

Posudek vedoucího bakalářské práce  
*Řetězové zlomky v tělese  $p$ -adických čísel*  
Elišky Červenkové

Cílem práce bylo studium různých přístupů k aproximacím  $p$ -adických čísel racionálními čísly pomocí řetězových zlomků. Oproti klasické situaci v reálných číslech zde není jasné, jak kanonicky definovat 'celočíselnou část'  $p$ -adického čísla. Autorka se zabývala postupy z prací A. A. Rubana (1970) a J. Browkina (1978), kteří za 'celočíselnou' část berou nekladnou část  $p$ -adického rozvoje. Přestože se tyto postupy liší pouze zvolenou transversálou  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  použitou v  $p$ -adickém rozvoji čísla, vedou k odlišným výsledkům.

Hlavní výsledky uvedené v práci se týkají rozvoje racionálních čísel do řetězového zlomku. Zatímco Browkinův postup aplikovaný na racionální číslo dá vždy konečný řetězový zlomek (Věta 41), Rubanův postup může vést na nekonečný řetězový zlomek s periodou délky 1 (Věta 37). Důkaz Věty 37 je převzat z článku autorů L. Capuano, F. Veneziano a U. Zannier (2019), kteří oproti dříve publikovaným důkazům dávají též algoritmus, který rozhodne, zda bude Rubanův rozvoj racionálního čísla konečný.

Téma práce sice není nijak extrémně obtížné, autorka se ale musela nejprve seznámit se strukturou tělesa  $p$ -adických čísel. Přístup zvolený v první kapitole vede přirozeně k práci s  $p$ -adickými čísly reprezentovanými  $p$ -adickým rozvojem. Druhá kapitola shrnuje poznatky o řetězových zlomcích. Je zde určitá snaha prezentovat tyto poznatky v kontextu těles s normou tak, aby bylo možné tyto poznatky použít jak v tělese reálných čísel, tak i v tělese  $p$ -adických čísel. Kapitoly 3 a 4 pak obsahují důkazy již zmíněných hlavních výsledků. Závěrečná kapitola pak obsahuje několik spočítaných příkladů.

Práce je celkově dobře uspořádaná, nenašel jsem v ní zásadnější chyby. Pár drobností by ale bylo ještě potřeba opravit (viz seznam níže). Vlastním přínosem práce je jednak doplnění hlavních výsledků do samoobsažného textu, doplnění detailů v důkazech a výpočet konkrétních příkladů. Též lze zmínit využití  $p$ -adické reprezentace celočíselné části, které vede k drobným zjednodušením některých argumentů. Přínos práce považuji za dostatečný, práce s citovanými zdroji je v pořádku.

Předložená práce splnila zadání, navrhuji ji proto uznat jako práci bakalářskou.

V Praze, 22. června 2023

Pavel Příhoda

*Konkrétní připomínky k práci*

- (i) str. 4, ř. 9:  $p^k > u$  má být  $p^k > |u|$
- (ii) str. 19, ř. 5: Uvedená vlastnost (vyjádření v základním tvaru) se netýká konvergentů, ale jeho složek  $p_n$  a  $q_n$ .

- (iii) str. 23, ř. 15:  $\alpha_n$  nemusí být nutně z  $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ .
- (iv) Určité problémy dělá případ, kdy rozvíjíme čísla s kladnou valuací. Jak je poznamenáno na str. 19 nahoře, tento případ lze řešit posunutím indexů o jedna. Je ale potřeba dávat pozor, jestli uvedená tvrzení pokrývají i tuto situaci. Například Lemma 36 má v předpokladu  $v_p(\alpha) \leq 0$ , ale na straně 28 se aplikuje v situaci, kdy tento předpoklad neplatí.
- (v) str. 29, Tvrzení 39(ii):  $\beta \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ .
- (vi) str. 34, ř. -3: Rozvoj je nekonečný právě tehdy, když ...