Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Alena Skálová

Gradientové zobrazení funkcí více proměnných

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematická analýza

Praha 2014

Ráda bych na tomto místě poděkovala svému vedoucímu doc. RNDr. Miroslavu Zelenému, Ph.D. za veškerou pomoc a trpělivost při vedení práce, jakož i za množství podnětných připomínek v průběhu jejího vypracování; Kubovi Krásenskému nejen za jazykové korektury; Alexanderu „Olinovi“ Slávikovi za rady při potížích s LaTeXem a především svým rodičům – těm jednoduše za všechno.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 10. dubna 2014 Alena Skálová

Název práce: Gradientové zobrazení funkcí více proměnných

Autor: Alena Skálová

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V práci dokazujeme následující tvrzení. Pro každé $d \geq 2$, pro každou otevřenou omezenou množinu $U \subset \mathbb{R}^d$ a pro každou množinu $F \subset \mathbb{R}^d$ typu F_σ existuje diferencovatelná funkce $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\begin{aligned} &\nabla u(x) \in \overline{U} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^d, \\ &\nabla u(x) \in U \quad \text{pro všechna } x \in F, \\ &\nabla u(x) \in \partial U \quad \text{pro } \lambda_d\text{-skoro všechna } x \in \mathbb{R}^d \setminus F. \end{aligned}$$

Klíčová slova: gradient, Denjoy–Clarksonova vlastnost, Weilův gradientový problém

Title: Gradient mapping of functions of several variables

Author: Alena Skálová

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In the thesis we prove that the following statement holds true. For each $d \geq 2$, for each open bounded set $U \subset \mathbb{R}^d$ and for each set $F \subset \mathbb{R}^d$ of the Borel class F_σ there exists an everywhere differentiable function $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} &\nabla u(x) \in \overline{U} \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^d, \\ &\nabla u(x) \in U \quad \text{for all } x \in F, \\ &\nabla u(x) \in \partial U \quad \text{for } \lambda_d\text{-almost all } x \in \mathbb{R}^d \setminus F. \end{aligned}$$

Keywords: gradient, Denjoy–Clarkson property, gradient problem of C. E. Weil

Obsah

Seznam použitého značení

V celé práci uvažujeme na prostorech $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^d$ standardní eukleidovskou metriku. Prostor $\mathbb{R}^d$ uvažujeme vždy pro $d \geq 2$.

$\mathbb{N}$	přirozená čísla
$\mathbb{N}_0$	přirozená čísla včetně nuly
$\mathbb{Z}$	celá čísla
$\mathbb{R}$	reálná čísla
$\mathbb{R}^+$	kladná reálná čísla
$\mathbb{R}^d$	d-rozměrný eukleidovský prostor
$B(x, r)$	otevřená koule o středu x a poloměru $r > 0$
$\overline{M}$	uzávěr množiny M
∂M	hranice množiny M
$\operatorname{int} M$	vnitřek množiny M
$\operatorname{diam} M$	průměr množiny M
$\operatorname{dist}(x, M)$	vzdálenost bodu x od množiny M
$f^{-1}(M)$	vzor množiny M při zobrazení f
$A \subset B$	A je podmnožinou B, připouští se i rovnost množin $A = B$
$A \subsetneq B$	A je vlastní podmnožinou B
$\lVert \cdot \rVert$	norma odpovídající eukleidovské metrice
$\lVert \cdot \rVert_\infty$	supremová norma
$\langle \cdot , \cdot \rangle$	standardní skalární součin na $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$	spojité funkce na prostoru $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$	spojitě diferencovatelné funkce na prostoru $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$	hladké funkce na prostoru $\mathbb{R}^d$
λ_d	d-rozměrná Lebesguova míra

Následující pojmy jsou blíže definovány v kapitole Základní pojmy a značení.

r_Q	roh krychle Q
$Q \sqsubset Q'$	krychle Q je podkrychlí krychle Q'
$h(\mathcal{Q})$	hrubost krychlového dělení $\mathcal{Q}$
$j(\mathcal{Q})$	jemnost krychlového dělení $\mathcal{Q}$
$\operatorname{osc}(f, \varepsilon)$	oscilace funkce f
$\operatorname{osc}_M(f)$	oscilace funkce f na množině M
$[a; b]$	úsečka

Kapitola 1

Úvod

1.1 Úvod do problematiky

Během XIV. letního symposia *Real Analysis Exchange* v červnu roku 1990 formulovali Clifford E. Weil, Zoltán Buczolich a Jack Ceder následující problém, který později vešel ve známost jako *Weilův gradientový problém*, viz [9].

Weilův gradientový problém. *Mějme* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diferencovatelnou funkci a buď* f' *její derivace. Podle Denjoy–Clarksonovy vlastnosti je pro každý otevřený interval* (a,b) *množina* $(f')^{-1}\big((a,b)\big)$ *buď prázdná, nebo kladné Lebesguovy míry. Otázkou je, platí-li analogická vlastnost i pro funkce více proměnných.*

Mějme $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *diferencovatelnou funkci a buď* ∇f *její gradient, což je funkce z* $\mathbb{R}^d$ *do* $\mathbb{R}^d$*. Buď* G *otevřená neprázdná podmnožina* $\mathbb{R}^d$*. Je pravda, že* $(\nabla f)^{-1}(G)$ *je buď prázdná, nebo má kladnou Lebesguovu míru?*

Než přejdeme k řešení Weilova gradientového problému, zdržme se na chvíli u funkcí jedné reálné proměnné. Mějme diferencovatelnou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a její derivaci $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Je dobře známo, že funkce f' má Darbouxovu vlastnost (neboli nabývá všech mezihodnot) a je první Baireovy třídy (což je ekvivalentní tomu, že vzory otevřených množin jsou množiny typu F_σ) – viz např. [1, Věta 4.1, resp. Věta 1].

Nezávisle na sobě dokázali roku 1916 Arnaud Denjoy (viz [5]) a roku 1947 James A. Clarkson (viz [4]) další zajímavou vlastnost derivace funkce jedné reálné proměnné – dnes známou jako *Denjoy–Clarksonova vlastnost* – totiž že pro každou otevřenou neprázdnou množinu $G \subset \mathbb{R}$ je množina $(f')^{-1}(G)$ buď prázdná, nebo kladné 1-rozměrné Lebesguovy míry.

Ve vícerozměrném případě je situace mnohem zajímavější. Mějme opět diferencovatelnou funkci $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d \geq 2$, a její gradient $\nabla f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. V roce 2002 zkonstruoval Z. Buczolich diferencovatelnou funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pro niž je $(\nabla f)^{-1}\big(B(0,1)\big)$ neprázdná množina nulové 2-rozměrné Lebesguovy míry, čímž Weilův gradientový problém vyřešil – ve vyšší dimenzi funkce ∇f *obecně nemá* Denjoy–Clarksonovu vlastnost, viz [3].

Funkce f, kterou v článku [3] Z. Buczolich zkonstruoval, je limitou funkcí h_n, pro něž je – mimo jiné – třeba ukázat, že posloupnost (∇h_n) je bodově konvergentní. Tuto pasáž výrazně zjednodušili v článku [8] z roku 2006 Jan Malý a Miroslav Zelený využitím speciální nekonečné hry dvou hráčů, kterou nazvali hra *bod–přímka* (článek [8] v návaznosti na [3] pojednává pouze o dimenzi $d = 2$).

Hra bod–přímka. *Buď $B = B(0, R)$ otevřená koule v $\mathbb{R}^2$. Hra bod–přímka sestává z nekonečné posloupnosti tahů. První hráč volí body $a_k \in B$, druhý hráč volí přímky $p_k \subset \mathbb{R}^2$, přičemž dodržují následující pravidla: V prvním tahu zahraje první hráč libovolný bod $a_1 \in B$ a druhý hráč následně zvolí přímku p_1 procházející bodem a_1, tedy $a_1 \in p_1$. V k-tém tahu nejprve zvolí první hráč bod $a_k \in B \cap p_{k-1}$ a následně druhý hráč zvolí přímku p_k, pro niž $a_k \in p_k$.*

Druhý hráč vyhrává, pokud posloupnost (a_k) konverguje, v opačném případě vyhrává první hráč.

Věta ([8], Věta 1.2)**.** *Ve hře bod–přímka má vyhrávající strategii druhý hráč.*

Pro vyšší dimenze se hra bod–přímka dá vcelku přímočaře přeformulovat na hru *bod–nadrovina*, přičemž z technických důvodů je příhodnější na tahy druhého hráče pohlížet jako na volbu jednotkového vektoru z $\mathbb{R}^d$, který je kolmý na příslušnou nadrovinu.

Hrou bod–nadrovina, jakož i dalšími obměnami hry bod–přímka, se v článku [6] z roku 2007 zabývali Robert Deville a Étienne Matheron. Mimo jiné dokázali, že druhý hráč má ve hře bod–nadrovina vyhrávající taktiku, čili že existuje takové zobrazení $t\colon B(0, R) \to \{v \in \mathbb{R}^d;\ \|v\| = 1\}$, že druhý hráč ve hře bod–nadrovina vyhraje, pokud ve svém k-tém tahu hraje jednotkový vektor $t(a_k)$, kde a_k je bod zvolený prvním hráčem v jeho k-tém tahu, $k \in \mathbb{N}$.

Je přirozené se tázat, jak „malé“ mohou vzory gradientového zobrazení být. Začátkem devadesátých let dvacátého století dokázal v článku [2] Z. Buczolich následující dolní odhad Hausdorffovy dimenze.

Věta (Buczolich)**.** *Buď $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce a buď $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina. Potom je $(\nabla f)^{-1}(G)$ buď prázdná množina, nebo má kladnou 1-dimenzionální Hausdorffovu míru.*

V článku [10] z roku 2008 pak M. Zelený ukázal optimálnost předchozího odhadu, když pro každé $d \geq 2$ zkonstruoval diferencovatelnou funkci $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, pro niž je $(\nabla f)(0) = 0$ a množina $(\nabla f)^{-1}\big(B(0,1)\big)$ má Hausdorffovu dimenzi 1. Při této konstrukci opět využil hry bod–nadrovina, přičemž nalezením spojité taktiky pro druhého hráče dále zesílil výsledek z článku [6].

