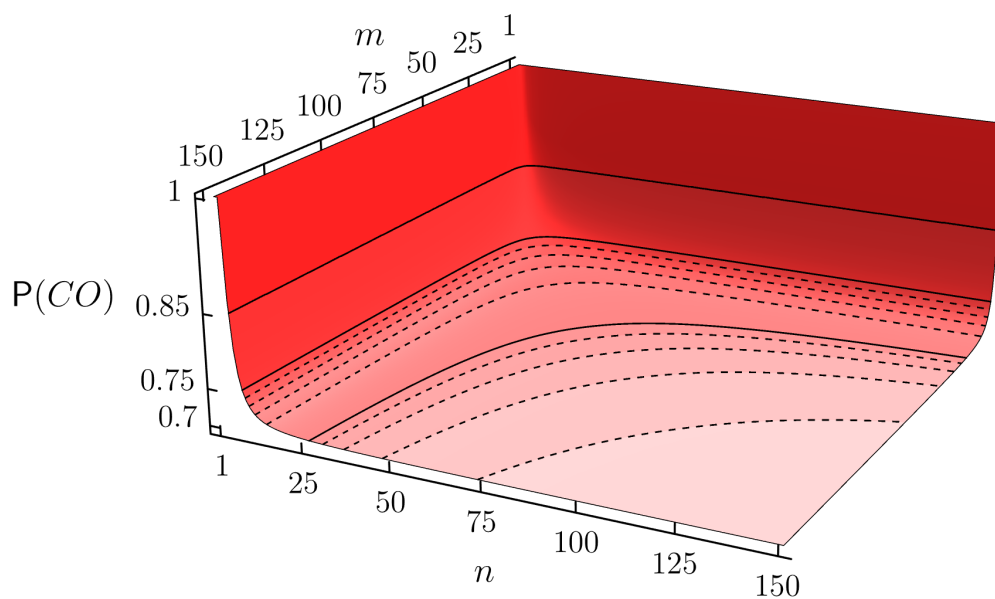
$$a_{s \times v} = (m - s + 1)(n - v + 1), \\ B_{s \times v} = 2 M_{s \times v}^1 + 2 M_{s \times v}^2 + 4 M_{s \times v}^3 + 4 M_{s \times v}^4.$$

Dokážeme tedy spočítat pravděpodobnost $P(CO)$ pro libovolnou $m \times n$ síť. Obrázek 2.14 znázorňuje graf hodnot pravděpodobnosti $P(CO)$ pro $m \times n$ síť, $m, n \in \{1, \dots, 150\}$. Na Obrázku 2.15 pak můžeme vidět kontury grafu.

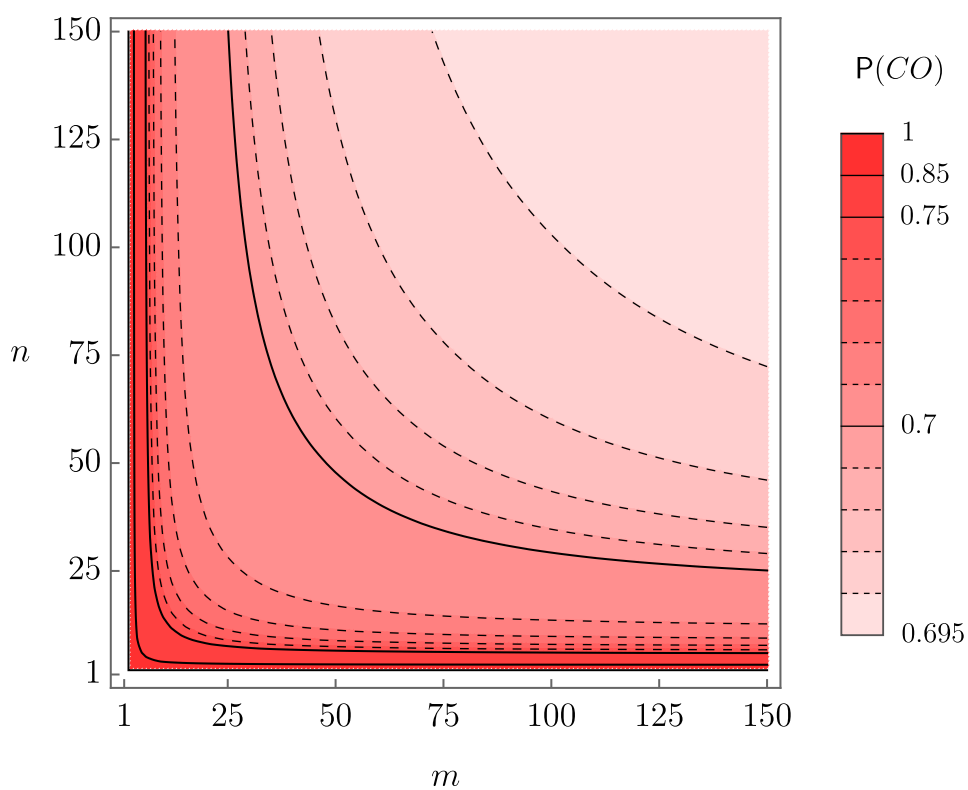
Všimneme si, že s rostoucí dimenzí sítě se pravděpodobnost $P(CO)$ snižuje. Dále se domníváme, že pokud bychom uvažovali $n \times n$ síť, $n \in \mathbb{N}$, pak by se pravděpodobnost $P(CO)$ limitně blížila pravděpodobnosti $P(CQ)$ utvoření konvexního čtyřúhelníku při rovnoměrném rozdělení $\mathcal{R}(K)$ pro množinu K tvaru čtverce. Ta má hodnotu $P(CQ) \doteq 0.694$. V Tabulce 2.1 uvádíme vybrané hodnoty $P(CO)$ pro $n \times n$ síť.

