MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bc. Ján Pavlech

Delta metoda a její zobecnění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: doc. Ing. Marek Omelka, Ph.D.
Študijný program: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Predovšetkým by som chcel poďakovať vedúcemu tejto práce doc. Ing. Marekovi Omelkovi, Ph.D. za všetky užitočné a odborné rady, nápady a usmernenia, ktorými mi pomohol pri vytvorení tejto práce a v neposlednom rade aj za jeho čas, ktorý mi venoval pri vzájomných konzultáciách. Ďalej by som chcel poďakovať svojim rodičom za podporu a pomoc počas celého štúdia.

Názov práce: Delta metoda a její zobecnění

Autor: Bc. Ján Pavlech

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomové práce: doc. Ing. Marek Omelka, Ph.D., Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Abstrakt: Cieľom tejto práce sú rôzne zovšeobecnenia klasickej delta vety, ktorej výhoda spočíva v tom, že sa môžeme zvlášť zaoberať analytickými vlastnosťami príslušnej transformácie a nezávisle na tom môžeme skúmať asymptotické vlastnosti pôvodného odhadu. Nad euklidovskými priestormi zovšeobecňujeme delta vetu pre prípad nespojitých alebo nulových parciálnych derivácií. Nad všeobecnými normovanými lineárnymi priestormi sa najprv zaoberáme Hadamardovou deriváciou, pričom formulujeme a dokazujeme, za akých podmienok je ekvivalentná s Fréchetovou deriváciou. Funkcionálnu delta vetu demonštrujeme na známych výsledkoch pre výberové kvantily a mediánovú absolútnu odchýlku v prípade náhodného výberu spolu s vlastnými výsledkami na interkvartilové rozpätie, výberové kvantily pri AR(d) procesoch a nepoužiteľnosť funkcionálnej delta vety na momentové odhady. V poslednej časti rozoberáme Hadamardovu deriváciu copule a jej uplatnenie k odvodeniu asymptotického rozdelenia empirickej copule.

Kľúčové slová: Asymptotické rozdelenie, Delta veta, Hadamardova derivácia

Title: Delta method and its generalizations

Author: Bc. Ján Pavlech

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. Ing. Marek Omelka, Ph.D., Probability, Mathematical Statistics and Econometrics

Abstract: The goals of this thesis are various generalizations of the classical delta theorem, in which the advantage is that we can separately investigate the analytical properties of transformation of the estimate, and independently, we can deal with asymptotic properties of the original estimate. When working with Euclidean spaces, we generalize the delta theorem for the case that partial derivatives are not continuous or they are equal to zero. When working with general normed linear spaces, we first examine Hadamard-differentiability, while formulating and proving equivalence with Fréchet-differentiability, under proper assumptions. We demonstrate the functional delta theorem on known results for empirical quantiles and median absolute deviation in the case of a random sample, together with our own result for the interquartile range and empirical quantiles in the case of AR(d) sequence. We also show why the functional delta theorem is not usable for moment estimators. In the last part, we examine the Hadamard-differentiability of a copula functional and its application to the derivation of the asymptotic distribution of the empirical copula.

Keywords: Asymptotic distribution, Delta theorem, Hadamard differentiability

Obsah

Úvod

Klasická delta veta sa používa v situáciách, pokiaľ máme známe asymptotické rozdelenie pre nejaký odhad parametra a zaujíma nás jeho transformácia. Napríklad pre náhodný výber $X_1, \ldots, X_n$ z alternatívneho rozdelenia s parametrom p, máme centrálnu limitnú vetu

$$\sqrt{n}\,\left(\overline{X}_n - p\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}\Big(0,\, p(1-p)\Big).$$

Pokiaľ by nás zaujímali asymptotické vlastnosti rozptylu, teda transformácie parametra p funkciou $f(p) = p(1-p)$, tak klasická delta veta nám dáva výsledok

$$\sqrt{n}\,\left(\overline{X}_n(1-\overline{X}_n) - p(1-p)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} f'(p)\cdot \mathsf{N}\Big(0,\, p(1-p)\Big).$$

Pokiaľ by však príslušná derivácia $f'(p)$ bola nulová, tak delta veta implikuje, že asymptotické rozdelenie je degenerované v nule. Rovnako sa vo vyšších dimenziách obvykle predpokladá spojitosť parciálnych derivácií. Ako ukážeme v prvej časti tejto práce, delta veta sa dá zovšeobecniť aj na situáciu nespojitých, prípadne nulových parciálnych derivácií vo vyšších dimenziách.