V již zmíněném článku [6] se R. Deville a É. Matheron pustili do zobecnění Buczolichova (proti)příkladu z jiného směru. Pro každou otevřenou omezenou množinu $U \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, obsahující počátek zkonstruovali diferencovatelnou funkci $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, pro niž je jednak $(\nabla f)(\mathbb{R}^d) \subset \overline{U}$ a jednak $(\nabla f)(x) \in \partial U$ pro λ_d-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$. V souvislosti s jejich výsledkem si můžeme klást následující otázku.

Otázka. Pokud bychom předem zvolili množinu F, po níž bychom požadovali $(\nabla f)(F) \subset U$, je stále možné nalézt diferencovatelnou funkci $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\lambda_d\left(\{x \in \mathbb{R}^d \setminus F;\ \nabla f(x) \in U\}\right) = 0\ ?$$

Jelikož ∇f je funkce první Baireovy třídy, je na místě formulovat předchozí otázku pro množiny F typu F_σ. Tím jsme se dostali k přínosu právě předkládané diplomové práce, neboť v kapitole Hlavní výsledek dokážeme následující větu zobecňující Deville–Matheronův výsledek.

Věta 8. *Pro každé přirozené $d \geq 2$, pro každou otevřenou omezenou množinu $U \subset \mathbb{R}^d$ obsahující počátek a pro každou množinu $F \subset \mathbb{R}^d$ typu F_σ existuje všude diferencovatelná omezená funkce $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ taková, že*

$$\begin{aligned} \nabla u(x) &\in \overline{U} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^d, \\ \nabla u(x) &\in U \quad \text{pro všechna } x \in F, \\ \nabla u(x) &\in \partial U \quad \text{pro } \lambda_d\text{-skoro všechna } x \in \mathbb{R}^d \setminus F. \end{aligned}$$

1.2 Otevřené problémy

Z předchozích odstavců je patrné, že při zkoumání „malosti“ vzorů gradientového zobrazení existuje stále prostor pro další bádání. Formulujme jej do otázky.

Otázka. Nechť $d \geq 2$, buď $F \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná množina typu F_σ a buď N podmnožina $\mathbb{R}^d$. Je-li $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce, pro niž

$$(\nabla u)^{-1}\big(B(0,1)\big) = F \cup N,$$

jak „malá“ – ve smyslu Hausdorffovy dimenze – může množina N být?

Z výše uvedené Buczolichovy věty platí dolní odhad $\dim_{\mathrm{H}}(F \cup N) \geq 1$. Postupem, který používáme v důkazu Věty 8, se obecně nepodaří zkonstruovat funkci u, pro niž by byla $\dim_{\mathrm{H}} N < d-1$, neboť funkce $u = 0$ přinejmenším na množině $\partial[0,1)^d$ (podrobnosti viz důkaz příslušné věty). Otázka, zda postupem z důkazu Věty 8 je skutečně možné dosáhnout alespoň $\dim_{\mathrm{H}} N = d-1$, zůstává rovněž otevřená.

Pro výsledky typu $\dim_{\mathrm{H}} N < d-1$, $d \geq 3$, je nutné zásadně změnit volbu pokrytí množiny $\mathbb{R}^d$. V důkazu Věty 8 je základní pokrytí tvořené množinami $[0,1)^d + z$, $z \in \mathbb{Z}^d$, které ovšem z výše uvedených důvodů nejsou v tomto případě vhodné. V článku [10] využívá M. Zelený pro pokrytí otevřené množiny Besicovitchovu pokrývací větu, ovšem takové pokrytí přináší do konstrukce funkce u nové výzvy (například nedisjunktnost a absenci „zjemňování“), s kterými je třeba se teprve vypořádat.

1.3 Struktura práce

Ve druhé kapitole zavedeme základní pojmy a značení, které budeme v práci používat, případně upřesníme definici těch pojmů, které nemají široce zavedený jednotný význam.

Ve třetí kapitole uvádíme lemmata potřebná pro důkaz stěžejní věty celé práce. Všechna lemmata jsou uvedena pro případ $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ovšem pouze v případě Lemmatu 5 (Konvergence) je podmínka $d \neq 1$ nezbytná.

Přitom Lemma 5 je v předloženém důkazu Věty 8 jedním z klíčových – zajišťuje konvergenci „aproximující“ posloupnosti (∇u_n). Základem tohoto lemmatu není nic jiného než nekonečná hra dvou hráčů mající původ v článku [8] a zobecněná v článku [6].

Ve čtvrté – poslední – kapitole je dokázana Věta 8. Základní myšlenka jejího důkazu pochází z článku [6], ovšem kvůli striktnějším požadavkům na hledanou funkci vyžaduje důkaz řadu technických odlišností.

Kapitola 2

Základní pojmy a značení

- Podmnožinu $\mathbb{R}^d$ tvaru $\frac{1}{2^n}[0,1)^d + z + p$, kde $z \in \mathbb{Z}^d$, $p \in \left\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}\right\}^d$, $n \in \mathbb{N}_0$, nazveme *dyadickou krychlí*. Jelikož v celém textu nebudeme pracovat s jiným typem krychlí než dyadickým, budeme místo pojmu dyadická krychle zhusta používat pouze zkrácené *krychle*.

- *Rohem* krychle $Q = \frac{1}{2^n}[0,1)^d + z + p$ nazýváme bod $r_Q = z + p$. Povšimněme si, že pro každou krychli Q platí, že $r_Q \in Q$.

- Buďte Q, Q' krychle v $\mathbb{R}^d$. Pokud platí $Q \subset Q'$ a existuje $m \in \mathbb{N}_0$ takové, že

$$\frac{1}{2^m}\left(Q' - r_{Q'}\right) = Q - r_Q,$$

pak řekneme, že krychle Q jest *podkrychlí* krychle Q'. Tuto skutečnost značíme $Q \sqsubset Q'$.

Poznámka 1. Všimněme si, že jsou-li Q, Q' dvě krychle v $\mathbb{R}^d$, pak nastává právě jedna ze tří možností: buď $Q \cap Q' = \emptyset$, nebo $Q \sqsubset Q'$, nebo $Q' \sqsubset Q$.

Tuto vlastnost množin typu krychle (buď disjunktnost, anebo inkluze) budeme často využívat.

- Řekneme, že neprázdný konečný systém $\mathcal{Q}$ je *krychlovým dělením* množiny $M \subset \mathbb{R}^d$, pokud

  (i) každé $Q \in \mathcal{Q}$ je krychle,

  (ii) pro každé $Q, Q' \in \mathcal{Q}$ je $Q \cap Q' = \emptyset$,

  (iii) $\bigcup \mathcal{Q} \subset M$.

- Řekneme, že konečný systém $\mathcal{Q}$ je *krychlovým rozdělením* krychle $Q \subset \mathbb{R}^d$, pokud je krychlovým dělením Q a zároveň $\bigcup \mathcal{Q} = Q$.

Poznámka 2. Ještě než přejdeme k definici dalších pojmů, zdůrazněme rozdíl mezi krychlovým dělením a krychlovým rozdělením. Oba tyto systémy sestávají z po dvou disjunktních krychlí, jsou neprázdné a konečné, nicméně

(1) krychlové dělení množiny M ji (obecně) nepokrývá,

(2) krychlové rozdělení množiny M ji pokrývá, ale cenou za tuto vlastnost je omezení pro množinu M – požadujeme, aby byla typu krychle.

- Buďte $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ dvě krychlová dělení téže množiny v $\mathbb{R}^d$. Řekneme, že $\mathcal{Q}$ je *zjemněním* $\mathcal{Q}'$, pokud $\bigcup \mathcal{Q} = \bigcup \mathcal{Q}'$ a zároveň pro každé $Q \in \mathcal{Q}$ existuje $Q' \in \mathcal{Q}'$ splňující $Q \sqsubset Q'$.

  Povšimněme si ještě, že díky požadavku disjunktnosti krychlového dělení je krychle Q' určena jednoznačně.

Poznámka 3. Vlastnost „být zjemněním“ je tranzitivní. Jsou-li $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}', \mathcal{Q}''$ tři krychlová dělení téže množiny v $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{Q}$ je zjemněním $\mathcal{Q}'$ a $\mathcal{Q}'$ je zjemněním $\mathcal{Q}''$, pak je z definice zřejmé, že $\mathcal{Q}$ je zjemněním $\mathcal{Q}''$.

- Pro krychlové dělení $\mathcal{Q}$ množiny $M \subset \mathbb{R}^d$ definujme ještě dvě veličiny

$$h(\mathcal{Q}) = \max_{Q \in \mathcal{Q}} \{\operatorname{diam} Q\} \quad \text{a} \quad j(\mathcal{Q}) = \min_{Q \in \mathcal{Q}} \{\operatorname{diam} Q\},$$

přičemž číslo $h(\mathcal{Q})$ nazýváme *hrubostí* krychlového dělení $\mathcal{Q}$ a číslo $j(\mathcal{Q})$ *jemností* krychlového dělení $\mathcal{Q}$.

Obou extrémů se nabývá, neboť krychlové dělení je neprázdné a konečné.

Lemma 1. *Pro každé krychlové dělení $\mathcal{Q}$ množiny $M \subset \mathbb{R}^d$ platí nerovnost $j(\mathcal{Q}) \leq h(\mathcal{Q})$. Je-li krychlové dělení $\mathcal{Q}$ zjemněním krychlového dělení $\mathcal{Q}'$, pak platí $j(\mathcal{Q}) \leq j(\mathcal{Q}')$ a $h(\mathcal{Q}) \leq h(\mathcal{Q}')$.*

Důkaz. Plyne přímo z definic. □

Lemma 2. *Pro každé krychlové dělení $\mathcal{Q}$ množiny $M \subset \mathbb{R}^d$ a pro každé číslo $h > 0$ lze nalézt krychlové dělení $\mathcal{Q}'$, jež je jednak zjemněním $\mathcal{Q}$, jednak splňuje $j(\mathcal{Q}') = h(\mathcal{Q}') \leq h$.*

Důkaz. Plyne přímo z definic. □

- Buď $Q \subset \mathbb{R}^d$ krychle a nechť je funkce u definována alespoň na Q. Řekneme, že u je *po částech konstantní na* Q, pokud existuje $\mathcal{Q}$ krychlové rozdělení Q takové, že na každé krychli $Q' \in \mathcal{Q}$ je u konstantní.