n	3	10	50	100	150
$P(CO) \doteq$	0.9707	0.7656	0.6998	0.6960	0.6952

Tabulka 2.1: Pravděpodobnost $P(CO)$ pro vybrané hodnoty n .



Obrázek 2.14: Graf zobrazující hodnoty pravděpodobnosti $P(CO)$ pro rozměry sítě $m, n \in \{1, \dots, 150\}$. Jednotlivé hodnoty jsou mezi sebou interpolované.



Obrázek 2.15: Na grafu můžeme vidět kontury pravděpodobnosti $P(CO)$ pro hodnoty $m, n \in \{1, \dots, 150\}$.

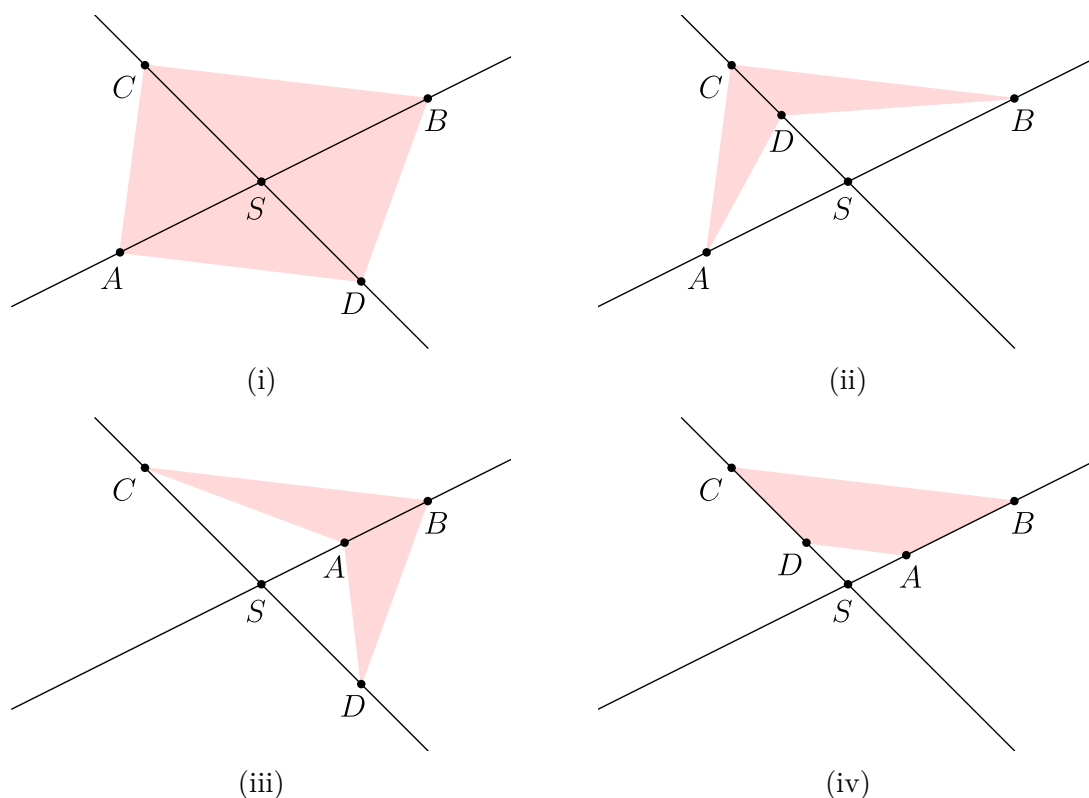
3. Problém při dvourozměrném normálním rozdělení

