MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Filip Oliva

Periodické relace S. Bochnera

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Vladimír Souček, DrSc.
Studijní program:	Obecná matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Poděkovaní patří mému vedoucímu, profesorovi Vladimíru Součkovi, za úvod do problematiky reprezentací Lieových grup a algeber a především za všechny cenné rady, které mi byly dány při tvorbě této práce.

Název práce: Periodické relace S. Bochnera

Autor: Filip Oliva

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Vladimír Souček, DrSc., Oddělení analýzy a geometrie

Abstrakt: Bochnerovy periodické relace popisují chování Fourierovy transformace na izotypických komponentách akce speciální ortogonální Lieovy grupy SO_m na Schwartzovském prostoru. Fourierovu transformaci si můžeme vyjádřit jako vhodný element dvojnásobného nakrytí $\widetilde{SL}_2$ speciální Lieovy grupy SL_2. To vše je možné díky větě o dualitě R. Howea, která nám popisuje, jak se rozkládá Schwartzovský prostor na $\widetilde{SL}_2 \times SO_m$-invariantní izotypické komponenty.

Klíčová slova: Fourierova transformace, grupa $SL(2, \mathbb{R})$, Howeova dualita, Bochnerovy relace

Title: The Bochner periodic relations

Author: Filip Oliva

Institute: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: prof. RNDr. Vladimír Souček, DrSc., Division of analysis and geometry

Abstract: The Bochner periodic relations describe behaviour of the Fourier transform on isotypic components of the action of the special orthogonal Lie group SO_m on the Schwartz space. Fourier transform can be expressed as a suitable element of the double cover $\widetilde{SL}_2$ of special Lie group SL_2. That is possible due to the Howe duality describing the decomposition of Schwartz space to $\widetilde{SL}_2 \times SO_m$-invariant isotypic components.

Keywords: Fourier transform, group $SL(2, \mathbb{R})$, Howe duality, Bochner relations

Obsah

Úvod

Následná věta dává hlavní motivaci, ze které tato bakalářská práce vychází.

Věta. *Mějme speciální ortogonální Lieovu grupu SO_m, pak existuje akce ρ grupy SO_m, která komutuje s akcí Fourierovy transformace $\mathcal{F}$ na Schwartzovském prostoru $\mathcal{S}^m$.*

Jedním z důsledků této věty je, že Fourierova transformace $\mathcal{F}$ zachovává isotypické komponenty akce grupy SO_m, které můžeme pomocí Howeovy duality popsat. Základem je akce speciální Lieovy algebry $\mathfrak{sl}_2$ na Schwartzovském prostoru $\mathcal{S}^m$, která se nazývá oscilátorová reprezentace. Segal-Shale-Weilova věta nám říká, že je možné integrovat akci algebry $\mathfrak{sl}_2$ do akce Lieovy grupy $\widetilde{SL}_2$, což je dvojnásobné nakrytí Lieovy grupy SL_2. Akce Fourierovy transformace na SO_m-izotypických komponentách je totožná s akcí vhodného elementu grupy $\widetilde{SL}_2$. Výsledkem je explicitní popis Fourierovy transformace $\mathcal{F}$ pro funkce z daných isotypických kompent a Bochnerovy relace.

To je k vysvětlení, jakým způsobem číst tuto práci, proto se nyní můžeme pustit do popisu jednotlivých kapitol, ze kterých se tato práce skládá.

V první kapitole se nejenom seznámíme s Lieovou algebrou $\mathfrak{sl}_2$ a Lieovou grupou SO_m a její algebrou $\mathfrak{so}_m$, ale i s jejich reprezentacemi na prostoru homogenních polynomů nad prostorem $\mathbb{R}^m$. Dále si zadefinujeme kořenové systémy a ukážeme si na příkladu, jak vypadají pro již zmíněnou Lieovu algebru $\mathfrak{so}_m$. Také ocitujeme důležitý vztah, a to Weylův vzorec pro výpočet dimenze ireducibilní reprezentace, která je generovaná singulárním vektorem. Názorné použití této věty si ukážeme na příkladu pro vektor s váhou $(n, 0, \ldots, 0)$. V závěru této kapitoly si řekneme, co jsou Schwartzovské prostory $\mathcal{S}^m$, jak je na těchto prostorech definovaný tenzorový součin spolu s Fourierovou transformací.

Hermitovskými funkcemi se bude zabývat celá druhá kapitola. Povíme si, které operátory potřebujeme k jejich definování a také větu o tom, že Hermitovské funkce tvoří ortogonální, respektive po jejich znormování ortonormální, bázi v $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$.

Podstatná je třetí kapitola, kde si ukážeme polynomiální verzi a transcendentální verzi Howeovy duality. Před tím si ale budeme definovat operátory r^2 a Δ a lemmata s nimi spojená. Klíčovým bodem je Segal-Shale-Weilova věta, která říká, že oscilátorová reprezentace je diferenciálem reprezentace grupy $\widetilde{SL}_2$. To využijeme v poslední kapitole, kde si ukážeme, že Fourierova transformace je reprezentací vhodného elementu Lieovy grupy $\widetilde{SL}_2$.

Poslední kapitola je to, kam jsme celou dobu mířili. Pomocí Howeovy duality si najdeme reprezentaci ρ_n^m Lieovu algebry $\mathfrak{sl}_2$ na prostoru $\mathcal{J}^m$ invariantních Schwartzovských funkcí, která je indukována akcí algebry $\mathfrak{sl}_2$ na jednotlivých SO_m-izotypických komponentách. Tato akce závisí jen na čísle $n + \frac{m}{2}$, což je základ důkazu Bochnerových relací.

1. Prerekvizity

1.1 Lieovy algebry

Tato sekce je čerpána z Howe a Tan (1992). Pro první polovinu této sekce je Kapitola I a od definice 3 začátek Kapitoly II.

Definice 1. *Říkáme, že pár* $(L, [-, -])$ *je Lieova algebra nad tělesem* $\mathbb{R}$*, pokud* L *je vektorový prostor nad* $\mathbb{R}$ *a Lieova závorka* $[-, -]$ *je bilineární zobrazení* $L \times L$ *do* L *takové, že jsou pro každé* $x, y, z \in L$ *splněny následující podmínky:*

1. $[x, x] = 0,$ *(antikomutativita)*
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$ *(Jacobiho identita)*

Pro Lieovy algebry $\mathfrak{g}_1 = (L_1, [-, -]_1)$ *a* $\mathfrak{g}_2 = (L_2, [-, -]_2)$ *říkáme, že zobrazení*

$$f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$$

je homomorfismem Lieových algeber, pokud pro každé $x, y \in \mathfrak{g}_1$ *platí*

$$f([x, y]_1) = [f(x), f(y)]_2.$$

Poznámka. V této práci budeme uvažovat pouze Lieovy algebry, jež jsou konečné dimenze.

Příklad 1. Lieovu algebru $\mathfrak{gl}(V) = (End(V), [-, -])$ nazýváme obecnou lineární Lieovou algebrou pro vektorový prostor V nad $\mathbb{C}$, kde $End(V)$ značíme prostor endomorfismů na V, kde Lieova závorka má pro $x, y \in End(V)$ tvar

$$[x, y] = xy - yx.$$

Pro vektorové prostory V konečné dimenze m existuje izomorfismus mezi $End(V)$ a množinou matic typu $m \times m$.

Definice 2. *Reprezentace Lieovy algebry* $\mathfrak{g} = (L, [-, -])$ *je dvojice* (V, f)*, kde* V *je vektorový prostor nad* $\mathbb{C}$ *a* $f : L \to \mathfrak{gl}(V)$ *je homomorfismus Lieových algeber.*

Příklad 2. Jeden ze základních příkladů Lieovy algebry je speciální Lieova algebra

$$\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \Big\{ x \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^2) \,|\, tr(x) = 0 \Big\},$$

která je generována prvky

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad e^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Lieova závorka těchto prvků má tvar

$$[h, e^\pm] = \pm 2e^\pm \qquad a \qquad [e^+, e^-] = h. \tag{1.2}$$

Bude se nám také hodit znát alternativní bázi, a to především v pozdějších kapitolách.

$$\overline{k} = i(e^- - e^+) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad n^\pm = \frac{1}{2}\Big(h \pm i(e^+ + e^-)\Big) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Definice 3. *Mějme $(V,\ f)$ $\mathfrak{sl}_2$-reprezentaci. Řekneme, že V_λ je zobecněný h-vlastní podprostor prostoru V daný vlastním číslem $\lambda \in \mathbb{C}$, pokud*

$$V_\lambda = \Big\{ v \in V \mid \big(f(h) - \lambda I \big)^n v = 0,\ \exists n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Takové $(V,\ f)$ nazýváme h-přípustnou reprezentací, pokud V_λ jsou konečně dimenzionální a platí

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda. \tag{1.4}$$

V případě, že všechny členy v součtu (1.4) jsou tvaru

$$V_\lambda = \Big\{ v \in V | f(h)v = \lambda v \Big\}, \tag{1.5}$$

pak $(V,\ f)$ nazýváme h-polojednoduchou reprezentací a λ váhami reprezentace.

Poznámka. Tato definice říká, že tato akce elementu h na V je diagonizovatelná.

Definice 4. *O reprezentaci (f, V_λ) říkáme, že je modulem nejnižší váhy $\lambda \in \mathbb{C}$, pokud existuje báze $\{v_j\}$ prostoru V_λ, pro kterou platí*

$$\begin{aligned} f(h)v_j &= (\lambda + 2j)v_j, \\ f(e^+)v_j &= v_{j+1}, \\ f(e^-)v_j &= -j(\lambda + j - 1)v_{j-1}, \\ f(e^-)v_0 &= 0. \end{aligned}$$

Vektor v_0 nazýváme vektorem nejnižší váhy λ této reprezentace.

1.2 Lieovy grupy

Definice, lemmata a věty opět vycházejí z Howe a Tan (1992, Kapitola I), není-li řečeno jinak.

Definice 5. *Lieova grupa je varieta G, která je zároveň grupa, pro kterou operace násobení*

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2 \end{aligned}$$

a operace inverze

$$\begin{aligned} G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

jsou hladké zobrazení.

Řekneme, že zobrazení

$$F :\ G \to H,$$

je homomorfismus Lieových grup G a H, pokud zobrazení F je hladké a je homomorfismem grup.

Příklad 3. Jeden z příkladů Lieovy grupy je grupa invertibilních transformací $GL(V)$ na vektorovém prostoru V nad $\mathbb{C}$.

Pokud dimenze V je nekonečná a V je lineární topologický prostor, pak grupa $GL(V)$ je definována jako množina všech invertibilních spojitých zobrazení se spojitými inverzemi.

Definice 6. *Mějme vektorový prostor V nad $\mathbb{C}$.*

Dvojice (V, f) je reprezentace Lieovy grupy L, pokud $f : L \to GL(V)$ je homomorfismus Lieových grup a pro všechny $v \in V$ platí, že zobrazení

$$x \mapsto f(x)v$$

je spojité.

Věta 1 (Peter-Weyl (Knapp a Trapa, 2000))**.** *Lineární obal všech maticových koeficientů pro všechny konečně dimenzionální ireducibilní unitární reprezentace kompaktní grupy G je hustý v $\mathcal{L}_2(G)$.*

Důsledek. *Mějme kompaktní Lieovu grupu K, pak*

(1) každá ireducibilní K-reprezentace je konečně dimenzionální,

(2) každá reprezentace grupy K může být rozložena na direktní součet ireducibilních podreprezentací.

Definice 7. *Nechť K je kompaktní Lieova grupa.*

Pro I z množiny $Irep(K)$ všech ireducibilních K-reprezentací označíme $[I]$ třídu všech ireducibilních K-reprezentací, které jsou izomorfní I. Množinu všech tříd $[I]$ označujme jako $\widehat{K}$.

Izotypickou komponentou odpovídající $\lambda \in \widehat{K}$ rozumíme prostor

$$Isot(V, \lambda) = \{v \in V \mid \exists V' \in \lambda,\, V' \subset V, v \in V'\}\,.$$

Lemma 2. *Mějme polojednoduchou Lieovu grupu G s maximální kompaktní podgrupou K.*

Je-li (f, V) reprezentace grupy G, pak platí

$$V = \sum_{\lambda \in \hat{K}} Isot(V, \lambda).$$

Jako V_K označíme algebraický direktní součet prvků $Isot(V, \lambda)$.

Reprezentaci (f, V) nazveme K-přípustnou reprezentací, pokud všechny K-izotypické komponenty prostoru V jsou konečně dimenzionální.

