



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Zemčík

Bodové procesy na lineárních sítích a analýza výskytu dopravních nehod

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jiří Dvořák, Ph.D.

Studijní program: Obecná matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Na tomto místě bych rád poděkoval RNDr. Jiřímu Dvořákovi, Ph.D. za poskytnuté cenné rady, odborný dohled, ochotu a především za všechny čas a vstřícný přístup, se kterým jsem se po celou dobu zpracování své práce setkával.

Z celého srdce bych chtěl poděkovat své mamince Aleně Zemčíkové a svému tatínkovi Janu Zemčíkovi za jejich nekonečnou důvěru, neustálou podporu, optimismus a pevnou oporu mi poskytnutou během studia včetně vytvoření ideálních podmínek a zázemí nejen pro samotné studium. Dále bych chtěl obrovsky a převelice poděkovat své sestřičce Lucii Zemčíkové za veškerou inspiraci, motivaci a hlavně za všechnu pozitivní energii, kterou na mě po celou dobu studia přenášela. Ještě bych chtěl poděkovat svému dědečkovi Antonínu Blahovi za poskytnutí velké důvěry a podpory, která mě provázela po celý čas studia.

Dále bych rád poděkoval své tetě Libuši Kubenové za poskytnutí konzultace ohledně gramatiky české. Rovněž bych rád poděkoval svému kamarádovi Martinu Dolákovi za rady a připomínky při stylistických úpravách samotného textu.

Na závěr bych chtěl vyjádřit velké a upřímné děkuji všem, kteří mi věřili, mysleli na mě, podporovali mě a byli vůči mně přející. Z nich bych vyzdvihl všechny, kteří mi pomáhali a poskytli mi během studia podporu, obzvláště v nelehkých časech. V neposlední řadě děkuji všem osobnostem, které mě během dosavadního života inspirovaly, ovlivňovaly a byly mým vzorem.

Název práce: Bodové procesy na lineárních sítích a analýza výskytu dopravních nehod

Autor: Jan Zemčík

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jiří Dvořák, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V práci se budeme zabývat bodovými procesy na lineárních sítích. Uvedeme definici funkce intenzity prvního řádu, která popisuje intenzitu výskytu bodů procesu v jednotlivých místech lineární sítě. Chtěli bychom, aby odhad funkce intenzity prvního řádu pomocí vyhlazovacího jádra zachovával hmotu. Definujeme funkci $K^D(u|x)$, která bude vyhlazovacím jádrem a uvedeme dvě verze věty pojednávající o integraci funkce $K^D(u|x)$ na jedničku. Jedna bude pro lineární síť bez cyklů délky kratších než šířka jádra a druhá bude pro lineární síť, které mohou obsahovat cykly. Domníváme se, že v literatuře existuje chybné tvrzení pro druhou verzi zmíněné věty. Obě věty doplníme o podrobné důkazy. Na konci práce předvedeme analýzu dvou reálných datasetů (dopravní nehody na dálnici D1 a pouliční zločiny v ulicích města Chicago).

Klíčová slova: Bodové procesy, lineární síť, K -funkce

Title: Point processes on linear networks and analysis of traffic accidents

Author: Jan Zemčík

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jiří Dvořák, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis we shall study point processes on linear networks. We introduce the definition of first-order intensity function, which represents the intensity of occurrence of points of the point process in individual points of the linear network. We require the first-order intensity function estimate utilising a smoothing kernel to preserve mass on the linear network. We define the $K^D(u|x)$ function, which represents the smoothing kernel. Our next objective is to state theorems which show us, when the integral of the function $K^D(u|x)$ evaluates to 1. The first will be stated for linear networks without cycles of length smaller than the width of the kernel and the second for linear networks which may contain cycles. We believe that the relevant literature on the subject contains an erroneous statement of the latter version of the theorem. We present detailed proofs for both versions of the theorem. At the end of the thesis we present two analyses based on real data (traffic accidents on D1 highway and Chicago Crime Data).

Keywords: Point processes, linear networks, K -function

Obsah

Úvod	2
1 Lineární síť	4
1.1 Definice a značení	4
1.2 Hausdorffova míra	5
1.3 Věty o polárních souřadnicích	6
2 Bodový proces	7
2.1 Bodový proces v rovině	7
2.2 Bodový proces na lineární síti	7
2.3 Charakteristiky bodového procesu	8
3 Jádrové odhady funkce intenzity prvního řádu	12
3.1 Lineární síť bez cyklů délky kratších než šířka jádra	13
3.2 Lineární síť, která může obsahovat cykly	24
4 Analýza bodových procesů pomocí obálkových testů	30
4.1 Analýza výskytu dopravních nehod na D1	30
4.2 Poulíčnické zločiny ve městě Chicago	33
Závěr	39
Seznam použité literatury	41
Seznam obrázků	42

Úvod

Rádi bychom v úvodu textu nastínili několik důvodů, proč je užitečné se věnovat bodovým procesům na lineárních sítích. Výsledky této poměrně nové, avšak důmyslné teorie se dají použít pro řešení nejrůznějších praktických problémů. Pro stručný nástin praktického využití bychom rádi uvedli následující příklad.

Chceme zjistit, zda místa výskytu pouličních zločinů ve městě Chicago jsou pouze náhodné, nebo naopak zda spolu souvisí. Kdyby spolu souvisely, tak by to mohlo například znamenat, že dané pouliční zločiny v určitém regionu způsobuje stejný gang, či má na tom významný podíl. Při prokázání, že nejde o nahodilost, a tedy že místa zaznamenaných zločinů spolu souvisí, by bylo vhodné do těchto míst umístit více bezpečnostních systémů a zavést proti zločinům účinnější opatření. V kapitole 4 představíme vlastní analýzu o zločinech ve městě Chicago. Podrobnější analýzu o zločinech ve městě Chicago lze najít v Ang a kol. (2012). Obdobně se dají analyzovat dopravní nehody na silniční síti. Ukázkou analýzy dopravních nehod na části dálnice D1 v kraji Vysočina předvedeme v kapitole 4.

V první kapitole zavedeme pojem lineární síť. Zároveň se čtenář seznámí i s pojmem síťové vzdálenosti, který se bude vyskytovat v průběhu celého textu.

Bodový proces si budeme definovat ve druhé kapitole. V její třetí sekci představíme charakteristiky bodového procesu. Z nich zde zmíníme funkci intenzity prvního řádu, která popisuje intenzitu výskytu bodů procesu v jednotlivých místech lineární sítě a K -funkci popisující prostorové seskupení bodového procesu.

Jádrovými odhady funkce intenzity prvního řádu se budeme věnovat v kapitole 3. V ní budeme definovat jádrovou funkci, vyhlazovací jádro a další s ní spojené pojmy. Chtěli bychom, aby odhad funkce intenzity prvního řádu pomocí vyhlazovacího jádra zachovával hmotu. Zobecnění jádrových odhadů funkce intenzity z euklidovského prostoru na lineární síť není přímočaré, v literatuře bylo navrženo více přístupů. Je žádoucí jejich vlastnosti prozkoumat, aby se dalo rozhodnout, jaký druh odhadu v praxi v různých situacích používat.

Zavedeme funkci $K^D(u|x)$, která se využívá pro odhad funkce intenzity prvního řádu. Zmíníme, že funkce $K^D(u|x)$ není stavěná pouze na jednu určitou geometrii lineární sítě L , avšak dá se použít prakticky na jakoukoli rozumnou lineární síť. To je velmi užitečná vlastnost, neboť takovou funkci můžeme používat například pro analýzu pouličních loupeží v jakémkoli městě a nikoli ve městě námi specificky určeném.

V textu uvedeme celkem dvě věty představující kritérium, kdy se na lineární síti funkce $K^D(u|x)$ naintegruje na jedničku, a tedy odhad funkce intenzity prvního řádu pomocí funkce $K^D(u|x)$ bude zachovávat hmotu. Obě věty uvedeme s vlastními důkazy a ilustračními obrázky. V literatuře jsou dostupná tvrzení, která uvádí nutné a postačující podmínky pro splnění vlastnosti integrace funkce $K^D(u|x)$ na jedničku. Avšak jsou uvedena bez důkazu (McSwiggan a kol., 2017),

anebo je dokonce důkaz tvrzení chybný (Sugihara a kol., 2010). Ukazuje se, že výpočetní náročnost funkce $K^D(u|x)$ je přijatelná a výrazně neroste se zvětšující se šířkou jádra $2h$ na lineární síti L .

1. Lineární síť

Lineární síť je v běžném světě velmi hojně se vyskytující pojem. Mezi nejčastější příklady lineární sítě patří dopravní síť, ulice měst či říční síť. V sekci 1.1 si zavedeme základní definice a značení. V sekci 1.2 specifikujeme, vůči jaké míře a integrálu budeme v textu pracovat. V závěru kapitoly 1.3 si vyslovíme velmi důležité věty, které budou základním stavebním kamenem u mnohých důkazů.

1.1 Definice a značení

Nejprve zavedeme několik základních definic z oblasti lineárních sítí. Jedná se o naprosto klíčové pojmy, se kterými budeme pracovat po celou dobu našeho textu. Tyto základní pojmy jsou převzaty primárně ze zdrojů McSwiggan a kol. (2017) a Ang a kol. (2012). Velmi podstatným zdrojem byla také bakalářská práce Moravec (2013).

V celé práci budeme pracovat s lineárními sítěmi v rovině, tedy v \mathbb{R}^2 . Vůbec první definicí celého textu bude pojem úsečka. Předpokládáme, že čtenář tento pojem velmi dobře zná, avšak hlavní přínos definice 1 bude ve značení úsečky, které budeme v textu hojně používat.

Definice 1 (Úsečka). *Úsečku v rovině s koncovými body u, v definujeme jako množinu $\{tu + (1 - t)v : 0 \leq t \leq 1\}$. Značíme $[u, v]$.*

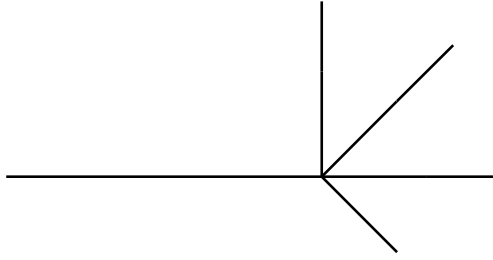
Definice 2 (Lineární síť). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a l_1, \dots, l_n jsou po dvou navzájem různé úsečky, nechť každé dvě úsečky mají společný nejvýše jeden bod, a to koncový. Lineární síť L definujeme jako konečné sjednocení $L = \bigcup_{i=1}^n l_i$. Koncové body úseček l_1, \dots, l_n budeme nazývat vrcholy lineární sítě L .*

Poznámka. V textu místo pojmu lineární síť L budeme někdy psát síť L či pouze síť. Učiníme tak tehdy, pokud zkráceným zápisem zvýšíme přehlednost v daných pasážích textu.

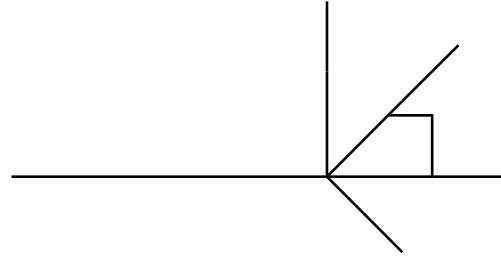
Poznámka. Na lineární síť L se můžeme dívat jako na graf. Takový pohled bude užitečný obzvláště v kapitole 3, ve které budeme některé pojmy z teorie grafů definovat.

Definice 3 (Stupeň vrcholu). *Stupeň vrcholu v , značíme $\deg(v)$, je počet úseček s koncovým bodem ve vrcholu v . Řekneme, že vrchol v je koncový, pokud je jeho stupeň roven jedné.*

Definice 4 (Cesta). *Na lineární síti $L = \bigcup_{i=1}^n l_i$ definujeme cestu mezi body $u, v \in L$ jako posloupnost bodů $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m \in L$, $m \in \mathbb{N}$, takovou, že $x_0 = u$, $x_m = v$ a x_j pro nějaké $j = 1, 2, \dots, m - 1$ značí vrcholy lineární sítě L . Požadujeme, aby pro každé $i = 2, 3, \dots, m - 1$ platilo $[x_{i-1}, x_i] = l_s$ pro nějaké $s = 1, 2, \dots, n$. Pro úsečku s koncovými body x_0, x_1 požadujeme $[x_0, x_1] \subset l_t$ pro nějaké $t = 1, 2, \dots, n$ a pro úsečku s koncovými body x_{m-1}, x_m požadujeme $[x_{m-1}, x_m] \subset l_k$ pro nějaké $k = 1, 2, \dots, n$. Nakonec ještě požadujeme, aby v případě $m \geq 2$ pro každé $p = 0, 2, \dots, m - 2$ platilo $x_p \neq x_{p+2}$.*



Obrázek 1.1: Lineární síť bez cyklů.



Obrázek 1.2: Lineární síť s cyklem.

Poznámka. Abychom zabránili, aby cesta bezprostředně zpět neprocházela stejnou úsečkou opačným směrem, tak jsme na konci definice 4 požadovali, aby v případě $m \geq 2$ pro každé $p = 0, 2, \dots, m - 2$ platilo $x_p \neq x_{p+2}$.

Poznámka. V celé práci budeme uvažovat pouze lineární síť L s právě jednou komponentou souvislosti. Tedy mezi libovolnými dvěma body na lineární síti L bude vždy existovat alespoň jedna cesta. Nyní již můžeme definovat pojem síťové vzdálenosti.

Definice 5 (Síťová vzdálenost). *Délkou cesty x_0, \dots, x_m rozumíme součet euklidovských vzdáleností $\sum_{i=1}^m \|x_i - x_{i-1}\|$. Síťovou vzdálenost $d_L(u, v)$ mezi body $u, v \in L$ definujeme jako minimum délek ze všech cest mezi body u, v .*

Zavedeme si definici cyklu na lineární síti. Znázornění lineární sítě bez cyklů lze vidět na obrázku 1.1. Naopak na obrázku 1.2 je uvedena lineární síť s cyklem.

Definice 6 (Cyklus). *Na lineární síti L definujeme cyklus procházející bodem $u \in L$ jako cestu u, v_1, \dots, v_m, u pro nějaké $m = 2, 3, \dots$, $v_i \in L$ značí vrcholy sítě L , $v_i \neq u$, $i = 1, \dots, m$.*

Definice 7 (Síťové okolí). *Pro lineární síť L definujeme síťové okolí $b_L(u, r)$ bodu $u \in L$ o poloměru $r > 0$ jako množinu $b_L(u, r) = \{v \in L : d_L(u, v) \leq r\}$. Hranicí síťového okolí rozumíme $\partial b_L(u, r) = \{v \in L : d_L(u, v) = r\}$.*

Definice 8 (Obvod síťové okolí). *Obvodem $m(u, r)$ síťového okolí $b_L(u, r)$ rozumíme počet bodů obsažených v jeho hranici $\partial b_L(u, r)$.*

Poznámka. Obvod $m(u, r)$ síťového okolí budeme například používat v důkazu v jedné z vět v sekci 2.3.

1.2 Hausdorffova míra

V celé práci budeme pracovat s Lebesgueovým integrálem vůči Hausdorffově míře, která nám umožňuje měřit objekty nižší dimenze. V našem případě to převážně budou úsečky v rovině. Nejprve si zavedeme definici diametru množiny, který bude posléze použit právě pro definici Hausdorffovy míry. Definici samotné Hausdorffovy míry jsme čerpali ze zdroje Evans a Gariepy (1992).

Definice 9 (Diametr množiny). *Bud (X, ρ) metrický prostor. Diametrem množiny $Y \subset X$ rozumíme $\text{diam}(Y) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in Y\}$.*

Definice 10 (Hausdorffova míra). Pro $Y \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \delta \leq \infty$, $0 \leq d < \infty$ definujeme

$$\mathcal{H}_\delta^d(Y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(d) \left(\frac{\text{diam}(Y_i)}{2} \right)^d : Y \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i, \text{diam}(Y_i) \leq \delta \right\},$$

kde

$$\alpha(d) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}.$$

Symbolem Γ rozumíme gama funkci definovanou pro $0 < s < \infty$ vztahem

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx.$$

Pro $Y \subset \mathbb{R}^n$ a $0 \leq d < \infty$ stejně jako výše definujeme v \mathbb{R}^n Hausdorffovu míru $\mathcal{H}^d(Y)$ dimenze d předpisem

$$\mathcal{H}^d(Y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^d(Y) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^d(Y).$$

Poznámka. Pro účely našeho textu budeme pracovat se situací $Y \subset \mathbb{R}^2$ a $d = 1$. Tedy budeme pracovat s Hausdorffovou mírou \mathcal{H}^1 .

Poznámka. Pro úplnost uvedeme, že Hausdorffova míra $\mathcal{H}^d(Y)$ je vnější míra. Zmíněná vlastnost se běžně dokazuje až po samotné definici Hausdorffovy míry. Pro účely našeho textu nepokládáme za vhodné se podrobněji zabývat patřičnou větou či jejím důkazem, a proto je nebudeme již dále zmiňovat.

1.3 Věty o polárních souřadnicích

Počítat integrál přes lineární síť může být při výpočtech velmi neintuitivní a svým tvarem nešikovné. Rádi bychom meze integrálu převedli na číselný tvar, se kterým již umíme pohodlně pracovat. K tomu nám slouží takzvané věty o polárních souřadnicích, které převzeme z Ang a kol. (2012). Následující věta se bude hojně využívat v důkazu věty 5 v sekci 3.1. Zároveň bude tvořit, jak později uvidíme, jeden z klíčových nástrojů pro samotný důkaz zmíněné věty.

Věta 1 (O základním vztahu s polárními souřadnicemi). *Bud' dána lineární síť L a její bod $u \in L$. Dále necht' $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Pak platí*

$$\int_L f(v) dv = \int_0^{\infty} \sum_{\substack{v \in L: \\ d_L(u,v)=t}} f(v) dt.$$

Poznámka. Pro lineární síť L zavedeme stopu σ -algebry $\mathcal{B}_L = \{A \cap L: A \in \mathcal{B}_2\}$, a tedy má smysl mluvit o měřitelnosti funkce f ve větě 1. Stopu σ -algebry \mathcal{B}_L ještě uvidíme v sekci 2.2 při zavádění bodového procesu na lineární síti.

Věta 2 (O vztahu s polárními souřadnicemi). *Bud' dána lineární síť L a její bod $u \in L$. Dále necht' $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Pak platí*

$$\int_L h(d_L(u, v)) dv = \int_0^{\infty} h(t) m(u, t) dt. \quad (1.1)$$

Poznámka. Důkaz věty 2 lze najít v textu Moravec (2013) pod Tvzením 2.16.

Poznámka. Věta 2 se použije v sekci 2.3 v důkazu věty popisující vztah nehomogenní K -funkce a párové korelační funkce.

