# Posudek oponenta bakalářské práce

**Název:** Simplicial depth
**Autor:** Erik Mendroš

## Shrnutí obsahu práce

Práce pojednává o simplexové hloubce a jejích vlastnostech, zejména se věnuje problematice simplexového mediánu, tedy bodu s nejvyšší simplexovou hloubkou a monotonii simplexové hloubky. Pro empirickou simplexovou hloubku, případně při použití na diskrétní rozdělení však mohou nastat zvláštní situace. Na mnoha příkladech autor ukazuje existenci problematických bodů, ve kterých je porušena monotonie hloubky. Tyto body se obvykle nacházejí na hranici některého simplexu tvořeného pozorováními, takže je nutné rozlišovat vnitřek a uzávěr simplexu a uvažovat také relativní vnitřky hranice simplexu. To vše činí počítání hloubky náročné na počlivost a představivost. V tomto směru autor napsal velmi podrobnou a pečlivou práci. Hlavní přínos vidím v opravě nepřesných tvrzení a nevhodných definic, které se u simplexové hloubky již léta tradují a jejichž oprava vyžadovala trpělivost a pečlivost.

## Celkové hodnocení práce

**Téma práce.** Téma hodnotím jako náročné, ale přiměřené. Pro jeho zpracování je potřeba velká pečlivost v počítání, geometrická představivost, zároveň je však přiměřené znalostem a schopnostem které očekáváme ve třetím ročníku studia matematiky na MFF.

**Vlastní příspěvek.** Práce obsahuje značný příspěvek autora. Nalezl protipříklady k dlouho tradovaným tvrzením o simplexové hloubce a ukázal, že při počítání této hloubky v některých specifických bodech je potřeba být velice opatrný. Příslušným způsobem pak upravil definici protilehlých buněk a tvrzení o hloubce bodů na hranicích buněk a simplexů. Tento vlastní příspěvek je z práce velmi dobře vidět.

**Matematická úroveň.** Matematicky je práce napsaná na vysoké úrovni. Definice i důkazy jsou velmi náročné na představivost a značení, v práci jsem však nalezl minimum překlepů a vágních formulací.

**Práce se zdroji.** Všechny zdroje jsou správně ocitované a práce neobsahuje opsané pasáže s výjimkou citace používaných matematických definic a vět.

**Formální úprava.** Práce je psaná přehledně a zejména oceňuji množství názorných obrázků, které velmi napomáhají při čtení textu.

## Připomínky a otázky

1. Na několika místech autor trochu zbytečně mění přístup. Například v definici 3 na straně 5 by i v bodě (iii) mohl zachovat použití posunutí $X - \theta$ a poloprostory s počátkem na hranici. Podobně na straně 28 v tabulce nahoře se ve dvou řádcích hned pod sebou objevuje $\frac{1}{2}(d + 2)$ a $1 + \frac{1}{2}d$. Bylo by úhlednější mít tyto výrazy sjednocené.

2. Nevím, jak má být chápána poznámka za definicí 8 na straně 11. Empirická míra je vždy náhodná, v čem má tedy spočívat rozdíl mezi $\hat{P}_n$ a $P_n$?

3. Na straně 12 ve větě 2 a v jejím důkazu se používá supremum přes empirické míry $\sup_{\hat{P}_n}$. Co přesně toto supremum znamená?

4. Na straně 28 se mluví o relativním vnitřku. Možná by stálo za to zopakovat, co zda bod je svým vlastním relativním vnitřkem nebo ne, tedy jak relativní vnitřek chápeme pro rozměr $d = 0$.

5. Na straně 34 na závěr důkazu bych doporučil dokončení důkazem sporem osvětlit tím, že $M$ má nejvýše $k + m - \ell + 1$ bodů a tudíž $M \setminus \{w_1\}$ nemůže mít stejný počet bodů.

6. Na straně 38, řádka 13, je značení, které není vysvětlené a ani očividně zřejmé. Co označuje například $\sigma^{y_1}$?

7. Je možné poslední vzorec na straně 42 rozšířit i pro nekonvexní množiny $K$?

8. Existuje nějaká domněnka, která by paradox popsaný na straně 45 vysvětlovala například na porovnání kruhu a rovnostranného trojúhelníku?

## Závěr

K obhajobě doporučuji připravit si zejména odpovědi na body 2–3 a 6, případně také na body 7 a 8. Práci považuji za vynikající a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.

*Návrh klasifikace vedoucí/oponent sdělí předsedovi zkušební (sub)komise.*

Daniel Hlubinka
KPMS MFF UK
6.června 2023