Definice 8. *Mějme Lieovu grupu G, její Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ a (f, V) reprezentaci Lieovy grupy G. Dále nechť V_0 označuje prostor hladkých vektorů, což jsou $v \in V$ takové, že zobrazení*

$$g \mapsto f(g)v$$

je hladké na G.

Pak definujeme reprezentaci (f_0, V_0) Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ danou následujícím vztahem:

$$f_0(A)(v) = \frac{d}{dt} f\Big(exp(tA)\Big)(v)\bigg|_{t=0} = lim_{t\to 0} \frac{f\Big(exp(tA)\Big)(v) - v}{t}, \tag{1.6}$$

kde $A \in \mathfrak{g}$ a $v \in V_0$.

Reprezentaci (f_0, V_0) Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ nazýváme diferenciálem reprezentace (f, V) Lieovy grupy G.

Lemma 3. *Mějme polojednoduchou Lieovu grupu G s maximální kompaktní podgrupou K a (f, V) reprezentaci grupy G, pak všechny vektory v prostoru V_K jsou hladké a diferenciál (f_0, V_0) reprezentace (f, V) zachovává podprostor V_K.*

Příklad 4. Lieova grupa SL_2 je tvořena maticemi tvaru 2×2, které mají jednotkový determinant.

Pro tuto grupu platí, že je jednoduchá a že obsahuje maximální kompaktní podgrupu SO_2.

Příklad 5. Pro nás bude velice důležité si zavést Lieovu grupu SO_m tvořenou ortogonálními maticemi s jednotkovým determinantem z $\mathbb{R}^{m\times m}$ a její Lieovu algebru $\mathfrak{so}_m$, která je dána reálnými antisymetrickými maticemi tvaru $m \times m$.

Snadno si rozmyslíme, že jako generátory této algebry si můžeme zvolit prvky typu $E_{i,j}$, který má na i-tém řádku a j-tém sloupci jedničku a na symetrické pozici (dle diagonály) mínus jedničku a na ostatních pozicích nuly pro $i < j$ a $i, j \in \{1, \ldots, m\}$.

Lieovu závorku elementů $E_{i,j}$ a $E_{k,l}$ pro $i < j$, $k < l$ a $i, j, k, l \in \{1, \ldots, m\}$ můžeme vyjádřit vztahem

$$[E_{i,j}, E_{k,l}] = \delta_{j,k}E_{i,l} + \delta_{i,l}E_{i,k} - \delta_{j,l}E_{i,k} - \delta_{i,k}E_{j,l},$$

kde δ je Kroneckerova delta.

Značení. Prostor všech polynomů v m proměnných rozumíme $\mathcal{P}^m$ a $\mathcal{P}^m_n$ je jeho podprostor homogenních polynomů stupně n.

Pokud by nedošlo k nedorozumění budeme značit prostor $\mathcal{P}^m$, resp. prostor $\mathcal{P}^m_n$, jako $\mathcal{P}$, resp. $\mathcal{P}_n$.

Definice 9. *Reprezentace φ Lieovy grupy SO_m na $\mathcal{P}^m_n$ definujeme předpisem*

$$\Big(\varphi(A)f\Big)(x) = f(A^{-1}x),$$

kde $A \in SO_m$, $f \in \mathcal{P}^m_n$ a $x \in \mathbb{R}^m$.

Lemma 4. *Diferenciál (φ_0, V_0) reprezentace (φ, V) pro Lieovu algebru $\mathfrak{so}_m$ je dán předpisem*

$$\varphi_0(A)f = \sum_{i,j=1}^{m} x_i A_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} f, \tag{1.7}$$

kde $A \in \mathfrak{so}_m$, $f \in \mathcal{P}^m_n$ a $A_{i,j}$ označujeme element na i-tém řádku a j-tém sloupci matice A.

Důkaz. Postup je přímou aplikací Věty 8, proto si nejdříve odvodíme, jak exponenciála působí na elementy $E_{i,j}$, jež jsme si zavedli na konci Příkladu 5 a protože jsou tyto matice generátory, bude nám stačit větu dokázat pouze pro každý z nich:

$$\begin{aligned} exp(tE_{i,j}) &= I + tE_{i,j} - \frac{t^2}{2}(E_{i,i} + E_{j,j}) - \frac{t^3}{3!}E_{i,j} + \frac{t^4}{4!}(E_{i,i} + E_{j,j}) + \ldots \\ &= I + (cos(t) - 1)(E_{i,i} + E_{j,j}) + sin(t)E_{i,j} = \overline{E}_{i,j}. \end{aligned}$$

Dle předpokladů nám vyšla ortogonální matice s determinantem jedna, pro jejíž inverzi zřejmě platí

$$\overline{E}_{i,j}^{-1} = I + (cos(t) - 1)(E_{i,i} + E_{j,j}) - sin(t)E_{i,j}.$$

Působením matice $\overline{E}_{i,j}^{-1}$ na vektor $x \in \mathbb{R}^m$ vznikne vektor $\overline{x}$, pro který bude platit

$$\overline{x_k} = \begin{cases} x_k, & k \neq i, j, \\ x_i cos(t) + x_j sin(t), & k = i, \\ x_j cos(t) - x_i sin(t), & k = j. \end{cases} \tag{1.8}$$

Nyní již máme vše potřebné, abychom ověřili, že

$$\begin{aligned} \Big(\varphi_0(E_{i,j})f\Big)(x) &= \frac{d}{dt}\Big(\varphi\Big(exp(-tE_{i,j})\Big)f\Big)(x)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(\overline{E}_{i,j}^{-1}x)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}f(-x_i sin(t) + x_j cos(t)) + \frac{\partial}{\partial x_j}f(-x_j sin(t) - x_i cos(t))\Big|_{t=0} \\ &= x_j\frac{\partial}{\partial x_i}f - x_i\frac{\partial}{\partial x_j}f, \end{aligned}$$

což se přesně rovná (1.7).

□

1.3 Kořenové systémy

V této sekci budeme uvažovat jen Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, které jsou polojednoduché.

Obsah této sekce je tvořen standardními poznatky, které jsou převzaty z knihy Hall (2015).

Definice 10. *Mějme Lieovu algebru $\mathfrak{g}$. Adjungovaná reprezentace $(ad, \mathfrak{g})$ této Lieovy algebry je definována předpisem*

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto ad_x, \end{aligned}$$

kde $ad_x(y) = [x, y]$ pro všechny $y \in \mathfrak{g}$.

Definice 11. *Killingovou formou $(-, -)_\kappa$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ nazýváme bilineární formu, jež je pro každé $x, y \in \mathfrak{g}$ definována vztahem*

$$(x, y)_\kappa = tr\Big(ad(x)\, ad(y)\Big).$$

Definice 12. *Pro Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ řekneme, že $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra, pokud platí následující vztahy*

1. $(\forall x, y \in \mathfrak{h})\,([x, y] = 0)$, *(komutativita)*
2. $(\forall x \in \mathfrak{g})\,([\mathfrak{h}, x] = 0 \to x \in \mathfrak{h})$, *(maximalita)*
3. $(\forall x \in \mathfrak{h})\,(ad_x$ *je diagnalizovatelná*$)$, *(diagonalizovatelnost)*

kde jsme použili zkratku $[\mathfrak{h}, x]$ za $[y, x]$ pro všechny $y \in \mathfrak{h}$.

Jinými slovy můžeme říct, že Cartanova podalgebra je maximální komutativní podalgebra s diagnalizovatelnou adjungovanou reprezentací.

Značení. V této sekci budeme $\mathfrak{h}$ výhradně označovat Cartanovu podalgebru Lieovy algebry $\mathfrak{g}$.

Definice 13. *Nenulový prvek $\alpha \in \mathfrak{h}$ nazýváme kořenem, pokud existuje nenulové $x \in \mathfrak{g}$ takové, že $[y, x] = (\alpha, y)_\kappa x$ pro všechny $y \in \mathfrak{h}$.*

Množinu nenulových kořenů označíme jako Δ, kterou můžeme napsat ve tvaru

$$\Delta = \Delta^+ \mathring{\cup} \Delta^-,$$

kde $\Delta^- = -\Delta^+$ a pro každé $\alpha, \beta \in \Delta^+$ platí $\alpha + \beta \in \Delta^+$.

Pro kořen α definujeme kořenový prostor $\mathfrak{g}_\alpha$ jako prostor všech $x \in \mathfrak{g}$ splňující rovnost výše. Navíc každý prvek z $\mathfrak{g}_\alpha$ se nazývá kořenový vektor.

Weylův vektor ρ definujeme jako

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha.$$

Poznámka. Vztah v definici kořene můžeme také formulovat jako $[y, x] = \alpha^*(y)x$, kde $\alpha^* \in \mathfrak{h}^*$.

Definice 14. *Nechť (f, V) je reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$.*

Řekneme, že $v \in V$ je singulární vektor s váhou $\lambda \in \mathbb{C}$, pokud splňuje následující vlastnosti:

1. $(\forall x \in \mathfrak{h})\,(f(x)v = (\lambda, x)_\kappa v)$, *tj. v má váhu λ,*
2. $(\forall \alpha \in \Delta^+)\,(x_\alpha(v) = 0)$.

Mějme vektory $v_1, v_2 \in V$ s váhami λ_1, λ_2, pak řekneme, že váha λ_1 je větší nebo rovna λ_2, pokud existují takové $n_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, že platí

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sum_{\alpha \in \Delta^+} n_\alpha \alpha.$$

Takto definovaná relace určuje částečné uspořádání na množině všech vah W na prostoru V.

Prvek $v \in V$ je vektor nejvyšší váhy, pokud jeho váha je maximální prvek z množiny W.

Definice 15. *Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ můžeme rozložit jako direktní součet Cartanovy podalgebry a kořenových prostorů neboli*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Příklad 6. Existuje mnoho typů kořenových systémů, v této práci budeme používat při dokazování Howeovy duality pouze dva, a to pro speciální ortogonální Lieovu algebru liché a sudé dimenze.

Dle Leistner (2012) si proto zavedeme alternativní bázi pro Lieovu algebru $\mathfrak{so}_{m_0}$, kde $m_0 = 2m$, nebo $m_0 = 2m + 1$ pro $m \in \mathbb{N}$.

V závěru Příkladu 5 jsme si zavedli bázi $\{E_{i,\,j}\}_{i\neq j}$, od které si odvodíme tyto vektory

$$\begin{aligned}
H_j &= iE_{2j-1,\,2j}, & j &= 1,\,\ldots,\,m\\
K_j^{\pm} &= E_{2j-1,\,2m+1} \pm iE_{2j,\,2m+1}, & j &= 1,\,\ldots,\,m\\
L_{j_1,\,j_2}^{\pm} &= (E_{2j_1-1,\,2j_2-1} - E_{2j_1,\,2j_2}) \pm i(E_{2j_1-1,\,2j_2} + E_{2j_1,\,2j_2-1}), & 1 &\leq j_1 < j_2 \leq m\\
M_{j_1,\,j_2}^{\pm} &= (E_{2j_1-1,\,2j_2} - E_{2j_1,\,2j_2-1}) \pm i(E_{2j_1-1,\,2j_2-1} + E_{2j,\,2j_2}). & 1 &\leq j_1 < j_2 \leq m
\end{aligned}$$

Navíc v Příkladu 4 jsme si definovali reprezentaci φ_0 na $\mathcal{P}_n^m$, pro kterou si tyto prvky přepíšeme následovně

$$\begin{aligned}
\varphi_0(H_j) &= -i\left(x_{2j-1}\frac{d}{dx_{2j}} - x_{2j}\frac{d}{dx_{2j-1}}\right),\\
\varphi_0(K_j^{\pm}) &= -\left(x_{2j-1}\frac{d}{dx_{2m+1}} - x_{2m+1}\frac{d}{dx_{2j-1}}\right) \pm i\left(-x_{2j}\frac{d}{dx_{2m+1}} + x_{2m+1}\frac{d}{dx_{2j}}\right),\\
\varphi_0(L_{j_1,\,j_2}^{\pm}) &= -\left(\left(x_{2j_1-1}\frac{d}{dx_{2j_2-1}} - x_{2j_2-1}\frac{d}{dx_{2j_1-1}}\right) - \left(x_{2j_1}\frac{d}{dx_{2j_2}} - x_{2j_2}\frac{d}{dx_{2j_1}}\right)\right)\\
&\quad \pm i\left(-\left(x_{2j_1-1}\frac{d}{dx_{2j_2}} - x_{2j_2}\frac{d}{dx_{2j_1-1}}\right) - \left(x_{2j_1}\frac{d}{dx_{2j_2-1}} - x_{2j_2-1}\frac{d}{dx_{2j_1}}\right)\right),\\
\varphi_0(M_{j_1,\,j_2}^{\pm}) &= -\left(\left(x_{2j_1-1}\frac{d}{dx_{2j_2}} - x_{2j_2}\frac{d}{dx_{2j_1-1}}\right) - \left(x_{2j_1}\frac{d}{dx_{2j_2-1}} - x_{2j_2-1}\frac{d}{dx_{2j_1}}\right)\right)\\
&\quad \pm i\left(-\left(x_{2j_1-1}\frac{d}{dx_{2j_2-1}} - x_{2j_2-1}\frac{d}{dx_{2j_1-1}}\right) - \left(x_{2j_1}\frac{d}{dx_{2j_2}} - x_{2j_2}\frac{d}{dx_{2j_1}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Cartanova podalgebra $\mathfrak{h}$ Lieovy algebry $\mathfrak{so}_{m_0}$ je zřejmě generována prvky H_j a zaveďme si prvky ϵ_j pro $j \in \{1,\,\ldots,\,m\}$ tak, že splňují

$$\epsilon_j(H_{j_0}) = \delta_{j,\,j_0}$$

pro $j_0 \in \{1,\,\ldots,\,m\}$.