2. Bodový proces

V úvodu kapitoly 2.1 si definujeme bodový proces v rovině. Bodový proces je velmi obecný pojem, avšak zároveň i velmi přirozený pojem. Příklady realizací bodových procesů se vyskytují v běžném životě velmi často. Můžeme například zaznamenávat polohu pozorovaných vystavěných bobříků hrází v určité přírodní lokalitě. Mnoho názorných motivačních příkladů bodového procesu uvádí Baddeley a kol. (2007). Jako zajímavý příklad nám přijde zaznamenání polohy lidí volajících záchranou službu. Dále v sekci 2.2 si definujeme bodový proces na lineární síti. Jak bylo v úvodu textu zmíněno, dopravní nehody na silnicích představují bodový proces na lineární síti. V kapitole 4 se jimi budeme podrobněji zabývat. V závěru kapitoly v sekci 2.3 představíme pojmy, které budou popisovat již samotný bodový proces. Zároveň představíme i první vlastní důkaz.

2.1 Bodový proces v rovině

V celém textu budeme pracovat s bodovými procesy v rovině. Z tohoto důvodu nebudeme v textu zavádět definici obecného bodového procesu v \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$, jelikož si vystačíme s definicí bodového procesu v rovině. Nejdříve zavedeme pojem kanonický prostor v rovině, který je nutný pro samotnou definici bodového procesu, jež definujeme posléze. Hlavním zdrojem definic bude Møller a Waagepetersen (2004).

Definice 11 (Kanonický prostor v rovině). *Nechť \mathcal{B}_2 je Borelovská σ -algebra na \mathbb{R}^2 . Označme symbolem \mathcal{B}_2° systém všech omezených množin z \mathcal{B}_2 . Buď $N = \{X \subset \mathbb{R}^2: n(X_A) < \infty \forall A \in \mathcal{B}_2^\circ\}$ soubor všech lokálně konečných podmnožin roviny, kde symbolem $n(X_A)$ rozumíme počet bodů z množiny X obsažených v množině A . Zavedme systém množin $J^{A,k} = \{X \in N: n(X_A) = k, A \in \mathcal{B}_2^\circ, k \in \mathbb{N}_0\}$. Nechť \mathcal{N} je σ -algebra na N generovaná množinami $J^{A,k}$, kde $A \in \mathcal{B}_2^\circ, k \in \mathbb{N}_0$. Dvojici (N, \mathcal{N}) nazveme kanonickým prostorem pro bodový proces v rovině.*

Definice 12 (Bodový proces v rovině). *Buď (Ω, \mathcal{A}, P) pravděpodobnostní prostor a buď (N, \mathcal{N}) kanonický prostor pro bodový proces v rovině. V rovině definujeme bodový proces jako měřitelné zobrazení $\mathbf{X}: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (N, \mathcal{N})$.*

2.2 Bodový proces na lineární síti

V této sekci se seznámíme s definicí bodového procesu na lineární síti. Bodový proces jsme si definovali pouze v rovině. Lineární síť je částí roviny, a proto pojem bodový proces na lineární síti dává smysl. Nejprve si zavedeme definici kanonického prostoru pro lineární síť, až poté budeme definovat bodový proces na lineární síti. Styl a koncept definic bude velmi podobný jako v předchozí sekci. V této sekci bude zdrojem definic Moravec (2013).

Definice 13 (Kanonický prostor pro lineární síť). *Pro lineární síť L zavedeme stopu σ -algebry $\mathcal{B}_L = \{A \cap L: A \in \mathcal{B}_2\}$. Souborem všech lokálně konečných podmnožin lineární sítě L rozumíme $N_L = \{X \subset L: n(X_A) < \infty \forall A \in \mathcal{B}_L\}$, kde symbolem $n(X_A)$ rozumíme počet bodů z množiny X obsažených v množině A . Definujeme systém množin $J_L^{A,k}$ tvarem $J_L^{A,k} = \{X \in N_L: n(X_A) = k, A \in \mathcal{B}_L, k \in \mathbb{N}_0\}$.*

Nechť \mathcal{N}_L je σ -algebra na N_L generovaná množinami $J_L^{A,k}$, kde $A \in \mathcal{B}_L, k \in \mathbb{N}_0$. Dvojici (N, \mathcal{N}) nazveme kanonickým prostorem pro bodový proces na lineární síti L .

Definice 14 (Bodový proces na lineární síti). *Nechť L je lineární síť, (Ω, \mathcal{A}, P) pravděpodobnostní prostor a (N_L, \mathcal{N}_L) kanonický prostor pro bodový proces na lineární síti L . Na lineární síti L definujeme bodový proces jako měřitelné zobrazení $\mathbf{X}: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (N_L, \mathcal{N}_L)$.*

2.3 Charakteristiky bodového procesu

Rádi bychom zkoumali vlastnosti samotného bodového procesu \mathbf{X} . K tomuto účelu se nám bude hodit zavést několik definic. Definice budeme čerpat převážně z článku Ang a kol. (2012). K jedné z vyslovených vět předvedeme vlastní důkaz.

Definice 15 (Funkce intenzity prvního řádu). *Nechť je dán bodový proces \mathbf{X} na lineární síti L . Pokud existuje nezáporná měřitelná funkce $\lambda(u)$ na L taková, že*

$$\mathbb{E}[n(B)] = \int_B \lambda(u) du, B \in \mathcal{B}_L,$$

kde $\mathcal{B}_L = \{B \cap L: B \in \mathcal{B}_2\}$ a $n(B)$ vyjadřuje počet bodů bodového procesu \mathbf{X} obsažených v $B \in \mathcal{B}_L$, pak funkci $\lambda(u)$ nazveme funkcí intenzity prvního řádu bodového procesu \mathbf{X} . Mírou intenzity bodového procesu \mathbf{X} rozumíme $\Lambda(B) = \mathbb{E}[n(B)], B \in \mathcal{B}_L$.

Poznámka. Pokud bude z kontextu jasné, o který bodový proces se jedná, budeme pouze zkráceně psát funkce intenzity, nikoli funkce intenzity daného konkrétního bodového procesu. Dále zachováme značení $n(B)$ z definice 15, které použijeme v následující definici.

Definice 16 (Funkce intenzity druhého řádu). *Nechť je dán bodový proces \mathbf{X} na lineární síti L . Řekneme, že nezáporná měřitelná funkce $\lambda_2(u, v)$ na $L \times L$ je funkcí intenzity druhého řádu, pokud pro libovolné $A, B \in \mathcal{B}_L$, kde $A \cap B = \emptyset$, platí vztah*

$$\mathbb{E}[n(A)n(B)] = \int_A \int_B \lambda_2(u, v) dv du.$$

Představíme definici Poissonova bodového procesu, kterou budeme později používat v kapitole 4. Definici jsem převzal od Moravec (2013).

Definice 17 (Poissonův bodový proces na lineární síti). *Poissonův bodový proces na lineární síti L s mírou intenzity $\Lambda(B)$ je bodový proces na lineární síti L takový, jenž splňuje*

1. pro každou množinu $B \in \mathcal{B}_L$ má náhodná veličina $n(B)$ Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $\Lambda(B) = \mathbb{E}[n(B)]$,
2. pro každé přirozené číslo $m \geq 2$ a pro navzájem disjunktní množiny $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m \in \mathcal{B}_L$ jsou náhodné veličiny $n(B_1), n(B_2), n(B_3), \dots, n(B_m)$ navzájem nezávislé.

Definice 18 (Párová korelační funkce). *Bud' \mathbf{X} bodový proces na lineární síti L s funkcí intenzity prvního řádu $\lambda(u)$ a s funkcí intenzity druhého řádu $\lambda_2(u,v)$. Definujeme párovou korelační funkci $\rho_2: L \times L \rightarrow [0, \infty)$ předpisem*

$$\rho_2(u,v) = \begin{cases} \frac{\lambda_2(u,v)}{\lambda(u)\lambda(v)}, & \text{pokud } \lambda(u) > 0 \wedge \lambda(v) > 0, \\ 0, & \text{pokud } \lambda(u) = 0 \vee \lambda(v) = 0. \end{cases}$$

Řekneme, že proces splňuje převáženou pseudostacionaritu druhého řádu, značíme PPDŘ, pokud párová korelační funkce je pouze funkcí síťové vzdálenosti mezi body u a v , tedy existuje funkce $\rho(t)$, $t \geq 0$, taková, že platí vztah

$$\rho_2(u,v) = \rho(d_L(u,v)).$$

Poznámka. Dále budeme pro naše účely párovou korelační funkci značit $\rho(t)$, jelikož budeme používat předpoklad PPDŘ. Avšak značení $\rho_2(u,v)$ se ještě objeví v důkazu věty 4.

Definice 19 (Nehomogenní K -funkce). *Nechť \mathbf{X} je bodový PPDŘ proces na lineární síti L s párovou korelační funkcí $\rho(t)$. Dále necht' $m(u,s)$ značí obvod síťového okolí. Nehomogenní K -funkci $K_{LI}(r)$, $r > 0$, definujeme vztahem*

$$K_{LI}(r) = \frac{1}{|L|} \mathbb{E} \left[\sum_{x_i \in \mathbf{X}} \sum_{x_j \in \mathbf{X}} \frac{\mathbb{1}\{0 < d_L(x_i, x_j) \leq r\}}{\lambda(x_i)\lambda(x_j)m(x_i, d_L(x_i, x_j))} \right].$$

Pokud chceme z pozorovaných dat odhadnout hodnotu nehomogenní K -funkce k řešení nějakého problému, tak nám nezbyvá než funkci intenzity prvního řádu odhadnout. Představíme odhad nehomogenní K -funkce již s odhadnutými členy funkce intenzity prvního řádu. Představený vzorec se nám bude později hodit v kapitole 4.

Definice 20 (Odhad nehomogenní K -funkce). *Nechť na lineární síti L pozorujeme realizaci $\{x_1, \dots, x_n\}$ bodového PPDŘ procesu \mathbf{X} a dále necht' $\hat{\lambda}(w)$, $w \in \{x_1, \dots, x_n\}$, je odhadnutá funkce intenzity prvního řádu. Dále necht' $m(u,s)$ značí obvod síťového okolí. Odhad nehomogenní K -funkce $\hat{K}_{LI}(r)$, $r > 0$, budeme definovat vztahem*

$$\hat{K}_{LI}(r) = \frac{1}{|L|} \sum_{\substack{x_i, x_j \in \mathbf{X}, \\ x_i \neq x_j}} \frac{\mathbb{1}\{d_L(x_i, x_j) \leq r\}}{\hat{\lambda}(x_i)\hat{\lambda}(x_j)m(x_i, d_L(x_i, x_j))}.$$

Tvar z definice 19 nehomogenní K -funkce působí na první pohled velmi složitým dojmem. Bylo by vhodné si nehomogenní K -funkci vyjádřit jednodušším způsobem, se kterým by se i lépe pracovalo. K tomuto účelu je více než vhodná následující věta. Zmíníme, že následující větu použijeme v důkazu věty 4.

Věta 3 (Campbellův vzorec druhého řádu). *Nechť je \mathbf{X} bodový proces na lineární síti L s funkcí intenzity druhého řádu $\lambda_2(u,v)$. Bud' $f: L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Pak platí*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\substack{x,y \in \mathbf{X}, \\ x \neq y}} f(x,y) \right] = \int_L \int_L f(u,v) \lambda_2(u,v) dv du, \quad (2.1)$$

pokud je pravá strana absolutně integrovatelná.

Rovnice (32) a (33) z článku Ang a kol. (2012) vyjadřují vztah mezi nehomogenní K -funkcí $K_{LI}(r)$ a párovou korelační funkcí $\rho(t)$. Domníváme se, že je obtížné nahlédnout jejich vzájemné souvislosti a významu. Proto vyslovíme větu, která představuje jejich vzájemnou souvislost a přímý vztah. Dovolíme si zmínit, že jsme k následující větě přidali vlastní důkaz.

Věta 4 (O vztahu nehomogenní K -funkce a párové korelační funkce). *Nechť $K_{LI}(r)$ je nehomogenní K -funkce bodového PPDŘ procesu \mathbf{X} na lineární síti L s párovou korelační funkcí $\rho(t)$, pak platí*

$$K_{LI}(r) = \int_0^r \rho(t) dt. \quad (2.2)$$

Důkaz. Důkaz rozdělíme do několika částí, které na sebe budou přímo navazovat. Jednotlivé části podrobně okomentujeme. Nejprve si pomocí několika rovností vyjádříme nehomogenní K -funkci

$$\begin{aligned} K_{LI}(r) &= \frac{1}{|L|} \mathbb{E} \left[\sum_{x_i \in \mathbf{X}} \sum_{x_j \in \mathbf{X}} \frac{\mathbb{1}\{0 < d_L(x_i, x_j) \leq r\}}{\lambda(x_i)\lambda(x_j)m(x_i, d_L(x_i, x_j))} \right] = \\ &= \frac{1}{|L|} \int_L \int_L \lambda_2(u, v) \frac{\mathbb{1}\{0 < d_L(u, v) \leq r\}}{\lambda(u)\lambda(v)m(u, d_L(u, v))} dv du = \\ &= \frac{1}{|L|} \int_L \int_L \rho_2(u, v) \frac{\mathbb{1}\{0 < d_L(u, v) \leq r\}}{m(u, d_L(u, v))} dv du. \end{aligned}$$

V první rovnosti využijeme přímo definici 19 nehomogenní K -funkce. Ve druhé rovnosti uplatníme Cambellův vzorec (2.1). Ve třetí rovnosti z definice párové korelační funkce $\rho_2(u, v)$ dostaneme vyjádření

$$\rho_2(u, v) = \frac{\lambda_2(u, v)}{\lambda(u)\lambda(v)}.$$

Dále platí rovnosti

$$\begin{aligned} K_{LI}(r) &= \frac{1}{|L|} \int_L \int_L \underbrace{\rho(d_L(u, v)) \frac{\mathbb{1}\{0 < d_L(u, v) \leq r\}}{m(u, d_L(u, v))}}_{h(d_L(u, v))} dv du = \\ &= \frac{1}{|L|} \int_L \int_0^\infty \rho(s) \frac{\mathbb{1}\{0 < s \leq r\}}{m(u, s)} m(u, s) ds du = \\ &= \frac{1}{|L|} \int_L \int_0^\infty \rho(s) \mathbb{1}\{0 < s \leq r\} ds du = \\ &= \frac{1}{|L|} \int_L \int_0^r \rho(s) ds du = \frac{1}{|L|} \int_0^r \int_L \rho(s) du ds. \end{aligned}$$

Za použití předpokladu, že \mathbf{X} je bodový PPDŘ proces, dostáváme z definice 18 rovnost $\rho_2(u, v) = \rho(d_L(u, v))$. Toho využijeme v první rovnosti. Ve druhé rovnosti uplatníme vztah (1.1). Ve třetí rovnosti se nám zkrátí členy $m(u, s)$. Ve čtvrté rovnosti se nám promítne indikátor přímo do meze integrálu. V poslední rovnosti použijeme známou Tonelliho větu o záměně pořadí integrace. Konečně

dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} K_{LI}(r) &= \frac{1}{|L|} \int_0^r \rho(s) \underbrace{\left(\int_L du \right)}_{|L|} ds = \\ &= \frac{1}{|L|} \int_0^r \rho(s) |L| ds = \int_0^r \rho(s) ds. \end{aligned}$$

□

3. Jádrové odhady funkce intenzity prvního řádu

Budeme se zabývat úlohou, jak odhadnout funkci intenzity prvního řádu na lineární síti. K tomuto účelu slouží vyhlazovací jádro definované pomocí jádrové funkce. Chtěli bychom, aby odhad funkce intenzity prvního řádu pomocí vyhlazovacího jádra zachovával hmotu. Z tohoto důvodu bychom rádi požadovali, aby vyhlazovací jádro umístěné do jednotlivých pozorovaných bodů bodového procesu bylo pravděpodobnostní hustotou. Ukazuje se, že takzvaná funkce $K^D(u|x)$, kterou budeme později definovat, tvoří vhodný nástroj pro odhad funkce intenzity prvního řádu. Funkcí $K^D(u|x)$ se budeme v celé kapitole velmi podrobně věnovat a jedná se o jeden z nejdůležitějších pojmů celého textu. To potvrzuje i vlastnost integrace přes lineární síť funkce $K^D(u|x)$ na jedničku. V této kapitole vyslovíme dvě věty představující kritérium, kdy se funkce $K^D(u|x)$ na lineární síti naintegruje na jedničku. Samotnou lineární síť můžeme klasifikovat do dvou kategorií podle kritéria, zda obsahuje krátký cyklus, či nikoli. Jak v této kapitole uvidíme, tak se funkce $K^D(u|x)$ bude pro oba případy definovat jiným způsobem.

Uvedeme definici jádrové funkce a také definujeme pojem šířky jádra. Šířka jádra nám bude určovat, na jak moc velkém intervalu nabývá jádrová funkce nenulových hodnot. Toto pozorování bude okamžitě vyplývat ze samotné definice jádrové funkce. Dále představíme definici pojmu krátké cesty a také budeme definovat krátký cyklus. Oba poslední zmíněné pojmy budou velmi důležité při formulování vět či samotných definic. Budou dokonce tvořit i zásadní argument v důkazu věty 8 v sekci 3.2 této kapitoly. Zmíněné pojmy v tomto odstavci byly uvedeny v Sugihara a kol. (2010).

Definice 21 (Jádrová funkce). *Jádrovou funkcí nazýváme funkci k definovanou na \mathbb{R} splňující:*

1. $k(x) \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
2. $k(x) = k(-x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
3. existuje nezáporná konstanta $h \in \mathbb{R}$ splňující jednak $k(x) > 0$, $|x| < h$, jednak $k(x) = 0$ pro $|x| \geq h$,
4. $k(x)$ je spojitá funkce pro všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x| < h$,
5. $k(x)$ splňuje rovnost $\int_{-\infty}^{\infty} k(x) dx = 1$,
6. $k(x)$ je nerostoucí pro $0 \leq x < \infty$,
7. existuje nezáporná konstanta $q \in \mathbb{R}$, $0 \leq q < h$ taková, že $k''(x) < 0$ pro $|x| < q$ a $k''(x) \geq 0$ pro $q < |x| < h$.

Konstanta h se v textu bude ještě velmi hojně vyskytovat a zároveň bude hrát i důležitou roli v některých důkazech. Dovolíme si zmínit krátkou poznámku.

Poznámka. Dále vždy budeme ve zbylém textu symbolem h značit konstantu z definice 21.

Definice 22 (Šířka jádra). Šířkou jádra jádrové funkce k budeme nazývat hodnotu $2h$.

Definice 23 (Krátká cesta). Řekneme, že cesta na lineární síti L je krátká, pokud její délka je menší než konstanta h , jinak řekneme, že cesta je dlouhá.

Definice 24 (Krátký cyklus). Řekneme, že na lineární síti L je krátký cyklus procházející bodem $u \in L$, pokud cyklus prochází bodem u a délka cyklu je menší než konstanta h .

