

POSUDOK VEDÚCEHO BAKALÁRSKEJ PRÁCE

Názov: Simplicial depth
Autor: Erik Mendroš

ZHRNUTIE OBSAHU PRÁCE

Simplexová hĺbka (SD) ponúka jeden z najznámejších prístupov k zavedeniu prvkov neparametrickej štatistiky pre viacrozmerné dáta. Cieľom práce bolo zhrnúť vlastnosti SD, a porovnať niekoľko známych alternatívnych prístupov k jej definícii. V kapitole 1 je zavedená klasická SD, a sú odvodené jej základné vlastnosti. Dôkazy sú detailnejšie než v literatúre, miestami sú tvrdenia formulované vo väčšej všeobecnosti. Alternatívna definícia tzv. priemernej simplexovej hĺbky (ASD) z článkov Burr et al. (2003, 2006) je preskúmaná v kapitole 2. ASD bola navrhnutá ako vylepšená verzia SD. V záverečnej kapitole 3 autor uvádza vlastné pozorovanie o vzťahu SD a tzv. problému štyroch bodov známeho z pravdepodobnosti.

CELKOVÉ HODNOTENIE PRÁCE

Vlastný príspevok. Práca obsahuje niekoľko originálnych výsledkov autora:

1. Burr et al. (2003, 2006) argumentovali, že hlavnou výhodou ASD voči SD je fakt, že výberová ASD je v istom zmysle spojitá. Ako dôsledok tejto vlastnosti má mať medián definovaný ASD (ASD-medián) lepšie vlastnosti než medián daný SD. P. Mendroš tieto tvrdenia rozporuje v sekcii 2.1.1. Tam uvádza tri nesprávne tvrdenia a jednu nekorektnú definíciu z článkov Burr et al. (2003, 2006). V príklade 2.3 nájdeme protipríklad konfigurácie bodov v \mathbb{R}^3 .
2. Nekorektná definícia 9 opačnej bunky z Burr et al. (2003) je opravená v sekcii 2.1.2. S jej pomocou vo vete 12 p. Mendroš uvádza vlastnú verziu tvrdenia o spojitosti ASD s originálnym dôkazom. Prvým dôsledkom tohto tvrdenia je originálna veta 13 o vlastnostiach ASD-mediánu v \mathbb{R}^2 — ASD-medián v \mathbb{R}^2 je buď plne-dimenzionálna množina, alebo dátový bod. Analogické tvrdenie v \mathbb{R}^d sa ukazuje ako významne zložitejšie. Mierne oslabená technická verzia tohto tvrdenia je prezentovaná ako veta 17 s dôsledkom, vetou 18. Tu je napr. dokázané, že pre pozorovania ktoré nie sú situované v konvexnej pozícii,¹ ASD-medián leží v špeciálnej pozícii vo vnútrajšku konvexného obalu dát. Predpoklad ne-konvexnej pozície dát sa zdá byť kľúčový. S využitím slávneho výsledku diskkrétnej geometrie, tzv. *First Selection Lemma* (Matoušek, 2002) p. Mendroš formuluje vlastnú domnienku o správaní ASD-mediánu vo vyšších dimenziách.
3. Celá kapitola 3 práce je súborom originálnych pozorovaní autora. P. Mendroš všima súvislosti medzi výpočtom SD (alebo ASD) a klasickým Sylvestrovým problémom štyroch bodov. Ten sa pýta, aká je pravdepodobnosť toho, že 4 nezávisle generované body v \mathbb{R}^2 ležia v konvexnej pozícii. Ako je odvodené na str. 42, táto pravdepodobnosť určuje strednú SD náhodného bodu z rozdelenia P . Z tohto pohľadu teda SD zovšeobecňuje Sylvestrov problém. Dôsledkom tohto pozorovania je zaujímavý paradox — zatiaľ čo stredná SD je maximalizovaná pre (rovnoméne rozdelenie na) trojuholníku a minimalizovaná pre kruh, zdá sa že maximálna SD sa správa presne naopak. Pre podporu tohto tvrdenia je odvodená presná hodnota SD v ťažisku trojuholníka; pokiaľ mi je známe, ide o prvý výsledok tohto typu v literatúre.

¹Množina bodov M je v konvexnej pozícii ak každý bod M leží na hranici konvexného obalu M .

Matematická úroveň. Matematická úroveň práce je veľmi vysoká. Tvrdenia sú precízne a rigorózne formulované, a všetky tvrdenia sú detailne dokázané. Všetky výsledky v kapitolách 2 a 3 sú originálne výsledky autora.

Práca so zdrojmi. Zdroje sú citované vhodne a správne.

Formálna úprava. Práca je písaná anglicky, jazyková úroveň je veľmi dobrá. V práci som nenašiel žiadne významnejšie formálne chyby. Výklad je vhodne dopĺňaný vlastnými príkladmi, obrázkami, a zaujímavou diskusiou.

ZÁVER

Autor pracoval s obrovským zanietením. P. Mendroš (spolu-)odvodil aj niekoľko ďalších nových výsledkov, ktoré nie sú v bakalárskej práci spracované:

- integrálny vzťah pre výpočet presnej SD bodu v \mathbb{R}^2 , ktorá bola použitá pre výpočet SD ťažiska trojuholníka v kapitole 3;
- dôkaz toho, že žiadne abs. spojitú rozdelenie v \mathbb{R}^2 nemôže mať SD bodu vyššiu než $1/4$ (významné rozšírenie vety 6 z práce formulovanej iba pre symetrické miery); alebo
- výraz pre smerovú deriváciu SD založený na rozšírení dôkazu vety 4 z práce.

Tieto výsledky a ich rozšírenia na \mathbb{R}^d sa okamžite ponúkajú pre pokračovanie tohto výskumu.

Celkove, jedná sa o výborne zvládnutú teoretickú prácu na vysokej úrovni. Odporúčam ju uznať ako bakalársku prácu na MFF UK.



Stanislav Nagy
KPMS MFF UK
10. mája 2023