1) $\mathfrak{so}_{2m+1}$: Zde dostáváme, že množina kořenů a množina kladných kořenů jsou následujícího tvaru

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathfrak{so}_{2m+1}} &= \{\pm\epsilon_j | j \in \{1,\,\ldots,\,m\}\} \cup \{\pm\epsilon_{j_1} \pm \epsilon_{j_2} | 1 \leq j_1 < j_2 \leq m\},\\
\Delta^+_{\mathfrak{so}_{2m+1}} &= \{\epsilon_j | j \in \{1,\,\ldots,\,m\}\} \cup \{\epsilon_{j_1} \pm \epsilon_{j_2} | 1 \leq j_1 < j_2 \leq m\}.
\end{aligned}$$

Ještě si spočítáme Weylův vektor:

$$\rho_{\mathfrak{so}_{2m+1}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}\epsilon_j + \sum_{j_1<j_2}(\epsilon_{j_1} \pm \epsilon_{j_2})\right) = \sum_{j=1}^{m}(m - j + \frac{1}{2})\epsilon_j. \tag{1.9}$$

Skalární součiny Weylova vektoru a kladných kořenů jsou následující

$$\begin{aligned}
(\rho,\,\epsilon_{j_1} - \epsilon_{j_2}) &= (m - j_1 + \frac{1}{2}) - (m - j_2 + \frac{1}{2}) = j_2 - j_1,\\
(\rho,\,\epsilon_{j_1} + \epsilon_{j_2}) &= (m - j_1 + \frac{1}{2}) + (m - j_2 + \frac{1}{2}) = 2m + 1 - (j_2 + j_1),\\
(\rho,\,\epsilon_j) &= m - j + \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

2) $\mathfrak{so}_{2m}$: Pro kořeny a kladné kořeny této Lieovy algebry platí tyto vztahy:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathfrak{so}_{2m}} &= \{\pm\epsilon_{j_1} \pm \epsilon_{j_2} | 1 \le j_1 < j_2 \le m\},\\ \Delta^+_{\mathfrak{so}_{2m}} &= \{\epsilon_{j_1} \pm \epsilon_{j_2} | 1 \le j_1 < j_2 \le m\}.\end{aligned}$$

Weylův vektor je dán

$$\rho_{\mathfrak{so}_{2m}} = \frac{1}{2}\sum_{j_1<j_2}(\epsilon_{j_1} \pm \epsilon_{j_2}) = \sum_{j=1}^{m}(m-j)\epsilon_j. \tag{1.11}$$

A v neposlední řadě si vypočítáme skalární součty Weylova vektoru a kladných kořenů:

$$\begin{aligned}(\rho, \epsilon_{j_1} - \epsilon_{j_2}) &= (m - j_1) - (m - j_2) = j_2 - j_1,\\ (\rho, \epsilon_{j_1} + \epsilon_{j_2}) &= (m - j_1) + (m - j_2) = 2m - (j_2 + j_1).\end{aligned} \tag{1.12}$$

Dále pro kořenové prostory platí, že pro prvek

$$\begin{aligned}\pm\epsilon_j &\text{ je jeho kořenový prostor roven } \mathbb{R}K_j^{\pm},\\ \pm(\epsilon_{j_1} + \epsilon_{j_2}) &\text{ je jeho kořenový prostor roven } \mathbb{R}L^{\pm}_{j_1,j_2},\\ \pm(\epsilon_{j_1} - \epsilon_{j_2}) &\text{ je jeho kořenový prostor roven } \mathbb{R}M^{\pm}_{j_1,j_2}.\end{aligned}$$

Věta 5 (Hall, 2015,theorem 10.18)**.** *Pro prostor V_λ generovaný vektorem s nejvyšší váhou λ existuje Weylův vzorec pro výpočet dimenze prostoru V_λ:*

$$dim(V_\lambda) = \frac{\Pi_{\alpha\in\Delta^+}(\lambda + \rho, \alpha)}{\Pi_{\alpha\in\Delta^+}(\rho, \alpha)}, \tag{1.13}$$

kde ρ je Weylův vektor.

Příklad 7. V tomto příkladu si ukážeme přímou aplikaci věty 5 pro výpočet dimenze prostoru V_λ generovaného vektorem s nejvyšší váhou $\lambda = (n, 0, \dots, 0)$ vzhledem k Lieově algebře $\mathfrak{so}_m$.

V příkladu 6 jsme si již v rovnicích (1.9) a (1.11), resp. v (1.10) a (1.12), spočítali Weylovy vektory, resp. skalární součiny kořenů a Weylova vektoru, pro ortogonální Lieovu algebru sudé a liché dimenze. Zjednodušíme si počítání tím, že si povšimneme, že stačí uvažovat jenom kladné kořeny, které jsou tvaru

$$\epsilon_1 \qquad a \qquad \epsilon_1 \pm \epsilon_j$$

pro $1 < j \le m_0$.

Nyní stačí jenom dosadit do Weylova vzorce (1.13):

1) $\mathfrak{so}_{2m_0+1}$ pro $m = 2m_0 + 1$:

$$\begin{aligned}dim(V_\lambda) = \Pi_{j=2}^{m_0}&\frac{(n+j-1)(n+2m_0-j)(n+m_0-\frac{1}{2})}{(j-1)(2m_0-j)(m_0-\frac{1}{2})} =\\ &= \frac{(n+2m_0-2)!}{n!(2m_0-2)!}\frac{2n+2m_0-1}{2m_0-1} = \binom{n+m-3}{n}\frac{2n+m-2}{m-2}\end{aligned}$$

2) $\mathfrak{so}_{2m_0}$ pro $m = 2m_0 + 1$:

$$dim(V_\lambda) = \Pi_{j=2}^{m_0} \frac{(n+j-1)(n+2m_0-(j+1))}{(j-1)(2m_0-(j+1))} =$$
$$= \frac{(n+2m_0-3)!}{n!(2m_0-3)!} \frac{n+m_0-1}{m_0-1} = \binom{n+m-3}{n} \frac{2n+m-2}{m-2}$$

Tedy vidíme, že pro ireducibilní prostory generované vektorem s nejvyšší váhou $(n, 0, \ldots, 0)$ vzhledem k Lieově algebře $\mathfrak{so}_m$ jsou jejich dimenze vždy

$$\binom{n+m-3}{n} \frac{2n+m-2}{m-2}.$$

1.4 Schwartzovské prostory

Definice a věty jsou opět převzaty z Howe a Tan (1992)[kapitola I].

Definice 16. *Funkce $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ patří do Schwartzovského prostoru $\mathcal{S}^m$, pokud $\forall a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí*

$$||f||_{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m} = ||x_1^{a_1} \ldots x_m^{a_m} \frac{\partial^{b_1+\cdots+b_m}}{\partial x_1^{b_1} \ldots \partial x_m^{b_m}} f||_{\mathcal{L}^\infty} < +\infty. \tag{1.14}$$

Poznámka. Schwartzovský prostor se často nazývá „prostor rychle klesajících funkcí“.

Můžeme ověřit, že pro dané $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňuje

$$|| - ||_{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m}$$

vlastnosti pseudonormy a tento systém pseudonorem definuje na Schwartzovském prostoru strukturu lineárního topologického prostoru.

Tuto topologii lze také zavést pomocí vhodné metriky, tedy prostor $\mathcal{S}^m$ je metrický.

Z definice můžeme vyvodit, že pro funkci $f \in \mathcal{S}^m$ platí

$$\lim_{|x| \to \pm\infty} p(x)f(x) = 0, \qquad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Následující věta je jedním z důsledků vět popsaných v knize Treves (1967, kapitola 43, 50), pomocí kterých definujeme způsob, jak lze zúplnit tensorový součin topologických prostorů.

Definice 17. *Pro $p, q \in \mathbb{N}$ máme*

$$\mathcal{S}^p \widehat{\otimes} \mathcal{S}^q \cong \mathcal{S}^{p+q},$$

kde $\widehat{\otimes}$ značí topologický tensorový součin.

Důsledek. *Pro každé $m \in \mathbb{N}$ máme následující vztah*

$$\mathcal{S}^m = \underbrace{\mathcal{S} \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} \mathcal{S}}_{m}.$$

Definice 18. *Pro $f \in \mathcal{S}^m$ definujeme Fourierovu transformaci $\widehat{f}$ následovně*

$$\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-i<x,y>} dx,$$

kde $< -, - >$ značí Eukleidovský skalární součin.

Lemma 6. *Mějme funkci $f \in \mathcal{S}^m$, $k \in \mathbb{N}$ a $k \leq n$, pak platí následující vzorce:*

$$\widehat{x_k f(x)}(y) = i \frac{\partial}{\partial y_k} \widehat{f}(y),$$
$$\widehat{\frac{\partial}{\partial x_k} f(x)}(y) = i y_k \widehat{f}(y).$$

Důkaz. První rovnost dokážeme pomocí vztahu

$$\frac{\partial}{\partial y_k} e^{-i<x,y>} = -i x_k e^{-i<x,y>}.$$

K druhé rovnosti využijeme per partes a vlastnosti Schwartzovských funkcí (1.14), odtud máme následující výpočet

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{\partial}{\partial x_k} f}(y) &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} f(x)\Big) e^{-i<x,y>} dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} f(x)\Big) e^{-i<x,y>} dx_k \bigg) dx_{-k} \\
&= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \bigg(\Big[f(x) e^{-i<x,y>} \Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \Big(-i y_k e^{-i<x,y>} \Big) dx_k \bigg) dx_{-k} \\
&= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \bigg(0 + i y_k \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i<x,y>} dx_k \bigg) dx_{-k} = i y_k \widehat{f}(y),
\end{aligned}$$

kde jsme jako dx_{-k} označili Lebesgueovu míru $dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_m$.

□

Definice 19. *Nechť máme dvě funkce f, $g \in \mathcal{S}^m$, pak skalárním součinem na $\mathcal{S}^m$ rozumíme*

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \overline{g(x)} \, dx.$$

Poznámka. Snadno můžeme nahlédnou, že všechny vlastnosti skalárního součinu jsou splněny.

Věta 7 (Plancherelova rovnost (Plancherel, 1910))**.** *Mějme funkci $f \in \mathcal{S}^m$, pak platí rovnost*

$$||\widehat{f}|| = ||f||.$$

2. Hermitovské funkce

2.1 O operátorech a_j a b_j

Lemma 8. *Pro $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ definujme operátory a_j a b_j na $\mathcal{S}^m$ předpisy*

$$a_j = x_j + \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad b_j = x_j - \frac{\partial}{\partial x_j},$$

potom jsou tyto operátory jsou sdružené.

Důkaz. Mějme funkce $f, g \in \mathcal{S}^m$ a libovolné j. Z linearity skalárního součinu můžeme působení operátoru a_j na první člen rozdělit na dva případy.

Nejdřív vypočítáme, jak vypadá skalární součin, pokud na první složku působí x_j:

$$(x_j f, g) = \int_{\mathbb{R}^m} x_j f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\overline{x_j g(x)}\, dx = (f, x_j g).$$

Nyní zjistíme tvar působení $\frac{\partial}{\partial x_j}$:

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial x_j} f, g) &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\overline{g(x)}\, dx_j) dx_{-j} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} ([f\,\overline{g}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{g(x)}\, dx_j) dx_{-j} \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\overline{(-\frac{\partial}{\partial x_j} g(x))}\, dx = (f, -\frac{\partial}{\partial x_j} g),
\end{aligned}$$

kde jsme si symbolem dx_{-j} označili Lebesgueovu míru $dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_m$.