Nyní uvažujme dvourozměrné normální rozdělení $\mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^2$ je vektor středních hodnot a $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je pozitivně definitní kovarianční matice. Dále mějme nezávislé náhodné veličiny A, B, C, D s rozdělením $\mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ reprezentující jednotlivé body. Opět se ptáme na pravděpodobnost, že body vytvoří konvexní čtyřúhelník, řešení přebíráme ze článku Blatter (2008). Pravděpodobnost znovu značíme $P(CQ)$. Ihned si uvědomíme, že můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_2$.

Označme p přímkou procházející body A, B a q přímkou procházející body C, D . Přímkou p a q se zřejmě s pravděpodobností rovnou jedné protnou, bod průniku označme S . Dále situaci rozdělíme podle polohy bodu S vůči ostatním bodům na čtyři možnosti:

- (i) Bod S leží mezi body A, B i C, D .
- (ii) Bod S leží mezi body A, B , ale neleží mezi body C, D .
- (iii) Bod S neleží mezi body A, B , ale leží mezi body C, D .
- (iv) Bod S neleží mezi body A, B ani C, D .

Na Obrázku 3.1 můžeme vidět, že v případech (i) a (iv) body A, B, C, D tvoří konvexní čtyřúhelník, v případech (ii) a (iii) pak obdržíme nekonvexní čtyřúhelník.



Obrázek 3.1: Čtyři různé možnosti polohy bodu S vůči bodům A, B, C, D .

Pokud označíme

$$\begin{aligned} J_1 &:= [S \text{ leží mezi } A, B], \\ J_2 &:= [S \text{ leží mezi } C, D], \end{aligned}$$

zřejmě pak můžeme pravděpodobnost utvoření konvexního čtyřúhelníku vyjádřit jako

$$\mathbf{P}(CQ) = \mathbf{P}(J_1) \mathbf{P}(J_2) + (1 - \mathbf{P}(J_1))(1 - \mathbf{P}(J_2)). \quad (3.1)$$

Předpokládáme, že body $A = (X_1, Y_1)^\top, B = (X_2, Y_2)^\top$ jsou vzájemně nezávislé a mají rozdělení $\mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \mathbf{I}_2)$. Veličiny X_1, Y_1, X_2, Y_2 jsou tedy vzájemně nezávislé a jejich sdružená hustota má tvar

$$f_{X_1, Y_1, X_2, Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{4\pi^2} \exp \left\{ -\frac{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}{2} \right\}, \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Na vektor $(X_1, Y_1, X_2, Y_2)^\top$ budeme chtít aplikovat transformaci tak, aby byla v nové soustavě souřadnic přímka p rovnoběžná s vertikální osou. Chceme tedy použít rotaci v záporném směru okolo počátku o úhel Φ , který lze vyjádřit jako

$$\Phi = \arg\{X_2 - X_1, Y_2 - Y_1\} - \frac{\pi}{2},$$

kde

$$\arg\{a, b\} = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}, & a > 0, \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi, & a < 0 \text{ a } b \geq 0, \\ \arctan \frac{b}{a} - \pi, & a < 0 \text{ a } b < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0 \text{ a } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0 \text{ a } b < 0, \\ 0, & a = b = 0. \end{cases}$$

Body A, B v nové soustavě souřadnic potom vyjádříme jako

$$A = (U, V_1)^\top \quad \text{a} \quad B = (U, V_2)^\top.$$

Situace je znázorněna na Obrázku 3.2. Můžeme si také všimnout, že v nové soustavě souřadnic platí $V_1 < V_2$ s pravděpodobností rovnou jedné. Označme dále