Představíme definici vyhlazovacího jádra. Pojem vyhlazovacího jádra byl zmíněn v článku McSwiggan a kol. (2017).

Definice 25 (Vyhlazovací jádro). Na lineární síti L budeme vyhlazovacím jádrem v bodě $u \in L$ vzhledem k bodu $x \in L$ nazývat funkci $K(u|x)$, pokud bude funkce $K(u|x)$ tvaru

$$K(u|x) = c(x, u)k(d_L(x, u)),$$

kde $c(x, u)$ je nezáporná měřitelná funkce a $k(t), t \in \mathbb{R}$, je funkce z definice 21 splňující body: 1, 2, 3 a 5.

Uvažujme situaci, že na lineární síti L pozorujeme realizaci $\{x_1, \dots, x_n\}$ bodového procesu \mathbf{X} . Rádi bychom odhadli funkci intenzity prvního řádu $\lambda(w)$, odhad budeme značit $\hat{\lambda}(w)$, pomocí vyhlazovacího jádra $K(u|x)$, konkrétně vztahem

$$\hat{\lambda}(w) = \sum_{i=1}^n K(w|x_i), \quad w \in L. \quad (3.1)$$

Poznámka. Vztah (3.1) byl uveden v článku McSwiggan a kol. (2017). Podrobně představujeme motivaci jádrových odhadů funkce intenzity prvního řádu, neboť chceme, aby již nyní čtenář pochopil důležitost integrace funkce $K^D(u|x)$ přes lineární síť na jedničku.

Očekávaný počet bodů bodového procesu \mathbf{X} na lineární síti L vyjadřuje integrál $\int_L \lambda(w) dw$. Chtěli bychom, aby se zachovala hmota v odhadu (3.1) a aby vyhlazovací jádro umístěné do jednotlivých pozorovaných bodů $x_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, bylo pravděpodobnostní hustotou, zejména aby $\int_L K(w|x_i) dw = 1$. Tedy chtěli bychom, aby $\int_L \hat{\lambda}(w) dw$ se rovnal pozorovanému počtu bodů bodového procesu \mathbf{X} na lineární síti L .

Funkce $K^D(u|x)$, kterou budeme později definovat, bude vyhlazovacím jádrem. V této kapitole vyslovíme dvě věty představující kritérium, kdy se funkce $K^D(u|x)$ na lineární síti L naintegruje na jedničku. Již nyní zmíníme, že bude záležet, na volbě lineární sítě L . Tedy funkce $K^D(u|x)$ bude tvořit vhodný nástroj pro odhad funkce intenzity prvního řádu.

3.1 Lineární síť bez cyklů délky kratších než šířka jádra

V této sekci budeme předpokládat, že na lineární síti L neexistuje cyklus délky kratší než šířka jádra $2h$. Jedním ze stěžejních pojmů této sekce bude

funkce $K^D(u|x)$. Jedním z hlavních cílů této sekce bude vyslovit větu představující kritérium, kdy se funkce $K^D(u|x)$ na lineární síti bez cyklů délky kratších než šířka jádra naintegruje na jedničku. V textu McSwiggan a kol. (2017) byla funkce $K^D(u|x)$ definována na straně 7 způsobem, který v sobě, dle našeho názoru, přehledně nezahrnoval všechny možné situace. Proto si nejprve budeme definovat váhovou funkci v definici 26, a teprve pomocí ní budeme definovat samotnou funkci $K^D(u|x)$. Připomeneme, že vrchol lineární sítě L se nazývá koncový, pokud je jeho stupeň roven jedné. Tento pojem jsme již uvedli v definici 3. Pro tuto sekci byl hlavním zdrojem definic McSwiggan a kol. (2017).

Definice 26 (Váhová funkce). *Bud L lineární síť neobsahující cykly délky kratší než šířka jádra $2h$. Uvažujme body $u, x \in L$. Je-li $x \in L$ vrchol, potom stupeň vrcholu x budeme značit symbolem m_0 . Jsou-li na cestě mezi $u, x \in L$, kromě u a x , vrcholy V_1, V_2, \dots, V_p , $p \in \mathbb{N}$, pak symbolem m_i , $i = 1, 2, \dots, p$, budeme značit jejich stupně. Pokud $d_L(u, x) < h$, potom v bodě $u \in L$ vzhledem k bodu $x \in L$ definujeme váhovou funkci $M(u, x)$ předpisem*

$$M(u, x) = \begin{cases} \frac{m_0(m_1-1)\cdots(m_p-1)}{2}, & \text{pokud cesta mezi } u \text{ a } x \text{ vede přes vrcholy} \\ & \text{a je-li } x \text{ vrchol sítě } L, \text{ avšak ne koncový,} \\ (m_1 - 1) \cdots (m_p - 1), & \text{pokud cesta mezi } u \text{ a } x \text{ vede přes vrcholy} \\ & \text{a není-li } x \text{ vrchol sítě } L, \text{ anebo} \\ & \text{je } x \text{ koncovým vrcholem,} \\ \frac{m_0}{2}, & \text{pokud cesta mezi } u \text{ a } x \text{ nevede přes} \\ & \text{žádné vrcholy a je-li } x \text{ vrchol sítě } L, \\ 1, & \text{pokud cesta mezi } u \text{ a } x \text{ nevede přes} \\ & \text{žádné vrcholy a není-li } x \text{ vrchol sítě } L. \end{cases}$$

Pokud $d_L(u, x) \geq h$, pak definujeme $M(u, x) = 1$.

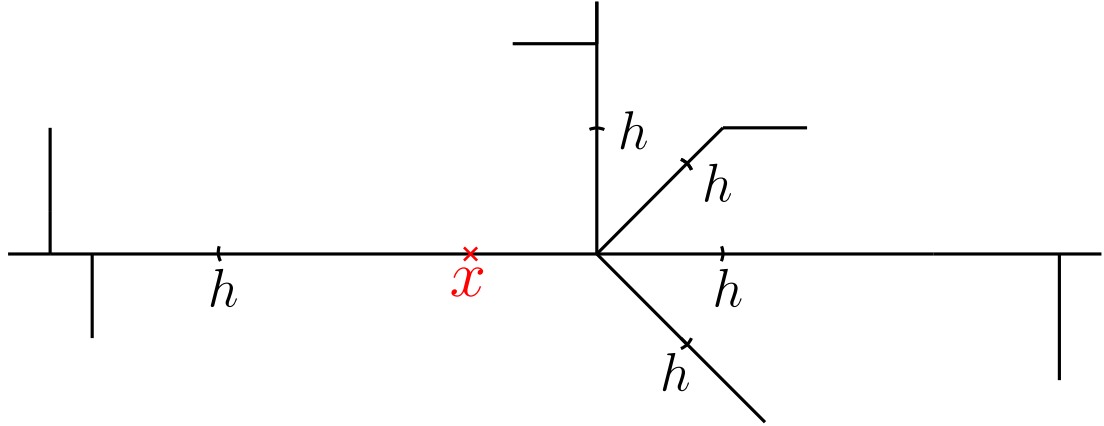
Definice 27 (Funkce $K^D(u|x)$). *Bud L lineární síť neobsahující cykly délky kratší než šířka jádra $2h$. Uvažujme body $u, x \in L$. V bodě $u \in L$ vzhledem k bodu $x \in L$ definujeme funkci $K^D(u|x)$ předpisem*

$$K^D(u|x) = \frac{k(d_L(x, u))}{M(u, x)},$$

kde $k(t), t \in \mathbb{R}$ je funkce z definice 21 splňující body: 1, 2, 3 a 5.

Poznámka. Pokud $d_L(u, x) \geq h$, potom platí $K^D(u|x) = 0$. Zmíněné pozorování je okamžitým důsledkem bodu 3 z definice 21.

Poznámka. Funkce $K^D(u|x)$ z definice 27 výše se v článcích McSwiggan a kol. (2017) a Sugihara a kol. (2010) nazývá Equal split discontinuous kernel. Avšak my ji budeme nazývat pouze funkcí $K^D(u|x)$, neb by mohlo být pro čtenáře matoucí, že nese v sobě název jádrové funkce. V sekci 3.2 budeme funkci $K^D(u|x)$ značit $\tilde{K}^D(u|x)$.



Obrázek 3.1: Lineární síť L není h -omezená, body sítě L ve vzdálenosti přesně h od středu x jsou označeny symbolem h .

Chtěli bychom si vyslovit nejdůležitější větu této sekce představující kritérium, kdy se funkce $K^D(u|x)$ na lineární síti bez cyklů délky kratších než šířka jádra $2h$ naintegruje na jedničku. Nejprve si zavedeme několik definic, které budou užitečné a používané v důkazu zmíněné věty.

Definice 28 (h -omezená lineární síť). *Nechť lineární síť L neobsahuje cykly délky menší než šířka jádra $2h$. Řekneme, že lineární síť L je h -omezená, pokud obsahuje pouze body $s \in L$ splňující $d_L(x, s) \leq h$ pro nějaký bod $x \in L$.*

Definice 29 (Střed h -omezené lineární sítě). *Na h -omezené lineární síti L definujeme střed sítě L jako bod $x \in L$ splňující $d_L(x, s) \leq h$ pro každý koncový vrchol $s \in L$, přičemž pro alespoň jeden koncový vrchol $s \in L$ platí $d_L(x, s) = h$.*

Poznámka. Pojem střed h -omezené lineární sítě nachází své uplatnění pro dostatečně velké lineární síť. Takovou situaci lze pozorovat na obrázku 3.1. My tohoto pojmu užíváme hlavně v důkazu věty 5. Považujeme za vhodné zmínit, že je možné mít h -omezenou lineární síť, která neobsahuje žádný střed. To nastává v situaci, kdy je lineární síť až tak malá, že není možné na ní zvolit žádný bod, jehož vzdálenost od nějakého koncového vrcholu lineární sítě by byla přesně konstanta h .

Definice 30 (Zatáčka na h -omezené lineární síti). *Řekneme, že na h -omezené lineární síti L je ve vrcholu V zatáčka, pokud $\deg(V) = 2$ a obě dvě navzájem různé největší možné úsečky s koncovým bodem V obsažené v h -omezené lineární síti L se liší orientací svých normálových vektorů.*

Definice 31 (Větvení na h -omezené lineární síti). *Řekneme, že na h -omezené lineární síti L probíhá ve vrcholu V větvení, pokud $\deg(V) > 2$.*

Poznámka. Komplement k množině A budeme značit A^C .

Až na menší odlišnosti je znění následující věty formulováno jako Lemma 1 v textu McSwiggan a kol. (2017). V textu McSwiggan a kol. (2017) nebyl uveden důkaz. Vyslovíme silnější a pečlivější verzi věty. V našem případě budeme uvažovat neostrou nerovnost, nikoli ostrou nerovnost, v množině L'_h u konstanty h .

Detailněji uvedeme samotnou množinu L'_h . Dovolili jsme si chybějící důkaz doplnit, abychom ověřili platnost znění věty 5. Důkaz bude navíc doplněn množstvím názorných obrázků, které jsme vytvořili pro lepší orientaci a přehlednost v důkazu. Zmíníme, že v obrázcích budeme znázorňovat střed sítě a pouze ty vrcholy lineární sítě, které budou spojené s myšlenkou, jež by měl obrázek vyjadřovat. Ve znění následující věty budeme lineární síť značit symbolem L' . Rozhodli jsme se tak, protože v průběhu důkazu symbolem L budeme značit jinou lineární síť, pro samotný důkaz podstatnější.

Věta 5 (Kritérium integrace funkce $K^D(u|x)$ na jedničku). *Bud' L' lineární síť, která neobsahuje cykly délky menší než šířka jádra $2h$. Necht' R je množina všech koncových vrcholů lineární sítě L' . Potom funkce $K^D(u|x)$, kde $x \in L'$, splňuje*

$$\int_{L'} K^D(u|x) du = 1$$

právě tehdy, když $x \in L'_h$, kde $L'_h = \{u \in L' : d_{L'}(u, v) \geq h, \forall v \in R\}$ pro $R \neq \emptyset$ a $L'_h = L'$ pro $R = \emptyset$.

Důkaz. Mějme zadanou lineární síť L' a šířku jádra $h > 0$, chceme dokázat, že pro $x \in L'$ platí $\int_{L'} K^D(u|x) du = 1$ právě tehdy, když $x \in L'_h$.

" \Leftarrow ": Předpokládejme, že $x \in L'_h$. Rozepíšeme si funkci $K^D(u|x)$ do užitečnějšího tvaru

$$\begin{aligned} \int_{L'} K^D(u|x) du &= \int_0^\infty \sum_{\substack{u \in L' : \\ d_{L'}(x, u) = t}} K^D(u|x) dt = \int_0^\infty \sum_{\substack{u \in L' : \\ d_{L'}(x, u) = t}} \frac{k(d_{L'}(x, u))}{M(u, x)} dt = \\ &= \int_0^\infty \sum_{\substack{u \in L' : \\ d_{L'}(x, u) = t}} \frac{k(t)}{M(u, x)} dt. \end{aligned}$$

V první rovnosti jsme využili větu 1, abychom získali užitečnější vyjádření integrálu. Ve druhé rovnosti jsme rozepsali funkci $K^D(u|x)$. V poslední rovnosti jsme uplatnili vztah uvedený pod sumou. Z předpokladu, že na L' není cyklus délky menší než šířka jádra $2h$, ihned plyne, že existuje jednoznačně určená nejkratší cesta mezi body $u, x \in L'$ tak, že $d_L(u, x) < h$. Z definice 21 víme, že k je hustota a je symetrická kolem počátečního bodu. Dále z definice 21 z bodu 3 platí $k(s) = 0$ pro každý bod $s \in L'$, který splňuje $d_{L'}(x, s) \geq h$. Proto si můžeme omezit lineární síť L' tak, že bude obsahovat pouze body $s \in L'$ splňující $d_{L'}(x, s) \leq h$. Tuto h -omezenou lineární síť budeme značit L . Všechny koncové vrcholy sítě L budou přesně ve vzdálenosti h od středu x . Z uvedeného plynou následující rovnosti

$$\int_{L'} K^D(u|x) du = \int_L K^D(u|x) du = \int_0^\infty \sum_{\substack{u \in L : \\ d_L(x, u) = t}} \frac{k(t)}{M(u, x)} dt. \quad (3.2)$$

Dále bude důkaz založen na matematické indukci podle počtu větvení realizovaných na lineární síti L . Zavedeme značení, které budeme v průběhu důkazu používat.



Obrázek 3.2: Lineární síť L bez větvení.

1. V_1 bude značit vrchol lineární sítě L , ve kterém probíhá větvení a který navíc splňuje, že síťová vzdálenost $d_L(x, V_1)$ je největší možná,
2. $V_i, i = 2, 3, 4, \dots$ značí vrcholy na lineární síti L stupně vyššího než 2 v pořadí, v jakém vedou na cestě mezi vrcholem $V_1 \in L$ a středem $x \in L$, přičemž vrchol V_2 je nejbližší vrchol k vrcholu V_1 ,
3. $t_i = d_L(x, V_i), i = 1, 2, \dots,$
4. $t_{i-1} - t_i = \begin{cases} d_L(x, V_{i-1}) - d_L(x, V_i) = d_L(V_{i-1}, V_i), & \text{pro } i = 2, 3, \dots, \\ h - d_L(x, V_i), & \text{pro } i = 1, \end{cases}$
5. $A_i = \{s \in L: s \succ^x V_i, d_L(s, V_i) \leq t_{i-1} - t_i\}$, kde $s \succ^x V_i$ značí, že $d_L(x, s) > d_L(x, V_i), i = 1, 2, \dots,$ cesta mezi s a x prochází přes vrchol V_i .

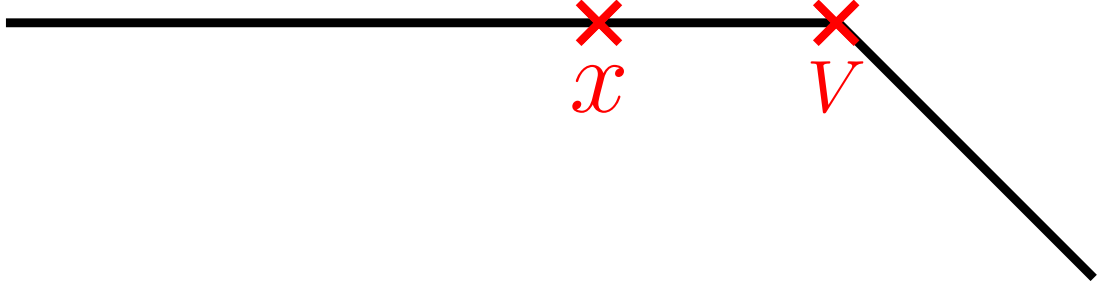
Poznamenejme, že pro funkci $K^D(u|x)$, speciálně pro váhovou funkci $M(u, x)$, jsou důležité pouze vrcholy stupně vyššího než 2, a proto jsme zavedli značení vrcholů $V_i, i = 1, 2, \dots,$ pouze stupně vyššího než 2. Takové pozorování plyne ihned z definice 26, protože v ní vrcholy stupně 2 kromě středu $x \in L$ přispívají do součinnu hodnotou 1. Tedy situace, kdy v některém z vrcholů lineární sítě je zatáčka, nejsou pro důkaz důležité, ale je dobré si uvědomit, že mohou nastat.

Počet větvení na lineární síti L budeme označovat indexem j . Nejprve dokážeme situaci pro $j = 0$, tedy když lineární síť L neobsahuje žádné větvení. Pak L bude tvaru, jež ukazuje obrázek 3.2, či obrázek 3.3. Počítejme

$$\begin{aligned} \int_L K^D(u|x) du &= \int_0^\infty \mathbb{1}\{0 < t \leq h\} \sum_{\substack{u \in L: \\ d_L(x, u) = t}} \frac{k(t)}{M(u, x)} dt = \int_0^h \frac{2k(t)}{1} dt = \\ &= 2 \int_0^h k(t) dt = 2 \int_0^\infty k(t) dt = \int_{\mathbb{R}} k(t) dt = 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

První rovnost platí, jelikož všechny body z L mají vzdálenost od středu x nejvýše h a využívám dále vztahu (3.2). Druhá rovnost platí, neboť v integrálu jsou právě 2 sčítance, jeden určuje pozici bodu u od středu x ve vzdálenosti t napravo od x , kdežto druhý určuje pozici bodu u^* od středu x ve vzdálenosti t nalevo od x . Navíc obě nejkratší cesty mezi jednak u, x , jednak u^*, x neprocházejí žádným vrcholem stupně vyššího než 2, a proto z definice 26 platí $M(u, x) = M(u^*, x) = 1$. V neposlední řadě z definice 21 z bodu 3 platí $k(s) = 0$ pro každou konstantu s splňující $s \geq h$, proto můžeme mez integrálu prodloužit až do ∞ . Dokázali jsme, že pro lineární síť L neobsahující větvení platí rovnost

$$\int_L K^D(u|x) du = 1.$$



Obrázek 3.3: Lineární síť L bez větvení, ve vrcholu V je zatáčka.