Dále jsme využili u čtvrtého rovnítka, že funkce jsou ze Schwartzovského prostoru, proto $[f\,\overline{g}]_{-\infty}^{+\infty} = 0$.

Tedy opětovnou aplikací linearity skalárního součinu můžeme vyvodit, že

$$(a_j(f),\, g) = ((x_j + \frac{\partial}{\partial x_j}) f, g) = (f,\, (x_j - \frac{\partial}{\partial x_j}) g) = (f, b_j(g)).$$

$\square$

Lemma 9 (Mocniny matic v Lieově závorce)**.** *Pro $n \in \mathbb{N}$ a A, $B \in \mathfrak{sl}_2$ platí následující vztahy:*

$$[A^n,\, B] = \sum_{j=0}^{n-1} A^j [A,\, B] A^{n-1-j}, \tag{2.1}$$

$$[(e^+)^n,\, e^-] = n(e^+)^{n-1}(h + n - 1), \tag{2.2}$$

$$[e^+,\, (e^-)^n] = n(e^-)^{n-1}(h - n + 1). \tag{2.3}$$

Důkaz. K důkazu prvního vztahu budeme postupovat pomocí indukce dle n.

Pokud $n = 1$, pak vzorec triviálně platí.
Předpokládejme, že pro $n > 1$ vzorec platí, dokažme ho pro $n + 1$:

$$\begin{aligned}[A^{n+1}, B] &= A^{n+1}B - BA^{n+1} = A^{n+1}B - ABA^n - BA^{n+1} + ABA^n \\ &= A(A^nB - BA^n) - (BA - AB)A^n = A[A^n, B] + [A, B]A^n \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} A^{j+1}[A, B]A^{n-1-j} + [A, B]A^n = \sum_{j=0}^{n} A^j[A, B]A^{n-j}.\end{aligned}$$

V předposledním kroku jsme použili indukční předpoklad a v posledním jsme implicitně přečíslovali sumu.

Druhý a třetí vztah jsou provázány, proto nám stačí dokázat pouze jeden z nich, neboť se v obou postupuje podobně. Ukažme například rovnost (2.2), ale nejdříve budeme potřebovat následující vzorec, který si ihned i dokážeme:

$$[h, (e^{\pm})^n] = \sum_{j=0}^{n-1}(e^{\pm})^j[h, e^{\pm}](e^{\pm})^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1}(e^{\pm})^j(\pm 2e^{\pm})(e^{\pm})^{n-1-j} = \pm 2n(e^{\pm})^n.$$

Nyní můžeme konečně dokázat platnost vzorce (2.2):

$$\begin{aligned}[(e^+)^n, e^-] &= \sum_{j=0}^{n-1}(e^+)^j[e^+, e^-](e^+)^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1}(e^+)^j\Big(h(e^+)^{n-1-j}\Big) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}(e^+)^j\Big([h, (e^+)^{n-1-j}] + (e^+)^{n-1-j}h\Big) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\Big((n-1-j)(e^+)^{n-1} + (e^+)^{n-1}h\Big) = n(e^+)^{n-1}(n-1+h).\end{aligned}$$

□

Důsledek (Komutátor a_j a b_j)**.** *Pro* $n \in \mathbb{N}$ *a* $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *máme následující vztah:*

$$[a_j, b_j^n] = 2nb_j^{n-1}.$$

Důkaz. Mějme $f \in \mathcal{S}^m$. Nejdříve vyšetříme, jak vypadá komutátor těchto operátorů:

$$\begin{aligned}[a_j, b_j](f) &= a_j(b_j(f)) - b_j(a_j(f)) = a_j(x_jf - \frac{\partial}{\partial x_j}f) - b_j(x_jf + \frac{\partial}{\partial x_j}f) \\ &= x_j^2f - x_j\frac{\partial}{\partial x_j}f + f + x_j\frac{\partial}{\partial x_j}f - \frac{d^2}{dx_j^2}f \\ &\quad - x_j^2f - x_j\frac{\partial}{\partial x_j}f + f + x_j\frac{\partial}{\partial x_j}f + \frac{d^2}{dx_j^2}f \\ &= 2f.\end{aligned}$$

Snadnou aplikací rovnice (2.1) z Lemmatu 9 dostaneme

$$[a_j, b_j^n] = \sum_{i=0}^{n-1} b_j^i[a_j, b_j]b_j^{n-i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 2b_j^{n-1} = 2nb_j^{n-1}.$$

□

2.2 Hermitovská báze prostoru $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$

Definice 20. *Hermitovské funkce $v_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)}$ jsou na $\mathcal{S}^m$ definovány tímto rekurzivním vztahem:*

$$v_{(0,0,\ldots,0)} = e^{-\frac{r^2}{2}}, \qquad v_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)} = \Pi_{i=1}^m b_i^{j_i} v_{(0,0,\ldots,0)},$$

kde budeme nadále označovat $\sum_{i=1}^m x_i^2$ jako r^2.

Definice 21. *Říkáme, že množina M je hustá v prostoru $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$, pokud pro každou funkc $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$ takovou, že pro všechny $m \in M$ platí $(f, m) = 0$, pak $f = 0$.*

Lemma 10 (Polynomiální báze)**.** *Množina $\{x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_m^{j_m} e^{-\frac{r^2}{2}}\}$ je bází v $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$.*

Důkaz. Stačí dokázat, že tato množina je hustou v $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$.

Pro spor předpokládejme, že máme takovou funkci $f \neq 0 \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$, že

$$(f,\, x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_m^{j_m} e^{-\frac{r^2}{2}}) = 0 \tag{2.4}$$

pro všechny $j_1,\, j_2,\, \ldots, j_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Označíme si funkci $F = fe^{-\frac{r^2}{2}}$ a na ní použijeme Fourierovu transformaci:

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(y) =& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-\frac{r^2}{2}} e^{-i<y,\, x>} \, dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) (\Pi_{l=1}^m e^{-\frac{x_l^2}{2}} e^{-l y_l x_l}) \, dx \\
=& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) (\Pi_{l=1}^m e^{-\frac{x_l^2}{2}} (\sum_{j_l=0}^{\infty} (-i)^{j_l} \frac{y_l^{j_l}}{j_l!})) \, dx \\
=& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_m = 0}^{\infty} (-i)^J \frac{y_1^{j_1} y_2^{j_2} \ldots y_m^{j_m}}{j_1! j_2! \ldots j_n!} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_m^{j_m} e^{-\frac{r^2}{2}} \, dx.
\end{aligned}$$

Zde jsme pro přehlednost označili $\sum j_i$ jako J a Eukleidovský skalární součin, aby nedošlo k záměně, jako $< -, - >$.

Díky předpokladu (2.4) víme, že

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_m^{j_m} e^{-\frac{r^2}{2}} \, dx = (f,\, x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_m^{j_m} e^{-\frac{r^2}{2}}) = 0$$

pro libovolné $j_1,\, j_2 \ldots,\, j_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

V poslední kroku použitím Plancherelovy rovnosti (viz Věta 7) dostáváme

$$0 = ||\widehat{F}||^2 = ||F||^2 = ||fe^{-\frac{r^2}{2}}||^2.$$

Jedinou možností, kdy nastává tato rovnost, je $f = 0$, což nám dává spor. $\square$

Věta 11 (Hermitovská báze)**.** *Hermitovské funkce $\{v_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)}\}$ tvoří ortogonální bázi v $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$.*

Důkaz. Ukážeme, že množina Hermitovských funkcí tvoří ortogonální systém hustý v prostoru $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$.

1. Systém $\{v_{(j_1, j_2, \dots, j_m)}\}$ je ortogonální: Nejdříve zjistíme, jak působí operátory a_i na $v_{(0,0,\dots,0)}$ pro $i \in \{1, 2, \dots, m\}$:

$$a_i v_{(0,0,\dots,0)} = (x_i + \frac{\partial}{\partial x_i})e^{-\frac{r^2}{2}} = 0.$$

Pro obecný prvek $v_{(j_1, j_2, \dots, j_m)}$ dostáváme s využitím důsledku Lemmatu 9:

$$\begin{aligned} a_i v_{(j_1, j_2, \dots, j_m)} &= a_i b_i^{j_i} v_{(0,0,\dots,0)} \\ &= [a_i,\, b_i^{j_i}] v_{(j_1, j_2, \dots, 0, \dots, j_m)} + b_i^{j_i}(a_i v_{(j_1, j_2, \dots, 0, \dots, j_m)}) \\ &= 2j_i b_i^{j_i - 1}(a_i v_{(j_1, j_2, \dots, 0, \dots, j_m)}) = 2j_i v_{(j_1, j_2, \dots, j_i - 1, \dots, j_m)}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme přímo přistoupit k důkazu ortogonality Hermitovských funkcí, tedy pro $j_i,\, k_i \in \mathbb{N}$, předpokládejme $j_i \geq k_i$ pro všechny $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a alespoň pro jeden koeficient je nerovnost ostrá:

$$\begin{aligned} &(v_{(j_1, j_2, \dots, j_m)},\, v_{(k_1, k_2, \dots, k_m)}) = (\Pi_{i=1}^m b_i^{j_i} v_{(0,0,\dots,0)},\, v_{(k_1, k_2, \dots, k_m)}) \\ &= (v_{(0,0,\dots,0)},\, \Pi_{i=1}^m a_i^{j_i} v_{(k_1, k_2, \dots, k_m)}) = (v_{(0,0,\dots,0)},\, \Pi_{i=1}^m 2^{k_i}(k_i!) a_i^{j_i - k_i} v_{(0,0,\dots,0)}) = 0. \end{aligned}$$

Tedy Hermitovské funkce jsou opravdu navzájem ortogonální. Pokud bychom chtěli vytvořit ortonormální systém, můžeme funkce vydělit normou, jež má tvar:

$$\begin{aligned} ||v_{(j_1, j_2, \dots, j_m)}||^2 &= (v_{(0,0,\dots,0)},\, \Pi_{i=1}^m 2^{j_i}(j_i!) v_{(0,0,\dots,0)}) \\ &= (\Pi_{i=1}^m 2^{j_i}(j_i!)) \int_{\mathbb{R}^m} e^{-r^2}\, dx = \Pi_{i=1}^m 2^{j_i}(j_i!)\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

2. Systém $\{v_{(j_1, j_2, \dots, j_m)}\}$ je hustý v $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$: Důkaz bude velmi analogický k výše popsanému důkazu Věty 10. Opět budeme předpokládat, že máme funkci f, která je ve sporu s definicí hustoty. Tuto funkci převedeme na funkci F, která je součinem původní funkce a exponenciály, a na ni provedeme Fourierovu transformaci:

$$\widehat{F}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m = 0}^{\infty} (-i)^{\sum j_i} \frac{y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots y_m^{j_m}}{j_1! j_2! \dots j_n!} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_m^{j_m} e^{-\frac{r^2}{2}}\, dx.$$

Díky předchozímu lemmatu víme, že $\{x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_m^{j_m} e^{-\frac{r^2}{2}}\}$ je bází $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$, a proto platí:

$$(f,\, x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_m^{j_m} e^{-\frac{r^2}{2}}) = 0.$$

Tento vztah se nám umožňuje dokončení důkazu pomocí Plancherelovy rovnosti:

$$0 = ||\widehat{F}||^2 = ||F||^2 = ||f e^{-\frac{r^2}{2}}||^2.$$

Jedinou možností, kdy nastává tato rovnost, je $f = 0$, což nás přívádí ke sporu.

Ukázali jsme tedy, že Hermitovské funkce tvoří opravdu ortogonální bází v prostoru $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m)$.

□

3. Howeova dualita

3.1 Laplaceův operátor

Definice 22. *Na prostoru $\mathcal{P}^m$ definujeme operátory*

$$\begin{aligned} r_m^2 : \mathcal{P}_n^m &\to \mathcal{P}_{n+2}^m & \Delta_m : \mathcal{P}_n^m &\to \mathcal{P}_{n-2}^m, \\ f &\mapsto \sum_{i=1}^m x_i^2 f & f &\mapsto \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Navíc operátory z rovnice (3.1) můžeme rozšířit na celý prostor polynomů $\mathcal{P}^m$:

$$r_m^2,\, \Delta_m : \mathcal{P}^m \to \mathcal{P}^m. \tag{3.2}$$

Řekneme, že $f \in \mathcal{P}^m$ je harmonický polynom, pokud splňuje

$$\Delta_m f = 0. \tag{3.3}$$

Množinu všech polynomů daného stupně splňující Laplaceovu podmínku (3.3) označíme $\mathcal{H}_n^m$.