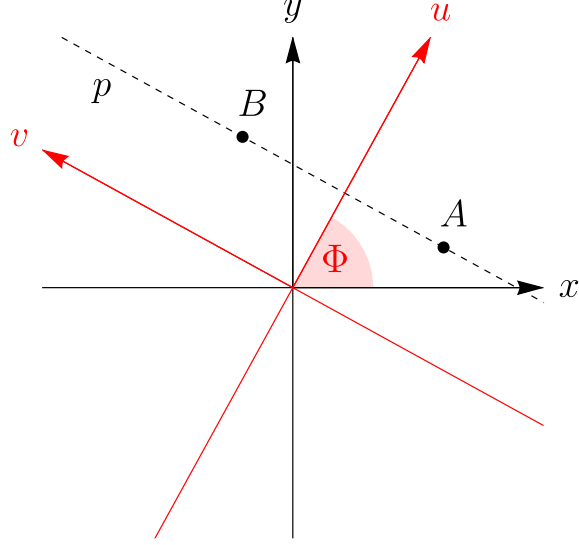
$$\begin{aligned} G &= \mathbb{R}^4 \setminus \left\{ (x_1, y_1, x_2, y_2)^\top \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1, y_1)^\top = (x_2, y_2)^\top \right\}, \\ H &= \left\{ (u, v_1, v_2, \phi)^\top \in \mathbb{R}^4 \mid v_1 < v_2, \phi \in [0, 2\pi) \right\}, \end{aligned}$$

a definujme zobrazení $g: G \rightarrow H$ dané předpisem

$$g(x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cos \phi + y_1 \sin \phi \\ -x_1 \sin \phi + y_1 \cos \phi \\ -x_2 \sin \phi + y_2 \cos \phi \\ \phi \end{pmatrix}, \quad (x_1, y_1, x_2, y_2)^\top \in G,$$

kde

$$\phi = \arg\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\} - \frac{\pi}{2}.$$



Obrázek 3.2: Znáznorněna přímka p určená body A, B společně s osami nové soustavy souřadnic a úhlem Φ .

Zobrazení g je zřejmě bijekce. Inverzní zobrazení g^{-1} je dáno předpisem

$$g^{-1}(u, v_1, v_2, \phi) = \begin{pmatrix} u \cos \phi - v_1 \sin \phi \\ u \sin \phi + v_1 \cos \phi \\ u \cos \phi - v_2 \sin \phi \\ u \sin \phi + v_2 \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (u, v_1, v_2, \phi)^\top \in H.$$

Jakobián zobrazení g^{-1} je tvaru

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & -u \sin \phi - v_1 \cos \phi \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & u \cos \phi - v_1 \sin \phi \\ \cos \phi & 0 & -\sin \phi & -u \sin \phi - v_2 \cos \phi \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & u \cos \phi - v_2 \sin \phi \end{pmatrix} &= \\ = (-1)^{1+2} (-\sin \phi) \det \begin{pmatrix} \sin \phi & 0 & u \cos \phi - v_1 \sin \phi \\ \cos \phi & -\sin \phi & -u \sin \phi - v_2 \cos \phi \\ \sin \phi & \cos \phi & u \cos \phi - v_2 \sin \phi \end{pmatrix} & \\ + (-1)^{2+2} \cos \phi \det \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -u \sin \phi - v_1 \cos \phi \\ \cos \phi & -\sin \phi & -u \sin \phi - v_2 \cos \phi \\ \sin \phi & \cos \phi & u \cos \phi - v_2 \sin \phi \end{pmatrix} & \\ = \sin \phi (u \cos \phi - v_1 \sin \phi + v_2 \sin \phi) + \cos \phi (-u \sin \phi - v_1 \cos \phi + v_2 \cos \phi) & \\ = v_2 - v_1. & \end{aligned}$$

Sdružená hustota veličin U, V_1, V_2, Φ má potom pro $(u, v_1, v_2, \phi)^\top \in \mathbb{R}^4$ tvar

$$\begin{aligned} f_{U, V_1, V_2, \Phi}(u, v_1, v_2, \phi) &= \frac{1}{4\pi^2} \exp \left\{ -\frac{2u^2 + v_1^2 + v_2^2}{2} \right\} (v_2 - v_1) \mathbb{1}_H(u, v_1, v_2, \phi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (v_2 - v_1) e^{-\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_H(u, v_1, v_2, \phi). \end{aligned}$$

Ihned vidíme, že veličiny U, Φ a vektor $(V_1, V_2)^\top$ jsou vzájemně nezávislé.

Stejný postup aplikujeme na body $C = (X_3, Y_3)^\top$ a $D = (X_4, Y_4)^\top$. Rotací v záporném směru okolo počátku o úhel

$$\Psi = \frac{\pi}{2} - \arg\{X_4 - X_3, Y_4 - Y_3\},$$

získáme novou soustavu souřadnic, v níž vyjádříme body C, D jako

$$C = (W, Z_1)^\top \quad \text{a} \quad D = (W, Z_2)^\top.$$

Sdružená hustota veličin W, Z_1, Z_2, Ψ je pak pro $(w, z_1, z_2, \psi)^\top \in \mathbb{R}^4$ tvaru

$$f_{W, Z_1, Z_2, \Psi}(w, z_1, z_2, \psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (z_2 - z_1) e^{-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_M(w, z_1, z_2, \psi),$$

kde

$$M = \left\{ (w, z_1, z_2, \psi)^\top \in \mathbb{R}^4 \mid z_1 < z_2, \psi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Opět vidíme, že veličiny W, Ψ a vektor $(Z_1, Z_2)^\top$ jsou vzájemně nezávislé.