Keďže využitie klasickej delta vety je limitované na euklidovské priestory, tak sa v druhej časti práce zameriame na zovšeobecnenie konvergencie v distribúcii v normovaných lineárnych priestoroch. Napríklad pre zistenie asymptotických vlastností transformácií empirickej distribučnej funkcie ako náhodného procesu na $\mathbb{R}$.

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\left[X_i \le x\right],\, x \in \mathbb{R},$$

Pre zovšeobecnenie delta vety je potrebná všeobecnejšia Hadamardova derivácia. Z toho dôvodu v druhej kapitole zavedieme potrebné pojmy a vety. Formulujeme a dokážeme vetu, ktorá za určitých podmienok dáva ekvivalenciu Hadamardovej a bežnejšej Fréchetovej derivácie.

V tretej kapitole ukážeme niekoľko príkladov na použitie všeobecnejšej delta vety s podrobnejšími dôkazmi, konkrétne použitie na výberový kvantil a mediánovú absolútnu odchýlku pri náhodnom výbere, ale taktiež vlastné príklady jej použitia na interkvartilové rozpätie pri náhodnom výbere, výberové kvantily pri α-mixingu a proti-príklady pri strednej hodnote.

V poslednej kapitole sa zameriame na podrobné rozpracovanie dôkazu Hadamardovej derivácie copulí a požitie derivácie v delta vete za všeobecných predpokladov na spojitosť parciálnych derivácií copulí.

1. Základná delta veta nad reálnymi číslami

V tejto kapitole sa oboznámime s klasickou delta vetou pre zobrazenia nad euklidovskými priestormi a jej priamymi zovšeobecneniami. Pre nás budú slúžiť ako počiatočný bod, od ktorého prejdeme k všeobecnejším štruktúram. V Sekcii 1.1 zavedieme značenie symbolov o_P a O_P, ktoré zjednodušia zapisovanie a úpravy výrazov, predovšetkým zbytkových členov. Taktiež uvedieme znenie klasickej delta vety. V Sekcii 1.2 ukážeme, že táto delta veta platí aj za slabších predpokladov. V Sekcii 1.3 dokážeme zovšeobecnenie delta vety pri nulových deriváciách až do určitého rádu.

V celej kapitole značíme konštantné a náhodné vektory hrubším fontom a ich zložky normálnym fontom s príslušným indexom. Napríklad vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$ označujeme ako $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T$.

1.1 Klasická delta veta

Najskôr uvedieme značenie symbolov o_P a O_P vo všeobecnej podobe. Takto ich budeme používať v tejto a v nasledujúcich kapitolách. Jedná sa o analógiu symbolov o a O z matematickej analýzy.

Definícia 1. *(o_P, O_P)*
Nech $\{\boldsymbol{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť náhodných vektorov v $\mathbb{R}^k$ a $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných konštánt. Potom píšeme

- $\boldsymbol{T}_n = o_P\left(\frac{1}{r_n}\right)$, *ak* $(r_n \boldsymbol{T}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mathbf{0}_k$,
- $\boldsymbol{T}_n = O_P\left(\frac{1}{r_n}\right)$, *ak*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists K < \infty : \ \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{P}\left(r_n ||\boldsymbol{T}_n|| > K\right) < \epsilon,$$

kde $||\cdot||$ značí euklidovskú normu.

Kalkulus pre počítanie so symbolmi o_P a O_P je obdobný ako so symbolmi o a O (viď. Lemma A.14 v Apendixe).

Ďalej uvádzame Jacobiho maticu u zobrazení z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^m$, pre ktoré existujú parciálne derivácie. Budeme ju používať pri zápise asymptotických rozdelení, pomocou maticového násobenia sa tak vyhneme komplikovaným výrazom.