Dále pokud nebude nutné zdůrazňovat dimenzi $\mathbb{R}$, nad kterou bereme prostor polynomů $\mathcal{P}^m$, budeme tento index vynechávat jak u prostorů, tak i u operátorů.

Poznámka. Snadným cvičením je důkaz následujícího vztahu pro násobení funkcí $f,\, g \in \mathcal{P}^m$:

$$\Delta(fg) = \Delta(f)g + f\Delta(g) + 2\sum_{i=1}^m (\frac{\partial}{\partial x_i} f)(\frac{\partial}{\partial x_i} g) \tag{3.4}$$

V následujícím Lemamatu 12 budeme využívat důsledek rovnosti (3.4), který tvrdí, že pro $l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\Delta(x_1^{l_1} \ldots x_m^{l_m}) = \sum_{i=1}^m l_i(l_i - 1) x_1^{l_1} \ldots x_i^{l_i - 2} \ldots x_m^{l_m}. \tag{3.5}$$

Lemma 12 (Surjektivita Laplaceova operátoru Δ_m)**.** *Pro $m \in \mathbb{N}$ zobrazuje Laplaceův operátor Δ_m prostor $\mathcal{P}^m$ na prostor $\mathcal{P}^m$.*

Důkaz. Prostor polynomů si můžeme rozložit na prostor $\mathcal{P}_n^m$ homogenních polynomů stupně n, a proto budeme postupovat tak, že pro dané m ukážeme, že pro všechny stupně homogenity $n \geq 2$ zobrazuje Laplaceův operátor prostor $\mathcal{P}_n^m$ na prostor $\mathcal{P}_{n-2}^m$.

Ale nejdříve si snadno rozmyslíme, že pro $n = 2$ je pro libovolnou dimenzi m toto lemma splněno.

Ukážeme si postup pro případ $m = 2$, abychom lépe viděli, co se zde odehrává v případě vyšších dimenzí. Mějme funci $g \in \mathcal{P}_{n-2}^2$ ve tvaru $g = x_1^{n-l-2} x_2^l$, pro kterou budeme chtít najít $f \in \mathcal{P}_n^2$ takové, že $\Delta_2(f) = g$.

Začneme s indukcí dle velikosti exponentu l u členu x_2.

V případě $l = 0$ neboli $g = x_1^{n-2}$ můžeme jednoduše najít polynom z $\mathcal{P}_n^2$:

$$\Delta_2 \left(\frac{x_1^n}{n(n-1)} \right) = g$$

Předpokládejme, že pro $l_0 < l$ existuje vzor funkce g vzhledem k Laplaceově operátoru, pak dokážeme, že totéž platí pro l:

$$\Delta_2 \left(x_1^{n-l} x_2^l \right) = (n-l)(n-l-1) x_1^{n-2-l} x_2^l + l(l-1) x_1^{n-l} x_2^{l-2}$$

První člen jsme chtěli získat až na přenásobení skalárem a díky indukčnímu předpokladu existuje pro druhý člen vzor, označme ho f_0. Celkově dostaneme, že

$$\begin{aligned} x_1^{n-2-l} x_2^l &= \frac{1}{(n-l)(n-l-1)} \left(\Delta_2 \left(x_1^{n-l} x_2^l \right) - l(l-1) x_1^{n-l} x_2^{l-2} \right) \\ &= \Delta_2 \left(\frac{x_1^{n-l} x_2^l - f_0}{(n-l)(n-l-1)} \right). \end{aligned}$$

Tedy Laplaceův operátor Δ_2 je surjektivní zobrazení.

Jako v případě dvou dimenzí budeme postupovat indukcí dle velikosti

$$l = \sum_{i=2}^{m} l_i$$

u členu $x_2^{l_2} \dots x_m^{l_m}$.

Označme si $y_l = x_2^{l_2} \dots x_m^{l_m}$ a funkci $g = x_1^{n-l-2} y_l$.

V případě $l = 0$ je funkce g tvaru $x_1^{n-2} \in \mathcal{P}_{n-2}^1$, ihned dostáváme, že existuje polynom $f \in \mathcal{P}_n^1$.

Předpokládejme, že pro $l_0 < l$ je funkce g v obrazu Laplaceova operátoru, pak dokážeme, že totéž platí pro l. Využitím rovnosti (3.5) z poznámky výše dostáváme, že

$$\Delta_m(x_1^{n-l} y_l) = (n-l)(n-l-1) x_1^{n-l-2} y_l + x_1^{n-l} \Delta_m(y_l). \tag{3.6}$$

Stupeň polynomu $\Delta_m(y_l) = \Delta_{m-1}(y_l)$ bude $l - 2$, proto z indukčního předpokladu dostáváme, že existuje polynom f_0 takový, že

$$\Delta_m(f_0) = x_1^{n-l} \Delta_m(y_l).$$

Navíc první člen v rovnosti (3.6) je ten, pro který jsme chtěli najít vzor, a snadnou úpravou této rovnosti získáváme, že

$$x_1^{n-l-2} y_l = \Delta_m \left(\frac{x_1^{n-l} y_l - f_0}{(n-l)(n-l-1)} \right).$$

□

3.2 Oscilátorová reprezentace

Definice 23. *Na Schwartzovském prostoru $\mathcal{S} = \mathcal{S}^1$ si definujeme oscilátorovou ω reprezentaci Lieovy algebry $\mathfrak{sl}_2$ následujícími vztahy:*

$$\begin{aligned} \omega(h) &= x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2} = E_1 + \frac{1}{2}, \\ \omega(e^+) &= \frac{i}{2}x^2 = \frac{i}{2}r_1^2 \\ \omega(e^-) &= \frac{i}{2}\frac{d}{dx} = \frac{i}{2}\Delta_1, \end{aligned} \tag{3.7}$$

kde E_1 nazýváme Eulerův operátor.

Pomocí věty 1.4 můžeme definici oscilátorové reprezentace rozšířit na prostor $\mathcal{S}^m$ jako m-tý tensorový součin reprezentace ω, tedy reprezentaci ω^m je na prostoru $\mathcal{S}^m$ popsána těmito akcemi na elementech Lieovy algebry $\mathfrak{sl}_2$:

$$\begin{aligned} \omega^m(h) &= \sum_{i=1}^m x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{m}{2} = E_m + \frac{m}{2}, \\ \omega^m(e^+) &= \frac{i}{2}\sum_{i=1}^m x_i^2 = \frac{i}{2}r_m^2, \\ \omega^m(e^-) &= \frac{i}{2}\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{i}{2}\Delta_m, \end{aligned} \tag{3.8}$$

kde E_m je Eulerův operátor.

Poznámka. Přímým výpočtem se snadno ověří, že operátory $\frac{i}{2}r_m^2$, $\frac{i}{2}\Delta_m$ a $E_m + \frac{m}{2}$ splňují komutativní relace pro Lieovu algebru $\mathfrak{sl}_2$.

Příklad 8. Oscilátorová reprezentace ω^m má v alternativní bázi $\{\overline{k}, n^+, n^-\}$ Lieovy algebry $\mathfrak{sl}_2$, kterou jsme si zavedli v příkladu 2, následující tvar:

$$\begin{aligned} \omega^m(\overline{k}) &= i\Big(\omega^m(e^-) - \omega^m(e^+)\Big) = -\frac{1}{2}(\Delta_m - r_m^2), \\ \omega^m(n^\pm) &= \frac{1}{2}\Big(\omega^m(h) \pm i\Big(\omega^m(e^+) + \omega^m(e^-)\Big)\Big) = \frac{1}{2}\left(E_m + \frac{m}{2} \mp \frac{1}{2}(r_m^2 + \Delta_m)\right). \end{aligned}$$

Věta 13 (Segal-Shale-Weil (Howe a Tan (1992), Kapitola III, Theorem 2.1.2))**.** *Výše popsanou $\mathfrak{sl}_2$-reprezentaci ω^m na $\mathcal{S}^m$ lze integrovat na unitární reprezentaci $\widetilde{SL}_2$ na $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, kde $\widetilde{SL}_2$ je dvojnásobné nakrytí Lieovy grupy SL_2.*

Poznámka. Segal-Shale-Weilova věta jinými slovy říká, že existuje unitární reprezentace Lieovy grupy $\widetilde{SL}_2$ na prostoru $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, pro kterou diferenciál na prostoru hladkých vektorů odpovídající Schwarzovskému prostoru $\mathcal{S}^m$ je oscilátorová reprezentace ω^m.

Příklad 9. Zadefinujme si Lieovu grupu speciálních unitárních matic:

$$SU(1,1) = \left\{\begin{pmatrix} \phi & \overline{\theta} \\ \theta & \overline{\phi} \end{pmatrix} \big|\, |\phi|^2 - |\theta|^2 = 1\right\}. \tag{3.9}$$

Protože tato grupa je konjugovaná s SL_2 v $SL(2,\mathbb{C})$, tedy máme izomorfismus mezi těmito grupami, a proto nám bude stačit dokázat existenci a popis dvojitého nakrytí pro $SU(1,1)$ a z toho okamžitě získáváme tvar $\widetilde{SL}_2$.

Věta 14 (Existence nakrytí). *Lieova grupa $SU(1,1)$ je izomorfní s Lieovou grupou*

$$G = \{(\sigma, \tau) \,|\, |\sigma| < 1, \tau \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\},$$

pro kterou operace násobení je definována předpisem

$$(\sigma_1, \tau_1) \circ (\sigma_2, \tau_2) = (\sigma_3, \tau_3),$$

kde

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 e^{-2i\tau_1}}{1 + \overline{\sigma_1}\sigma_2 e^{-2i\tau_1}}, \\ \tau_3 &= \tau_1 + \tau_2 + \frac{1}{2i} log \left(\frac{1 + \overline{\sigma_1}\sigma_2 e^{-2i\tau_1}}{1 + \sigma_1\overline{\sigma_2} e^{2i\tau_1}} \right) (mod\, 2\pi). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Tvar n-násobného nakrytí je izomofní s grupou

$$G^n = \{(\sigma, \tau) \,|\, |\sigma| < 1, \tau \in \mathbb{R}/2n\pi\mathbb{Z}\},$$

se zřejmým homomorfismem $G^n \to SU(1,1)$.

Navíc univerzální nakrytí je izomorfní s grupou

$$G^\infty = \{(\sigma, \tau) \,|\, |\sigma| < 1, \tau \in \mathbb{R}\}$$

se zřejmým homomofismem $G^\infty \to SU(1,1)$.

Důkaz. Mějme matici z Lieovy grupy $SU(1,1)$ tvaru jako v rovnici (3.9), pro kterou si označíme elementy

$$\sigma = \frac{\theta}{\phi} \qquad a \qquad \tau = arg(\phi)\,(mod\, 2\pi).$$

Snadno odvodíme, že pro $|\sigma| < 1$ můžeme vyjádřit

$$\phi = \frac{e^{i\tau}}{\sqrt{1 - |\sigma|^2}}, \qquad \theta = \frac{e^{i\tau}\sigma}{\sqrt{1 - |\sigma|^2}}.$$

Mějme matice A_1, A_2 a A_3 z grupy $SU(1,1)$ dané

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} \phi_1 & \overline{\theta_1} \\ \theta_1 & \overline{\phi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2 & \overline{\theta_2} \\ \theta_2 & \overline{\phi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_3 & \overline{\theta_3} \\ \theta_3 & \overline{\phi_3} \end{pmatrix} = A_3$$

a elementy σ_i a τ_i pro matici A_i pro $i = 1, 2, 3$.

Dále si označme

$$\sqrt{1 - |\sigma_1|^2}\sqrt{1 - |\sigma_2|^2}$$

jako S.