Bod S můžeme v nových soustavách souřadnic vyjádřit jako $(U, V_*)^\top$ a $(W, Z_*)^\top$. Bod S zřejmě leží mezi body A, B právě tehdy, když platí $V_1 < V_* < V_2$, obdobně S leží mezi body C, D právě tehdy, když platí $Z_1 < Z_* < Z_2$. Uvažujme nejprve pevně zvolené $v_* \in \mathbb{R}$. Spočítáme pravděpodobnost jevu $[V_1 < V_* < V_2]$ za podmínky $V_* = v_*$ pomocí hustoty vektoru $(V_1, V_2)^\top$, která má tvar

$$f_{V_1, V_2}(v_1, v_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (v_1 - v_2) e^{-\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}} \mathbb{1}_{\{(v_1, v_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 < v_2\}}(v_1, v_2), \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

Pravděpodobnost spočítáme jako

$$\begin{aligned} P(V_1 < V_* < V_2 \mid V_* = v_*) &= \int_{-\infty}^{v_*} \int_{v_*}^{\infty} f_{V_1, V_2}(v_1, v_2) dv_2 dv_1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{v_*} \int_{v_*}^{\infty} (v_2 - v_1) e^{-\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}} dv_2 dv_1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{v_*} e^{-\frac{v_1^2}{2}} dv_1 \int_{v_*}^{\infty} v_2 e^{-\frac{v_2^2}{2}} dv_2 - \int_{-\infty}^{v_*} v_1 e^{-\frac{v_1^2}{2}} dv_1 \int_{v_*}^{\infty} e^{-\frac{v_2^2}{2}} dv_2 \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{v_*^2}{2}} \int_{-\infty}^{v_*} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + e^{-\frac{v_*^2}{2}} \int_{v_*}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_*^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_*^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v_*^2}{2}}. \end{aligned}$$

Obdobně bychom spočítali

$$P(Z_1 < Z_* < Z_2 \mid Z_* = z_*) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z_*^2}{2}}$$

pro pevně zvolené $z_* \in \mathbb{R}$.

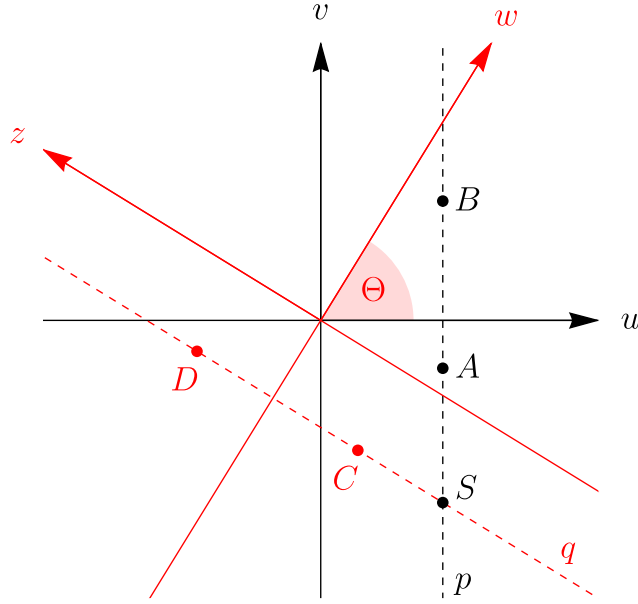
Dále označme $\Theta = \Psi - \Phi$. Tato veličina reprezentuje úhel, který spolu svírají osa u a osa w nových soustav souřadnic (viz Obrázek 3.3). Zřejmě potom platí

$$W = U \cos \Theta + V_* \sin \Theta \quad \text{a} \quad U = W \cos \Theta - Z_* \sin \Theta,$$

odkud vyjádříme

$$V_* = \frac{W - U \cos \Theta}{\sin \Theta} \quad \text{a} \quad Z_* = \frac{W \cos \Theta - U}{\sin \Theta}. \quad (3.2)$$

Hodnota V_* a Z_* tedy závisí na U, W a Θ .



Obrázek 3.3: Body A, B, C, D , přímky p, q a průnik S spolu s příslušnými osami soustav souřadnic a úhlem Θ .