- O funkci $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ řekneme, že je *nenulová*, pokud existuje alespoň jedno $x \in \mathbb{R}^d$ takové, že $u(x) \neq 0$, což je ekvivalentní $\|u\|_\infty \neq 0$.

- *Oscilaci* funkce $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definujeme pro každé $\varepsilon > 0$ předpisem

$$\operatorname{osc}(f, \varepsilon) = \sup\left\{\|f(x) - f(y)\|;\ \|x - y\| < \varepsilon,\ x, y \in \mathbb{R}^d\right\}.$$

- *Oscilaci* funkce $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *na množině* $M \subset \mathbb{R}^d$ definujeme předpisem

$$\operatorname{osc}_M(f) = \sup\{\|f(x) - f(y)\|;\ x, y \in M\}.$$

- Buďte $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a \neq b$. Množinu $\{at + (1-t)b;\ 0 \leq t \leq 1\}$ nazýváme *úsečkou* a značíme ji $[a; b]$.

- O systému $\mathcal{S}$ podmnožin $\mathbb{R}^d$ řekneme, že je *lokálně konečný*, jestliže pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ existuje takové $r > 0$, že koule $B(x, r)$ protíná nejvýše konečně mnoho prvků $\mathcal{S}$.

Kapitola 3

Lemmata

Lemma 3 (Duny). *Mějme nenulový vektor $a \in \mathbb{R}^d$, Q krychli v $\mathbb{R}^d$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje omezená funkce $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ a krychlové rozdělení $\mathcal{Q}$ krychle Q takové, že*

(a) *u je nulová na okolí ∂Q a $\|u\|_\infty < \varepsilon$,*

(b) $\lambda_d\big(\{x \in Q;\ \nabla u(x) = -a \text{ nebo } \nabla u(x) = a\}\big) \geq (1-\varepsilon)\lambda_d(Q)$,

(c) *lze psát $\nabla u(x) = v(x) + w(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$, přičemž*

   (c_1) $\|w\|_\infty < \varepsilon$,

   (c_2) $\{v(x);\ x \in Q\} \subset [-a; a]$,

   (c_3) *funkce v je konstantní na každé krychli $Q' \in \mathcal{Q}$.*

Důkaz Lemmatu 3 (Duny) je v podstatě převzat z článku [6, Lemmatu 4.4.]. Nicméně jelikož „vlnící se“ funkce u je v důkazu Věty 8 základním stavebním kamenem celé konstrukce zajišťujícím gradient „správného směru a velikosti“ na „dostatečně velké“ množině, uvádíme pro lepší představu nejen znění lemmatu, nýbrž i jeho důkaz. U ostatních lemmat převzatých z článku [6] uvádíme pouze jejich znění.

Důkaz. Buď m přirozené číslo, které určíme později. Zvolme 1-periodickou funkci $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ takovou, že $\|\varphi'\|_\infty \leq 1$, $\varphi'(x) = 0$ pouze v bodech $x \in \{\frac{1}{2}k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ a

$$\big\{t;\ 0 \leq t < 1,\ |\varphi'(t)| < 1\big\} \subset \Big[0,\ \alpha\Big) \cup \Big(\frac{1}{2} - \alpha,\ \frac{1}{2} + \alpha\Big) \cup \Big(1 - \alpha,\ 1\Big)$$

kde $\alpha > 0$ rovněž určíme později.

Dále buď $\psi\colon \mathbb{R}^d \to [0,1]$ funkce třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, která je nulová na okolí množiny $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{int} Q$ a splňuje nerovnost

$$\lambda_d\big(\{x \in Q;\ \psi(x) = 1\}\big) \geq (1 - \varepsilon/2)\lambda_d(Q). \tag{3.1}$$

Definujme funkci u pro $x \in Q$ předpisem

$$u(x) = \frac{\varphi\big(m\langle x, a\rangle\big) \cdot \psi(x)}{m}.$$

Jelikož je funkce ψ nulová na okolí ∂Q, můžeme funkci u rozšířit nulou na $\mathbb{R}^d \setminus Q$, přičemž tato nová funkce je třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Značme ji rovněž u. Z definice funkce u vyplývá, že

$$\text{bude-li } m \text{ dostatečně velké, je podmínka (a) splněna.} \tag{3.2}$$

Zaměřme se nyní na podmínky (b) a (c): Rutinním výpočtem $\nabla u(x)$ snadno ověříme, že pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ je

$$\nabla u(x) = \varphi'(m\langle x, a\rangle) \cdot \psi(x) \cdot a + \frac{\varphi(m\langle x, a\rangle) \cdot \nabla\psi(x)}{m}. \tag{3.3}$$

Definujme pro $x \in \mathbb{R}^d$ funkce v_1, w_1 předpisem

$$v_1(x) = \varphi'(m\langle x, a\rangle) \cdot \psi(x) \cdot a \quad \text{ a } \quad w_1(x) = \frac{\varphi(m\langle x, a\rangle) \cdot \nabla\psi(x)}{m},$$

tedy $\nabla u(x) = v_1(x) + w_1(x)$.

Z vlastností $\|\varphi'\|_\infty \leq 1$ a $\|\psi\|_\infty \leq 1$ vyplývá, že $\{v_1(x);\ x \in \mathbb{R}^d\} \subset [-a; a]$. Dále je zřejmé, že

$$\text{pro dostatečně velké } m \text{ je } \|w_1\|_\infty < \varepsilon/2. \tag{3.4}$$

Nyní již můžeme číslo m zafixovat – a to tak, aby byla splněna jak podmínka (3.2), tak (3.4).

Z vlastností funkce φ plyne, že množinu $\{x \in Q;\ \varphi'(m\langle x, a\rangle) = 0\}$ lze pokrýt konečně mnoha úsečkami. Označme jejich sjednocení P. Množina P je kompaktní, neboť je konečným sjednocením kompaktních množin (úseček), a platí $\lambda_d(P) = 0$. Díky regularitě míry λ_d nalezneme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^d$ splňující $P \subset G$ a $\lambda_d(G) < \lambda_d(Q) \cdot \varepsilon/2$.

Množina $\mathbb{R}^d \setminus G$ je uzavřená. Její vzdálenost od kompaktní množiny $P \subset G$ je tudíž kladná, označme ji δ. Nyní již můžeme zvolit α, a to tak, aby $0 < \alpha < \delta$.

Sledujme řetězec inkluzí

$$\begin{aligned} \{x \in Q;\ |\varphi'(m\langle x, a\rangle)| < 1\} &\subset \{x \in Q;\ \mathrm{dist}(x, P) < \alpha\} \\ &\subset \{x \in Q;\ \mathrm{dist}(x, P) < \delta\} \subset G, \end{aligned}$$

z nějž vyplývají nerovnosti

$$\lambda_d\big(\{x \in Q;\ |\varphi'(m\langle x, a\rangle)| < 1\}\big) \leq \lambda_d(G) < \lambda_d(Q) \cdot \varepsilon/2,$$

a tedy platí

$$\lambda_d\big(\{x \in Q;\ |\varphi'(m\langle x, a\rangle)| = 1\}\big) \geq (1 - \varepsilon/2)\lambda_d(Q). \tag{3.5}$$

Z nerovností (3.1) a (3.5) vyplývá nerovnost

$$\lambda_d\big(\{x \in Q;\ \psi(x) = 1 \text{ a } |\varphi'(m\langle x, a\rangle)| = 1\}\big) \geq (1 - \varepsilon)\lambda_d(Q),$$

ze které je již platnost podmínky (b) patrná – stačí si připomenout předpis funkce ∇u – viz (3.3) – a uvědomit si, že $\nabla\psi(x) = 0$, kdykoliv $\psi(x)$ nabývá své maximální hodnoty 1.

Zbývá definovat funkce v a w a ověřit podmínku (c). Funkce v_1 je třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, tudíž je spojitá na kompaktní množině $\overline{Q}$ a jako taková je na $\overline{Q}$ i stejnoměrně spojitá. Mimo množinu Q je funkce v_1 nulová, tedy je možné zvolit takové $p \in \mathbb{N}$, aby platilo

$$\operatorname{osc}(v_1, \sqrt{d} \cdot 2^{-p}) < \varepsilon/2. \tag{3.6}$$

Označme

$$\mathcal{Q} = \left\{ r + 2^{-p}(Q - r_Q);\ r \in 2^{-p}\,\mathbb{Z}^d \cap Q \right\},$$

což je zjevně krychlové rozdělení krychle Q, a definujme funkci $v\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem

$$v(x) = \begin{cases} v_1(r_{Q'}), & \text{pokud existuje nějaké } Q' \in \mathcal{Q}\text{, pro které je } x \in Q',\\ 0, & x \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup \mathcal{Q}. \end{cases}$$

Jelikož systém $\mathcal{Q}$ sestává – jako každé krychlové rozdělení – z konečně mnoha po dvou disjunktních krychlí a krychli Q pokrývá, je zřejmé, že předchozí definice je korektní, funkce v je konstantní na každé krychli $Q' \in \mathcal{Q}$ a je nulová na množině $\mathbb{R}^d \setminus Q$. Tedy podmínka (c_3) je splněna.