Explicitně si výpočítáme tvar elementů σ_3 a τ_3:

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \phi_1\phi_2 + \overline{\theta_1}\theta_2 = \frac{e^{i(\tau_1+\tau_2)}}{S} \left(1 + \overline{\sigma_1}\sigma_2 e^{-2i\tau_1}\right), \\ \theta_3 &= \theta_1\phi_2 + \overline{\phi_1}\theta_2 = \frac{e^{i(\tau_1+\tau_2)}}{S} \left(\sigma_1 + \sigma_2 e^{-2i\tau_1}\right), \end{aligned}$$

Odtud dostáváme vztahy

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= \frac{\theta_3}{\phi_3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 e^{-2i\tau_1}}{1 + \overline{\sigma_1}\sigma_2 e^{-2i\tau_1}}, \\
\tau_3 &= arg(\phi_3)\,(mod\, 2\pi) = arg\left(\frac{e^{i(\tau_1+\tau_2)}}{S}\left(1 + \overline{\sigma_1}\sigma_2 e^{-2i\tau_1}\right)\right)\,(mod\, 2\pi) \\
&= arg\left(e^{i\tau_1}\right) + arg\left(e^{i\tau_2}\right) + arg\left(1 + \overline{\sigma_1}\sigma_2 e^{-2i\tau_1}\right)\,(mod\, 2\pi), \\
&= \tau_1 + \tau_2 + \frac{1}{2i} log\left(\frac{1 + \overline{\sigma_1}\sigma_2 e^{-2i\tau_1}}{1 + \sigma_1\overline{\sigma_2} e^{2i\tau_1}}\right)\,(mod\, 2\pi).
\end{aligned}$$

Tím jsme ověřili násobení prvků grupy G z rovnosti (3.10).
Tedy vidíme, že grupa $SU(1,1)$ je izomorfní grupě

$$G = \{(\sigma, \tau)\,|\,|\sigma| < 1, \tau \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Definujme grupy

$$G^n = \{(\sigma, \tau)\,|\,|\sigma| < 1, \tau \in \mathbb{R}/2n\pi\mathbb{Z}\} \qquad a \qquad G^\infty = \{(\sigma, \tau)\,|\,|\sigma| < 1, \tau \in \mathbb{R}\}.$$

se stejnou operací jako pro grupu G.

Zobrazení grupy G^∞ na grupu G dané předpisem

$$(\sigma, \tau) \to (\sigma, \tau/2\pi)$$

zřejmě definuje univerzální nakrytí grupy G.

□

3.3 Polynomiální verze Howeovy duality

V Příkladu 6 jsme si popsali, jak vypadají kořenové systémy pro sudou a lichou dimenzi speciální ortogonální Lieovy algebry $\mathfrak{so}_{m_0}$, a zároveň jsme si popsali i její alternativní bázi spolu s jejím vyjádřením v $\mathcal{P}_n^m$.

V následujícím Lemmatu 15 ukážeme, že z^n, kde $z = x_1 + ix_2$, je singulární vektor s váhou $(n, 0, \ldots, 0)$ v prostoru harmonických polynomů $\mathcal{H}_n^m$ stupně n.

Lemma 15. *Prvek z^n pro $z = x_1 + ix_2$ náleží do $\mathcal{H}_n^m$ a je singulárním vektorem s váhou $(n, 0, \ldots, 0)$ vzhledem k Lieově algebře $\mathfrak{so}_m$.*

Důkaz. Aplikací Laplaceova operátoru Δ dostáváme, že jeho působení na z^n je triviální, neboli $z^n \in \mathcal{H}_n^m$:

$$\begin{aligned}
\Delta(z^n) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(x_1 + ix_2)^n = n\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 + ix_2)^{n-1} + in\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 + ix_2)^{n-1} \\
&= n(n-1)(x_1 + ix_2)^{n-2} - n(n-1)(x_1 + ix_2)^{n-2} = 0.
\end{aligned}$$

Nyní ověříme dvě podmínky z definice 13 a učiníme tak jen pro $\mathfrak{so}_{2m+1}$.

1. z^n má váhu $(n, 0, \ldots, 0)$: Jediné j, pro které element $\varphi_0(H_j)$ obsahuje derivaci podle x_1 nebo x_2, je $j = 1$, proto jsou

$$\varphi_0(H_j)z^n = 0$$

pro $j \in \{2, \ldots, m\}$.

Vypočtěme si jakou váhu má z^n vzhledem k elementu H_1:

$$\varphi_0(H_1)z^n = -i\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)(x_1 + ix_2)^n = -i\,(inx_1 - nx_2)\,z^{n-1} = nz^n.$$

2. $x_\alpha(z^n) = 0)$ pro $\alpha \in \Delta^+$: Kořenové prostory, jak bylo ukázáno na konci příkladu 6, jsou dané elementy K_j^+, L_{j_1,j_2}^+ a M_{j_1,j_2}^+.

Opět si budeme zjednodušovat výpočet, takže pro $j = 1$, $j_1 = 1$ a $j_2 = 2$ mají reprezentace těchto elementů prvky $\frac{\partial}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial}{\partial x_2}$, a tedy K_j^+, L_{j_1,j_2}^+ a M_{j_1,j_2}^+ jsou automaticky nulové pro $j \neq 1$, $j_1 \neq 1$ a $j_2 \neq 2$.

Pustíme se do počítání zbývajících:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(K_1^+)z^n &= -\left(\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_{2m+1}} - x_{2m+1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + i\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_{2m+1}} - x_{2m+1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)z^n\\
&= -(0 - nx_{2m+1} + 0 + nx_{2m+1})z^{n-1} = 0,\\
\varphi_0(L_{1,2}^+)z^n &= -\left(\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - \left(x_2\frac{\partial}{\partial x_4} - x_4\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)z^n\\
&\quad - i\left(\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_4} - x_4\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)z^n\\
&= -\Big(\big(0 - nx_3 - 0 + inx_4\big) + i\big(0 - nx_4 + 0 - inx_3\big)\Big)z^{n-1} = 0,\\
\varphi_0(M_{1,2}^+)z^n &= -\left(\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_4} - x_4\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - \left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)z^n\\
&\quad - i\left(\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \left(x_2\frac{\partial}{\partial x_4} - x_4\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)z^n\\
&= -\Big(\big(0 - nx_4 - 0 + inx_3\big) + i\big(0 - nx_3 + 0 - inx_4\big)\Big)z^{n-1} = 0.
\end{aligned}$$

Tedy z^n je opravdu singulárním vektorem s váhou $(n, 0, \ldots, 0)$ v harmonických polynomech $\mathcal{H}_n^m$.

□

Značení. Prostor polynomů invariantních vzhledem k Lieově grupě SO_m si označíme jako $\mathcal{I}^m$. Tento prostor je totožný s prostorem polynomů v proměné r_m^2, neboli

$$\mathcal{I}^m = \mathcal{P}(r_m^2).$$

Dále $Isot(\mathcal{P}^m, \lambda_n)$ je isotypická komponenta prostoru harmonických polynomů $\mathcal{H}_n^m$ stupně n, kterou jsme si zavedli v Definici 6.

Věta 16 (Polynomiální verze Howeovy duality).
1) Prostor harmonických polynomů $\mathcal{H}_n^m$ je ireducibilní modul Lieovy grupy SO_m.
2) Pro libovolný ireducibilní SO_m-podmodul V v prostoru $\mathcal{P}^m$, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že modul V je izomorfní s prostorem $\mathcal{H}_n^m$.
3) Pro $n \geq 2$ platí

$$\mathcal{P}_n = \bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2i} \mathcal{H}_{n-2i}. \qquad \textit{(viz Tabulka 3.1)} \tag{3.11}$$

4) Vektorové prostory $\mathcal{H}_n^m \bigotimes \mathcal{I}^m$ a $Isot(\mathcal{P}^m, \lambda_n)$ jsou izomorfní.
5) Prostor $Isot(\mathcal{P}^m, \lambda_n)$ je ireducibilním modulem pro akci $\mathfrak{so}_m \times \mathfrak{sl}_2$ a platí

$$Isot(\mathcal{P}^m, \lambda_n) \cong \mathcal{H}_n^m \otimes V_{n+\frac{m}{2}}, \qquad \textit{(Howeova dualita)}$$

kde $V_{n+\frac{m}{2}}$ je modul nejnižší váhy $n + \frac{m}{2}$ pro Lieovu algebru $\mathfrak{sl}_2$.

Tedy pro rozklad prostoru $\mathcal{P}^m$ na ireducibilní části vůči akci $\mathfrak{so}_m \times \mathfrak{sl}_2$ platí

$$\mathcal{P}^m \cong \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^m \otimes V_{n+\frac{m}{2}}.$$

$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}_0$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_4$	$\dots$
	$\mathcal{H}_0$	$\oplus$	$r^2\mathcal{H}_0$	$\oplus$	$r^4\mathcal{H}_0$	$\dots$
		$\mathcal{H}_1$	$\oplus$	$r^2\mathcal{H}_1$	$\oplus$	$\dots$
			$\mathcal{H}_2$	$\oplus$	$r^2\mathcal{H}_2$	$\dots$
				$\mathcal{H}_3$	$\oplus$	$\dots$
					$\mathcal{H}_4$	$\dots$

Tabulka 3.1: Rozklad prostoru polynomů $\mathcal{P}^m$

Důkaz. 1) Zde využijeme Lemmatu 15, ve kterém jsme si ukázali, že harmonický polynom z^n je singulární vektor s váhou $\lambda = (n, 0, \dots, 0)$. Označme si podprostor prostoru $\mathcal{H}_n^m$ generovaný vektorem z^n jako V_λ.

Dále jsme si v Příkladu 7 spočítali, že

$$dim(V_\lambda) = \binom{n+m-3}{n} \frac{2n+m-2}{m-2}.$$

Víme, že $V_\lambda \subset \mathcal{H}_n^m$, tedy pokud

$$dim(V_\lambda) = dim(\mathcal{H}_n^m),$$

pak to nutně znamená, že

$$V_\lambda = \mathcal{H}_n^m$$

a prostor harmonických polynomů je ireducibilní.

Pusťme se proto do počítání dimenzi $\mathcal{H}_n^m$, ale nejdříve zjistěme, jaká je dimenze prostoru polynomů $\mathcal{P}_n$, která snadno plyne z aplikace vzorce pro počítání kombinací s opakováním:

$$dim(\mathcal{P}_n^m) = \binom{n+m-1}{n}.$$

V Lemmatu 12 jsme si ukázali, že Laplaceův operátor Δ_m je surjektivní, proto platí

$$dim(\mathcal{H}_n^m) = dim(\mathcal{P}_n^m) - dim(\mathcal{P}_{n-2}^m) = \binom{n+m-1}{n} - \binom{n-2+m-1}{n-2}$$
$$= \binom{n+m-3}{n}\frac{2n+m-2}{m-2} = dim(V_\lambda).$$

2) Zde budeme uvažovat prostor polynomů nad $\mathbb{R}^m$.

Mějme libovolný ireducibilní modul $P \subset \mathcal{P}$ pro akci grupy SO_m. Laplaceův operátor Δ komutuje s SO_m-akcí, tedy operátor je buď prostý, anebo triviální na P.

Takže existuje nejmenší možné $k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\Delta^k(P) = \{0\}.$$

Vezměme proto $H = \Delta^{k-1}(P)$, tento prostor je netriviální a ireducibilní modul pro grupu SO_m, a tedy musí se rovnat harmonickému prostoru $\mathcal{H}_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

3) Kvůli zachování čitelnosti zde budeme vynechávat psaní reprezentace ω^m pro prvky Lieovy algebry $\mathfrak{sl}_2$.

Takže vezměme si polynom $f \in \mathcal{P}_n$, ke kterému budeme chtít najít koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takové, že platí:

$$h = a_0 f + \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ 2i\le n}} a_i (e^+)^i (e^-)^i f, \tag{3.12}$$

kde $h \in \mathcal{H}_n$, tedy po aplikaci Laplaceova operátoru na obě strany rovnice dostáváme

$$0 = a_0 e^- f + \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ 2i\le n}} a_i e^- (e^+)^i (e^-)^i f.$$

Dále počítejme:

$$a_i(e^-(e^+)^i)(e^-)^i f = a_i\Big([e^-,\, (e^+)^i] + (e^+)^i e^-\Big)(e^-)^i f$$
$$= a_i\Big((-i(e^+)^{i-1}(h+i-1)\Big)(e^-)^i f + a_i (e^+)^i (e^-)^{i+1} f.$$

Vidíme, že člen se rozpadá na dvě části, budeme pokračovat ve zjednodušování první:

$$a_i\Big((-i(e^+)^{i-1}(h+i-1)\Big)(e^-)^i f =$$
$$= -a_i i(i-1)(e^+)^{i-1}(e^-)^i f - a_i i (e^+)^{i-1}\Big(h(e^-)^i\Big) f.$$

Rozepišme si druhou část předchozího výsledku:

$$-a_i i(e^+)^{i-1}\Big(h(e^-)^i\Big) f = -a_i i(e^+)^{i-1}\Big([h,\, (e^-)^i] + (e^-)^i h\Big) f$$
$$= 2a_i i^2 (e^+)^{i-1}(e^-)^i f - a_i i (e^+)^{i-1}(e^-)^i (hf)$$
$$= 2a_i i^2 (e^+)^{i-1}(e^-)^i f - a_i i\left(n + \frac{m}{2}\right)(e^+)^{i-1}(e^-)^i f.$$

Dohromady máme tvar i-tého členu

$$a_i\Bigg(-i\left(-i-1+n+\frac{m}{2}\right)(e^+)^{i-1}(e^-)^i+(e^+)^i(e^-)^{i+1}\Bigg)f.$$

Dáme-li členy se stejnými exponenty $(e^+)^{i-1}(e^-)^i f$ pospolu

$$0=\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ 2i\leq n}}\Bigg(a_{i-1}-a_i i\left(n+\frac{m}{2}-1-i\right)\Bigg)(e^+)^{i-1}(e^-)^i f.$$

Porovnáním koeficientů dostáváme tuto rekurzi, kterou snadno můžeme převést na obecný tvar:

$$a_i=\frac{a_{i-1}}{i(n+\frac{m}{2}-1-i)}=\cdots=\frac{a_0}{\Pi_{j=1}^i j(n+\frac{m}{2}-1-j)}.$$

Navíc zvolíme-li $a_0=1$, vidíme, že pro každý polynom $f\in\mathcal{P}_n^m$ existuje jediná harmonická funkce h a jediný polynom $g\in\mathcal{P}_{n-2}^m$ takové, že

$$f=h+r^2g.$$

4) Uvažujme zobrazení

$$\mathcal{H}_n^m\bigotimes\mathcal{I}^m\to Isot(\mathcal{P}^m,\lambda_n),$$

které je dané násobením funkcí.