Snadno bychom ukázali, že veličina Θ má hustotu tvaru

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{(0, 2\pi)}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Hustoty veličin U a W jsou tvaru

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2}, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Víme, že veličiny U, W a Θ jsou vzájemně nezávislé, jejich sdružená hustota má tedy tvar

$$f_{U,W,\Theta}(u, w, \theta) = \frac{1}{2\pi^2} e^{-u^2-w^2} \mathbf{1}_{(0, 2\pi)}(\theta), \quad u, w, \theta \in \mathbb{R}.$$

Z vyjádření (3.1) vidíme, že můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(CQ) &= \mathbf{P}(V_1 < V_* < V_2) \mathbf{P}(Z_1 < Z_* < Z_2) \\ &\quad + \left(1 - \mathbf{P}(V_1 < V_* < V_2)\right) \left(1 - \mathbf{P}(Z_1 < Z_* < Z_2)\right), \end{aligned}$$

pro pevně zvolené $v_* \in \mathbb{R}$ a $z_* \in \mathbb{R}$ tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(CQ | V_* = v_*, Z_* = z_*) &= \\ &= \mathbf{P}(V_1 < V_* < V_2 | V_* = v_*) \mathbf{P}(Z_1 < Z_* < Z_2 | Z_* = z_*) \\ &\quad + \left(1 - \mathbf{P}(V_1 < V_* < V_2 | V_* = v_*)\right) \left(1 - \mathbf{P}(Z_1 < Z_* < Z_2 | Z_* = z_*)\right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{v_*^2 + z_*^2}{2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v_*^2}{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z_*^2}{2}}\right) \\ &= 1 + e^{-\frac{v_*^2 + z_*^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{v_*^2}{2}} + e^{-\frac{z_*^2}{2}}\right). \end{aligned}$$

Z rovností (3.2) víme, že veličiny V_* , Z_* lze vyjádřit pomocí U , W a Θ . Pro pevně zvolené $u, w \in \mathbb{R}$ a $\theta \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ tedy položíme

$$v_* = \frac{w - u \cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{a} \quad z_* = \frac{w \cos \theta - u}{\sin \theta}.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(CQ \mid U = u, W = w, \Theta = \theta) &= 1 + e^{-\frac{v_*^2 + z_*^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{v_*^2}{2}} + e^{-\frac{z_*^2}{2}} \right) \\ &= 1 + \exp \left\{ -\frac{(w - u \cos \theta)^2 + (w \cos \theta - u)^2}{2 \sin^2 \theta} \right\} + \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\exp \left\{ -\frac{(w - u \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(w \cos \theta - u)^2}{2 \sin^2 \theta} \right\} \right). \end{aligned}$$

Z definice podmíněného rozdělení pak spočítáme pravděpodobnost utvoření konvexního čtyřúhelníku jako

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(CQ) &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbb{P}(CQ \mid U = u, W = w, \Theta = \theta) f_{U,W,\Theta}(u, w, \theta) du dw d\theta \\ &\quad + \int_\pi^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbb{P}(CQ \mid U = u, W = w, \Theta = \theta) f_{U,W,\Theta}(u, w, \theta) du dw d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbb{P}(CQ \mid U = u, W = w, \Theta = \theta) f_{U,W,\Theta}(u, w, \theta) du dw d\theta. \end{aligned}$$

Integrand rozdělíme na čtyři části

$$\begin{aligned} P_1 &= f_{U,W,\Theta}(u, w, \theta), \\ P_2 &= \exp \left\{ -\frac{(w - u \cos \theta)^2 + (w \cos \theta - u)^2}{2 \sin^2 \theta} \right\} f_{U,W,\Theta}(u, w, \theta), \\ P_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left\{ -\frac{(w - u \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} \right\} f_{U,W,\Theta}(u, w, \theta), \\ P_4 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left\{ -\frac{(w \cos \theta - u)^2}{2 \sin^2 \theta} \right\} f_{U,W,\Theta}(u, w, \theta), \end{aligned}$$

přičemž platí

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \mathbb{P}(CQ \mid U = u, W = w, \Theta = \theta) f_{U,W,\Theta}(u, w, \theta).$$

Každou z částí budeme integrovat zvlášť.

Pro první část zřejmě dostáváme

$$\int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty P_1 du dw d\theta = \frac{1}{2}.$$

Pro další postup potřebujeme následující tvrzení.