Nech $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ má všetky parciálne derivácie v $\boldsymbol{\mu}$, potom

$$\mathbb{D}_g(\boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(\boldsymbol{\mu}) \\ \vdots \\ \nabla g_m(\boldsymbol{\mu}) \end{pmatrix}$$

je $m \times k$ Jacobiho matica.

Veta 1. *(Klasická delta veta)*
Nech

$$r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) = O_P(1), \text{ pre } 0 < r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

kde $\boldsymbol{T}_n$ *sú* k*-rozmerné náhodné vektory a* $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$*. Ďalej nech* $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ *má spojité parciálne derivácie na okolí* $\boldsymbol{\mu}$*. Potom platí*

$$r_n\Big(g(\boldsymbol{T}_n) - g(\boldsymbol{\mu})\Big) - \mathbb{D}_g(\boldsymbol{\mu})\, r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) = o_P(1). \tag{1.1}$$

Pokiaľ navyše $r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \boldsymbol{Z}$*, kde* $\boldsymbol{Z}$ *je* k*-rozmerný náhodný vektor, tak*

$$r_n\Big(g(\boldsymbol{T}_n) - g(\boldsymbol{\mu})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathbb{D}_g(\boldsymbol{\mu})\, \boldsymbol{Z}.$$

Dôkaz tejto vety neuvádzame, pretože ju dokážeme vo všeobecnejšom znení v Sekcii 1.2. Výsledok (1.1) je v skutočnosti asymptotická lineárna aproximácia nového odhadu, užitočnosť nelineárnych (kvadratických, kubických atď.) aproximácií diskutujeme v Sekcii 1.3.

Obvyklý prípad asymptotického rozdelenia dáva centrálna limitná veta, kde $r_n = \sqrt{n}$ a $\boldsymbol{T}_n = \overline{\boldsymbol{X}}_n$ je výberový priemer. V takom prípade platí

$$\sqrt{n}(\overline{\boldsymbol{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}_k(\boldsymbol{0}_k,\Sigma).$$

1.2 Zoslabenie predpokladov u klasickej delta vety

V praxi sa obvykle používa verzia delta vety s predpokladom spojitých parciálnych derivácií. Ukážeme, že veta platí aj za slabších predpokladov. Konkrétne nahradíme predpoklad spojitých parciálnych derivácií predpokladom existencie totálneho diferenciálu (viď. Definícia A.31 v Apendixe) pre každú zložku zobrazenia. Majme $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, pokiaľ existuje totálny diferenciál v $\boldsymbol{x}_0$, budeme ho zapisovať ako

$$L_g(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{t}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j} \cdot t_j, \;\; \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^k.$$

Reprezentácia pomocou parciálnych derivácií plynie z vlastností totálneho diferenciálu (viď. Lemma A.32). Postačujúcou podmienkou pre existenciu totálneho diferenciálu je existencia spojitých parciálnych derivácií (viď. Lemma A.33).

Veta 2. *(Zovšeobecnenie viacrozmernej delta vety)*
Nech $r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) = O_P(1)$*,* $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$*,* $r_n > 0$*, kde* $\boldsymbol{T}_n$ *sú* k*-rozmerné náhodné vektory a* $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$*. Ďalej nech* $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$*,* $g(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x}))^\mathsf{T}$*, kde* $g_i(\boldsymbol{x})$*,* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *sú reálne funkcie s totálnymi diferenciálmi* $L_{g_i}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{t})$ *v* $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\mu}$*.*

Potom platí

$$r_n\Big(g(\boldsymbol{T}_n) - g(\boldsymbol{\mu})\Big) - \mathbb{D}_g(\boldsymbol{\mu})\, r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) = o_P(1). \tag{1.2}$$

Pokiaľ navyše $r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \boldsymbol{Z}$*, kde* $\boldsymbol{Z}$ *je* k*-rozmerný náhodný vektor, tak*

$$r_n\Big(g(\boldsymbol{T}_n) - g(\boldsymbol{\mu})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathbb{D}_g(\boldsymbol{\mu})\, \boldsymbol{Z}. \tag{1.3}$$

