Posudek bakalářské práce

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Autor práce	Samuel Krajči
Název práce	Covering families of triangles by convex sets
Rok odevzdání	2023
Studijní program	Informatika
Studijní obor	Informatika se specializací Obecná informatika

Autor posudku doc. Mgr. Jan Kynčl, Ph.D. **Role** vedoucí
Pracoviště Katedra aplikované matematiky

Univerzální pokrytí množiny $\mathcal{M}$ geometrických útvarů v rovině je konvexní množina obsahující shodnou kopii každého útvaru z $\mathcal{M}$. Lebesgueův pokrývací problém z roku 1914 spočívá v určení nejmenšího obsahu univerzálního pokrytí množiny všech rovinných útvarů o průměru 1. I přes nedávné pokroky je tento problém stále otevřený, dolní a horní odhady na obsah se liší zhruba o 1 procento. Varianty tohoto problému se dají studovat pro libovolnou množinu útvarů s omezeným průměrem.

Zajímavý je už případ, kdy množina $\mathcal{M}$ sestává jen z trojúhelníků. Je například známo, že nejmenší univerzální pokrytí množiny všech trojúhelníků s průměrem 1 je opět trojúhelník. Park a Cheong (2021) vyslovili obecnou domněnku, že každá množina trojúhelníků s omezeným průměrem má nejmenší univerzální pokrytí, které je trojúhelníkem. Tato domněnka byla zatím dokázaná jen v některých speciálních případech, jako např. množina dvou trojúhelníků, množina všech trojúhelníků s obvodem délky 2, nebo množina všech trojúhelníků obsažených v jednotkovém kruhu, půlkruhu nebo jednotkovém čtverci.

Samuel Krajči ve své bakalářské práci identifikoval další množiny trojúhelníků, pro které existuje nejmenší univerzální pokrytí ve tvaru trojúhelníka; konkrétně případy, kdy

1) $a, b > 0$ jsou libovolná reálná čísla a $\mathcal{M}$ je množina všech trojúhelníků s dvěma hranami délek a a b [Věta 3.2],

2) $a > 0$ je reálné číslo, α je úhel z intervalu $(0, \lambda] \cup [3\pi/7, \pi)$, kde $\lambda \sim 0.396\pi$, a $\mathcal{M}$ je množina všech trojúhelníků s hranou délky a a protějším úhlem α [Věta 5.3],

3) $a > 0$ je reálné číslo, α je úhel z intervalu $[\pi/2, \pi)$ a $\mathcal{M}$ je *libovolná konečná* množina trojúhelníků s hranou délky a a protějším úhlem α [Věta 5.5].

Ve všech těchto případech lze univerzální pokrytí sestrojit pomocí univerzálního pokrytí vhodně vybrané dvojice trojúhelníků. Hlavním nástrojem je kritérium pro určení, kdy je daná konvexní množina nejmenším univerzálním pokrytím, které spočívá v porovnání obsahů s nejmenším univerzálním pokrytím podobným zadanému trojúhelníku [Lemma 4.4 (Park a Cheong, 2021)].

Tyto výsledky výrazně rozšiřují katalog případů, kdy množina trojúhelníků má trojúhelníkové nejmenší univerzální pokrytí. Speciálně Věta 5.5 je prvním případem, kdy vstupem je libovolná konečná množina trojúhelníků s určitými parametry. Zdá se, že postup v důkazu Věty 5.5 by mohl jít snadno zobecnit i pro libovolnou nekonečnou množinu trojúhelníků s danou hranou a protějším tupým úhlem, ale i na další situace, jako tu ve Větě 3.2. Zajímavou výzvou by bylo zobecnit důkaz Věty 5.3 i pro zbývající hodnoty úhlu α.

Důkazy mi připadají korektní, rozbory případů pečlivě provedené a adekvátně ilustrované. Drobné připomínky bych měl místy ke zvolenému značení a k některým anglickým formulacím.

Našel jsem jedinou vážnější chybu, a to ve vyšetření průběhu funkce (Λ) na str. 19, kde $\sin((\pi - \alpha)/4)$ je v uvedeném intervalu klesající, což zneplatní stávající důkaz Lemma 5.2. Nicméně Lemma 5.2, zdá se, skutečně platí; jen bude potřeba pečlivější analýza funkce (Λ). Toto lemma navíc není až tak zásadní pro hlavní výsledek (Větu 5.3), kde by se dala hodnota λ zvolit jako nejmenší kořen výrazu (Λ) v uvedeném intervalu.

Výsledky jsou rozsahem srovnatelné s některými předchozími články na stejné téma. Rozhodně bych tedy doporučil připravit je ve formě článku k publikaci v odborném časopise.

Práci jednoznačně navrhuji uznat jako bakalářskou.

V Praze dne 21. 6. 2023

Podpis: