Posudek vedoucího práce Davida Sterna

Vítězslav Kala

Tématem práce jsou rozklady na součet v reálných kvadratických tělesech. Zatímco rozklady na součet přirozených čísel patří k základním objektům studia aditivní teorie čísel, jejich analogii v číselných tělesech byla zatím věnována minimální pozornost. Roli přirozených čísel hrají tzv. totálně kladné celistvé prvky a cílem je porozumět vlastnostem rozkladové funkce udávající počet rozkladů. Student v práci dosáhl řady velmi zajímavých originálních výsledků, které budou v blízké době zaslané k publikaci v kvalitním mezinárodním časopise.

Práce je členěna do tří kapitol. V první kapitole jsou shrnuty potřebné poznatky z teorie kvadratických těles. Druhá kapitola se zabývá návrhem algoritmu, který slouží k výpočtu hodnot rozkladové funkce. Text obsahuje jeho zpracování v pseudokódu, ale student algoritmus také implementoval v programovacím jazyce Python (práce obsahuje odkaz na GitHub repozitář, kde je k dispozici). Pomocí algoritmu byly vygenerovány tabulky hodnot rozkladové funkce v poslední sekci.

Třetí kapitola je věnována teoretickému zkoumání rozkladové funkce $p_K(\alpha)$. Její hodnoty závisejí na dvou proměnných: diskriminantu kvadratického tělesa K a rozkládaném prvku α. Nejprve jsou zkoumány hodnoty $p_K(n)$ pro přirozená čísla n a ukazuje se, že pro fixní n a dostatečně velký diskriminant je počet rozkladů stejný jako v přirozených číslech (Theorem 13). Pro velikost takového diskriminantu je nalezen explicitní dolní odhad.

Dalším zkoumaným problémem je charakterizace těles, ve kterých nabývá funkce p_K konkrétních hodnot. Pro hodnoty $1, 2, 3, 5$ jsou to všechna až na konečný počet výjimek (Proposition 14). Těžší je ukázat, že se v daném tělese určité hodnoty nenabývá. Důkaz je rozčleněn do série lemmat 15 – 19. Přitom je jako netriviální nástroj využitý popis tzv. jednoznačně rozložitelných prvků. Celá tato snaha kulminuje v hlavní větě (Theorem 20), která poskytuje hledanou charakterizaci.

Práce pokračuje zkoumáním nabývání hodnot 4 a 6. V případě hodnoty 4 je pro každé těleso K nalezen konkrétní celistvý prvek α, který má právě čtyři rozklady (Proposition 21). Pro hodnotu 6 je dokázáno, že ji rozkladová funkce nabývá ve všech tělesech, která splňují určitou podmínku (Theorem 23). Důsledkem je, že takových těles existuje nekonečně mnoho. Na závěr poznamenám, že student na tématu pracoval samostatně a během pravidelných konzultací (které měl s konzultantem práce Mikulášem Zindulkou, který také připravil návrh tohoto posudku).

Prvním přínosem práce je návrh a implementace netriviálního algoritmu pro výpočet hodnot rozkladové funkce. Hlavní přínos však spočívá v objevení jejích výše uvedených vlastností, přičemž nejdůležitějším výsledkem je věta 20. Ačkoliv existuje rozsáhlá literatura zabývající se rozklady na součet přirozených čísel, v kontextu číselných těles byla tato problematika prozatím opomíjena. Práce tak představuje první krok zcela novým směrem a jistě bude sloužit jako základ pro další výzkum.

Celkově se tedy jedná o vynikající práci obsahující řadu vlastních publikovatelných výsledků; práce je také zaslaná do soutěže SVOČ. Jednoznačně doporučuji práci přijmout jako bakalářskou práci a navrhuji její hodnocení známkou *výborně*. Vzhledem k dosaženým původním výsledkům, které budou brzy zaslané k publikaci, také doporučuji navržení práce na *Cenu děkana*.

Vítězslav Kala

Katedra algebry
MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8

vitezslav.kala@matfyz.cuni.cz
https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kala/web/