Pro každou krychli $Q' \in \mathcal{Q}$ platí $\operatorname{diam} Q' = \sqrt{d} \cdot 2^{-p}$, což spolu s (3.6) a definicí funkce v_1 dává nerovnost

$$\|v_1 - v\|_\infty < \varepsilon/2. \tag{3.7}$$

Stejně jako pro funkci v_1 platí i pro funkci v inkluze $\{v(x);\ x \in Q\} \subset [-a; a]$, tudíž podmínka ($c_2$) je též splněna.

Na závěr položme

$$w(x) = w_1(x) + v_1(x) - v(x) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^d.$$

Potom pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$ platí $\nabla u(x) = v(x) + w(x)$. Z trojúhelníkové nerovnosti a z odhadů (3.4) a (3.7) vyplývá poslední chybějící vlastnost – (c_1), neboť

$$\|w\|_\infty \leq \|w_1\|_\infty + \|v_1 - v\|_\infty < \varepsilon.$$

Tím jsou všechny podmínky splněny a lemma je dokázáno. □

Lemma 4 (O krychlovém dělení)**.** *Pro každé $\varepsilon > 0$, pro každé $z \in \mathbb{Z}^d$ a pro každou množinu $F \subset \mathbb{R}^d$ uzavřenou v množině $C^z = [0,1)^d + z$ existuje krychlové dělení $\mathcal{Q}$ množiny $C^z \setminus F$ takové, že*

$$\lambda_d\Big(C^z \setminus \Big(F \cup \bigcup \mathcal{Q}\Big)\Big) < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $z = 0$, neboť pro $z \neq 0$ můžeme vše převést na případ $z = 0$ pouhou translací všech zúčastněných množin o $-z$ a následující konstrukce je translačně invariantní. Mějme tedy $z = 0$.

V případě, že $F = [0,1)^d$, je podmínka (3.8) splněna pro $\mathcal{Q} = \emptyset$. V případě, že $F \cap [0,1)^d = \emptyset$, položme $\mathcal{Q} = \left\{[0,1)^d\right\}$, čímž je důkaz rovněž hotov. Nadále předpokládejme, že $F \cap [0,1)^d \neq \emptyset$ a $F \subsetneq [0,1)^d$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ označme

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \frac{1}{2^n}[0,1)^d + p;\ p \in \left\{ 0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n} \right\}^d \right\},$$

tedy $\mathcal{D}_n$ je krychlovým rozdělením $[0,1)^d$ a pro každé $Q \in \mathcal{D}_n$ je $\operatorname{diam} Q = \sqrt{d} \cdot 2^{-n}$.

Induktivně zkonstruujeme systémy krychlí $\mathcal{Q}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Pro začátek položme

$$\mathcal{Q}_0 = \emptyset.$$

Známe-li již $\mathcal{Q}_j$ pro $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, položme

$$\mathcal{Q}_{n+1} = \left\{ Q \in \mathcal{D}_{n+1};\ Q \cap F = \emptyset \text{ a zároveň } Q \cap \bigcup_{j=0}^{n} \bigcup \mathcal{Q}_j = \emptyset \right\}.$$

Označme $\mathcal{Q}^n = \bigcup_{j=0}^{n} \mathcal{Q}_j$, $n \in \mathbb{N}_0$. Z konstrukce vyplývá, že systém $\mathcal{Q}^n$ je krychlovým dělením množiny $[0,1)^d \setminus F$ a platí $\bigcup \mathcal{Q}^n \subset \bigcup \mathcal{Q}^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Z uzavřenosti množiny F v $[0,1)^d$ vyplývá, že

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup \mathcal{Q}^n = [0,1)^d \setminus F,$$

neboť pro každé $x \in [0,1)^d \setminus F$ je možné nalézt $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap F = \emptyset$, a nejpozději pro nejmenší přirozené číslo m vyhovující nerovnosti $\sqrt{d} \cdot 2^{-m} < r$ platí $x \in \bigcup \mathcal{Q}^m$. Opačná inkluze je zřejmá.

Nyní si stačí uvědomit, že z obecných vlastností míry pro každou rostoucí posloupnost množin $(\bigcup \mathcal{Q}^n)$ platí

$$\lambda_d \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup \mathcal{Q}^n \right) = \lim_{n \to \infty} \lambda_d \left(\bigcup \mathcal{Q}^n \right),$$

díky čemuž již lehce nalezneme takové $m \in \mathbb{N}$, aby platilo

$$\lambda_d \left([0,1)^d \setminus \left(F \cup \bigcup \mathcal{Q}^m \right) \right) < \varepsilon,$$

a systém $\mathcal{Q}^m$ je tedy hledaným krychlovým dělením. □

Lemma 5 (Konvergence)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená omezená množina a buď $B = B(0, R) \subset \mathbb{R}^d$ koule splňující $\overline{U} \subset B$. Potom existuje zobrazení $t\colon B \to \mathbb{R}^d$ mající následující vlastnost: Je-li (s_n) posloupnost prvků U, (σ_n) posloupnost prvků B, posloupnost $(s_n - \sigma_n)$ konverguje a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $\langle t(\sigma_n), \sigma_{n+1} - \sigma_n \rangle = 0$, potom konverguje rovněž posloupnost (s_n) k nějakému $s \in \overline{U}$.*

Důkaz. Viz Lemma 4.5 článku [6]. □

Lemma 6 (Konvergence v míře)**.** *Buď μ borelovská míra a $M \subset \mathbb{R}^d$ μ-měřitelná množina taková, že $\mu(M) < \infty$. Buď $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ bodově konvergentní posloupnost spojitých funkcí z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^d$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ platí, že*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\big\{x \in M;\ \|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \geq \varepsilon\big\}\Big) = 0.$$

Důkaz. Spojitá funkce je pro borelovskou míru μ měřitelná a skoro všude konečná. Lemma tudíž přímo vyplývá z toho, že pro konečné míry konvergence skoro všude implikuje konvergenci v míře. Viz například [7, kapitola 2.3.8]. □

Lemma 7 (Diferencovatelnost)**.** *Nechť $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ splňující, že*

(a)$_{\mathrm{D}}$ *řada $\sum_{n=1}^{\infty} \nabla u_n$ bodově konverguje,*

(b)$_{\mathrm{D}}$ *$(\nabla u_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k 0,*

(c)$_{\mathrm{D}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\|u_{n+1}\|_\infty}{\|u_n\|_\infty} = 0,$

(d)$_{\mathrm{D}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{osc}\big(\sum_{k=1}^{n} \nabla u_k, \|u_{n+1}\|_\infty\big) = 0.$

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konverguje stejnoměrně, funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je diferencovatelná a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ je $\nabla f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nabla u_n(x)$.

Důkaz. Viz [6], Lemma 4.3. □

Kapitola 4

Hlavní výsledek

Nyní již můžeme přistoupit k důkazu hlavní věty celé práce.

Věta 8. *Pro každé přirozené $d \geq 2$, pro každou otevřenou omezenou množinu $U \subset \mathbb{R}^d$ obsahující počátek a pro každou množinu $F \subset \mathbb{R}^d$ typu F_σ existuje všude diferencovatelná omezená funkce $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ taková, že*

$$\begin{aligned} \nabla u(x) &\in \overline{U} \quad \textit{pro všechna } x \in \mathbb{R}^d, \\ \nabla u(x) &\in U \quad \textit{pro všechna } x \in F, \\ \nabla u(x) &\in \partial U \quad \textit{pro } \lambda_d\textit{-skoro všechna } x \in \mathbb{R}^d \setminus F. \end{aligned}$$

Důkaz. Zvolme pevně dimenzi $d \geq 2$, otevřenou omezenou množinu $U \subset \mathbb{R}^d$ obsahující počátek a množinu $F \subset \mathbb{R}^d$ typu F_σ. Pro $F = \mathbb{R}^d$ je triviálně řešením funkce $u(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. Předpokládejme nadále, že $F \subsetneq \mathbb{R}^d$.

Nechť $F = \bigcup_{k=1}^\infty F_k$, kde $F_k \subset \mathbb{R}^d$ jsou uzavřené množiny. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $F_k \subset F_{k+1}$. Položme $F_0 := \emptyset$, tedy F lze psát i jako $\bigcup_{k=0}^\infty F_k$.

Označme

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon U &= \{x \in U;\ \operatorname{dist}(x, \partial U) < \varepsilon\} \quad \text{pro } \varepsilon > 0, \\ R &= \sup\{\|s\|;\ s \in U\}, \\ C^z &= [0,1)^d + z \quad \text{pro } z \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned}$$

Dále označme pro $h \in \left\{\sqrt{d} \cdot \frac{1}{2^n};\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$ a pro $z \in \mathbb{Z}^d$ symbolem $\mathcal{D}(h)^z$ takové krychlové rozdělení krychle C^z, jehož jemnost i hrubost je rovna h, čili pro každou krychli $D \in \mathcal{D}(h)^z$ je $\operatorname{diam} D = h$.

Zvolme klesající posloupnost reálných čísel ε_k takovou, že

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0 \quad \text{a} \quad 0 < \varepsilon_k < 1 \ \text{ pro každé } k \in \mathbb{N}_0. \tag{4.1}$$

Z formálních důvodů budeme pro splnění podmínky $(\mathrm{xv})_n$ – viz dále – pro malá přirozená n potřebovat i ε_{-1}, položme jej rovno jedné.

Načrtněme předem základní schéma celého důkazu: Konstrukci funkce u provedeme lokálně na každé množině C^z zvlášť. Pro každé $z \in \mathbb{Z}^d$ a $n \in \mathbb{N}_0$ zkonstruujeme funkci $u_n^z\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, pro niž bude platit

$$u_n^z(x) = 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}^d \setminus C^z,$$

přičemž pro každé $z \in \mathbb{Z}^d$ bude řada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^z$ konvergentní. Funkce $u^z = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^z$ již budou lokálně splňovat vlastnosti hledané funkce a výsledná funkce u bude (až na konstantu) jejich součtem. Pusťme se tedy do konstrukce.