Budeme chtít ukázat, že je prosté a na $Isot(\mathcal{P}^m,\lambda_n)$.

Surjektivita tohoto zobrazení okamžitě plyne z 2).

Mějme polynomy $h\in\mathcal{H}_n^m$ a $p\in\mathcal{P}(r_m^2)$, pro které na $\mathbb{R}^m$ platí

$$h(x)p(r_m^2)\equiv 0.$$

Stačí ukázat, že je-li $p\neq 0$, pak $h\equiv 0$.

Nechť $p\neq 0$, pak jistě existuje takové R, že $p(R^2)\neq 0$. Pro libovolné $x\in\mathbb{R}^m$, $||x||=R$, musí platit $h(x)=0$, ale funkce $f(x)$ je homogenní stupně n, tedy $h\equiv 0$ na $\mathbb{R}^m$.

5) Mějme polynom $p_0\in\mathcal{H}_n^m$, a pomocí akce prvku e^+ definujeme polynomy p_j pro $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$:

$$p_j=\Big(\omega^m(e^+)\Big)^j p_0=\left(\frac{i}{2}r^2\right)^j p_0=\left(\frac{i}{2}\right)^j r^{2j}p_0.$$

Váhy těchto polynomů jsou zřejmě $n+\frac{m}{2}+2j$.

Prostor generovaný vektory $\{p_j\}$ si označíme W. Ověříme, že splňuje podmínky pro modul nejnižší váhy $n+\frac{m}{2}$ oscilátorové reprezentace ω^m Lieovy algebry $\mathfrak{sl}_2$ (viz Definice 4).

Pro akci elementů e^+ a h je to zřejmé, proto zjistěme, zda to samé platí i pro prvek e^-. Protože $p_0\in\mathcal{H}_n^m$, zřejmě dostáváme

$$\omega^m(e^-)p_0=\frac{i}{2}\Delta(p_0)=0.$$

A konečně okamžitě plyne za využití vzorce daného v rovnici (2.2):

$$\begin{aligned}\omega^m(e^-)p_j = \omega^m(e^-)\Big(\omega^m(e^+)\Big)^j p_0 &= \Big(\omega^m\Big([e^-,\,(e^+)^j]\Big) + \Big(\omega^m(e^+)\Big)^j\omega^m(e^-)\Big)p_0\\ &= \Big(j\Big(\omega^m(e^+)\Big)^{j-1}(h+j-1)+0\Big)p_0 = -j(n+\frac{m}{2}+j-1)p_{j-1}.\end{aligned}$$

Tedy ověřili jsme, že prostor W je opravdu $\mathfrak{sl}_2$-modulem nejnižší váhy uvnitř prostoru $Isot(\mathcal{P}^m, \lambda_n)$, je tedy izomorfní s modulem $V_{n+\frac{m}{2}}$.

Protože jako počáteční polynom p_0 můžeme zvolit libovolný polynom z $\mathcal{H}_n^m$, dokázali jsme, že

$$\mathcal{H}_n^m \otimes V_{n+\frac{m}{2}} \cong Isot(\mathcal{P}^m, \lambda_n)$$

jako modul pro akci $SO_m \times \mathfrak{sl}_2$.

□

3.4 Transcendentální verze Howeovy duality

Značení. Prostor invariantních Schwartzovských funkcí vzhledem k Lieově algebře SO_m si označíme jako

$$\mathcal{J}^m = \{f \in \mathcal{S}^m \,|\, f(Ax) = f(x), \forall A \in SO_m\}\,. \tag{3.13}$$

Definice 24. *Prostor $\mathcal{S}^+$ definujeme jako prostor funkcí f spojitých na intervalu $< 0, \infty)$, pro které platí, že funkce $f(r^2)$ patří do $\mathcal{S}^m$.*

Lemma 17. *Mějme zobrazení , které je dané*

$$\begin{aligned}\zeta : \mathcal{J}^m &\to \mathcal{S}^+\\ f &\mapsto F,\end{aligned}$$

kde F je funkce v jedné proměné a její hodnota je popsána pro $x \in \mathbb{R}^m$ vztahem

$$f(x) = F\left(||x||^2\right) = F\left(r^2\right),$$

potom je zobrazení ζ korektně zadáno a je izomorfismem odpovídajících prostorů.

Důkaz. Funkce F je spojitá na intervalu $< 0, \infty)$, protože funkce $f \in \mathcal{J}^m$ je Schwartzovská, tedy hladká. Akce grupy SO_m je transitivní na sférách, tedy dostáváme, že pro $x, y \in \mathbb{R}^m$ platí následující vztah:

$$||x|| = ||y|| \Rightarrow (\exists A \in SO_m)\,(x = Ay),$$

takže funkce f je konstantní na této sféře.

Tedy funkce F patří do $\mathcal{S}^+$ a je jednoznačně definována vzorem funkce f.

Pro izomorfismus budeme chtít nyní ukázat, že k zobrazení ζ existuje inverzní zobrazení ζ^{-1}. Budeme ho definovat následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\zeta^{-1} : \mathcal{S}^+ &\to \mathcal{J}^m,\\ F &\mapsto f,\end{aligned}$$

kde $F(|x|^2) = f(x)$ pro $x \in \mathbb{R}^m$.

Funkce f podle definice prostoru $\mathcal{S}^+$ patří do $\mathcal{S}^m$ a je zřejmě invariantní vůči akci grupy SO_m.

Zobrazení ζ^{-1} je zřejmě inverzní k zobrazení ζ.

□

Věta 18 (Transcendentální verze Howe duality)**.** *Schwartzovský prostor $\mathcal{S}^m$ se rozkládá následujícím způsobem:*

$$\mathcal{S}^m \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n^m \mathcal{J}^m, \tag{3.14}$$

kde $\mathcal{J}^m$ je definované vztahem (3.13).

Důkaz. Podrobnosti důkazu jsou k nalezení v Howe a Tan (1992, kapitola III, sekce 2.4, Theorem 2.4.4 a Cvičení 12).

□

Důsledek. *Zobrazení*

$$\alpha_n^m : \mathcal{H}_n^m \otimes \mathcal{J}^m \to \mathcal{S}^m$$

dané násobením funkcí je izomorfismus na izotypickou komponentu $Isot(\mathcal{S}^m, \lambda_n)$.

Důkaz. To, že je zobrazení α_n^m prosté, se dokáže podobně jako v polynomiální verzi Howeovy duality (viz důkaz bodu 4) z Věty 16).

Prostor $\mathcal{S}^m$ se rozkládá součet svých izotypických komponent:

$$\mathcal{S}^m \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Isot(\mathcal{S}^m, \lambda_n). \tag{3.15}$$

Navíc každý z členů $\mathcal{H}_n^m \otimes \mathcal{J}^m$ je částí izotypické komponenty $Isot(\mathcal{S}^m, \lambda_n)$, proto je zobrazení α_n^m surjektivní.

Tedy zobrazení α_n^m je izomorfismem na izotypickou komponentu $Isot(\mathcal{S}^m, \lambda_n)$.

□

4. Bochnerovy relace

4.1 Fourierova transformace

Věta 19. *Na prostoru Hermitovských funkcí $v_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)}$ působí Fourierova transformace následujícím způsobem:*

$$\widehat{v_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)}} = i^{\frac{m}{2}} \omega^m \Big(exp(-\frac{\pi i}{2} \overline{k}) \Big) v_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)}, \tag{4.1}$$

kde $j_1, j_2, \ldots, j_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a* ω^m *je oscilátorová reprezentace.*

Důkaz. V celém důkazu budeme označovat $J = \sum_{l=1}^m j_l$.

Z Kapitoly 2 máme operátory a_j a b_j, které jsme si zavedli v Definici 8. Snadnou upravou můžeme dojít k

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{a_j + b_j}{2}, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} &= \frac{a_j - b_j}{2}. \end{aligned}$$

Díky tomu si můžeme vyjádřit reprezentaci v jazyce operátorů a_j a b_j:

$$\begin{aligned} \omega^m(e^{\pm}) &= \frac{i}{8} \sum_{j=1}^m (a_j \pm b_j)^2, \\ \omega^m(\overline{k}) &= i\Big(\omega^m(e^-) - \omega^m(e^+)\Big) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m (a_j b_j + b_j a_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (a_j b_j - 1). \end{aligned}$$

Následující výpočet ukazuje, že Hermitovské funkce $v_{(k_1, k_2, \ldots, k_m)}$ jsou vlastní vektory pro akci $\omega(\overline{k})$:

$$\begin{aligned} \omega^m(\overline{k}) v_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)} &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (a_l b_l - 1) v_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \big(a_l v_{(j_1, \ldots, j_l + 1, \ldots, j_m)} - v_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)}\big) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \Big(2(j_l + 1) - 1\Big) v_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)} \\ &= (J + \frac{m}{2}) v_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)}. \end{aligned}$$

Pomocí Segal-Shale-Weilovy věty (viz Věta 13) si můžeme $\overline{k}$ napsat v reprezentaci grupy $\widetilde{SL}_2$:

$$\omega^m(exp(\overline{k})) v_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)} = e^{J + \frac{m}{2}} v_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)}.$$

Působení operátoru b_l pro $l \in \{1, 2, \ldots, m\}$, na funkci $f \in \mathcal{S}^m$ si za použtí jednoduchých vztahů pro počítání s Fourierovou transformací (viz Lemma 6) dostáváme

$$\widehat{b_l f} = \widehat{(x_l - \tfrac{\partial}{\partial x_l}) f} = (i x_l - i \frac{\partial}{\partial x_l}) \widehat{f} = -i b_l \widehat{f}.$$

Můžeme si snadno odvodit, že pro $f = v_{(0,0,\dots,0)} = e^{-\frac{1}{2}r^2}$ platí, že $f = \widehat{f}$. Tedy Hermitovské funkce $v_{(j_1,j_2,\dots,j_m)}$ jsou vlastní vektory pro Fourierovu transformaci s vlastním číslem

$$\widehat{v_{(j_1,j_2,\dots,j_m)}} = \widehat{\Pi_{l=1}^m b_l^{j_l} v_{(0,0,\dots,0)}} = \Pi_{l=1}^m (-ib_l)^{j_l} v_{(0,0,\dots,0)} = (-i)^J v_{(j_1,j_2,\dots,j_m)}.$$

Menší úpravou vyjádříme působení reprezentace pomocí Fourierovy transformace a dostáváme tvar daný ze znění věty:

$$\omega^m\Big(exp(-\frac{\pi i}{2}\overline{k})\Big)v_{(j_1,j_2,\dots,j_m)} = e^{-\frac{\pi i}{2}(J+\frac{m}{2})}v_{(j_1,j_2,\dots,j_m)}$$

$$= (-i)^{\frac{m}{2}}\Big((-i)^J v_{(j_1,j_2,\dots,j_m)}\Big) = (-i)^{\frac{m}{2}}\widehat{v_{(j_1,j_2,\dots,j_m)}}$$

□

4.2 Bochnerovy relace

Lemma 20.
1) Zobrazení

$$\alpha_n^m : \mathcal{H}_n^m \otimes \mathcal{S}^+ \to \mathcal{S}^m$$

dané násobením funkcí je izomorfismus $\mathcal{H}_n^m \otimes \mathcal{S}^+$ *na izotypickou komponentu* $Isot(\mathcal{S}^m, \lambda_n)$.