Nyní předvedeme případ pro lineární síť L obsahující právě jedno větvení, tedy $j = 1$. Najdeme právě jeden vrchol, v němž probíhá větvení. Označíme ho V_1 . Podrobně objasníme oba možné případy.

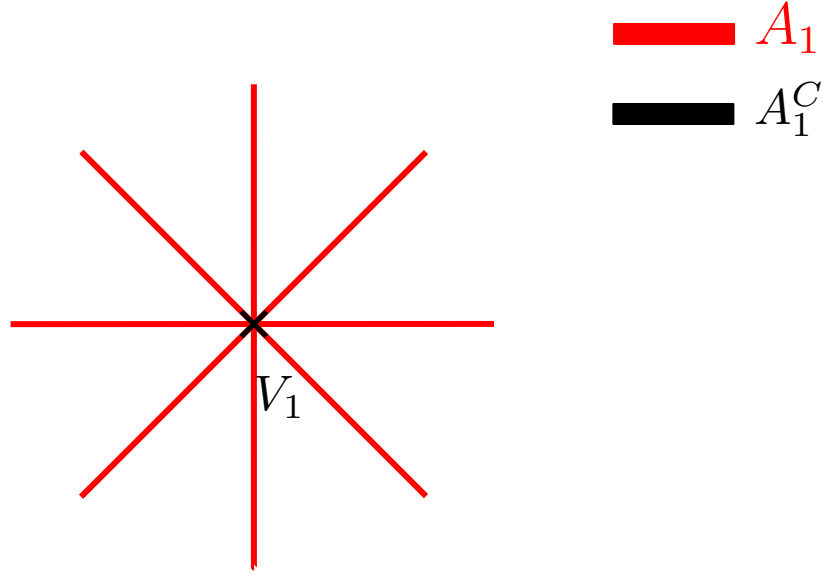
Nejdříve uvažujme $x = V_1$, a tedy ve středu x sítě L probíhá větvení. Takovou situaci lze pozorovat na obrázku 3.4, kde množina A_1 je označena červenou barvou. A_1^C obsahuje pouze vrchol V_1 . Všimněme si, že v této situaci platí $t_1 = 0$. Počítejme

$$\begin{aligned} \int_L K^D(u|x) du &= \int_{A_1} K^D(u|x) du + \int_x K^D(u|x) du = \int_{A_1} K^D(u|x) du = \\ &= \int_0^\infty \mathbb{1}\{0 < t \leq h\} \sum_{\substack{u \in A_1: \\ d_L(x,u)=t}} \frac{k(t)}{M(u,x)} dt = \\ &= \int_0^h \frac{[\deg(V_1)] k(t)}{\deg(V_1)/2} dt = \int_0^h 2k(t) dt = 1. \end{aligned}$$

V první rovnosti jsme využili rozkladu lineární sítě L na části A_1 a A_1^C , kde $A_1^C = \{x\} = \{V_1\}$. Integrál přes jeden bod (střed x) je podle Hausdorffovy míry \mathcal{H}^0 roven nule. Třetí rovnost platí, jelikož všechny body $z \in A_1$ mají vzdálenost od středu x nejvýše h . V třetí rovnosti jsme ještě využili vztahu (3.2). V předposlední rovnosti využíváme faktu, že máme právě $[\deg(V_1)]$ sčítanců. Z definice 26 dostáváme $M(u,x) = [\deg(V_1)]/2$, protože jakákoli cesta mezi bodem $u \in A_1$ a středem x nevede přes žádné vrcholy stupně vyššího než 2 a střed x je vrcholem V_1 , v němž probíhá jediné větvení lineární sítě L . V poslední rovnosti využívám stejnou argumentaci jako v závěru rovností (3.3). Tedy pro větvení realizovaném ve středu x sítě L nebylo potřeba využít indukčního předpokladu. Avšak v dalším případě již indukční předpoklad zapotřebí bude.

Nyní uvažujme případ, že ve středu x sítě L neprobíhá větvení, a tedy právě jedno větvení se realizuje v jiném bodě sítě L než ve středu x . Přesně takovou situaci ukazuje obrázek 3.5. Nyní počítejme

$$\begin{aligned} \int_{A_1} K^D(u|x) du &= \int_0^\infty \mathbb{1}\{0 < t \leq h - t_1\} \sum_{\substack{u \in A_1: \\ d_L(x,u)=t+t_1}} \frac{k(t+t_1)}{M(u,x)} dt = \\ &= \int_{t_1}^h \frac{[\deg(V_1) - 1] k(z)}{\deg(V_1) - 1} dz = \int_{t_1}^h k(z) dz. \end{aligned}$$



Obrázek 3.4: Ve středu x lineární sítě L probíhá větvení, A_1^C obsahuje pouze vrchol V_1 , tedy $A_1^C = \{V_1\}$.

První rovnost platí využitím vztahu (3.2). Jelikož uvažujeme pouze body $u \in A_1$, tak jejich vzdálenost musí být od středu x nejvýše $t + t_1$. Všechny body z A_1 mají vzdálenost od vrcholu V_1 nejvýše $h - t_1$. Z vrcholu V_1 je vzdálenost ke středu x přesně t_1 . Druhá rovnost platí, jelikož máme právě $[\deg(V_1) - 1]$ sčítanců. Použili jsme ještě substituci $z = t + t_1$. V A_1 existuje právě $[\deg(V_1) - 1]$ navzájem různých úseček s koncovým bodem V_1 o délce $h - t_1$. Na kterýkoli bod z jedné z možných úseček vede nejkratší cesta ze středu x právě přes jeden vrchol stupně vyššího než 2, přes vrchol V_1 , proto z definice 26 platí $M(u, x) = [\deg(V_1) - 1]$.

Nyní nahradíme A_1 úsečkou s koncovým bodem V_1 délky $h - t_1$, budeme ji značit U_1 , navazující na část A_1^C lineární sítě L tak, aby úsečka U_1 měla stejný normálový vektor jako jedna z úseček z A_1 . Nově vzniklou lineární síť budeme značit $L_{nová}$. Tuto situaci popisuje obrázek 3.6. Navíc platí

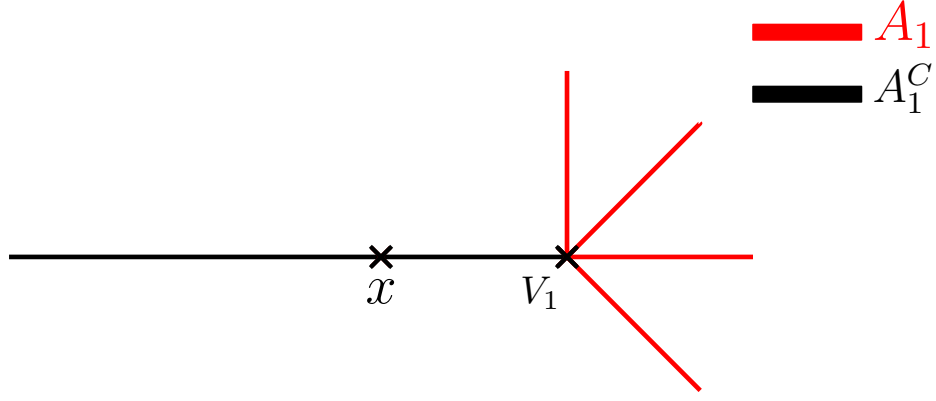
$$\int_{U_1} K^D(u|x) du = \int_{t_1}^h k(t) dt = \int_{A_1} K^D(u|x) du. \quad (3.4)$$

Počítejme

$$\begin{aligned} \int_L K^D(u|x) du &= \int_{A_1} K^D(u|x) du + \int_{A_1^C} K^D(u|x) du = \\ &= \int_{U_1} K^D(u|x) du + \int_{A_1^C} K^D(u|x) du = \\ &= \int_{L_{nová}} K^D(u|x) du = 1. \end{aligned}$$

V první rovnosti jsme využili linearitu integrálu a rozkladu L na dvě disjunktní části A_1, A_1^C . Ve druhé rovnosti jsme uplatnili vztah (3.4). Poslední rovnost plyne z indukčního předpokladu pro $j = 0$, protože $L_{nová}$ neobsahuje žádné větvení.

Nakonec ukážeme indukční krok pro obecnou situaci. Mějme h -omezenou lineární síť L se středem v bodě x a šířkou jádra $2h$. Předpokládejme nyní, že



Obrázek 3.5: Právě jedno větvení probíhá mimo střed x sítě L .

$x \in L$ není vrcholem. Necht' lineární síť L obsahuje právě $j + 1$ větvení, $j > 1$. Tato situace je znázorněna na obrázku 3.7 právě pro dvě větvení. Předpokládejme, že pro každou lineární síť L^* se stejným středem x a konstantou h , která obsahuje právě j větvení platí rovnost $\int_{L^*} K^D(u|x) du = 1$. Najdeme vrchol, označíme ho V_1 , ve kterém probíhá větvení, a který navíc splňuje, že síťová vzdálenost $d_L(x, V_1)$ je největší možná. Pokud takových vrcholů bude více, vybereme libovolný z nich.

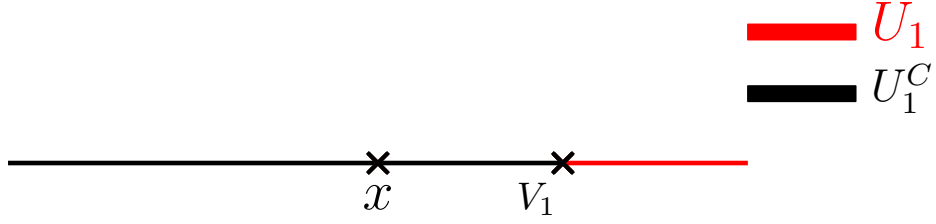
Připomínáme, že V_2, V_3, \dots, V_p budou postupně vrcholy stupně vyššího než 2, přes které vede nejkratší cesta mezi vrcholem V_1 a středem x (vyjma V_1, x). Nyní počítejme

$$\begin{aligned}
\int_{A_1} K^D(u|x) du &= \int_0^\infty \mathbb{1}\{0 < t \leq h - t_1\} \sum_{\substack{u \in A_1: \\ d_L(x,u)=t+t_1}} \frac{k(t+t_1)}{M(u,x)} dt = \\
&= \int_{t_1}^h \frac{[\deg(V_1) - 1] k(z)}{(\deg(V_1) - 1)(\deg(V_2) - 1) \cdots (\deg(V_p) - 1)} dz = \\
&= \int_{t_1}^h \frac{k(z)}{(\deg(V_2) - 1) \cdots (\deg(V_p) - 1)} dz. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

V předchozím výpočtu jsme v první rovnosti použili vztah (3.2). Jelikož uvažujeme pouze body $u \in A_1$, tak jejich vzdálenost musí být od středu x nejvýše $t + t_1$. Všechny body $z \in A_1$ mají vzdálenost od vrcholu V_1 nejvýše $h - t_1$. Z vrcholu V_1 je vzdálenost ke středu x přesně t_1 . V A_1 existuje právě $[\deg(V_1) - 1]$ navzájem různých úseček s koncovým bodem V_1 o délce $h - t_1$. Suma obsahuje právě $[\deg(V_1) - 1]$ sčítanců, což se promítne ve druhé rovnosti společně nahrazením $M(u, x)$ tvarem přímo z definice 26. Ve druhé rovnosti jsme ještě použili substituci $z = t + t_1$.

Nahradíme A_1 úsečkou s koncovým bodem V_1 délky $h - t_1$, budeme ji značit U_1 , navazující na část A_1^C lineární sítě L tak, aby úsečka U_1 měla stejný normálový vektor jako jedna z úseček z A_1 . Nově vzniklou lineární síť budeme značit $L_{\text{nová}}$. Takovou situaci ukazuje obrázek 3.8. Pro U_1 platí následující rovnosti

$$\int_{U_1} K^D(u|x) du = \int_{t_1}^h \frac{k(t)}{(\deg(V_2) - 1) \cdots (\deg(V_p) - 1)} dt = \int_{A_1} K^D(u|x) du.$$



Obrázek 3.6: Nahrazení A_1 úsečkou U_1 pro situaci, kdy právě jedno větvení probíhá mimo střed x sítě L .

Konečně dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned}
\int_L K^D(u|x) du &= \int_{A_1} K^D(u|x) du + \int_{A_1^C} K^D(u|x) du = \\
&= \int_{U_1} K^D(u|x) du + \int_{A_1^C} K^D(u|x) du = \\
&= \int_{L_{nová}} K^D(u|x) du = 1.
\end{aligned}$$

V poslední rovnosti jsme využili indukčního předpokladu, neboť lineární síť $L_{nová}$ obsahuje právě j větvení.

V situaci, kdy střed $x \in L$ je vrcholem sítě L se změnila definice váhové funkce $M(u, x)$ oproti původnímu případu, pro obecnou situaci, kdy střed x nebyl vrcholem sítě L . V takovém případě se použije první situace z definice 26, tedy u vztahu 3.5 ve jmenovateli v součinu přibude člen $\frac{m_0}{2}$. Člen $\frac{m_0}{2}$ se také objeví ve vzorci $\int_{U_1} K^D(u|x) du$ po nahrazení A_1 úsečkou U_1 . Zbytek důkazu by se provedl analogicky jako pro obecnou situaci, kde by střed x nebyl vrcholem sítě L . Tímto je implikace " \Leftarrow " dokázána.

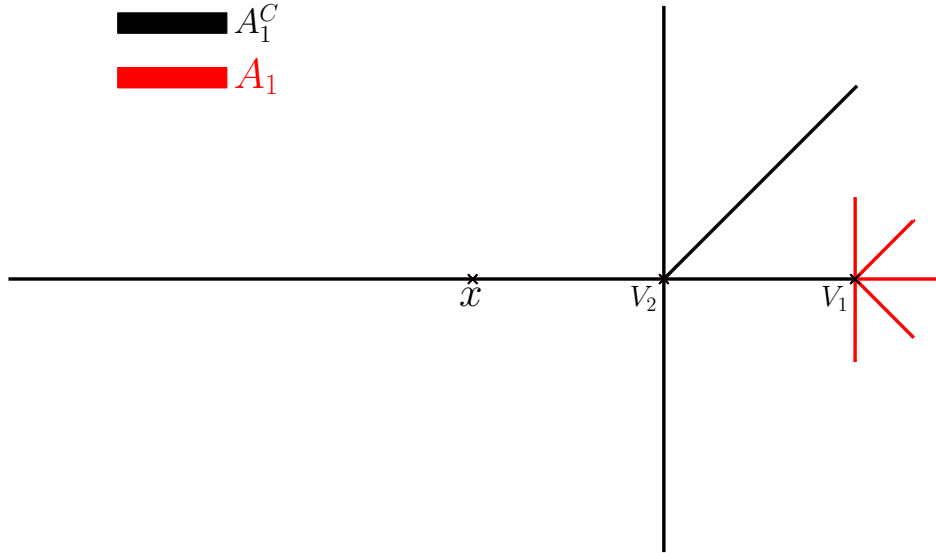
" \Rightarrow ": Danou implikaci dokážeme sporem. Pokud by $x \notin L'_h$, pak by někde nutně chyběla část lineární sítě L' , na které by hustota k (z definice 21) byla kladná. Tedy i funkce $K^D(u|x)$ by byla kladná. Rozšíříme lineární síť L' ve všech koncových vrcholech $y \in L'$ splňujících $d_{L'}(x, y) < h$, budeme ji značit L^{roz} , tak, abychom nevytvořili cyklus a aby platilo $d_{L^{roz}}(x, v) = h$ pro všechny koncové vrcholy $v \in L^{roz}$, kde L^{roz} je množina všech koncových vrcholů lineární sítě L^{roz} . Zmíníme, že lineární síť L' jsme mohli v některých částech omezit. V těchto částech dle bodu 3 z definice 21 by měla funkce $K^D(u|x)$ nulovou hodnotu. Pro lineární síť L^{roz} tedy požadujeme, aby všechny její koncové vrcholy byly přesně ve vzdálenosti h od středu x . Potom platí

$$x \in L_h^{roz} = \{u \in L^{roz} : d_{L^{roz}}(u, v) \geq h, \forall v \in L^{roz}\}.$$

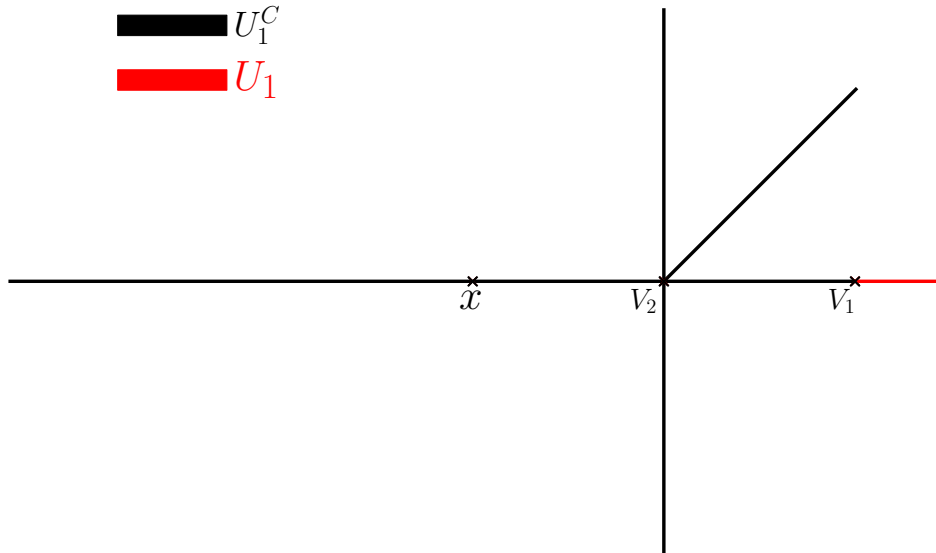
Avšak již z důkazu předchozí implikace jsme pro rozšířenou lineární síť L^{roz} dokázali

$$\int_{L^{roz}} K^D(u|x) du = 1.$$

Tedy přidali jsme části lineární sítě s kladnou Hausdorffovou mírou \mathcal{H}^1 , na kterých má funkce $K^D(u|x)$ kladné hodnoty (z definice 27 a z bodu 3 z definice 21), a tedy integrál $\int_{L^{roz} \setminus L'} K^D(u|x) du$ přes přidané části lineární sítě L^{roz} je kladný.



Obrázek 3.7: Ve vrcholu V_1 se realizuje větvení.



Obrázek 3.8: Nahrazení A_1 úsečkou U_1 .