Tvrzení 3.1. *Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je pozitivně definitní matice. Potom platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - (x, y) \mathbf{A} (x, y)^{\top} \right\} dy dx = \frac{\pi}{\sqrt{\det \mathbf{A}}}.$$

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned} (x, y) \mathbf{A} (x, y)^{\top} &= ax^2 + 2bxy + cy^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \frac{b^2}{a} y^2 - \frac{b^2}{a} y^2 \\ &= a \left(x^2 + 2 \frac{b}{a} xy + \frac{b^2}{a^2} y^2 \right) + \left(c - \frac{b^2}{a} \right) y^2 \\ &= a \left(x + \frac{b}{a} y \right)^2 + \frac{\det \mathbf{A}}{a} y^2, \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - (x, y) \mathbf{A} (x, y)^{\top} \right\} dy dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+\frac{b}{a}y)^2} e^{-\frac{\det \mathbf{A}}{a} y^2} dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\det \mathbf{A}}{a} y^2} dy \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\det \mathbf{A}}{a}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det \mathbf{A}}}, \end{aligned}$$

přičemž využíváme toho, že matice \mathbf{A} je pozitivně definitní, tedy platí $a > 0$ a $\det \mathbf{A} > 0$. □

Druhou část upravíme pro $\theta \in (0, \pi)$ do tvaru

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2\pi^2} \exp \left\{ -u^2 - w^2 - \frac{(w - u \cos \theta)^2 + (w \cos \theta - u)^2}{2 \sin^2 \theta} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \exp \left\{ -\frac{(u^2 + w^2)(2 + \sin^2 \theta) - 2uw(2 \cos \theta)}{2 \sin^2 \theta} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \exp \left\{ - (u, w) \mathbf{Q}_2 (u, w)^{\top} \right\}, \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{Q}_2 = \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} 2 + \sin^2 \theta & -2 \cos \theta \\ -2 \cos \theta & 2 + \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Kvadratická forma daná maticí \mathbf{Q}_2 je zřejmě pozitivně definitní. Dle Tvrzení 3.1 lze pak integrál podle u a w z části P_2 spočítat jako

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_2 du dw &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - (u, w) \mathbf{Q}_2 (u, w)^{\top} \right\} du dw \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{\pi}{\sqrt{\det \mathbf{Q}_2}} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{2\pi |\sin \theta|}{\sqrt{8 + \sin^2 \theta}} = \frac{|\sin \theta|}{\pi \sqrt{9 - \cos^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Zbývá výsledek integrovat podle θ , tedy

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty P_2 \, du \, dw \, d\theta &= \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\pi \sqrt{9 - \cos^2 \theta}} \, d\theta = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\pi \sqrt{1 - t^2}} \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \, dt = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

přičemž ve druhé rovnosti jsme využili substituce $t = \frac{\cos \theta}{3}$.

Třetí část lze pro $\theta \in (0, \pi)$ upravit jako

$$\begin{aligned} P_3 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \exp \left\{ -u^2 - w^2 - \frac{(w - u \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} \right\} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \exp \left\{ -\frac{u^2(1 + \sin^2 \theta) + w^2(1 + 2 \sin^2 \theta) - 2uw \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} \right\} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \exp \left\{ - (u, w) \mathbf{Q}_3 (u, w)^\top \right\}, \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{Q}_3 = \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} 1 + \sin^2 \theta & -\cos \theta \\ -\cos \theta & 1 + 2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Kvadratická forma daná maticí \mathbf{Q}_3 je pozitivně definitní a opět s použitím Tvzení 3.1 dopočítáme

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty P_3 \, du \, dw \, d\theta &= -\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp \left\{ - (u, w) \mathbf{Q}_3 (u, w)^\top \right\} \, du \, dw \, d\theta \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \int_0^\pi \frac{\pi}{\sqrt{\det \mathbf{Q}_3}} \, d\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \int_0^\pi \frac{\sqrt{2}\pi \sin \theta}{\sqrt{3 - \cos^2 \theta}} \, d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{3 - \cos^2 \theta}} \, d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \, dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

kde jsme v páté rovnosti využili substituce $t = \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}}$. Pro čtvrtou část dostáváme stejnou hodnotu integrálu.

Sečtením všech výsledků získáváme

$$\begin{aligned} P(CQ) &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 1 + \frac{4}{\pi} \arcsin \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{4}{\pi} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4}{\pi} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{3} \\ &= \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{1}{3} \doteq 0.649. \end{aligned}$$

Závěr

V této práci jsme čtenáře obeznámili s úlohou známou jako *problém čtyř bodů*. Podrobně jsme rozebrali řešení pro několik možných voleb rozdělení čtyř bodů. Pro každou z voleb jsme pak obdrželi jiný výsledek.