Akce algebry $\mathfrak{sl}_2$ *na* $Isot(\mathcal{S}^m, \lambda_n)$ *dané oscilátorovou reprezentací* ω^m *indukuje reprezentaci* ρ_n^m *na* $\mathcal{S}^+$ *pomocí relace*

$$\alpha_n^m\Big(l \otimes \rho_n^m(x)(\psi)\Big) = x\Big(\alpha_n^m(l \otimes \psi)\Big) \tag{4.2}$$

pro $l \in \mathcal{H}_n^m$, $\psi \in \mathcal{S}^+$ *a* $x \in \mathfrak{sl}_2$.

2) Fourierova transformace $\mathcal{F}$ *zachovává pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *izotypickou komponentu* $Isot(\mathcal{S}^m, \lambda_n)$ *a indukuje tedy lineární transformaci*

$$\mathcal{F}_n^m : \mathcal{S}^+ \to \mathcal{S}^+$$

pomocí relace

$$\alpha_n^m\Big(l \otimes \mathcal{F}_n^m(\psi)\Big) = \mathcal{F}(\alpha_n^m(l \otimes \psi)). \tag{4.3}$$

Důkaz. 1) Přímá aplikace transcendentální verze Howeovy duality (viz Věta 18).

2) Oscilátorová reprezentace komutuje s akcí SO_m na $\mathcal{S}^m$, tedy to platí i pro Fourierovu transformaci $\mathcal{F}$, která je daná akcí elementu grupy $\widetilde{SL}_2$, neboli $\mathcal{F}$ zachovává izotypické komponenty $Isot(\mathcal{S}^m, \lambda_n)$.

□

Poznámka. Pro funkci f na $\mathbb{R}^m$ máme definovaný Laplaceův-Beltramiho operátor $\Delta_{S^{m-1}}$, který je daný touto rovností

$$\Delta_{S^{m-1}}(f)(x) = \Delta(f)\left(\frac{x}{||x||}\right).$$

Je-li $\psi \in \mathcal{S}^+$ ihned z definice plyne

$$\Delta_{S^{m-1}}(\psi) = 0.$$

Akci Laplaceova operátoru na funkci $\psi \in \mathcal{S}^+$ si můžeme ve sférických souřadnicích vyjádřit takto:

$$\begin{aligned}\Delta_m(\psi) &= r^{1-m}\frac{d}{dr}\left(r^{m-1}\frac{d}{dr}(\psi)\right) + r^{-2}\Delta_{S^{m-1}}(\psi)\\ &= r^{1-m}\left((m-1)r^{m-2}\frac{d}{dr}(\psi) + r^{m-1}\frac{d^2}{dr^2}(\psi)\right) + 0\\ &= (m-1)\frac{d}{rdr}(\psi) + \frac{d^2}{dr^2}(\psi).\end{aligned}$$

Věta 21 (Reprezentace ρ_n^m)**.** *Na prostoru $\mathcal{S}^+$ je reprezentace ρ_n^m dána těmito vztahy:*

$$\begin{aligned}\rho_n^m(h) &= 2t\frac{d}{dt} + \left(n + \frac{m}{2}\right),\\ \rho_n^m(e^+) &= \frac{it}{2},\\ \rho_n^m(e^-) &= 2i\left(\left(n + \frac{m}{2}\right)\frac{d}{dt} + t\frac{d^2}{dt^2}\right),\end{aligned}$$

kde $t \in (0, \infty)$.

Důkaz. Použitím oscilátorové reprezentace ω^m (viz Definice 23) ověříme, že zobrazení ρ_n^m splňuje vztah (4.2).

Pro člen $\omega^m(h)$ platí:

$$\begin{aligned}\omega^m(h)\Big(\alpha_n^m(l \otimes \psi)\Big) &= \left(E_m + \frac{m}{2}\right)(l\psi) = E_m(l)\psi + lE_m(\psi) + \frac{m}{2}l\psi\\ &= ln\psi + lE_m(\psi) + l\frac{m}{2}\psi = l\left(E_m + n + \frac{m}{2}\right)(\psi)\\ &= \alpha_n^m\Big(l \otimes \rho_n^m(h)(\psi)\Big),\end{aligned}$$

kde jsme využili, že

$$2t\frac{d}{dt} = 2r^2\frac{d}{2rdr} = r\frac{d}{dr} = E_m.$$

Díky komutativitě nám okamžitě vychazí, že e^+ splňuje daný vztah:

$$\omega^m(e^+)\Big(\alpha_n^m(l \otimes \psi)\Big) = \left(\frac{i}{2}r_m^2\right)(l\psi) = l\left(\frac{i}{2}r_m^2\right)(\psi) = \alpha_n^m\Big(l \otimes \rho_n^m(e^+)(\psi)\Big).$$

V poznámce jsme si již zjistili, jak vypadá působení Laplaceova operátoru na funkci $\psi \in \mathcal{S}^{+}$. To můžeme hned využít k počítání akce e^{-}:

$$\begin{aligned}
\omega^m(e^-)\Big(\alpha_n^m(l \otimes \psi)\Big) &= \left(\frac{i}{2}\Delta_m\right)(l\psi)\\
&= \frac{i}{2}\Delta_m(l)\psi + \frac{i}{2}l\Delta_m(\psi) + i\sum_{j=1}^{m}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}(l)\right)\frac{\partial}{x_j\partial x_j}(\psi)\\
&= 0 + \frac{i}{2}l\left((m-1)\frac{d}{rdr} + \frac{d^2}{dr^2}\right)(\psi) + iln\frac{d}{rdr}(\psi)\\
&= l\left(i\left(n+\frac{m}{2}\right)\frac{d}{rdr} + \frac{i}{2}\left(-\frac{d}{rdr} + \frac{d^2}{dr^2}\right)\right)(\psi)\\
&= \alpha_n^m\Big(l \otimes \rho_n^m(e^-)(\psi)\Big).
\end{aligned}$$

V poslední rovnosti jsme využili, že tvar $\rho_n^m(e^-)$ v řeči r^2 má tvar

$$2it\frac{d^2}{dt^2} = \frac{i}{2}r^2\frac{d}{rdr}\left(\frac{d}{rdr}\right) = \frac{i}{2}r^2\left(-\frac{d}{r^3dr} + \frac{d^2}{r^2dr^2}\right) = \frac{i}{2}\left(-\frac{d}{rdr} + \frac{d^2}{dr^2}\right).$$

Dáme-li je obě složky dohromady, dostáváme, proč poslední rovnost platí, a tím jsme dokázali, že náš tvar reprezentace ρ_n^m je právě ten, který splňuje definiční vlastnost (4.2).

$\square$

Příklad 10. V Lemmatu 15 jsme si ukázali, že element $z^n \in \mathcal{H}_n$, kde $z = x_1 + ix_2$, je singulární vektor. V důkazu polynomiální verze Howeovy duality (viz Věta 16) jsme ukázali, že $\mathcal{H}_n$ je ireducibilní, tedy prvek z^n je generátor $\mathcal{H}_n$.

Snadno lze ověřit, že pro

$$\frac{d}{d\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

platí tyto vztahy

$$\frac{d}{d\bar{z}}(z) = 0, \qquad \Delta(z) = 0, \qquad \frac{d}{d\bar{z}}\Big(z^n\psi(r^2)\Big) = z^{n+1}\psi'(r^2).$$

Navíc snadno přepíšeme vlastnosti Fourierovy transformace (viz Lemma 6) na tvary

$$\widehat{zf} = 2i\frac{d}{d\bar{z}}\hat{f} \qquad a \qquad \widehat{\frac{d}{d\bar{z}}f} = \frac{i}{2}z\hat{f}.$$

Nyní je již vše připraveno pro formulaci periodických relací ve dvou elegantních větách a jejich dokázání.

Věta 22 (Bochnerovy relace a Bochnerovy-Coifmanovy periodické relace)**.**
a) Nechť $f(x) = h(x)\psi(r^2)$ pro $h \in \mathcal{H}_n^m$ a $\psi \in \mathcal{S}^+$, potom platí

$$\hat{f}(y) = h(y)\mathcal{F}_n^m(\psi)(r^2). \tag{4.4}$$

Navíc pokud $n_1 + \frac{m_1}{2} = n_2 + \frac{m_2}{2}$, pak platí

$$i^{-\frac{m_1}{2}} \mathcal{F}_{n_1}^{m_1} = i^{-\frac{m_2}{2}} \mathcal{F}_{n_2}^{m_2}. \tag{4.5}$$

b) Pro Fourierovu transformaci máme následující vztahy:
(1) $\mathcal{F}_{n+1}^{m} \frac{d}{dt} = \frac{i}{2} \mathcal{F}_n^m$,
(2) $\mathcal{F}_n^m = 2i \frac{d}{dt} \mathcal{F}_{n-1}^m = -2 \frac{d}{dt} \mathcal{F}_n^{m-2}$,
(3) pokud $m = 2l$, *pak* $\mathcal{F}_n^{2l} = i^{2(l-1)+n} (2\frac{d}{dt})^{n+l-1} \mathcal{F}_0^2$,
(4) pokud $m = 2l + 1$, *pak* $\mathcal{F}_n^{2l+1} = i^{2l+n} (2\frac{d}{dt})^{n+l} \mathcal{F}_0^1$.

Důkaz. a) Tvar (4.4) pro vyjádření Fourierovy transformace plyne z rovnosti (4.3).

Vztah (4.5) pro rovnost různých Fourierových transformací získáváme okamžitou aplikací rovnice (4.1).

b) Díky příkladu výše můžeme Fourierovu transformaci použít na funkci f, která bude součinem nějaké mocniny z a funkce ψ z prostoru $\mathcal{S}^+$.

(1) Zvolíme $f = z^{n+1}\psi'(r^2)$. Derivace funkce ψ bude zřejmě stále prvkem tohoto prostoru, tedy

$$z^{n+1} \mathcal{F}_{n+1}^m \left(\frac{d\psi}{dt} \right) (r^2) = \widehat{z^{n+1}\psi'(r^2)} = \widehat{f} = \widehat{\tfrac{d}{d\bar{z}} \Big(z^n \psi(r^2) \Big)} =$$

$$= \frac{i}{2} z \widehat{z^n \psi(r^2)} = \frac{i}{2} z^{n+1} \mathcal{F}_n^m(\psi)(r^2).$$

Zkrácením z^{n+1} dostáváme požadovaný vztah.

(2) Zvolme funkci $f = z^n\psi(r^2)$, pak

$$z^n \mathcal{F}_n^m(\psi)(r^2) = \widehat{\Big(z^n \psi(r^2) \Big)} = \widehat{f} = 2i \frac{d}{d\bar{z}} \widehat{\Big(z^{n-1} \psi(r^2) \Big)} =$$

$$= 2i \frac{d}{d\bar{z}} \Big(z^{n-1} \mathcal{F}_{n-1}^m(\psi)(r^2) \Big) = 2iz^n \frac{d}{dt} \mathcal{F}_{n-1}^m(\psi)(r^2).$$

Po zkrácení dostáváme požadované tvrzení a na druhou část využijeme vztah z a), protože

$$(n-1) + \frac{m}{2} = n + \frac{m-2}{2},$$

a tedy

$$2i\mathcal{F}_{n-1}^m = 2i^{1+\frac{m}{2}} \Big(i^{-\frac{m}{2}} \mathcal{F}_{n-1}^m \Big) = 2i^{1+\frac{m}{2}} \Big(i^{-\frac{m-2}{2}} \mathcal{F}_n^{m-2} \Big) = -2\mathcal{F}_n^{m-2}.$$

Tvrzení (3) a (4) plynou bezprostředně z bodu (2) jako rekurzivní vzorce.

□

Seznam použité literatury

Hall, B. C. (2015). *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction.* 2nd ed. Springer International Publishing, New York. ISBN 978-3-319-13466-6.

Howe, R. a Tan, E. C. (1992). *Non-abelian harmonic analysis: applications of SL (2,* $\mathbb{R}$*).* Springer-Verlag, New York. ISBN 978-0-387-97768-3.

Knapp, A. W. a Trapa, P. E. (2000). Representations of semisimple lie groups. *Representation Theory of Lie Groups*, **8**.

Leistner, T. (2012). Manifolds, lie groups and lie algebras honours course pure mathematics topic d semester 2. URL `http://www.maths.adelaide.edu.au/thomas.leistner/2012-Lie/TopicD2012-handout4-classical.pdf`.

Plancherel, M. (1910). Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **30**(1), 289–335.

Treves, F. (1967). *Topological Vector Spaces, Distributions And Kernels.* Academic Press, San Diego. ISBN 0-12-699450-1.

Seznam tabulek