Zvolme pevně $z \in \mathbb{Z}^d$, čímž zafixujeme množinu C^z. Pro případ, že $C^z \subset F$, položme $u^z(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, čímž máme pro toto konkrétní z konstrukci hotovou a můžeme přejít až k pasáži *Úplný závěr* na konci důkazu. Nadále předpokládejme, že $C^z \setminus F \neq \emptyset$.

V konstrukci funkce u_n^z budeme pro přehlednost index z vynechávat, a to nejen u funkce u_n^z (nyní již u_n), ale rovněž u všech ostatních konstruovaných objektů, které sice samozřejmě na z závisejí, ale další index by značení jen znepřehlednil. Mimo jiné tedy i krychli C^z budeme až do odvolání značit pouze C.

Na vektorovou funkci ∇u_n bude výhodné pohlížet jako na součet dvou vektorových funkcí v_n a w_n, z nichž každá bude splňovat jisté požadavky, jež upřesníme později.

Označme pro každé $n \in \mathbb{N}_0$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \nabla u_k,$$
$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Během důkazu zkonstruujeme také neklesající posloupnost $\big(k(n)\big)_{n=0}^{\infty}$ nezáporných celých čísel, jež bude zobrazovat na $\mathbb{N}_0$. V neposlední řadě zkonstruujeme pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ množinu $Z_n \subset C$ a krychlové dělení $\mathcal{Q}_n$ množiny $C \setminus F_{k(n)}$ takové, že

(i)$_n$ množiny Z_n, $\bigcup \mathcal{Q}_n$, $F_{k(n)} \cap C$ jsou po dvou disjunktní a C je jejich sjednocením, navíc je $\bigcup \mathcal{Q}_n \neq \emptyset$,

(ii)$_n$ $\lambda_d(Z_n) \leq \min\left\{2^{-k(n)-1}, 2^{-1}\lambda_d(C \setminus F_{k(n)})\right\}$,

(iii)$_n$ $j(\mathcal{Q}_n) = h(\mathcal{Q}_n) \leq j(\mathcal{Q}_{n-1})$,

(iv)$_n$ je-li $k(n) = k(n-1)$, potom $Z_n = Z_{n-1}$,

(v)$_n$ je-li $k(n) = k(n-1)$, potom je $\mathcal{Q}_n$ zjemněním $\mathcal{Q}_{n-1}$.

Pro začátek zvolme libovolnou nenulovou konstantu c_0 a položme

$$\begin{aligned}
u_0(x) &:= c_0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}^d,\\
v_0(x) &:= 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}^d,\\
w_0(x) &:= 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}^d,\\
k(0) &:= 0,\\
Z_0 &:= \emptyset,\\
\mathcal{Q}_0 &:= \{C\}.
\end{aligned}$$

Funkce u_0 je tedy třídy $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí $\nabla u_0(x) = v_0(x) + w_0(x)$, $s_0(x) = 0$ a $\sigma_0(x) = 0$. Dále platí $F_{k(0)} = F_0 = \emptyset$ a množiny Z_0, $\bigcup \mathcal{Q}_0 = C$ a $F_{k(0)}$ jsou po dvou disjunktní a pokrývají množinu C.

Při konstrukci dále požadujeme, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ bylo splněno, že

(vi)$_n$ u_n je nenulová a třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\nabla u_n(x) = v_n(x) + w_n(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$,

(vii)$_n$ v_n je konstantní na každé krychli $Q \in \mathcal{D}(h(\mathcal{Q}_n))$ a $v_n = 0$ na $\mathbb{R}^d \setminus C$,

(viii)$_n$ $\|w_n\|_\infty \leq 2^{-n}$,

(ix)$_n$ $s_n(x) \in U$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$,

(x)$_n$ $\|\sigma_n(x)\| < R + 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$,

(xi)$_n$ $\langle t(\sigma_{n-1}(x)), \sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x) \rangle = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$, kde t je zobrazení z Lemmatu 5 (Konvergence) pro $B = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| < R + 1\}$,

(xii)$_n$ $\|u_n\|_\infty \leq 2^{-n+1}\|u_{n-1}\|_\infty$,

(xiii)$_n$ $\operatorname{osc}(s_{n-1}, \|u_n\|_\infty) < \varepsilon_{n-1}/4$,

(xiv)$_n$ u_n je konstantní na okolí ∂C,

(xv)$_n$ $\|v_n\|_\infty \leq \varepsilon_{k(n)-1}/4$,

(xvi)$_n$ je-li $k(n) > k(n-1)$, potom

$$\lambda_d\left(\left\{x \in \bigcup \mathcal{Q}_{n-1};\ s_{n-1}(x) \notin \partial_{\varepsilon_{k(n-1)}} U\right\}\right) \leq 2^{-k(n-1)-1}.$$

Pro případ $n = 0$ jsou podmínky (i)$_0$, (ii)$_0$, (vi)$_0$–(x)$_0$, (xiv)$_0$ a (xv)$_0$ zjevně splněny úvodní volbou. Podmínky (iii)$_n$–(v)$_n$, (xi)$_n$–(xiii)$_n$ a (xvi)$_n$ v sobě obsahují odkaz na $n - 1$ a jako takové jsou pro $n = 0$ považovány za splněné. První krok matematické indukce tedy můžeme prohlásit za hotový.

1) Indukční krok: Nechť pro $n \in \mathbb{N}_0$ již známe pro všechna $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ požadované funkce u_m, v_m, w_m, odpovídající množiny Z_m, systémy $\mathcal{Q}_m$, jakož i čísla $k(m)$.

Z bodů (vii)$_0$–(vii)$_n$ a (iii)$_1$–(iii)$_n$ plyne, že funkce σ_n je konstantní na každé krychli $Q \in \mathcal{Q}_n$. Označme tuto hodnotu $\sigma_n(r_Q)$ a zvolme vektor $a = a_Q \in \mathbb{R}^d$ takový, že

$$\|a\| = \varepsilon_{k(n)}/4 \quad \text{a zároveň} \quad \langle t(\sigma_n(r_Q)), a \rangle = 0, \tag{4.2}$$

přičemž takový vektor je možné nalézt díky předpokladu $d \geq 2$. Navíc je vektor a nenulový.

Jelikož funkce s_n je spojitá na $\mathbb{R}^d$ a množina $\overline{C}$ je kompaktní, je s_n stejnoměrně spojitá na $\overline{C}$. Díky tomu je možné nalézt krychlové dělení $\mathcal{Q}'_n$ množiny C, které je zjemněním $\mathcal{Q}_n$ a zároveň pro něj platí, že

$$\text{oscilace } s_n \text{ na každé krychli } Q' \in \mathcal{Q}'_n \text{ je menší než } \varepsilon_{k(n)}/4. \tag{4.3}$$

Jelikož funkce s_n je stejnoměrně spojitá na kompaktu $\overline{C}$ a mimo něj je nulová, podaří se nám nalézt takové $\delta > 0$, aby platilo

$$\operatorname{osc}(s_n, \delta) < \varepsilon_n/4. \tag{4.4}$$

Ještě než budeme pokračovat, připomeňme, že funkce u_n je z předpokladu $(\mathrm{vi})_n$ nenulová, tedy $\|u_n\|_\infty > 0$.

Použitím Lemmatu 3 (Duny) pro krychli $Q' \in \mathcal{Q}'_n$, vektor $a = a_Q$, kde Q je jednoznačně určená krychle z $\mathcal{Q}_n$ obsahující Q', a

$$\varepsilon = \min\left\{2^{-n}\|u_n\|_\infty,\ 2^{-k(n)},\ \varepsilon_{k(n)}2^{-n-2},\ \delta/2\right\}$$

nalezneme takovou funkci $u_{Q'}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ a takové $\mathcal{Q}_{Q'}$ krychlové rozdělení Q', pro něž platí, že

(a') $\|u_{Q'}\|_\infty < \varepsilon \le 2^{-n}\|u_n\|_\infty$, funkce $u_{Q'}$ je nulová na okolí $\partial Q'$,

(b') $\lambda_d\big(\{x \in Q';\ \nabla u_{Q'}(x) = -a_Q \text{ nebo } \nabla u_{Q'}(x) = a_Q\}\big) \ge (1 - 2^{-k(n)})\lambda_d(Q')$,

(c') lze psát $\nabla u_{Q'}(x) = v_{Q'}(x) + w_{Q'}(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$, přičemž

- (c_1') $\|w_{Q'}\|_\infty < \varepsilon_{k(n)}2^{-n-2}$,
- (c_2') $v_{Q'}(Q') \subset [-a_Q; a_Q]$,
- (c_3') funkce $v_{Q'}$ je konstantní na každé krychli krychlového dělení $\mathcal{Q}_{Q'}$.

Z volby ε vyplývá rovněž odhad $2\|u_{Q'}\|_\infty < \delta$, a tedy spolu s využitím (4.4) platí, že

$$\operatorname{osc}(s_n, 2\|u_{Q'}\|_\infty) < \varepsilon_n/4. \tag{4.5}$$

Označme $\mathcal{Q}''_n$ systém všech krychlí, které jsou obsaženy v některém $\mathcal{Q}_{Q'}$ pro nějaké $Q' \in \mathcal{Q}'_n$. Z konstrukce plyne, že

$$\mathcal{Q}''_n \text{ je nejen krychlovým dělením } C \setminus F_{k(n)}, \text{ nýbrž i zjemněním } \mathcal{Q}_n. \tag{4.6}$$

Definujme funkci $\tilde{u}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u_{Q'}(x), & \text{pokud existuje nějaké } Q' \in \mathcal{Q}'_n, \text{ pro které je } x \in Q', \\ 0, & x \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup \mathcal{Q}'_n. \end{cases}$$

Analogicky definujme funkce $\tilde{v}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a $\tilde{w}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Jelikož je $\mathcal{Q}'_n$ disjunktní systém krychlí, existuje pro každé $x \in \bigcup \mathcal{Q}'_n$ právě jedno $Q' \in \mathcal{Q}'_n$, pro něž je $x \in Q'$, a tudíž jsou předchozí definice korektní. Z konečnosti a disjunktnosti systému $\mathcal{Q}'_n$, z faktu $u_{Q'} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ pro všechna $Q' \in \mathcal{Q}'_n$ a především z vlastnosti (a') vyplývá, že $\tilde{u} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Dále platí, že

(a") $\|\tilde{u}\|_\infty < 2^{-n}\|u_n\|_\infty$,

(c") $\nabla\tilde{u}(x) = \tilde{v}(x) + \tilde{w}(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$,

- (c_1") $\|\tilde{w}\|_\infty < \varepsilon_{k(n)}2^{-n-2}$,
- (c_2") $\tilde{v}(Q') \subset [-a_Q; a_Q]$, kde Q je jednoznačně určená krychle z $\mathcal{Q}_n$ obsahující $Q' \in \mathcal{Q}'_n$,
- (c_3") $\tilde{v}$ je konstantní na každé krychli krychlového dělení $\mathcal{Q}''_n$.