Dostáváme rovnosti

$$1 = \int_{L^{roz}} K^D(u|x) du = \underbrace{\int_{L^{roz} \setminus L'} K^D(u|x) du}_{>0} + \int_{L'} K^D(u|x) du.$$

Proto původní lineární síť L' před rozšířením musela nutně splňovat

$$\int_{L'} K^D(u|x) du < 1.$$

Zbývá ukázat, že takové rozšíření lze vždy provést. V tvrzení 6 ukážeme, že v každém koncovém vrcholu $y \in L'$, ve kterém jsme provedli rozšíření lineární sítě L' na lineární síť L^{roz} , lze zvolit uzavřenou kouli $B(y, \varepsilon)$ se středem v koncovém vrcholu $y \in L'$ a poloměru $\varepsilon > 0$ tak, aby uzavřená koule $B(y, \varepsilon)$ byla disjunktní s lineární sítí L' bez úsečky obsahující koncový vrchol $y \in L'$. V tvrzení 7 dokážeme, že každá nová část sítě L^{roz} se vejde do uzavřené koule $B(y, \varepsilon)$,

zde již pro $y \in L^{roz}$. Navíc každá nová část L^{roz} vznikne jako sjednocení úseček, které jsou po dvou navzájem různé a každé dvě úsečky mají společný nejvýše jeden bod, a to koncový. Tím je druhá implikace důkazu dokázána. \square

Poznámka. V následujícím tvrzení rozlišíme případ, kdy bychom v předchozí implikaci důkazu rozšiřovali lineární síť L' v koncovém vrcholu $x \in L'$, či v koncovém vrcholu $y \in L'$ a střed $x \in L'$ by nebyl koncovým vrcholem lineární sítě L' .

Tvrzení 6. *Bud' L' lineární síť, která neobsahuje cykly délky menší než šířka jádra $2h$. Necht' $x \in L'$. Pak platí:*

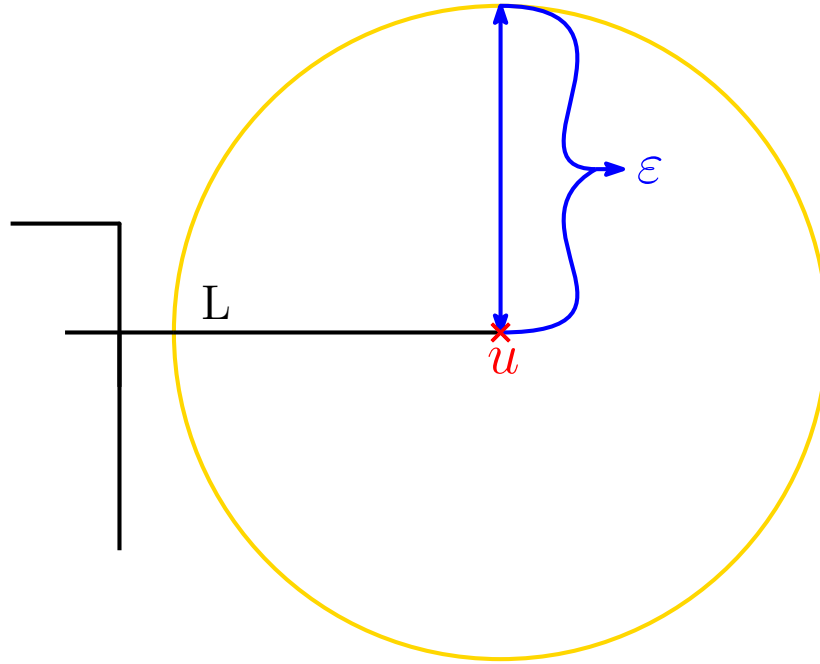
1. *Necht' x není koncovým vrcholem lineární sítě L' a necht' existuje alespoň jeden koncový vrchol $y \in L'$ takový, že $d_{L'}(x, y) < h$. Pak v každém takovém koncovém vrcholu $y \in L'$ lze zvolit uzavřenou kouli $B(y, \varepsilon)$ o poloměru $\varepsilon > 0$, která je disjunktní s $L'_{\text{menší}}$. $L'_{\text{menší}}$ značí lineární síť L' , avšak již neobsahující úsečku lineární sítě L' s koncovým vrcholem y .*
2. *Necht' je x koncovým vrcholem lineární sítě L' a $s \in L'$, $s \neq x$, libovolný koncový vrchol, potom v koncovém vrcholu x lze zvolit uzavřenou kouli $B(x, \varepsilon)$ o poloměru $\varepsilon > 0$ takovou, že je disjunktní s $L'_{\text{malé}}$. $L'_{\text{malé}}$ značí lineární síť L' , avšak již neobsahující úsečku lineární sítě L' s koncovým vrcholem x .*

Důkaz. Argumentace důkazu je pro oba případy identická, avšak liší se značením vrcholů. Pro pohodlí čtenáře důkaz rozdělíme raději opět na dva případy. V obou případech důkaz provedeme sporem.

1. Pokud by taková uzavřená koule $B(y, \varepsilon)$ v koncovém vrcholu y nešla zvolit, pak by nutně platilo, že $\deg(y) > 1$, a tedy vrchol y by nebyl koncový, což je spor s předpokladem tvrzení.
2. Pokud by taková uzavřená koule $B(x, \varepsilon)$ koncového vrcholu x nešla zvolit, pak by nutně platilo, že $\deg(x) > 1$, a tedy vrchol x by nebyl koncový, což je opět spor s předpokladem tvrzení. \square

Tvrzení 7. *Necht' L je lineární síť. Do libovolné uzavřené koule $B(u, \varepsilon)$ se středem v koncovém vrcholu $u \in L$ a poloměrem $\varepsilon > 0$ lze vepsat spojitou křivku libovolné délky. Navíc takovou křivku lze volit tak, aby nevytvořila cyklus ani žádné větvení a aby byla složena pouze z po dvou navzájem různých úseček, kde každé dvě úsečky mají společný nejvýše jeden bod, a to koncový.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti pro celý důkaz uvažujme, že koncový vrchol $u \in L$ má souřadnice $[0; 0]$ v kartézské soustavě souřadnic a uvažujme, že lineární síť v uzavřené kouli $B(u, \varepsilon)$ je úsečkou se souřadnicemi v $[(-\varepsilon, 0]; 0]$. Takovou situaci znázorňuje obrázek 3.9. Definujeme si posloupnost vrcholů $M_k = \left[\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2k}; \frac{\varepsilon(-1)^k}{2} \right]$, $k \in \mathbb{N}$. Nyní si budeme definovat křivku pomocí posloupnosti úseček $[u, M_1]$, $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$, ..., přičemž tato křivka bude mít všechny požadované vlastnosti. Tato křivka bude mít potenciaálně nekonečnou délku, neboť bude kmitat



Obrázek 3.9: Znázornění uzavřené koule $B(u, \varepsilon)$ se středem $u \in L$ a poloměrem ε .

v souřadnici \mathbf{y} libovolněkrát mezi hodnotami $-\frac{\varepsilon}{2}$ a $\frac{\varepsilon}{2}$. Dokonce námi zkonstruovaná křivka pomocí posloupnosti úseček může sloužit jako nová část lineární sítě L .

□

Poznámka. Znění předchozích dvou tvrzení 6, 7 jsme formulovali včetně jejich důkazů pro potřebu důkazu důležité věty 5.

Poznámka. Při konstrukci křivky v předchozím důkazu jsme se nechali inspirovat funkcí $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, která má nekonečně mnoho zákmitů na intervalu $(0, 1)$.

Poznámka. Rádi bychom upozornili na rozdíl mezi značením polohy bodu $[\cdot; \cdot]$ v kartézské soustavě souřadnic a značením úsečky z definice 1 mezi body u, v symbolem $[u, v]$.

3.2 Lineární síť, která může obsahovat cykly

V této sekci zdefinujeme několik pojmů pro lineární síť, která může obsahovat cykly. Speciálně povolujeme, aby lineární síť mohla obsahovat krátké cykly. Připomeneme, že cestu na lineární síti nazveme krátkou, pokud je její délka menší než konstanta h . Krátkým cyklem nazveme cyklus délky menší než h . Obě definice jsme formulovali nad sekci 3.1. Budeme si definovat funkci $\tilde{K}^D(u|x)$, která bude představovat funkci $K^D(u|x)$ pro lineární síť, které mohou obsahovat cykly. Vyslovíme větu představující kritérium, kdy se funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ na lineární síti, která může obsahovat cykly, naintegruje na jedničku. Veškeré definice této sekce budou použity ke zmíněné větě. Pro tuto sekci bude podstatným zdrojem Sugihara a kol. (2010).

Definice 32 (Pomocná funkce $A_{p_i}(x, y)$). *Bud L lineární síť, která může obsahovat cykly. Uvažujme body $x, y \in L$. Bud $P(x, y) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, množina všech krátkých cest z bodu x do bodu y . Pro každou cestu $p_i \in P(x, y)$ mezi body x, y definujme její délku $d_{p_i}(x, y)$. Je-li $x \in L$ vrchol, potom stupeň vrcholu x budeme značit symbolem m_0 . Jsou-li na cestě p_i vrcholy $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$, $s \in \mathbb{N}$, kromě y a x , lineární sítě L , pak jejich příslušné stupně budeme značit $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_s}$. Nechť $M_{p_i}(y, x)$ značí váhovou funkci z definice 26 pro posloupnost vrcholů na cestě p_i , potom definujme pomocnou funkci $A_{p_i}(x, y)$ předpisem*

$$A_{p_i}(x, y) = \frac{k(d_{p_i}(x, y))}{M_{p_i}(y, x)}.$$

Poznámka. V definici 32 označuje $d_{p_i}(x, y)$ síťovou vzdálenost na lineární síti p_i určenou cestou p_i tak, jak byla zavedená v definici 5. To platí, jelikož na takové lineární síti bude právě jedna cesta mezi body x, u , cesta p_i .

Poznámka. Můžeme si všimnout, že pomocná funkce $A_{p_i}(x, y)$ z definice 32 se shoduje s definicí 27 pokud cesta mezi body x, y je jediná krátká.

Nyní uvedeme definici funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ pro lineární síť L , která může obsahovat cykly. Definice v sobě bude zohledňovat veškeré možné krátké cesty vedoucí mezi body x, y .

Definice 33 (Funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ pro lineární síť s cykly). *Bud L lineární síť, která může obsahovat cykly. Definujme funkci $\tilde{K}^D(u|x)$ v bodě $u \in L$ vzhledem k bodu $x \in L$ vztahem*

$$\tilde{K}^D(u|x) = \sum_{p_i \in P(x, u)} A_{p_i}(x, u).$$

Chtěli bychom si vyslovit nejdůležitější větu této sekce představující kritérium, kdy se funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ na lineární síti, která může obsahovat cykly naintegruje na jedničku. Nejprve si připomeňme tři definice z teorie grafů. Všechny tři definice budou použity v důkazu zmíněné věty 8.

Definice 34 (Strom). *Strom je neorientovaný graf, ve kterém jsou libovolné dva vrcholy spojeny právě jednou cestou.*

Definice 35 (Kořenový strom). *Kořenový strom je strom, ve kterém jsme označili jeden vrchol jako kořen.*

Definice 36 (Větev kořenového stromu). *Větev kořenového stromu je jednoznačně určená cesta vedoucí od kořene do koncového vrcholu - listu.*

Věta 8 (Kritérium integrace funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ na jedničku). *Nechť lineární síť L může obsahovat cykly. Nechť R je množina všech koncových vrcholů lineární sítě L . Potom funkce $\tilde{K}^D(u|x)$, kde $x \in L$, splňuje*

$$\int_L \tilde{K}^D(u|x) du = 1$$

právě tehdy, když $x \in L_h$, kde $L_h = \{u \in L : d_L(u, v) \geq h, \forall v \in R\}$ pro $R \neq \emptyset$ a $L_h = L$ pro $R = \emptyset$.

Důkaz. " \Leftarrow ": Předpokládejme, že $x \in L_h$. Nejprve stručně nastíníme hlavní myšlenku důkazu této implikace, která by měla čtenáři poskytnout základní představu a vzhled do samotného důkazu. Pojmy uvedené v hlavní myšlence budou v průběhu důkazu vysvětleny. Chceme si vytvořit novou lineární síť, budeme ji značit $L_{nová}$, takovou, aby všechny cesty mezi body $x \in L$ a $u \in L$ pro vhodné body $u \in L$ splňující, že délka cesty mezi u, x je nejvýše h , na lineární síti L byly shodné s vhodnými cestami na lineární síti $L_{nová}$. Lineární síť L , jak bylo zmíněno v definici 33, může obsahovat cykly. Avšak nově vytvořená lineární síť nebude obsahovat žádné cykly. Speciálně nebude obsahovat žádné krátké cykly. Potom již budeme moci využít věty 5, ze které bude plynout vztah

$$\int_L \tilde{K}^D(u|x) du = 1.$$

Buď $x \in L$ pevně zvolený bod lineární sítě L . Označíme si $P_x = \{p_1, p_2, \dots, p_c\}$, $c \in \mathbb{N}$, množinu všech cest mezi body $x, y \in L$ pro vhodné body $y \in L$ takové, že délka cesty mezi touto dvojicí bodů je přesně konstanta h , kde $2h$ je šířka jádra. Nyní z P_x postupně vytvoříme novou lineární síť $L_{nová}$ v podobě kořenového stromu s kořenem ve vrcholu $x \in L_{nová}$. Nejprve si definujeme, že $L_{nová}^1$ je vytvořená pouze z kořenu x a cesty p_1 . Budeme vytvářet posloupnost lineárních sítí $L_{nová}^1 \subset L_{nová}^2 \subset \dots \subset L_{nová}$ takovou, že budeme postupně rozšiřovat $L_{nová}^{i-1}$, $i = 2, 3, \dots$, o zbylé cesty z P_x dvěma navzájem různými způsoby.

1. Nechť první úsečka cesty p_i , $i = 2, 3, \dots$, není žádná z dosavadních úseček přímo spojených s kořenem $x \in L_{nová}^{i-1}$. Tedy cesta p_i se od ostatních cest z P_x tvořících $L_{nová}^{i-1}$ liší již úplně na svém začátku. Pak cestu p_i přidáme jako novou větev $L_{nová}^{i-1}$ vycházející z kořene $x \in L_{nová}^{i-1}$. Vzniklou lineární síť označíme $L_{nová}^i$.
2. Nechť první úsečka cesty p_i , $i = 2, 3, \dots$, je přímo spojená s kořenem $x \in L_{nová}^{i-1}$. Najdeme první úsečku z cesty p_i , která se liší vůči $L_{nová}^{i-1}$, označíme si ji jako $[a, b]$ a nechť platí $d_{p_i}(x, a) < d_{p_i}(x, b)$. V koncovém bodě a této první lišící se úsečky $[a, b]$ přidáme novou větev ze zbylé cesty p_i , která se liší oproti $L_{nová}^{i-1}$. Vzniklou lineární síť označíme $L_{nová}^i$.

Zmíněnou konstrukcí dostaneme lineární síť $L_{nová}$, která neobsahuje žádné krátké cykly, a tedy ani žádný cyklus délky menší než šířka jádra $2h$. Navíc každá cesta na lineární síti $L_{nová}$ mezi koncovými vrcholy a kořenem $x \in L_{nová}$ má délku přesně konstantu h . Z výše uvedeného jsou ve větě 5 splněny předpoklady implikace " \Leftarrow " a s jejím použitím dostaneme vztah

$$\int_{L_{nová}} K^D(\tilde{u}|x) d\tilde{u} = 1.$$

Pro každý bod $u \in L$ splňující, že délka cesty mezi u, x je nejvýše h , existuje množina bodů $\tilde{U} = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_s\} \in L_{nová}$, kde $s \in \mathbb{N}$, taková, že pro každou jednu cestu $p_{u,j}$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, mezi body $x, u \in L$ délky nejvýše h existuje bod $\tilde{u}_j \in \tilde{U}$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, pro který platí, že cesta mezi kořenem $x \in L_{nová}$ a bodem $\tilde{u}_j \in L_{nová}$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, budeme ji značit $p_{\tilde{u}_j}$, je shodná s cestou $p_{u,j}$ mezi body $x, u \in L$. Pojmeme shodností cest užitého výše je myšleno, že pro cestu $p_{u,j}$ mezi body x, u na lineární síti L existuje cesta $p_{\tilde{u}_j}$ na lineární síti $L_{nová}$

vedoucí z kořene $x \in L_{nová}$ do bodu $\tilde{u}_j \in L_{nová}$ přes stejný počet vrcholů, přičemž vzdálenost mezi jednotlivými vrcholy na cestě $p_{\tilde{u}_j}$ je stejná se vzdálenostmi mezi jednotlivými vrcholy na cestě $p_{u,j}$ a dále délka cest $p_{u,j}$ a $p_{\tilde{u}_j}$ je stejná.

Můžeme si všimnout, že cesta mezi body $x, u \in L$ nemusí být určena jednoznačně, avšak cesta mezi kořenem $x \in L_{nová}$ a bodem $\tilde{u}_j \in L_{nová}$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, již jednoznačně určená být musí. Toto pozorování ihned plyne z konstrukce kořenového stromu při vytváření lineární sítě $L_{nová}$. Dokonce přiřazování cesty $p_{\tilde{u}_j}$ mezi kořenem $x \in L_{nová}$ a bodem $\tilde{u}_j \in \tilde{U}$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, ke shodné patřičné cestě $p_{u,j}$ mezi body $x, u \in L$ nám zajistí, že se každý bod z množiny \tilde{U} využije právě jednou, a tedy $L_{nová}$ je nejmenší možná lineární síť splňující dosavadní úvahy. Předchozí věta nám poskytuje naprosto klíčové pozorování, na kterém bude postaven zbytek důkazu.

Funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ závisí, dle definice 33, pouze a jen na krátkých cestách mezi body $x, u \in L$, a proto jsme mohli uvažovat pouze cesty délky nejvýše h . Z výše uvedeného plyne, že funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ bude nabývat stejné hodnoty mezi body x, u na lineární síti L jako součet funkcí $K^D(\tilde{u}_j|x)$ na lineární síti $L_{nová}$ pro $\tilde{u}_j \in \tilde{U}$, kde $\tilde{U} = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_s\}$. Z předchozích úvah dostaneme následující rovnost

$$\tilde{K}^D(u|x) = \sum_{j=1}^s K^D(\tilde{u}_j|x).$$

Předchozí úvahy platí pro každý bod $u \in L$ a pro každou krátkou cestu mezi body x, u na lineární síti L . Jelikož funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ závisí pouze na krátkých cestách mezi body $x, u \in L$, tak konečně dostaneme rovnosti, z nichž bude implikace " \Leftarrow " dokázána

$$\int_{L_{nová}} K^D(\tilde{u}|x) d\tilde{u} = \int_L \tilde{K}^D(u|x) du = 1.$$

" \Rightarrow ": Danou implikaci dokážeme sporem. Pokud by $x \notin L_h$, pak by někde nutně chyběla část lineární sítě L , na které by hustota k (z definice 21) byla kladná. Tedy i funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ by byla kladná. Rozšíříme lineární síť L ve všech koncových vrcholech $y \in L$ splňujících $d_L(x, y) < h$, budeme ji značit L^{roz} , tak, abychom nevytvořili cyklus a aby platilo $d_{L^{roz}}(x, v) = h$ pro všechny koncové vrcholy $v \in R^{roz}$, kde R^{roz} je množina všech koncových vrcholů lineární sítě L^{roz} . Zmíníme, že lineární síť L jsme mohli v některých částech omezit. V těchto částech dle bodu 3 z definice 21 by měla funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ nulovou hodnotu. Pro lineární síť L^{roz} tedy požadujeme, aby všechny její koncové vrcholy byly přesně ve vzdálenosti h od středu x . Potom platí

$$x \in L_h^{roz} = \{u \in L^{roz} : d_{L^{roz}}(u, v) \geq h, \forall v \in R^{roz}\}.$$

Existenci rozšíření lineární sítě jsme ukázali v důkazu věty 5. Z důkazu předchozí implikace této věty jsme pro rozšířenou lineární síť L^{roz} dokázali

$$\int_{L^{roz}} \tilde{K}^D(u|x) du = 1.$$

Tedy přidali jsme části lineární sítě s kladnou Hausdorffovou mírou \mathcal{H}^1 , na kterých má funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ kladné hodnoty (z definice 27 a dále z bodu 3 z definice 21), a tedy integrál $\int_{L^{roz} \setminus L} \tilde{K}^D(u|x) du$ přes přidané části lineární sítě L^{roz} je

kladný. Proto původní lineární síť L před rozšířením musela nutně splňovat

$$\int_L \tilde{K}^D(u|x) du < 1.$$

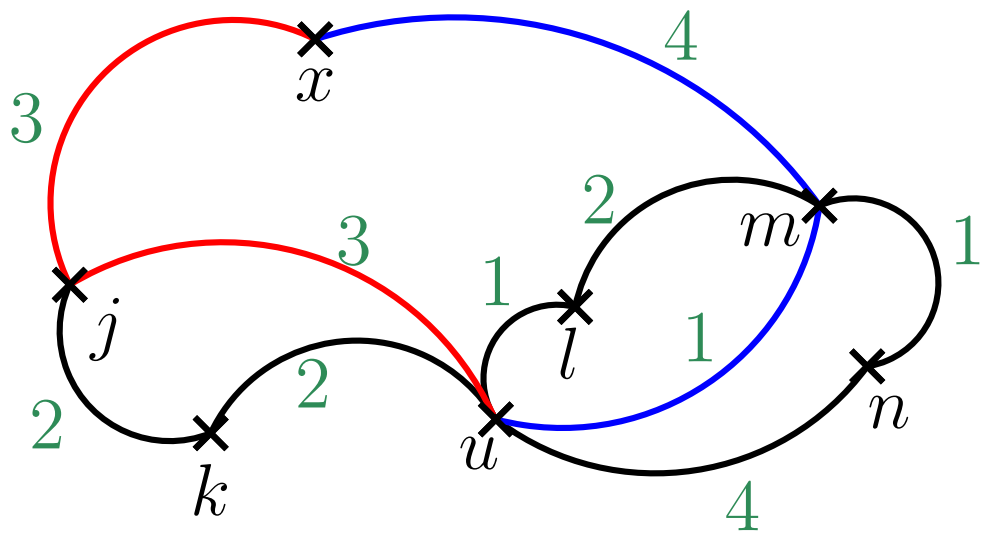
□

Pro získání ještě lepší představy během důkazu věty 8 jsme vytvořili dva barevné obrázky. Obrázek 3.10 znázorňuje schéma reprezentující lineární síť L , která obsahuje cykly. Vrcholy sítě L značíme x, u, j, k, l, m, n . Prohnuté křivky znázorňují cestu mezi jednotlivými vrcholy a čísla udávají délky úseček mezi jednotlivými vrcholy. Zmíníme, že narozdíl od lineární sítě $L_{nová}$ z důkazu věty 8 lineární síť v obrázku 3.11 obsahuje části úseček pod čárkovanou čarou, která znázorňuje h -vzdálené body sítě od kořene x . Uvažujeme konstantu $h = 6$. Části úseček pod čárkovanou čarou jsme v obrázku 3.11 nechali kvůli snadnější orientaci v samotném obrázku. Barevně jsou vyznačeny shodné cesty mezi vrcholy x, \tilde{u}_2 a mezi vrcholy x, \tilde{u}_4 na lineární síti v obrázku 3.11 s příslušnými cestami mezi vrcholy x, u lineární sítě L v obrázku 3.10. Všimněme si, že na lineární síti L v obrázku 3.10 není cesta mezi vrcholy x, u určena jednoznačně, avšak na lineární síti v obrázku 3.11 cesta mezi vrcholy x, \tilde{u}_2 a cesta mezi vrcholy x, \tilde{u}_4 již jednoznačně určená je.

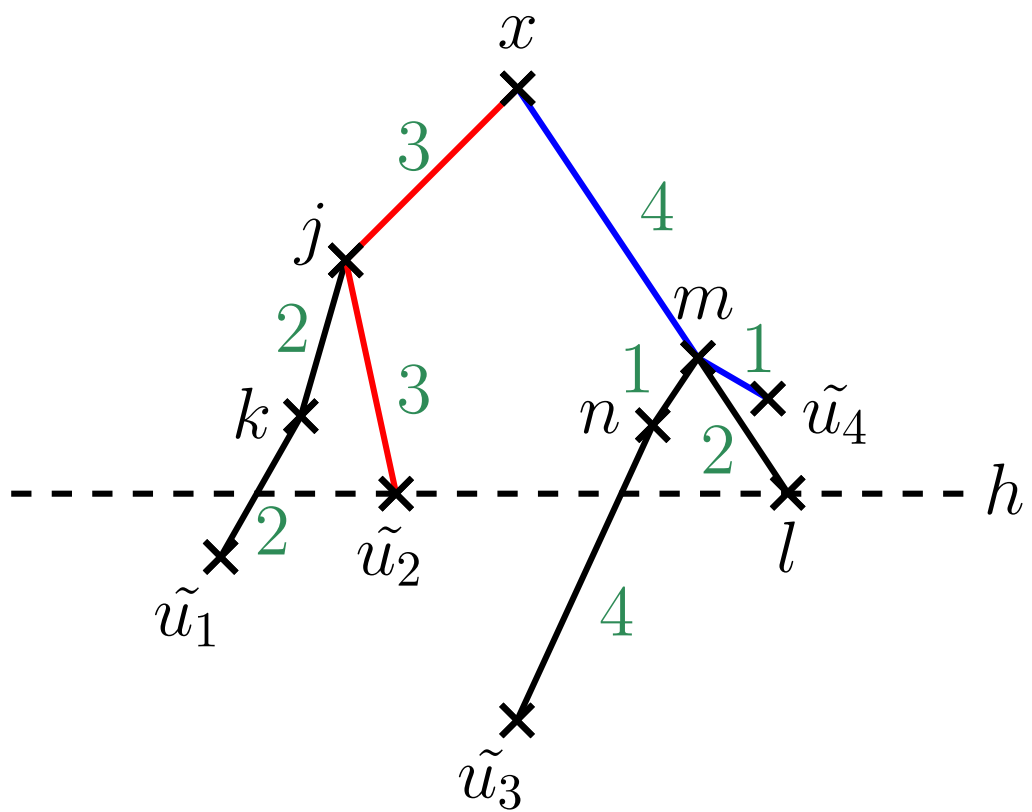
Poznámka. V důkazu věty 8 si můžeme všimnout drobného rozdílu ve značení množiny P_x oproti množině $P(x, y)$, která byla uvedena v definici 27. Všechny cesty z množiny P_x mají délku přesně h , a proto se nejedná o krátkou cestu. Kdežto $P(x, y)$ označuje množinu pouze krátkých cest. Pojem krátké cesty byl zaveden v definici 23.

Poznámka. Narozdíl od námi představené věty 8 byla předchozí věta, avšak v méně pečlivém tvaru, formulována v textu Sugihara a kol. (2010) v tvrzení 3 pod vztahem (11). Její důkaz byl v podobě pro čtenáře, dle našeho názoru, neprůhledný, dostatečně nevysvětlený a nešikovně zpracován. Dokonce jsme názoru, že tvrzení 3 v textu Sugihara a kol. (2010) je chybné. Z těchto důvodů jsme pečlivě formulovali znění věty 8 a uvedli její důkaz, který se v implikaci " \Leftarrow " inspiroval důkazem z tvrzení 3 představeného v textu Sugihara a kol. (2010). V důkazu implikace " \Leftarrow " u věty 8 jsme oproti textu Sugihara a kol. (2010) podrobněji vysvětlili jednotlivé části důkazu a ztvárnili jsme ho do více přehledné podoby. V důkazu věty 8 používáme pojmu shodnosti cest mezi lineárními sítěmi. Tento pojem byl klíčový k celému důkazu zmíněné věty. Formální zavedení takového pojmu by ovšem bylo velmi složité a čtenáře by to jen zmátlo. Přirozená intuice pro interpretaci tohoto pojmu nabízí čtenáři mnohem lepší představu než samotné zavedení definice. Z těchto důvodů jsme se rozhodli pojem shodnosti cest komentovat slovně, avšak nezavádět jeho formální definici.

Poznámka. Domníváme se, že tvrzení 3 v Sugihara a kol. (2010) je chybné, neboť s přihlédnutím ke značení ve větě 8 byla v Sugihara a kol. (2010) uvažována pouze situace, kdy je množina všech koncových vrcholů R lineární sítě L prázdná. Naši domněnku podporuje pozorování, že všechny ilustrační obrázky i argumentace v důkazu tvrzení 3 v Sugihara a kol. (2010) byly pro lineární síť neobsahující žádný koncový vrchol, ačkoli v samotné sekci *iv* v Sugihara a kol. (2010) nebyl předpoklad pouze lineárních sítí bez koncových vrcholů zmíněn.



Obrázek 3.10: Schéma lineární sítě s cykly.



Obrázek 3.11: Schéma lineární sítě vzniklé konstrukcí kořenového stromu.

4. Analýza bodových procesů pomocí obálkových testů

V této kapitole ukážeme praktické použití metod analýzy bodových procesů na lineárních sítích pro dva konkrétní datasety. V sekci 4.1 budeme analyzovat dopravní nehody na úseku dálnice D1 v kraji Vysočina. V takovém případě nebude lineární síť obsahovat žádné větvení. Rádi bychom předvedli i vlastní analýzu bodového procesu pro situaci, kdy lineární síť větvení obsahovat bude. Názorný příklad lineární sítě s větvením mohou být ulice nějakého města, a proto v sekci 4.2 budeme analyzovat zločiny ve městě Chicago z datasetu Chicago Crime Data dostupném pod heslem `chicago` v balíčku `spatstat`. Balíček `spatstat` je pěkně popsán v knize Baddeley a kol. (2015).

Pro zmíněné analýzy budeme používat princip testování Monte Carlo, který má pro testovou statistiku \mathbf{T}_0 vzniklou z pozorovaného bodového vzorku a pro testové statistiky simulované za nulové hypotézy $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_s$, $s \in \mathbb{N}$, p -hodnotu ve tvaru

$$p = \frac{1}{s+1} \sum_{i=0}^s \mathbb{1}\{\mathbf{T}_i \prec \mathbf{T}_0\},$$

kde symbolem $\mathbf{T}_i \prec \mathbf{T}_0$ rozumíme, že pro nějaké uspořádání je \mathbf{T}_i více, anebo stejně extrémní jako \mathbf{T}_0 . Principu testování Monte Carlo využíváme v situaci, kdy rozdělení testové statistiky za nulové hypotézy neznáme analyticky, ale dovedeme z rozdělení za nulové hypotézy simulovat.

K oběma našim analýzám budeme používat globální obálkový test, který bude využívat řazení funkcionálních testových statistik dle kritéria *extreme rank lengths* (ERL) a který je názorně vysvětlen například v článcích Dvořák a Mrkvička (2021), Myllymäki a kol. (2017) nebo Mrkvička a kol. (2017). Dále budeme psát pouze obálkový test. V prostorové statistice je použití globálních obálkových testů standardem, a proto nebudeme podrobně popisovat samotný obálkový test, avšak budeme pouze komentovat naši analýzu ve spojitosti s jeho použitím. Samotné analýzy budeme provádět v programu R a budeme k nim používat balíčky `spatstat` a `GET`. Metodika implementovaná v balíčku `GET` je popsána například v Myllymäki a kol. (2017). Zdrojové kódy z programu R, které budou použity k analýzám, uvedeme v elektronické příloze.

4.1 Analýza výskytu dopravních nehod na D1

V této sekci budeme analyzovat dopravní nehody na úseku dálnice D1 v kraji Vysočina, které se staly od soboty 1. 1. 2022 do soboty 29. 10. 2022 vyjma tří dopravních nehod, o kterých se domníváme, že jsou chybně zaznamenány a zřejmě neleží na dálnici D1. Zdrojem našich dat budou statistické údaje o nehodovosti na území České republiky převzaté od Policie České republiky (2023). Zmíněné tři dopravní nehody, které nebudeme uvažovat, byly v datasetu statistických údajů o nehodovosti uvedeny mezi dopravními nehodami na dálnicích v kraji

Vysočina v řádcích 31, 32 a 62, viz soubor se zdrojovými daty v elektronické příloze této práce.

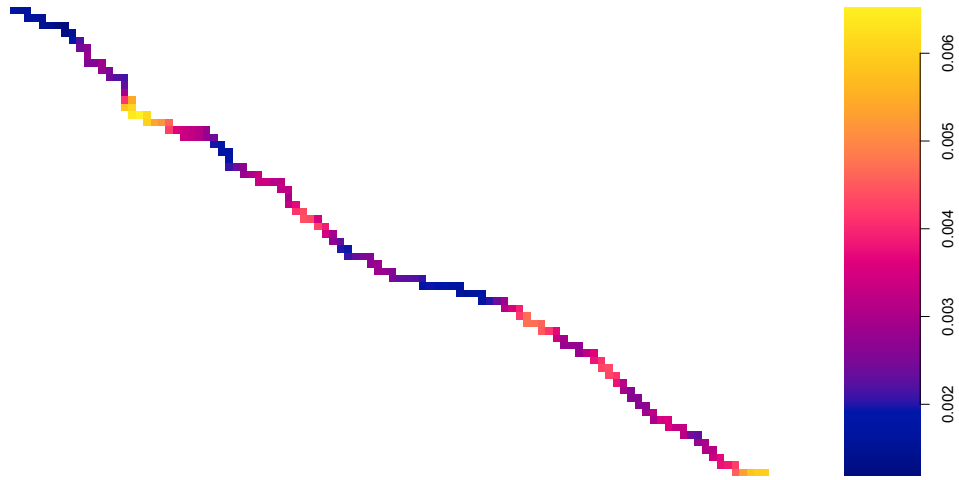
Vytvoříme si lineární síť z polohy zaznamenaných dopravních nehod následujícím způsobem. Nejprve seřadíme zaznamenané dopravní nehody podle jejich polohy. Tyto seřazené dopravní nehody budeme považovat za vrcholy sítě. Každé dva sousední vrcholy propojíme úsečkou, tedy z pohledu grafu hranou. Námi vytvořenou lineární síť budeme značit L . Lineární síť L obsahuje 259 vrcholů a 258 hran. Délka lineární sítě L je přibližně 95 378 metrů. V celé této sekci budeme uvažovat vzdálenosti v metrech.

Na lineární síti L z pozorovaného bodového vzorku \mathbf{x}_0 dopravních nehod, který obsahuje 300 bodů, spočítáme jádrový odhad funkce intenzity prvního řádu. Odhad bude založen na vztahu (3.1). Využijeme příkaz `density.lpp` z balíčku `spatstat` v programu R. Za parametr `sigma` budeme uvažovat konstantu $h = 1750$. Předpokládáme, že možné vzájemné interakce (dané například stavebními pracemi, dočasnými omezeními na vozovce,...) mezi body pozorovaného bodového vzorku \mathbf{x}_0 mají vliv na vzdálenost řádově stovek metrů, a proto jsme zvolili konstantu h způsobem $h = 1750$, abychom zmíněné efekty vyhladili. Můžeme si všimnout, že některé body pozorovaného bodového vzorku \mathbf{x}_0 leží přesně ve stejném místě vlivem zaokrouhlování při záznamu dat, a proto se počet bodů neshoduje s počtem vrcholů lineární sítě L . Dále budeme uvažovat nespojitou verzi odhadu (3.1) pomocí funkce $K^D(u|x)$ z definice 27. Při konstrukci funkce $K^D(u|x)$ použijeme pro funkci k Epanechnikovo jádro. Takto spočítaný odhad budeme značit $\hat{\lambda}(u)$. Odhad $\hat{\lambda}(u)$ pro pozorovaný bodový vzorek dopravních nehod \mathbf{x}_0 na lineární síti L ukazuje obrázek 4.1. Abychom dosáhli přehlednější vizualizace obrázku 4.1, zvolili jsme ještě dodatečný parametr `eps=c(750,750)`, který má vliv na velikost pixelů v obrázku 4.1.

Nyní bychom se chtěli zabývat nehomogenní K -funkcí, respektive jejím odhadem. Nehomogenní K -funkci jsme uvedli v definici 19. Její odhad jsme představili v definici 20. Obrázek 4.2 ukazuje odhad nehomogenní K -funkce $\hat{K}_{LI}^{(0)}(r)$, uvažujeme $r \in [0, 46847]$, počítaný pomocí příkazu `linearKinhom` pro pozorovaný bodový vzorek \mathbf{x}_0 , kde pro parametr `lambda` volíme spočítaný odhad $\hat{\lambda}(u)$. Obrázek 4.2 také ukazuje teoretickou hodnotou nehomogenní K -funkce pro Poissonův bodový proces na lineární síti L . Pohledem na obrázek 4.3 vidíme, že na malé škále se zjevně liší odhad nehomogenní K -funkce $\hat{K}_{LI}^{(0)}(r)$, nyní uvažujeme $r \in [0, 2000]$, od teoretické hodnoty nehomogenní K -funkce pro Poissonův bodový proces na lineární síti L .

Uvažujme, že pozorovaný bodový vzorek \mathbf{x}_0 je realizací bodového procesu \mathbf{X}_0 . Budeme chtít testovat hypotézu, že \mathbf{X}_0 má rozdělení Poissonova procesu na lineární síti L s funkcí intenzity prvního řádu $\hat{\lambda}(u)$. Uvažujme hypotézu a alternativu

1. \mathbf{H}_0 : \mathbf{X}_0 má rozdělení Poissonova bodového procesu na lineární síti L s funkcí intenzity prvního řádu $\hat{\lambda}(u)$,
2. \mathbf{H}_1 : \mathbf{X}_0 nemá rozdělení Poissonova bodového procesu na lineární síti L s funkcí intenzity prvního řádu $\hat{\lambda}(u)$.



