

Posudek vedoucího bakalářské práce

Autor: Filip Oliva
Název práce: Periodické relace S. Bochnera
Studijní program a obor: Obecná matematika
Rok odevzdání: 2023
Jméno vedoucího: prof. Vladimír Souček, DrSc.
Pracoviště: Matematický ústav, MFF UK

Hlavním tématem předkládané práce je akce speciální ortogonální grupy $G = SO(m)$ na prostoru polynomů na \mathbb{R}^m , která komutuje s akcí Fourierovy transformace a důsledky, které z toho pro Fourierovu transformaci plynou.

Hlavním důsledkem akce grupy $SO(m)$ na prostoru polynomů je rozklad tohoto prostoru na přímý součet isotopických komponent. Každá tato isotopická komponenta je invariantní vůči akci algebry diferenciálních operátorů s polynomiálními koeficienty, které komutují s akcí grupy G . Tato algebra je totožná s univerzální obalující algebrou Lieovy algebry $sl(2, \mathbb{R})$. Každá isotopická komponenta v rozkladu prostoru polynomů je ireducibilní reprezentace duálního páru $SO(m) \times sl(2, \mathbb{R})$.

Z výše uvedeného důvodu se přípravná první kapitola práce soustředí uje na základní definice a vlastnosti Lieových grup a algeber, popis Lieovy algebry $so(m)$ a výpočet dimenzí jejich ireducibilní reprezentací. První kapitola práce obsahuje také základní informaci o prostorech Schwartzovských funkcí.

Pro popis vlastností Fourierovy transformace na těchto prostorech je podstatná informace o definici a vlastnostech Hermiteovských funkcí, které tvoří úplný ortonormální systém vlastních vektorů pro Fourierovu transformaci. Těmto funkcím je věnována druhá kapitola.

Základní verze Howeovy duality (pro prostor polynomů) je podrobně popsána a dokázána v třetí kapitole. Transcendentální verze Howeovy duality je převzata z knihy Howea a Tana. Obsahuje popis isotopických komponent pro akci grupy G na Schwartzovského prostoru a její rozklad (separaci proměnných) na součin harmonických polynomů a invariantních Schwartzovských funkcí. Třetí kapitola také obsahuje definici tak zvané oscilátorové reprezentaci Lieovy algebry $sl(2, \mathbb{R})$.

Poslední čtvrtá kapitola obsahuje formulaci a důkazy Bochnerových relací pro Fourierovu transformaci.

Hodnocení práce.

Předkládaná bakalářská práce prošla postupně mnoha verzemi, výsledná práce má dobrou úroveň. Téma, kterému se věnuje je zajímavé a klasické. Formulace definic a vět jsou přesné a srozumitelné. Práce zpracovává první z aplikací teorie reprezentací Lieovy algebry $sl(2, \mathbb{R})$ v oblasti klasické matematiky analýzy knihy R. Howea a E.-CH. Tana. Popis Bochnerových periodických relací je zpracován v práci podle výkladu v první části čtvrté kapitoly zmíněné knihy. Autor práce doplnil některé podrobnosti a chybějící části důkazů, například výpočet některých dimenzí ireducibilních modulů pomocí Weylovy dimenzionální formule, důkaz věty 21, explicitní formule pro operátory projekce polynomů na jejich harmonickou část. V důkazu Věty 11 chybí informace (stačí pro $m = 1$), že lineární obal prostoru Hermiteovských funkcí je roven prostoru $Pol \cdot e^{-\frac{r^2}{2}}$.

Práce má bezesporu požadovanou kvalitu a doporučuji ji uznat jako práci bakalářskou.