Z indukčního předpokladu $(\mathrm{i})_n$ vyplývá, že systém $\mathcal{Q}_n$ je neprázdný, a jelikož je $\bigcup \mathcal{Q}_n = \bigcup \mathcal{Q}'_n$, existuje alespoň jedno $Q' \in \mathcal{Q}'_n$. Z vlastnosti (b') plyne, že pro toto Q' je funkce $u_{Q'}$ nenulová, tudíž i funkce $\tilde{u}$ je nenulová. Díky (a") se nám podaří nalézt $c_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ splňující $c_{n+1} < \|\tilde{u}\|_\infty$ a zároveň $\|\tilde{u}\|_\infty + c_{n+1} \leq 2^{-n}\|u_n\|_\infty$.

1a) Definice funkcí u_{n+1}, v_{n+1} a w_{n+1}:

Pro $x \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup \mathcal{Q}'_n$ položme

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &:= c_{n+1}, \\ v_{n+1}(x) &:= 0, \\ w_{n+1}(x) &:= 0. \end{aligned}$$

Pro $x \in \bigcup \mathcal{Q}'_n$ nalezněme jednoznačně určené $Q' \in \mathcal{Q}'_n$, pro něž $x \in Q'$. Pokud $s_n(r_{Q'}) \in \partial_{3\varepsilon_{k(n)}/4} U$, položme

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &:= c_{n+1}, \\ v_{n+1}(x) &:= 0, \\ w_{n+1}(x) &:= 0. \end{aligned}$$

Naopak pokud $s_n(r_{Q'}) \notin \partial_{3\varepsilon_{k(n)}/4} U$, položme

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &:= \tilde{u} + c_{n+1}, \\ v_{n+1}(x) &:= \tilde{v}, \\ w_{n+1}(x) &:= \tilde{w}, \end{aligned}$$

přičemž v takovém případě díky (b') a (4.2) platí

$$\lambda_d \left(\left\{x \in Q';\ \|\nabla u_{n+1}(x)\| = \varepsilon_{k(n)}/4\right\}\right) \geq \left(1 - 2^{-k(n)}\right) \lambda_d(Q'). \tag{4.7}$$

1b) Ověření podmínek $(\mathrm{vi})_{n+1}$–$(\mathrm{xvi})_{n+1}$:

• Podmínka $(\mathrm{vi})_{n+1}$: Vzhledem k definici funkcí u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}, vlastnosti (a') a lokální konečnosti systému $\mathcal{Q}'_n$ je $u_{n+1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí $\nabla u_{n+1}(x) = v_{n+1}(x) + w_{n+1}(x)$. Volba konstanty c_{n+1} zajišťuje, že funkce u_{n+1} je nenulová.

• Podmínku $(\mathrm{vii})_{n+1}$ zatím nemůžeme ověřit, neboť jsme doposud nedefinovali systém $\mathcal{Q}_{n+1}$.

• Podmínka $(\mathrm{viii})_{n+1}$ je splněna díky (4.1) a (c_1'), resp. (c_1").

• Podmínka $(\mathrm{ix})_{n+1}$: Pokud $\nabla u_{n+1}(x) = 0$, je $s_{n+1}(x) = s_n(x)$, přičemž $s_n(x)$ je prvkem U z indukčního předpokladu $(\mathrm{ix})_n$.

V případě, že $\nabla u_{n+1}(x) \neq 0$, nalezneme právě jedno $Q' \in \mathcal{Q}'_n$, pro něž je $x \in Q'$. V takovém případě platí $s_n(r_{Q'}) \notin \partial_{3\varepsilon_{k(n)}/4} U$. Jelikož $\operatorname{osc}_{Q'} s_n < \varepsilon_{k(n)}/4$ (viz (4.3)), platí nerovnost

$$\operatorname{dist}(s_n(x), \partial U) \geq 3\varepsilon_{k(n)}/4 - \|s_n(x) - s_n(r_{Q'})\| \geq \varepsilon_{k(n)}/2,$$

a tedy $s_n(x) \notin \partial_{\varepsilon_{k(n)}/2} U$.

Z vlastnosti (c$_2$'), resp. (c$_2$") a z (4.2) lze vyvodit odhad $\|v_{n+1}(x)\| \leq \varepsilon_{k(n)}/4$. Z vlastnosti (c$_1$'), resp. (c$_1$") vyplývá, že $\|w_{n+1}(x)\| < \varepsilon_{k(n)} 2^{-n-2}$. Anžto platí rovnost $s_{n+1}(x) = s_n(x) + \nabla u_{n+1}(x)$, dostáváme s použitím trojúhelníkové nerovnosti odhad

$$\|\nabla u_{n+1}(x)\| \leq \|v_{n+1}(x)\| + \|w_{n+1}(x)\| < \varepsilon_{k(n)}/4 + \varepsilon_{k(n)} 2^{-n-2} \leq \varepsilon_{k(n)}/2,$$

díky němuž můžeme uzavřít, že vskutku $s_{n+1}(x) \in U$.

• Podmínka $(\mathrm{x})_{n+1}$: Platí $s_{n+1} - \sigma_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} w_k = \sum_{k=1}^{n+1} w_k$, tedy s využitím vlastností $(\mathrm{viii})_1$–$(\mathrm{viii})_{n+1}$ můžeme provést odhad

$$\|s_{n+1} - \sigma_{n+1}\| \leq \sum_{k=1}^{n+1} \|w_k\| \leq \sum_{k=1}^{n+1} 2^{-k} < 1,$$

což spolu s již splněnou podmínkou $(\mathrm{ix})_{n+1}$ a definicí R dává $(\mathrm{x})_{n+1}$.

• Podmínka $(\mathrm{xi})_{n+1}$: V případě, že $v_{n+1}(x) = 0$, je rovněž $\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x) = 0$, a tedy rovnost $\big\langle t(\sigma_n(x)), \sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x) \big\rangle = 0$ zjevně platí.

Pokud naopak $v_{n+1}(x) \neq 0$, pak existuje právě jedno $Q \in \mathcal{Q}_n$, pro které je $x \in Q$. V takovém případě plyne z (4.2) jednak rovnost $\sigma_n(r_Q) = \sigma_n(x)$, jednak $\big\langle t(\sigma_n(r_Q)), a_Q \big\rangle = 0$, tedy i $\big\langle t(\sigma_n(x)), a_Q \big\rangle = 0$. Z definice v_{n+1} je $v_{n+1}(x)$ nenulovým násobkem vektoru a_Q – viz bod (c$_2$'), resp. (c$_2$"). Odtud již plyne požadovaná rovnost $\big\langle t(\sigma_n(x)), \sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x) \big\rangle = 0$.

• Podmínka $(\mathrm{xii})_{n+1}$ plyne z volby c_{n+1} a z definice u_{n+1}.

• Podmínka $(\mathrm{xiii})_{n+1}$: Z definice c_{n+1} je $\|\tilde{u} + c_{n+1}\|_\infty < 2\|\tilde{u}\|_\infty$, tudíž z definice u_{n+1} plyne $\|u_{n+1}\|_\infty < 2\|\tilde{u}\|_\infty$. Jelikož díky konečnosti systému $\mathcal{Q}'_n$ je

$$\|\tilde{u}\|_\infty = \max_{Q' \in \mathcal{Q}'_n} \{\|u_{Q'}\|_\infty\},$$

vyplývá platnost $(\mathrm{xiii})_n$ jednoduše z (4.5).

• Podmínka $(\mathrm{xiv})_{n+1}$ je splněna díky vlastnosti (a') a konečnosti systému $\mathcal{Q}'_n$.

• Podmínku $(\mathrm{xv})_{n+1}$ zatím nemůžeme ověřit, neboť jsme doposud nedefinovali číslo $k(n+1)$, nicméně z vlastnosti (c$_2$") a z (4.2) dostáváme alespoň odhad

$$\|v_{n+1}\|_\infty \leq \varepsilon_{k(n)}/4. \tag{4.8}$$

• Podmínka $(\mathrm{xvi})_{n+1}$: V tuto chvíli je naším cílem mimo jiné definovat $k(n+1)$, a to tak, aby výsledná posloupnost $\big(k(n)\big)_{n=0}^\infty$ jednak byla neklesající, jednak rostla nade všechny meze.

Pokud platí

$$\lambda_d \Big(\Big\{ x \in \bigcup \mathcal{Q}_n;\ s_n(x) \notin \partial_{\varepsilon_{k(n)}} U \Big\} \Big) \leq 2^{-k(n)-1},$$

položme $k(n+1) := k(n) + 1$. V opačném případě budiž $k(n+1) := k(n)$. Tím jsme podmínku $(\mathrm{xvi})_{n+1}$ ověřili.

Povšimněme si ještě, že takto definovaná posloupnost $\big(k(n)\big)$ je neklesající. Fakt, že roste nade všechny meze, ověříme po dokončení indukčního kroku.

1c) Ověření zbývajících podmínek: Nyní zbývá definovat systém $\mathcal{Q}_{n+1}$ a vypořádat se s podmínkami $(\mathrm{i})_{n+1}$–$(\mathrm{v})_{n+1}$, $(\mathrm{vii})_{n+1}$ a $(\mathrm{xv})_{n+1}$.