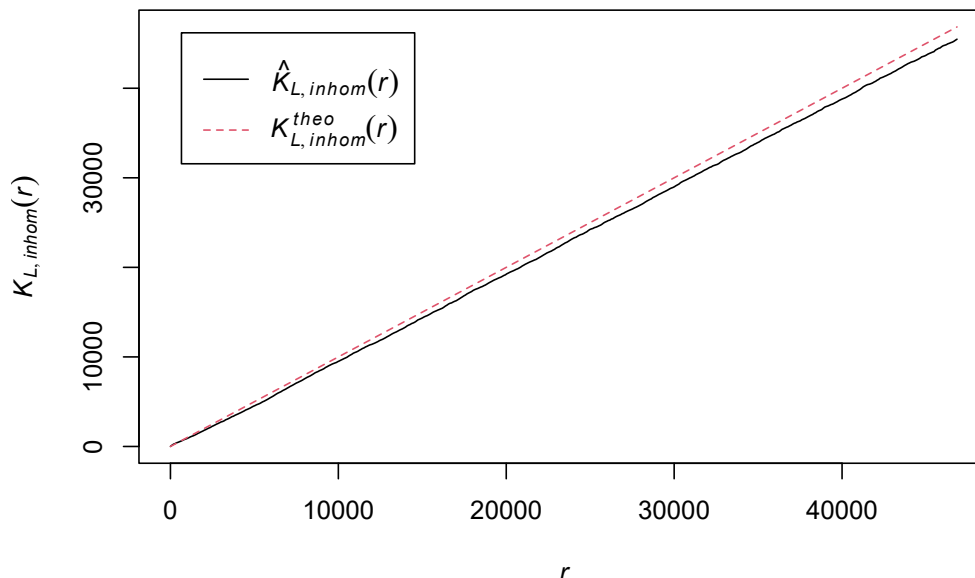
Obrázek 4.1: Jádrový odhad funkce intenzity prvního řádu pro dopravní nehody na úseku dálnice D1 v kraji Vysočina. Barevná škála znázorňuje intenzitu výskytu dopravních nehod na jeden metr délky úseku dálnice D1 v kraji Vysočina.

Budeme chtít zkonstruovat test nulové hypotézy \mathbf{H}_0 proti alternativě \mathbf{H}_1 . Na pozorovaný bodový vzorek \mathbf{x}_0 provedeme obálkový test pro hladinu významnosti $\alpha = 0,05$. Testovou statistiku \mathbf{T}_0 pozorovaného bodového vzorku \mathbf{x}_0 na lineární síti L zvolíme jako $\mathbf{T}_0 = \hat{K}_{LI}^{(0)}(r)$, kde $r \in [0, 2\,000]$. Rozdělení bodového procesu \mathbf{X}_0 za předpokladu platnosti nulové hypotézy \mathbf{H}_0 empiricky aproximujeme simulacemi realizací $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{999}$ vzniklých z rozdělení Poissonova bodového procesu na lineární síti L s funkcí intenzity prvního řádu $\hat{\lambda}(u)$, z nichž spočítáme testové statistiky $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_{999}$. Uvažujeme $\mathbf{T}_i = \hat{K}_{LI}^{(i)}(r)$, pro $i = 1, 2, \dots, 999$ a pro $r \in [0, 2\,000]$.

Budeme zkoumat, zda se testová statistika \mathbf{T}_0 bodového vzorku \mathbf{x}_0 mezi testovými statistikami $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_{999}$ vzniklých ze simulací realizací $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{999}$ jeví jako typická, či zda se jeví jako extrémní. Z $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_{999}$ vybereme 950 nejtypičtějších funkcí, ze kterých se vytvoří obálka pro samotný test. Pokud testová statistika \mathbf{T}_0 bude v obálce, pak prohlásíme testovou statistiku \mathbf{T}_0 za typickou. V takovém případě nebudeme zamítat nulovou hypotézu \mathbf{H}_0 . Jestliže testová statistika \mathbf{T}_0 bude vystupovat z obálky, a tedy nebude patřit mezi 950 nejtypičtějších funkcí, pak testovou statistiku \mathbf{T}_0 budeme považovat za extrémní. V takovém případě budeme zamítat nulovou hypotézu \mathbf{H}_0 ve prospěch alternativy \mathbf{H}_1 .

Testová statistika \mathbf{T}_0 je konstruovaná způsobem, aby byla citlivá na odchylky od poissonovské vlastnosti (interakce), proto případné zamítnutí nulové hypo-

Odhadovaná a teoretická hodnota nehomogenní K-funkce



Obrázek 4.2: Odhadovaná hodnota nehomogenní K -funkce $\hat{K}_{LI}^{(0)}(r)$, uvažujeme $r \in [0, 46\,847]$, pro dopravní nehody na úseku dálnice D1 v kraji Vysočina je znázorněna černou barvou. Teoretická hodnota nehomogenní K -funkce pro Poissonův bodový proces na lineární síti L je znázorněna červenou barvou.

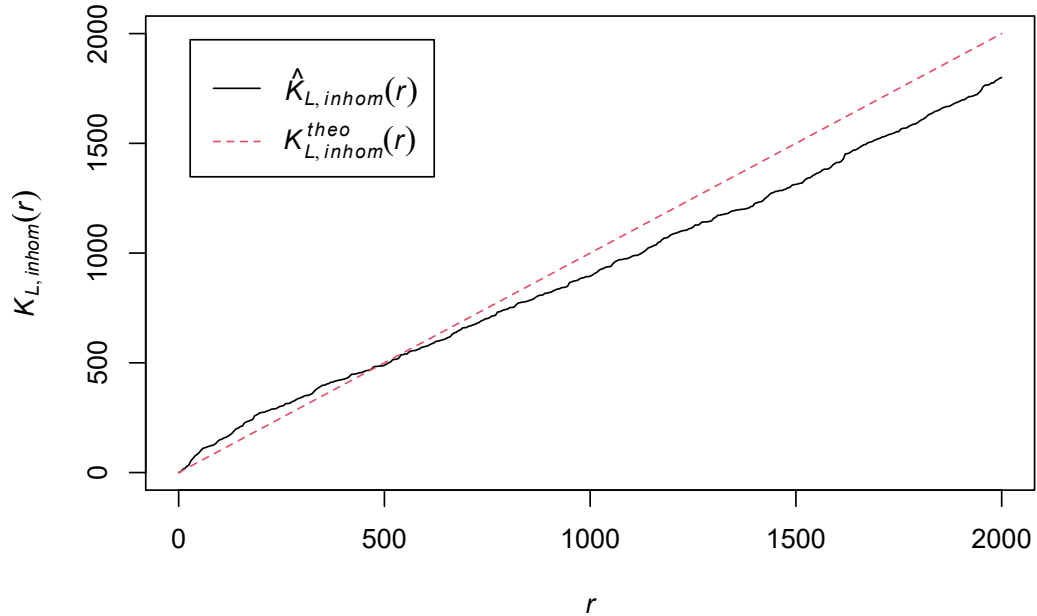
tézy \mathbf{H}_0 budeme interpretovat jako přítomnost interakcí. Pokud se odhad funkce intenzity prvního řádu $\hat{\lambda}(u)$ liší od skutečné funkce intenzity prvního řádu $\lambda(u)$, která by patřila Poissonovu bodovému procesu na lineární síti L , který jsme představili v definici 17, pak může také dojít k zamítnutí nulové hypotézy \mathbf{H}_0 i v případě, že bodový proces \mathbf{X}_0 má rozdělení Poissonova procesu.

Pro naše pozorovaná data vychází p -hodnota obálkového testu 0,01, a proto budeme zamítat nulovou hypotézu \mathbf{H}_0 ve prospěch alternativy \mathbf{H}_1 . Z p -hodnoty vidíme, že testová statistika \mathbf{T}_0 byla 10. nejextrémnější. Za důvod zamítnutí nulové hypotézy \mathbf{H}_0 ve prospěch alternativy \mathbf{H}_1 považujeme přítomnost vzájemných interakcí mezi dopravními nehodami na úseku dálnice D1 v kraji Vysočina, které se nedaly vysvětlit odhadem funkce intenzity prvního řádu $\hat{\lambda}(u)$. Výstup obálkového testu ukazuje obrázek 4.4. Červenou barvou je znázorněna část testové statistiky \mathbf{T}_0 , která vystupuje z obálky, a tedy se v daných místech zřetelně liší od testových statistik tvořící obálku testu.

4.2 Pouliční zločiny ve městě Chicago

V sekci 4.1 jsme si mohli všimnout, že lineární síť neobsahuje žádné větvení. Analýza dopravních nehod v sekci 4.1 by šla provést i pomocí známých postupů bodových procesů v \mathbb{R} . Abychom ukázali praktické použití metod analýzy bodových procesů na lineární síti obsahující větvení, budeme analyzovat zaznamenané

Odhadovaná a teoretická hodnota nehomogenní K-funkce



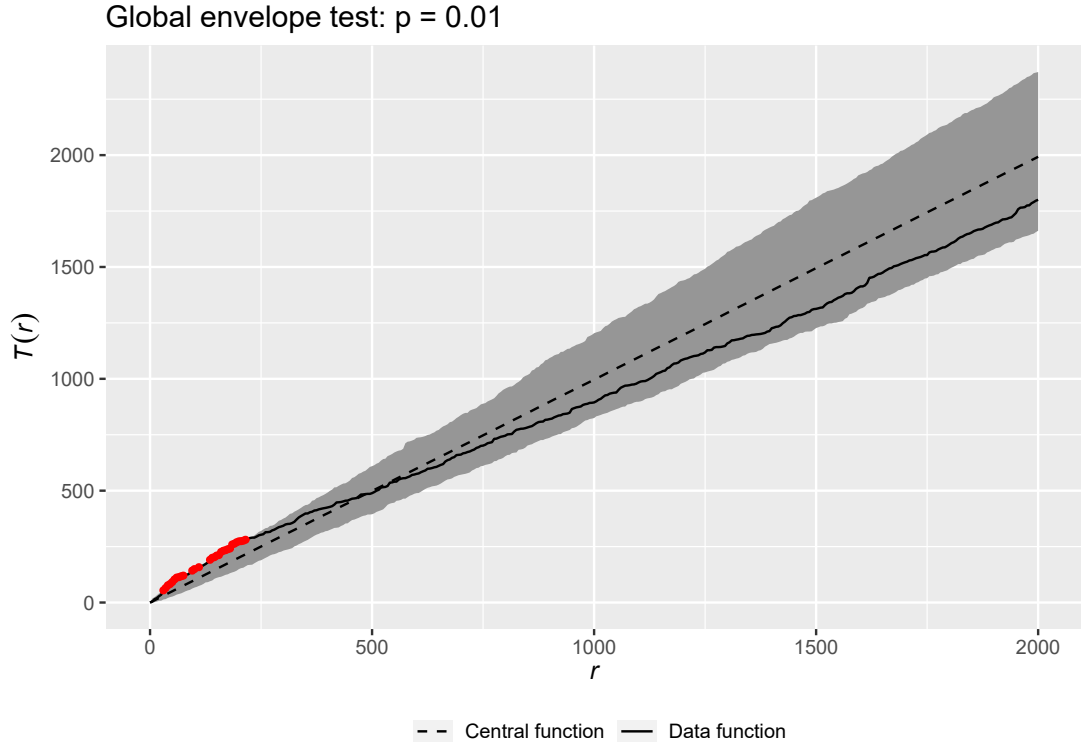
Obrázek 4.3: Odhadovaná hodnota nehomogenní K -funkce $\hat{K}_{LI}^{(0)}(r)$, uvažujeme $r \in [0, 2000]$, pro dopravní nehody na úseku dálnice D1 v kraji Vysočina je znázorněna černou barvou. Teoretická hodnota nehomogenní K -funkce pro Poissonův bodový proces na lineární síti L je znázorněna červenou barvou.

pouliční zločiny ve městě Chicago z datasetu Chicago Crime Data dostupného pod heslem `chicago` v balíčku `spatstat` v programu R, které ukazuje obrázek 4.5. V celé této sekci budeme uvažovat vzdálenosti ve stopách.

Budeme pracovat s lineární sítí, označíme ji L , z datasetu, kterou lze obdržet pomocí příkazu `as.linnet(chicago)`. Lineární síť L má přibližně délku 31 150 stop, obsahuje 338 vrcholů a 503 hran. Pozorovaný bodový vzorek pouličních zločinů \mathbf{x}_0 ve městě Chicago obsahuje 116 bodů a lze ho získat pomocí příkazu `lpp(X=unmark(as.ppp(chicago)), L=as.linnet(chicago))`.

Na lineární síti L z pozorovaného bodového vzorku \mathbf{x}_0 pouličních zločinů spočítáme jádrový odhad funkce intenzity prvního řádu $\hat{\lambda}(u)$ jako v sekci 4.1. Pro parametr `sigma` budeme uvažovat konstantu $h = 151$. Zvolili jsme konstantu $h = 151$ tak, aby byla prostorová škála, na které se mění odhad funkce intenzity prvního řádu $\hat{\lambda}(u)$ srovnatelná s velikostí bloků ve městě Chicago. Opět budeme uvažovat nespojitou verzi odhadu (3.1), avšak nyní již pro funkci $\tilde{K}^D(u|x)$ z definice 33. Při konstrukci funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ použijeme pro funkci k Epanechnikovo jádro. Odhad $\hat{\lambda}(u)$ pro pozorovaný bodový vzorek pouličních zločinů \mathbf{x}_0 na lineární síti L ukazuje obrázek 4.6.

Obrázek 4.7 ukazuje odhad nehomogenní K -funkce $\hat{K}_{LI}^{(0)}(r)$, budeme uvažovat



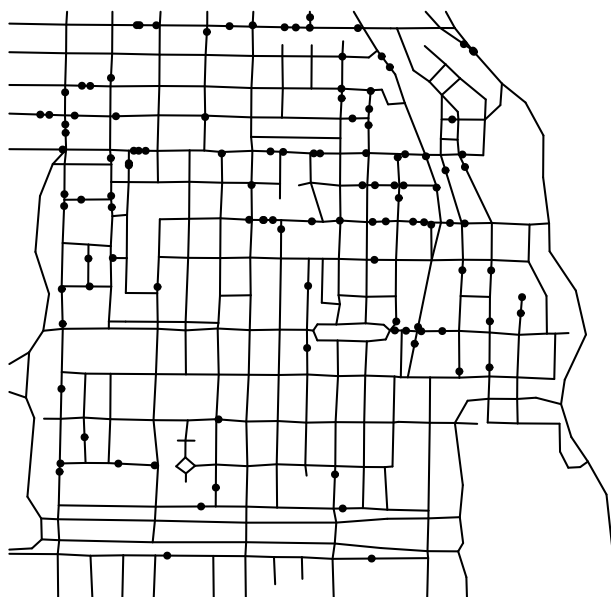
Obrázek 4.4: Obálkový test pro dopravní nehody na úseku dálnice D1 v kraji Vysočina. Uvažujeme $r \in [0, 2000]$.

$r \in [0, 1077]$, počítaný pomocí příkazu `linearKinhom` pro pozorovaný bodový vzorek \mathbf{x}_0 obsahující 116 bodů. Obrázek 4.7 také ukazuje teoretickou hodnotou nehomogenní K -funkce pro Poissonův bodový proces na lineární síti L . Za parametr `lambda` volíme spočítaný odhad $\hat{\lambda}(u)$. Uvažujme nulovou hypotézu \mathbf{H}_0 a alternativu \mathbf{H}_1 jako v sekci 4.1

1. \mathbf{H}_0 : \mathbf{X}_0 má rozdělení Poissonova bodového procesu na lineární síti L s funkcí intenzity prvního řádu $\hat{\lambda}(u)$,
2. \mathbf{H}_1 : \mathbf{X}_0 nemá rozdělení Poissonova bodového procesu na lineární síti L s funkcí intenzity prvního řádu $\hat{\lambda}(u)$.

Rozdělení bodového vzorku \mathbf{X}_0 za předpokladu platnosti nulové hypotézy \mathbf{H}_0 empiricky aproximujeme simulacemi realizací $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{999}$ vzniklých z rozdělení Poissonova bodového procesu na lineární síti L s funkcí intenzity prvního řádu $\hat{\lambda}(u)$, z nichž spočítáme testové statistiky $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \dots, \mathbf{T}_{999}$. Uvažujeme $\mathbf{T}_i = \hat{K}_{LI}^{(i)}(r)$, pro $i = 1, 2, \dots, 999$ a pro $r \in [0, 1077]$.

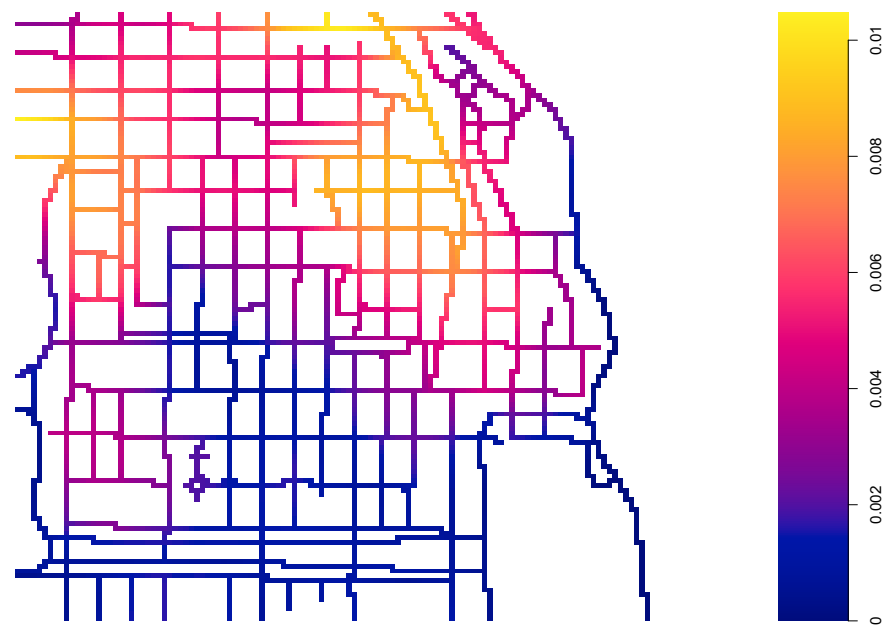
Použijeme obálkový test, jehož výstup ukazuje obrázek 4.8. Z obrázku 4.8 vidíme, že p -hodnota obálkového testu vychází 0,897. Na základě takového výsledku musíme konstatovat, že rozdělení dat není významně odlišné od rozdělení, jaké by měla data za platnosti nulové hypotézy \mathbf{H}_0 , a proto nemůžeme zamítnat nulovou hypotézu \mathbf{H}_0 ve prospěch alternativy \mathbf{H}_1 . Skutečnost, že nemůžeme zamítnat nulovou hypotézu \mathbf{H}_0 ve prospěch alternativy \mathbf{H}_1 lze nahlédnout z obrázku 4.8, jelikož testová statistika \mathbf{T}_0 nevystupuje z obálky, a tedy na obrázku 4.8



Obrázek 4.5: Polohy zaznamenaných pouličních zločinů ve městě Chicago znázorňují tučné body.

