Posudek vedoucího na bakalářskou práci Sáry Tomáškové nazvanou Elementární teorie grup lineárně lomených transformací

Jde o velmi pěknou a pozoruhodnou bakalářskou práci, která má lehce nestandardní vznik a pojetí. Studentka mě kontaktovala v době, kdy její znalosti z teorie grup byly založeny toliko na druhoročníkové přednášce z obecné algebry. Rozhodl jsem se postupovat tak, aby témata v práci obsažená si mohla, obrazně řečeno, sama objevit. Byl jsem si vědom toho, že existenci Singerových cyklů v $PGL_2(p)$ je možno odvodit bez znalosti existence konečných těles složených řádů. Studentku jsem proto vedl tímto směrem. Ke skoro všem tvrzením v práci obsažených důkaz objevila sama, včetně relativně složité úpravy kombinačních čísel potřebné k důkazu nenulovosti koeficientů určitých polynomů indukovaných sčítací formulí na projektivní přímce. Navíc se pustila i do rozboru situace nad nekonečnými tělesy, což bylo nad rámec mých původních záměrů.

Výsledky dosažené při studiu konjugovanosti regulárních abelovských podgrup $PGL_2(F)$ pro F nekonečné jsou pro mě nové. Nedokázal jsem je najít v literatuře a ani jsem neuspěl pomocí dotazů u badatelů, u kterých jsem znalost tohoto tématu předpokládal. Jistě jde o výsledky známé. Nejsou však, jak se ukázalo, notoricky známé – na rozdíl od situace na konečným tělesem. Jde o to, že v konečném případě regulární abelovské podgrupy jsou generované Singerovým cyklem a jsou všechny vzájemně konjugované. Každou z takových podgrup lze, i v nekonečném případě, asociovat s kvadratickým polynomem, který ji jednoznačně určuje. Studentka ukázala, že dvě takové podgrupy jsou konjugované právě když rozkladová nadtělesa oněch kvadratických polynomů jsou F-izomorfní.

Aby byl naplněn požadavek schopnosti tlumočit výsledky obsažené v matematické literatuře, doplnil jsem zadání o důkaz jednoduchosti $PSL_2(F)$, který by byl založen na Iwasavově kritériu. Tohoto úkolu se studentka bezproblémově zhostila.

Původně jsem chtěl práci směřovat spíše ke klasifikaci podgrup $PGL_2(q)$. K tomu nedošlo. Z původního záměru se do práce však dostal popis normalizátorů regulárních abelovských podgrup dané grupy a jejích 1- a 2-bodových stabilizátorů. To je důležitý první krok klasifikace. Studentka normalizátory popsala bez ohledu na mohutnost tělesa.

Postup popsaný výše vedl k tomu, že originalita přístupu se promítla i do volby značení a některých důkazových postupů. Nevnímám to jako chybu. Nicméně je pravda, že kdyby práce vznikala kompilací článků a monografií, tak by vypadala jinak.

Studentka má relativně vyzrálé matematické myšlení. Vyjadřování je přesné, byť místy trochu toporné. Což není žádná velká kritika – jde o běžný vývoj na cestě od přesnosti ke srozumitelnosti.

Práci jsem oponoval průběžně. Je možné, že se některé formální nedostatky nepodařilo plně vychytat. V tuto chvíli však o nich nevím.

Dal bych přednost jinému způsobu číslování tvrzení a jinému symbolu pro značení izomorfismu. To se mi však nepodařilo během psaní práce úspěšně vykomunikovat.

V práci se o Singerových cyklech mluví jako o podgrupě. Přísně vzato Singerův cyklus je generátor takové podgrupy. Vzhledem k tomu, že sám v rozhovoru oba pojmy zaměňuji, upustil jsem od požadavku, aby ve finální verzi studentka oba pojmy rozlišila.

V závěru práce je nepřesnost, která myslím vznikla špatným pochopením mé odpovědi na dotaz studentky. Píše se tam o tělese $\mathbb{F}^n$. Má být těleso řádu $|\mathbb{F}|^n$.

Navrhuji, aby práce byla přijata jako práce bakalářská a hodnocena stupněm *výborně*.

Aleš Drápal

V Krči 10. května 2023