1. varianta: Pokud $k(n+1) = k(n)$, pak – s využitím Lemmatu 2 – nalezněme krychlové dělení $\mathcal{S}$ množiny $C \setminus F_{k(n+1)}$, které je jednak zjemněním $\mathcal{Q}''_n$, jednak pro něj platí

$$j(\mathcal{S}) = h(\mathcal{S}) \leq j(\mathcal{Q}''_n).$$

Díky tomu, že $\mathcal{Q}''_n$ je zjemněním $\mathcal{Q}_n$, platí i nerovnost $h(\mathcal{S}) \leq j(\mathcal{Q}_n)$ (viz Lemma 1).

Nyní stačí položit

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{n+1} &:= \mathcal{S}, \\ Z_{n+1} &:= Z_n, \end{aligned}$$

čímž jsou – v kombinaci s (4.6) – podmínky $(\mathrm{i})_{n+1}$ až $(\mathrm{v})_{n+1}$ splněny. Podmínka $(\mathrm{vii})_{n+1}$ plyne rovněž přímo z definice $\mathcal{Q}_{n+1}$ a z (c_3”). Pro ověření podmínky $(\mathrm{xv})_{n+1}$ stačí vzít v úvahu nerovnost (4.8) a uvědomit si, že posloupnost (ε_k) je klesající.

2. varianta: Pokud ovšem $k(n+1) > k(n)$, připomeňme nejprve úvodní předpoklad, že $F \subsetneq C$, z nějž plyne $F_{k(n+1)} \subsetneq C$. Jelikož $F_{k(n+1)}$ je uzavřená množina a množina C je krychle, je již nutně $\lambda_d\big(C \setminus F_{k(n+1)}\big) > 0$.

Nalezněme pomocí Lemmatu 4 (O krychlovém dělení) aplikovaného na množiny C, $F = F_{k(n+1)}$ a na $\varepsilon = \min\{2^{-k(n+1)},\ 2^{-1}\lambda_d(C \setminus F_{k(n+1)})\}$ takové krychlové dělení $\mathcal{Q}$ množiny $C \setminus F_{k(n+1)}$, aby platilo

$$\lambda_d\Big(C \setminus \Big(F_{k(n+1)} \cup \bigcup \mathcal{Q}\Big)\Big) < \varepsilon.$$

Dále nalezněme – s využitím Lemmatu 2 – krychlové dělení $\mathcal{S}$ množiny $C \setminus F_{k(n+1)}$, které je jednak zjemněním krychlového dělení $\mathcal{Q}$, jednak pro něj platí

$$j(\mathcal{S}) = h(\mathcal{S}) \leq \min\{j(\mathcal{Q}), j(\mathcal{Q}''_n)\}.$$

Položme

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &:= C \setminus \Big(F_{k(n+1)} \cup \bigcup \mathcal{Q}\Big), \\ \mathcal{Q}_{n+1} &:= \mathcal{S} \end{aligned}$$

a ověřme podmínky $(\mathrm{i})_{n+1}$–$(\mathrm{v})_{n+1}$, $(\mathrm{vii})_{n+1}$, $(\mathrm{xv})_{n+1}$ i pro tento případ.

- Podmínky $(\mathrm{i})_{n+1}$–$(\mathrm{iii})_{n+1}$ vyplývají přímo z předchozích definic.
- Podmínky $(\mathrm{iv})_{n+1}$, $(\mathrm{v})_{n+1}$ jsou v tomto případě prázdné.
- Podmínka $(\mathrm{vii})_{n+1}$: Zvolme $Q \in \mathcal{D}(h(\mathcal{Q}_{n+1}))$. Existuje-li krychle $Q'' \in \mathcal{Q}''_n$ s vlastností $Q'' \cap Q \neq \emptyset$, pak z definice krychlového dělení $\mathcal{Q}_{n+1}$ je $Q \sqsubset Q''$ a díky (c_3”) je funkce v_{n+1} konstantní na Q. Pokud naopak $Q \cap \bigcup \mathcal{Q}''_n = \emptyset$, je funkce v_{n+1} na množině Q konstantně rovna nule.

  Rovnost $v_{n+1}(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}^d \setminus C$ je zřejmá.
- Podmínka $(\mathrm{xv})_{n+1}$ vyplývá z rovnosti $k(n+1) = k(n) + 1$ a z nerovnosti (4.8).

Tím je indukční krok dokončen.

2) Posloupnost $\big(k(n)\big)$ roste nade všechny meze: Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ existuje $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, pro něž je $k(m) > k(n)$.

Předpokládejme pro spor, že tomu tak není, čili že existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro všechna $m > n$, $m \in \mathbb{N}$, je $k(m) = k(n)$. Z tohoto faktu a z vlastností $(\text{v})_n$–$(\text{v})_m$ plyne

$$\bigcup \mathcal{Q}_n = \bigcup \mathcal{Q}_m = \bigcup \mathcal{Q}'_m \qquad \text{pro } m \geq n,$$

čehož budeme nadále využívat.

Díky předpokladu $k(m) = k(n)$, $m > n$, můžeme na $k(m)$ pohlížet jako na konstantu a pro zjednodušení psát pouze k.

Z definice $k(m+1)$ – viz ověření podmínky $(\text{xvi})_{m+1}$ – plyne

$$\lambda_d\left(\left\{x \in \bigcup \mathcal{Q}_n;\ s_m(x) \notin \partial_{\varepsilon_k} U\right\}\right) > 2^{-k-1}, \quad m \geq n. \tag{4.9}$$

Označme

$$A(m) = \left\{x \in \bigcup \mathcal{Q}_n;\ s_m(x) \notin \partial_{\varepsilon_k} U\right\}, \quad m \geq n.$$

Je-li $Q' \in \mathcal{Q}'_m$ krychle protínající množinu $A(m)$, potom $s_m(r_{Q'}) \notin \partial_{3\varepsilon_k/4} U$, neboť díky (4.3) je oscilace s_m na Q' menší než $\varepsilon_k/4$.

Z (4.7) plyne, že pro každé takové Q' je

$$\lambda_d\big(\,\{y \in Q';\ \|s_{m+1}(y) - s_m(y)\| \geq \varepsilon_k/4\}\,\big) \geq \big(1 - 2^{-k}\big)\,\lambda_d(Q').$$

Z nerovnosti (4.9) plyne, že míra krychlí $Q' \in \mathcal{Q}'_m$ protínajících množinu $A(m)$ je alespoň 2^{-k-1}, tudíž

$$\lambda_d\left(\left\{y \in \bigcup \mathcal{Q}_n;\ \|s_{m+1}(y) - s_m(y)\| \geq \varepsilon_k/4\right\}\right) \geq \big(1 - 2^{-k}\big) \cdot 2^{-k-1},$$

což je ve sporu s Lemmatem 6 (Konvergence v míře), pokud se nám podaří dokázat, že posloupnost (s_m) je bodově konvergentní.

Platí, že pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ posloupnost $(s_m(x))$ konverguje: Z $(\text{viii})_\ell$ pro všechna $\ell \in \mathbb{N}_0$ plyne, že posloupnost $s_m(x) - \sigma_m(x) = \sum_{\ell=0}^{m} w_\ell(x)$ konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Spolu s vlastnostmi $(\text{ix})_\ell$, $(\text{x})_\ell$ pro všechna $\ell \in \mathbb{N}_0$ a $(\text{xi})_\ell$ pro všechna $\ell \in \mathbb{N}$ dostáváme pomocí Lemmatu 5 (Konvergence) požadované.

Tudíž nutně existuje přirozené číslo $m^* > n$ splňující

$$\lambda_d\left(\left\{x \in \bigcup \mathcal{Q}_n;\ s_{m^*-1}(x) \notin \partial_{\varepsilon_{k(n)}} U\right\}\right) \leq 2^{-k(n)-1},$$

což je spor s (4.9) a ve výsledku tedy spor s $k(m) = k(n)$ pro všechna $m > n$.

Pro posloupnost $\big(k(n)\big)$ tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} k(n) = \infty. \tag{4.10}$$

Navíc spolu s definicí $k(n)$ – viz ověření podmínky $(\text{xvi})_n$ – dostáváme, že posloupnost $\big(k(n)\big)$ zobrazuje $\mathbb{N}_0$ na $\mathbb{N}_0$.

3) Závěr konstrukce pro pevné $z \in \mathbb{Z}^d$: Díky vlastnosti $(\mathrm{xii})_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a odhadům pro konstanty c_n je řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergentní a řada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ dokonce stejnoměrně konvergentní, takže můžeme definovat funkci $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem

$$u(x) := -\sum_{n=0}^{\infty} c_n + \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^d.$$

Připomeňme značení $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \nabla u_n(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, a ověřme podmínky Lemmatu 7 (Diferencovatelnost) pro posloupnost funkcí $(u_n)_{n=0}^{\infty}$:

- Podmínka $(\mathrm{a})_{\mathrm{D}}$: Z rovnosti $s_n(x) - \sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} w_k$ a z podmínky $(\mathrm{viii})_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, vyplývá pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ konvergence posloupnosti $(s_n(x) - \sigma_n(x))$. Díky vlastnostem $(\mathrm{ix})_n$, $(\mathrm{x})_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a $(\mathrm{xi})_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jsou splněny i zbývající podmínky Lemmatu 5 (Konvergence), tudíž posloupnost (s_n) je bodově konvergentní.

- Podmínka $(\mathrm{b})_{\mathrm{D}}$: Mimo množinu C je funkce ∇u_n (jakož i funkce u_n) nulová. Stačí tedy dokázat, že posloupnost (∇u_n) konverguje stejnoměrně na C. Složením limit (4.1) a (4.10) dostáváme, že

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{k(n)} = 0.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ vyplývá z vlastností $(\mathrm{viii})_n$ a $(\mathrm{xv})_n$ nerovnost

$$\|\nabla u_n\|_\infty \le \|v_n\|_\infty + \|w_n\|_\infty < \varepsilon_{k(n)-1}/4 + 2^{-n},$$

ze které je již stejnoměrná konvergence (∇u_n) zřejmá.

- Podmínka $(\mathrm{c})_{\mathrm{D}}$ plyne přímo z $(\mathrm{xii})_n$, $n \in \mathbb{N}$.

- Podmínka $(\mathrm{d})_{\mathrm{D}}$ plyne přímo z $(\mathrm{xiii})_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Z Lemmatu 7 (Diferencovatelnost) tedy vyplývá, že funkce u je (všude) diferencovatelná a že funkce ∇u je bodovou limitou posloupnosti (s_n). Z vlastnosti $(\mathrm{ix})_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ navíc plyne, že $\nabla u(x) \in \overline{U}$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$.

Pro lepší přehlednost definujme ještě pomocnou posloupnost nezáporných celých čísel $(N_k)_{k=0}^{\infty}$. O posloupnosti $\big(k(n)\big)$ víme, že je nejen neklesající, ale navíc i na $\mathbb{N}_0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ tudíž existuje právě jedno $n \in \mathbb{N}_0$ splňující $k(n+1) > k(n)$ a zároveň $k(n) = k$; a právě pro toto n definujeme $N_k := n$. Platí tedy $k(N_\ell) = \ell$ pro každé $\ell \in \mathbb{N}_0$. Dále platí

$$\lim_{k\to\infty} N_k = \infty. \tag{4.11}$$

Podmínku $(\mathrm{xvi})_n$, $n \in \mathbb{N}$, nyní můžeme přeformulovat takto: Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\lambda_d\Big(\Big\{x \in \bigcup \mathcal{Q}_{N_k};\ s_{N_k}(x) \notin \partial_{\varepsilon_k} U\Big\}\Big) \le 2^{-k-1}. \tag{4.12}$$

Ukažme, že platí $(\nabla u)(F) \subset U$. Pro libovolné $x \in F$ je buď $x \in \mathbb{R}^d \setminus C$, a tedy $\nabla u(x) = 0 \in U$, nebo nalezneme nějaké $k \in \mathbb{N}$ (například nejmenší takové), pro které $x \in F_k \cap C$. Potom pro všechna $n > N_k$ je $\nabla u_n(x) = 0$ a z rovnosti $\nabla u(x) = s_{N_k}(x)$ a podmínky $(\mathrm{ix})_{N_k}$ vyplývá žádané.

Pro každé $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k \le \ell$, platí

$$\begin{aligned}\big\{x \in C \setminus F;\ s_{N_\ell}(x) \notin \partial_{\varepsilon_k} U\big\} &\subset \big\{x \in C \setminus F_\ell;\ s_{N_\ell}(x) \notin \partial_{\varepsilon_\ell} U\big\}\\ &\subset Z_{N_\ell} \cup \Big\{x \in \bigcup \mathcal{Q}_{N_\ell};\ s_{N_\ell}(x) \notin \partial_{\varepsilon_\ell} U\Big\},\end{aligned}$$

pročež s využitím $(\mathrm{ii})_{N_\ell}$ a (4.12) dostáváme

$$\lambda_d\big(\{x \in C \setminus F;\ s_{N_\ell}(x) \notin \partial_{\varepsilon_k} U\}\big) \le 2^{-\ell-1} + 2^{-\ell-1} = 2^{-\ell}.$$

Díky (4.11) platí $\lim_{\ell\to\infty} s_{N_\ell}(x) = \nabla u(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$, z čehož vyplývá inkluze

$$\big\{x \in C \setminus F;\ \nabla u(x) \notin \overline{\partial_{\varepsilon_k} U}\big\} \subset \bigcup_{\ell=k}^{\infty} \bigcap_{j=\ell}^{\infty} \big\{x \in C \setminus F;\ s_{N_j}(x) \notin \partial_{\varepsilon_k} U\big\}.$$

Posloupnost množin $\Big(\bigcap_{j=\ell}^{\infty} \big\{x \in C \setminus F;\ s_{N_j}(x) \notin \partial_{\varepsilon_k} U\big\}\Big)_{\ell=k}^{\infty}$ je rostoucí, tudíž pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}\lambda_d\left(\big\{x \in C \setminus F;\ \nabla u(x) \notin \overline{\partial_{\varepsilon_k} U}\big\}\right) &\le \lim_{\ell\to\infty} \lambda_d\left(\bigcap_{j=\ell}^{\infty} \big\{x \in C \setminus F;\ s_{N_j}(x) \notin \partial_{\varepsilon_k} U\big\}\right)\\ &\le \lim_{\ell\to\infty} \lambda_d\big(\{x \in C \setminus F;\ s_{N_\ell}(x) \notin \partial_{\varepsilon_k} U\}\big)\\ &\le \lim_{\ell\to\infty} 2^{-\ell} = 0.\end{aligned}$$

Limitním přechodem $k \to \infty$ dostáváme z rovnosti

$$\lambda_d\left(\big\{x \in C \setminus F;\ \nabla u(x) \notin \overline{\partial_{\varepsilon_k} U}\big\}\right) = 0$$

kýžené

$$\lambda_d\big(\{x \in C \setminus F;\ \nabla u(x) \notin \partial U\}\big) = 0.$$

4) Úplný závěr: Výše popsanou konstrukcí se nám podařilo pro pevné $z \in \mathbb{Z}^d$ zkonstruovat diferencovatelnou funkci $u^z \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (vraťme se nyní zpátky k plnému značení s indexem z, aby nedošlo k mýlce), pro niž je

$$u^z(x) = 0 \quad \text{a} \quad \nabla u^z(x) = 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}^d \setminus C^z \tag{4.13}$$

a která odpovídajícím způsobem splňuje požadavky dokazované věty, jmenovitě

$$\begin{aligned}&\nabla u^z(x) \in \overline{U} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^d,\\ &\nabla u^z(x) \in U \quad \text{pro všechna } x \in F,\\ &\nabla u^z(x) \in \partial U \quad \text{pro } \lambda_d\text{-skoro všechna } x \in C^z \setminus F,\end{aligned}$$

přičemž v prvních dvou bodech využíváme pro $x \in \mathbb{R}^d \setminus C^z$ toho, že množina U obsahuje počátek.

Definujme funkci $u \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem

$$u(x) := \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} u^z(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

přičemž korektnost definice vyplývá z disjunktnosti krychlí C^{z_1}, C^{z_2} pro $z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^d$, a z vlastnosti (4.13) funkcí u^z. Jelikož je systém krychlí $\{C^z;\ z \in \mathbb{Z}^d\}$ lokálně konečný, je – opět s použitím (4.13) – funkce u diferencovatelná a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí rovnost

$$\nabla u(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \nabla u^z(x).$$

Pro pořádek ještě dodejme, že ze σ-aditivity míry λ_d vyplývá $\nabla u(x) \in \partial U$ pro λ_d-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d \setminus F$.

Teď již nic nebrání konstatování, že funkce u je hledaným řešením. □

Uveďme ještě jednoduché zobecnění předchozí věty – množina U nemusí obsahovat počátek.

Věta 9. *Pro každé přirozené $d \geq 2$, pro každou neprázdnou otevřenou omezenou množinu $U \subset \mathbb{R}^d$ a pro každou množinu $F \subset \mathbb{R}^d$ typu F_σ existuje všude diferencovatelná funkce $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ taková, že*

$$\begin{aligned}
&\nabla u(x) \in \overline{U} \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}^d,\\
&\nabla u(x) \in U \text{ pro všechna } x \in F,\\
&\nabla u(x) \in \partial U \text{ pro } \lambda_d\text{-skoro všechna } x \in \mathbb{R}^d \setminus F.
\end{aligned}$$

Důkaz. Buď $\overline{x}$ libovolný bod množiny U. Aplikujme Větu 8 na otevřenou omezenou množinu $U' = \{x - \overline{x};\ x \in U\}$ obsahující počátek a na množinu F. Získáme funkci $\overline{u}$ s odpovídajími vlastnostmi.

Definujme pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ funkci $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem $u(x) = \overline{u}(x) + \langle x, \overline{x} \rangle$. Potom platí

$$\nabla u(x) = \nabla \overline{u}(x) + \overline{x}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

díky čemuž můžeme uzavřít, že funkce u splňuje všechny požadavky. □

Literatura

[1] Bruckner, Andrew M.: *Differentiation of real functions,* 2. vydání, CRM Monograph Series, svazek 5, American Mathematical Sociaty, Providence, Rhode Island, 1994. ISBN 0-8218-6990-6

[2] Buczolich, Zoltán: The n-dimensional gradient has the 1-dimensional Denjoy–Clarkson property, *Real Anal. Exchange* **18** (1992–93), s. 221–224.

[3] Buczolich, Zoltán: Solution to the gradient problem of C. E. Weil, *Rev. Mat. Iberoamericana* **21** (2005), s. 889–910.

[4] Clarkson, James A.: A property of derivatives, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), s. 124–125.

[5] Denjoy, Arnaud: Sur une proprieté des fonctions dérivées, *Enseignement Math.* **18** (1916), s. 320–328.

[6] Deville, Robert – Matheron, Étienne: Infinite games, Banach space geometry and the eikonal equation. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **95** (2007), s. 49–68.

[7] Federer, Herbert: *Geometric Measure Theory,* reprint vydání z roku 1969, Berlín: Springer, 1996. ISBN 3-540-60656-4

[8] Malý, Jan – Zelený, Miroslav: A note on Buczolich's solution of the Weil gradient problem: a construction based on an infinite game, *Acta Math. Hungar.* **113 (1-2)** (2006), s. 145–158.

[9] Weil, Clifford E. – Buczolich, Zoltán – Ceder, Jack: „1. query“, *Real Anal. Exchange* **16** (1990–91), s. 373.

[10] Zelený, Miroslav: The Denjoy–Clarkson property with respect to Hausdorff measures for the gradient mapping of functions of several variables, *Ann. Inst. Fourier* **58**, 2 (2008), s. 405–428