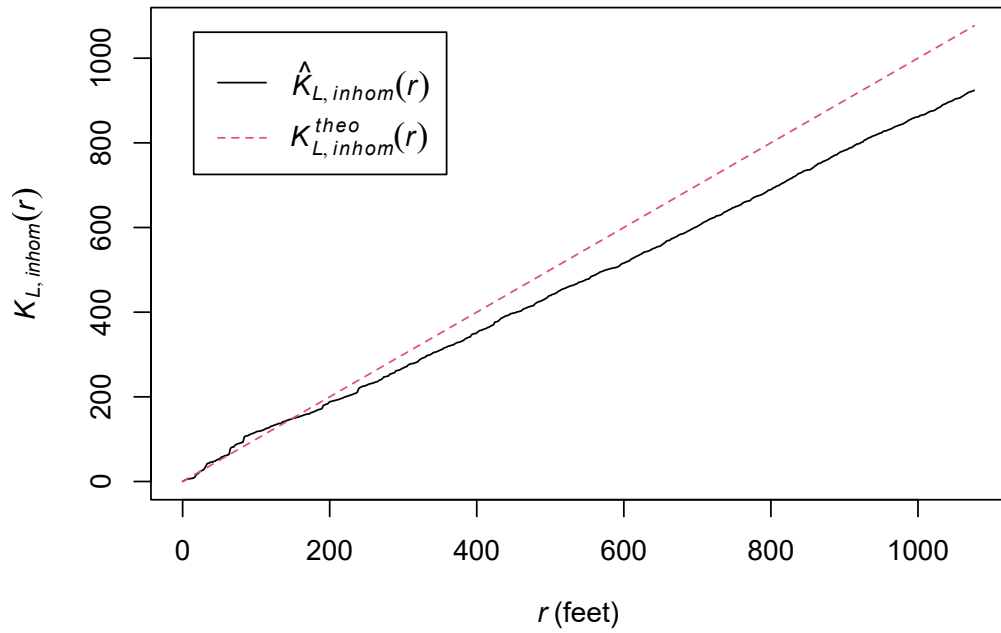
nepozorujeme žádnou červenou část testové statistiky T_0 .

Pouliční zločiny ve městě Chicago byly zaznamenány v období od 25. 4. 2002 do 8. 5. 2002. Domníváme se, že ve městě Chicago, jako ve většině velkých měst, existuje nějaká skupina lidí, která má na svědomí hned několik pouličních zločinů, a tedy si myslíme, že existují vzájemné interakce mezi pozorovanými pouličními zločiny ve městě Chicago. Konstatujeme, že možným důvodem, proč jsme nemohli zamítnout nulovou hypotézu H_0 ve prospěch alternativy H_1 , může být krátké časové období, ve kterém byly pouliční zločiny zaznamenávány.

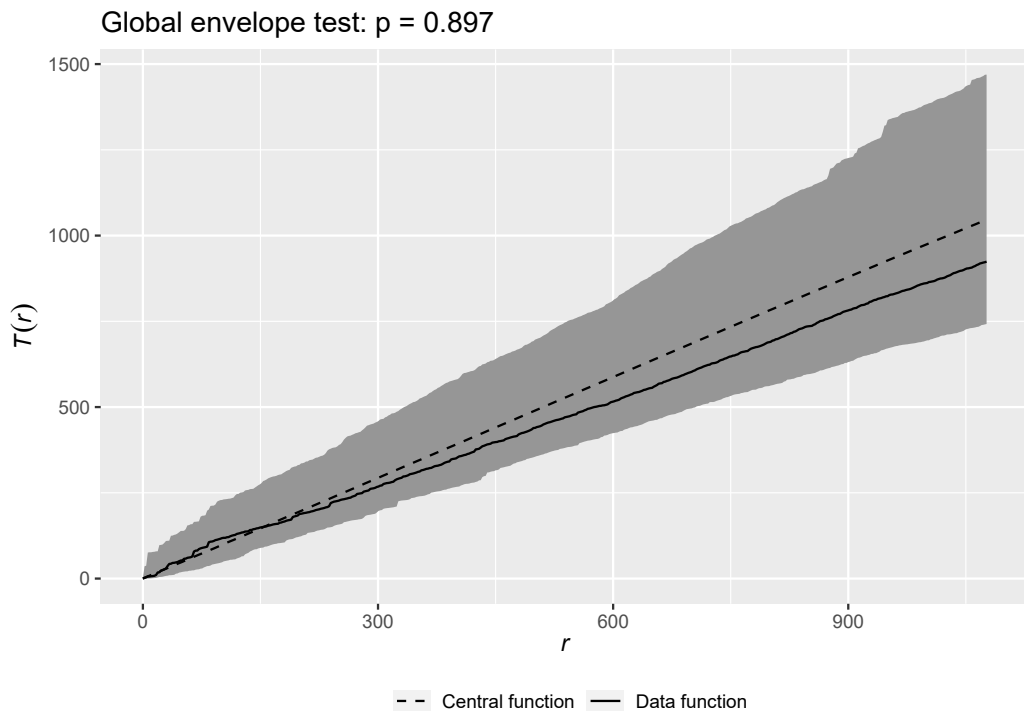


Obrázek 4.6: Jádrový odhad funkce intenzity prvního řádu pro pouliční zločiny ve městě Chicago. Barevná škála znázorňuje intenzitu výskytu pouličních zločinů na jednu stopu délky ulice města Chicago.

Odhadovaná a teoretická hodnota nehomogenní K-funkce



Obrázek 4.7: Odhadovaná hodnota nehomogenní K -funkce $\hat{K}_{LI}^{(0)}(r)$, uvažujeme $r \in [0, 1077]$, pro pouliční zločiny ve městě Chicago je znázorněna černou barvou. Teoretická hodnota nehomogenní K -funkce pro Poissonův bodový proces na síti L je znázorněna červenou barvou.



Obrázek 4.8: Obálkový test pro pouliční zločiny ve městě Chicago. Uvažujeme $r \in [0, 1077]$.

Závěr

V kapitole 1 jsme definovali lineární síť a s ní spojené pojmy. Připomeneme, že lineární síť mají velké využití v běžném životě a jedná se o naprosto přirozený pojem. Více motivačních příkladů lze nalézt v úvodu textu. Zmínili jsme, jaký druh integrálu budeme v textu používat a vůči jaké míře budeme integrovat. Zmíněné míře – Hausdorffově – jsme věnovali druhou sekci první kapitoly. Dále jsme zavedli takzvané věty o polárních souřadnicích, které jsme používali v důkazu věty 4 a také věty 5. Bez nich by bylo velmi obtížné důkazy provést.

Ve druhé kapitole jsme se nejprve věnovali definicím k bodovým procesům v rovině a na lineárních sítích. Poté jsme v sekci 2.3 zavedli několik charakteristik bodových procesů. Formulovali jsme větu 4 určující přímý vztah mezi nehomogenní K -funkcí a párovou korelační funkcí. Ke zmíněné větě jsme uvedli vlastní důkaz. V důkazu jsme přímo využili všechny pojmy z celé sekce 2.3, a dokonce i většinu pojmů z kapitol předchozích.

V průběhu třetí kapitoly jsme se zabývali převážně funkcí $K^D(u|x)$ a pojmy s ní spojené. Třetí kapitola obsahuje nejdůležitější výsledky našeho textu. Předvedli jsme v ní několik vlastních důkazů a námi formulovaných tvrzení. V neposlední řadě jsme přidali i vlastní ilustrace a obrázky. V úvodu kapitoly 3 jsme definovali jádrovou funkci a pomocí ní jsme definovali vyhlazovací jádro. Dále jsme zavedli pojem krátké cesty. Zároveň jsme poukázali na důležitost konstanty h z definice 21. Klasifikovali jsme lineární síť na dva možné případy. První z nich jsou lineární síťe neobsahující cykly délky kratší než šířka jádra $2h$, kterými se zabývala celá sekce 3.1. Naopak lineární síťe, které mohou obsahovat cykly, jsme zkoumali v sekci 3.2.

Pro lineární síťe neobsahující cykly délky kratší než šířka jádra $2h$ jsme definovali samotné funkce $K^D(u|x)$ uvedli pomocí váhové funkce. Pro tento přístup jsme se rozhodli po zjištění, že funkce $K^D(u|x)$ není nejen v práci McSwiggan a kol. (2017), ale ani v textu Sugihara a kol. (2010) přehledně definována pro všechny možné situace, které se mohou na lineární síti bez cyklů délky kratších než šířka jádra $2h$ vyskytnout. Tento nedostatek jsme napravili v definici 26. Poté jsme již konečně představili definici samotné funkce $K^D(u|x)$.

Vyslovili jsme větu 5 představující jasné kritérium, kdy se funkce $K^D(u|x)$ na lineární síti bez cyklů délky kratších než šířka jádra $2h$ naintegruje na jedničku. Zmíněnou větu můžeme interpretovat způsobem, že přes lineární síť L neobsahující cykly délky kratší než $2h$ se funkce $K^D(u|x)$ naintegruje na jedničku právě tehdy, když vzdálenost všech koncových vrcholů lineární sítě L od předem daného bodu $x \in L$ je alespoň h . Řada obrázků poskytuje čtenáři komfortnější vhled do samotného důkazu věty. Zmíněná věta 5 je jedním z hlavních bodů celého textu. Kvůli ní jsme definovali všechny pojmy spojené s h -omezenou lineární sítí. Dále jsme kvůli ní vyslovili vlastní formulaci tvrzení 6 včetně důkazu a také jsme uvedli vlastní tvrzení 7, opět s důkazem.

Pro situaci, kdy lineární síť může obsahovat cykly, jsme představili definici 33 funkce $\tilde{K}^D(u|x)$. V takovém případě je funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ definována pomocí pomocné funkce $A_{p_i}(x, y)$ z definice 32. Ta se shoduje s funkcí $K^D(u|x)$ na lineární síti bez cyklů délek kratších než šířka jádra $2h$, pokud cesta mezi body x, y je jediná krátká. Ještě jednou jsme formulovali větu pojednávající o integraci funkce $K^D(u|x)$ na jedničku, avšak tentokrát pro funkci $\tilde{K}^D(u|x)$ z definice 33. Důkaz věty jsme oproti tvrzení 3 v textu Sugihara a kol. (2010), o kterém se domníváme, že je chybné, podrobně zpracovali a pečlivě jsme vyslovili samotné znění věty. V důkazu se hojně využívá pojmu shodnosti cest mezi různými lineárními sítěmi. Díky tomu je důkaz náročný na samotnou matematickou přesnost a formulaci. Důkaz jsme doplnili o obrázky 3.10 a 3.11, které navazují na předvedený důkaz. Zmíníme, že v důkazu silně využíváme věty 5. Samotná konstrukce lineární sítě v podobě kořenového stromu je užitečná, neboť na takovou lineární síť můžeme větu 5 použít. Zde je opět vidět, jak je velmi důležitá věta 5. Zároveň se nám důkazem věty 8 podařilo propojit všechny sekce z obsáhlé kapitoly 3 a ukázat návaznost různých definic funkce $K^D(u|x)$ i obou kritérií integrace jednak funkce $K^D(u|x)$, jednak funkce $\tilde{K}^D(u|x)$ na jedničku.

V kapitole 4, konkrétně v sekci 4.1, jsme se zabývali analýzou dopravních nehod na úseku dálnice D1 v kraji Vysočina v České republice. Ze zaznamenaných dopravních nehod jsme sestavili lineární síť. Pomocí jádrového odhadu funkce intenzity prvního řádu $\hat{\lambda}(u)$ jsme provedli odhad nehomogenní K -funkce $\hat{K}_{LI}^{(0)}(r)$. Nakonec jsme provedli obálkový test, jehož výsledkem bylo zamítnutí nulové hypotézy \mathbf{H}_0 ve prospěch alternativy \mathbf{H}_1 . Možným vysvětlením může být skutečnost, že mezi dopravními nehodami na úseku dálnice D1 v kraji Vysočina existovaly vzájemné interakce.

V sekci 4.2 jsme provedli analýzu pouličních zločinů ve městě Chicago. Opět jsme využili jádrového odhadu funkce intenzity prvního řádu $\hat{\lambda}(u)$ a odhadli jsme nehomogenní K -funkci $\hat{K}_{LI}^{(0)}(r)$. Dále jsme provedli obálkový test a dle jeho výsledku jsme nemohli zamítnout nulovou hypotézu \mathbf{H}_0 ve prospěch alternativy \mathbf{H}_1 . Možným důvodem, proč jsme nemohli zamítnout nulovou hypotézu \mathbf{H}_0 ve prospěch alternativy \mathbf{H}_1 , mohlo být krátké časové období mezi zaznamenáváním pouličních zločinů. Očekávali bychom, že budou existovat vzájemné interakce mezi pozorovanými pouličními zločiny ve městě Chicago, a proto bychom navrhli zaznamenávat pouliční zločiny ve městě Chicago po delší časové období, aby se případné vzájemné interakce mezi pouličními zločiny mohly výrazněji projevit.

Seznam použité literatury

- ANG, Q. W., BADDELEY, A. a NAIR, G. (2012). Geometrically corrected second order analysis of events on a linear network, with applications to ecology and criminology. *Scandinavian Journal of Statistics*, **39**(4), 591–617.
- BADDELEY, A., BÁRÁNY, I., SCHNEIDER, R. a WEIL, W. (2007). *Stochastic Geometry: Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Martina Franca, Italy, September 13-18, 2004*. Springer, Berlin. ISBN 978-3-540-38174-7.
- BADDELEY, A., RUBAK, E. a TURNER, R. (2015). *Spatial Point Patterns: Methodology and Applications with R*. Chapman Hall/CRC Press, Boca Raton, London. ISBN 978-1482210200.
- DVOŘÁK, J. a MRKVIČKA, T. (2021). Graphical tests of independence for general distributions. *Computational Statistics*, **37**(2), 671–699.
- EVANS, L. C. a GARIEPY, R. F. (1992). *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, Boca Raton, London. ISBN 0-8493-7157-0.
- MCSWIGGAN, G., BADDELEY, A. a NAIR, G. (2017). Kernel density estimation on a linear network. *Scandinavian Journal of Statistics*, **44**(2), 324–345.
- MØLLER, J. a WAAGEPETERSEN, R. (2004). *Statistical inference and simulation for spatial point processes*. Chapman Hall/CRC Press, Boca Raton, London. ISBN 1-58488-265-4.
- MORAVEC, J. (2013). Bodové procesy na lineárních sítích. Bakalářská práce, Univerzita Karlova.
- MRKVIČKA, T., MYLLYMÄKI, M. a HAHN, U. (2017). Multiple monte carlo testing, with applications in spatial point processes. *Statistics and Computing*, **27**(5), 1239–1255.
- MYLLYMÄKI, M., MRKVIČKA, T., GRABARNIK, P., SEIJO, H. a HAHN, U. (2017). Global envelope tests for spatial processes. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, **79**(2), 381–404.
- POLICIE ČESKÉ REPUBLIKY (2023). Dopravní nehody na dálnicích v kraji Vysočina za rok 2022. <https://www.policie.cz/clanek/statistika-nehodovosti-900835.aspx>. Citováno 11.03.2023.
- SUGIHARA, K., SATOH, T. a OKABE, A. (2010). Simple and unbiased kernel function for network analysis. In *2010 10th International Symposium on Communications and Information Technologies*, pages 827–832.

Seznam obrázků

1.1	Lineární síť bez cyklů.	5
1.2	Lineární síť s cyklem.	5
3.1	Lineární síť L není h -omezená, body sítě L ve vzdálenosti přesně h od středu x jsou označeny symbolem h	15
3.2	Lineární síť L bez větvení.	17
3.3	Lineární síť L bez větvení, ve vrcholu V je zatáčka.	18
3.4	Ve středu x lineární sítě L probíhá větvení, A_1^C obsahuje pouze vrchol V_1 , tedy $A_1^C = \{V_1\}$	19
3.5	Právě jedno větvení probíhá mimo střed x sítě L	20
3.6	Nahrazení A_1 úsečkou U_1 pro situaci, kdy právě jedno větvení probíhá mimo střed x sítě L	21
3.7	Ve vrcholu V_1 se realizuje větvení.	22
3.8	Nahrazení A_1 úsečkou U_1	22
3.9	Znázornění uzavřené koule $B(u, \varepsilon)$ se středem $u \in L$ a poloměrem ε	24
3.10	Schéma lineární sítě s cykly.	29
3.11	Schéma lineární sítě vzniklé konstrukcí kořenového stromu.	29
4.1	Jádrový odhad funkce intenzity prvního řádu pro dopravní nehody na úseku dálnice D1 v kraji Vysočina. Barevná škála znázorňuje intenzitu výskytu dopravních nehod na jeden metr délky úseku dálnice D1 v kraji Vysočina.	32
4.2	Odhadovaná hodnota nehomogenní K -funkce $\hat{K}_{LI}^{(0)}(r)$, uvažujeme $r \in [0, 46\,847]$, pro dopravní nehody na úseku dálnice D1 v kraji Vysočina je znázorněna černou barvou. Teoretická hodnota nehomogenní K -funkce pro Poissonův bodový proces na lineární síti L je znázorněna červenou barvou.	33
4.3	Odhadovaná hodnota nehomogenní K -funkce $\hat{K}_{LI}^{(0)}(r)$, uvažujeme $r \in [0, 2\,000]$, pro dopravní nehody na úseku dálnice D1 v kraji Vysočina je znázorněna černou barvou. Teoretická hodnota nehomogenní K -funkce pro Poissonův bodový proces na lineární síti L je znázorněna červenou barvou.	34
4.4	Obálkový test pro dopravní nehody na úseku dálnice D1 v kraji Vysočina. Uvažujeme $r \in [0, 2\,000]$	35
4.5	Polohy zaznamenaných pouličních zločinů ve městě Chicago znázorňují tučné body.	36
4.6	Jádrový odhad funkce intenzity prvního řádu pro pouliční zločiny ve městě Chicago. Barevná škála znázorňuje intenzitu výskytu pouličních zločinů na jednu stopu délky ulice města Chicago.	37
4.7	Odhadovaná hodnota nehomogenní K -funkce $\hat{K}_{LI}^{(0)}(r)$, uvažujeme $r \in [0, 1\,077]$, pro pouliční zločiny ve městě Chicago je znázorněna černou barvou. Teoretická hodnota nehomogenní K -funkce pro Poissonův bodový proces na síti L je znázorněna červenou barvou.	38
4.8	Obálkový test pro pouliční zločiny ve městě Chicago. Uvažujeme $r \in [0, 1\,077]$	38