Při volbě spojitého rovnoměrného rozdělení jsme se při řešení omezili na konvexní kompaktní množinu s kladnou mírou. Ukázali jsme odvození hodnoty pravděpodobnosti pro tři základní tvary této množiny, to jest trojúhelník, čtverec a kruh. Dále jsme uvedli vzorec pro výpočet pravděpodobnosti pro libovolný pravidelný n -úhelník. Všimli jsme si, že s rostoucím n se pravděpodobnost zvětšuje. Nakonec jsme uvedli tvrzení, které stanovuje dolní a horní hranici pro hodnotu pravděpodobnosti, a to pro libovolnou konvexní kompaktní množinu s kladnou mírou.

Při volbě diskrétního rovnoměrného rozdělení na $m \times n$ síti jsme hledali hodnotu pravděpodobnosti utvoření konvexního objektu. Zjistili jsme, že s rostoucí dimenzí sítě se tato pravděpodobnost snižuje. Dokonce se domníváme, že při úvaze $n \times n$ sítě se pravděpodobnost limitně blíží pravděpodobnosti utvoření konvexního čtyřúhelníku při spojitém rovnoměrném rozdělení na množině tvaru čtverce. Tuto domněnku jsme bohužel zatím nedokázali, nicméně chtěli bychom se problému nadále věnovat.

Nakonec, při volbě dvourozměrného normálního rozdělení jsme odvodili hodnotu pravděpodobnosti utvoření konvexního čtyřúhelníku. Můžeme si všimnout, že tato hodnota je dokonce nižší, než dolní hranice pravděpodobnosti při spojitém rovnoměrném rozdělení na konvexní kompaktní množině s kladnou mírou.

Existuje mnoho různých modifikací a rozšíření problému čtyř bodů, rozsah práce nám je však neumožňuje zahrnout. Některé zajímavé modifikace problému lze nalézt ve článku Eisenberg a Sullivan (2011), rozšíření problému do tří dimenzí pak uvádí český matematik B. Hostinský v knize Hostinský (1926, sekce 31).

Seznam použité literatury

- BLATTER, C. (2008). Four shots for a convex quadrilateral. *Amer. Math. Monthly*, **115**(9), 837–843. ISSN 0002-9890.
- EISENBERG, B. a SULLIVAN, R. (2011). A modification of Sylvester’s four point problem. *Math. Mag.*, **84**(3), 173–184. ISSN 0025-570X.
- HOSTINSKÝ, B. (1926). *Geometrické pravděpodobnosti*. Jednota československých matematiků a fyziků, Praha.
- KENDALL, M. G. a MORAN, P. A. P. (1963). *Geometrical probability*. Griffin’s Statistical Monographs & Courses, No. 10. Hafner Publishing Co., New York.
- PFIEFER, R. E. (1989). The historical development of J. J. Sylvester’s four point problem. *Math. Mag.*, **62**(5), 309–317. ISSN 0025-570X.
- RÉNYI, A. (1972). *Teorie pravděpodobnosti*. Academia, Prague. Translated from the German. Edited by J. Hájek and F. Fabian.
- RUDIN, W. (1987). *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition. ISBN 0-07-054234-1.
- SOLOMON, H. (1978). *Geometric probability*. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 28. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa. ISBN 0-89871-025-1.
- VARBERG, D. E. (1985). Pick’s theorem revisited. *Amer. Math. Monthly*, **92**(8), 584–587. ISSN 0002-9890.

A. Příloha

Tvrzení A.1. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Potom platí*

$$(i) \lambda^n(A + \mathbf{b}) = \lambda^n(A),$$

$$(ii) \lambda^n(\{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in M\}) = |\det \mathbf{A}| \lambda^n(M).$$

Důkaz. Rudin (1987, Theorem 2.20 a sekce 2.23)

□

Tvrzení A.2 (Věta o úplné pravděpodobnosti). *Uvažujme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Nechť $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ je úplná soustava jevů a platí $\mathbf{P}(B_n) > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom pro $A \in \mathcal{A}$ platí*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A \mid B_n) \mathbf{P}(B_n).$$

Důkaz. Rényi (1972, str. 82)

□

Tvrzení A.3 (Věta o úplné střední hodnotě). *Uvažujme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Nechť $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ je úplná soustava jevů a X je náhodná veličina, pro kterou existuje $\mathbf{E}X$. Potom platí*

$$\mathbf{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(X \mid B_n) \mathbf{P}(B_n),$$

přičemž v případě $\mathbf{P}(B_n) = 0$ volíme $\mathbf{E}(X \mid B_n)$ libovolně.

Důkaz. Rényi (1972, str. 197)

□