Dôkaz. Vzťah (1.2) ukážeme po zložkách, pretože z konvergencie v pravdepodobnosti po zložkách plynie konvergencia v pravdepodobnosti celého vektora. Zvoľme $i \in \{1,\ldots,m\}$, chceme ukázať, že

$$r_n\Big(g_i(\boldsymbol{T}_n) - g_i(\boldsymbol{\mu})\Big) - \nabla g_i(\boldsymbol{\mu})^\mathsf{T} r_n\left(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}\right) = o_P(1). \tag{1.4}$$

Pre tento účel definujme pomocnú funkciu

$$h_i(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{g_i(\boldsymbol{x}) - g_i(\boldsymbol{\mu}) - L_{g_i}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}||}, & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\mu}, \\ 0, & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu}. \end{cases}$$

Z definície totálneho diferenciálu (viď. Definícia A.31) je

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\mu}} h_i(\boldsymbol{x}) = 0 = h_i(\boldsymbol{\mu}),$$

funkcia h_i je teda spojitá v $\boldsymbol{\mu}$.

Rozpíšeme prvý člen výrazu (1.4):

$$\begin{aligned} r_n\Big(g_i(\boldsymbol{T}_n) - g_i(\boldsymbol{\mu})\Big) &= r_n h_i(\boldsymbol{T}_n)||\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}|| + r_n L_{g_i}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) \\ &=: \boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{B}_n, \end{aligned} \tag{1.5}$$

kde $\boldsymbol{A}_n = r_n h_i(\boldsymbol{T}_n)||\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}||$ a $\boldsymbol{B}_n = r_n L_{g_i}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu})$. Rozoberme postupne členy $\boldsymbol{A}_n$ a $\boldsymbol{B}_n$.

Keďže $r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) = O_P(1)$, tak $\boldsymbol{T}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \boldsymbol{\mu}$ (viď. Lemma A.2 v Apendixe) a následne z vety o spojitom zobrazení (viď. Veta A.13)

$$h_i(\boldsymbol{T}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} h_i(\boldsymbol{\mu}) = 0,$$

respektíve $h_i(\boldsymbol{T}_n) = o_P(1)$. Z Lemmatu A.1 pre $m = 1$ máme, že $r_n \left\|\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}\right\| = O_P(1)$.

Spojením $h_i(\boldsymbol{T}_n) = o_P(1)$, $r_n \left\|\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}\right\| = O_P(1)$ a aritmetiky o_P a O_P (viď. Lemma A.14, bod (ii)) získavame, že

$$\boldsymbol{A}_n = h_i(\boldsymbol{T}_n) r_n \left\|\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}\right\| = o_P(1)O_P(1) = o_P(1).$$

Rozpíšme člen $\boldsymbol{B}_n$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_n = r_n L_{g_i}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) = r_n \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g_i(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_j} \cdot (T_{n,j} - \mu_j) \\ = \nabla g_i(\boldsymbol{\mu}) r_n \left(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}\right). \end{aligned}$$

Dosadením výsledkov pre $\boldsymbol{A}_n$ a $\boldsymbol{B}_n$ do výrazu (1.5) získame výraz

$$r_n\Big(g_i(\boldsymbol{T}_n) - g_i(\boldsymbol{\mu})\Big) = o_P(1) + \nabla g_i(\boldsymbol{\mu}) r_n \left(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}\right),$$

ktorý je ekvivalentný s výrazom (1.4). Z toho plynie, že platí konvergencia v pravdepodobnosti po zložkách a teda aj celého vektora. Tým je dokázané (1.2).

Konvergencia v distribúcii (1.3) plynie z (1.2) a použitím Cramér-Slutského vety.

$\square$

Vo väčšine prípadov sa predpokladajú funkcie, ktoré majú spojité parciálne derivácie. Príkladom funkcie s totálnym diferenciálom, ale bez spojitých parciálnych derivácií v počiatku je $(x^2+y^2)\cos(1/\sqrt{x^2+y^2})$. Takéto funkcie nie sú veľmi užitočné v bežnej štatistike, preto sa veta obvykle formuluje za predpokladu spojitých parciálnych derivácií.

Táto a nasledujúce vety v prvej kapitole platia pre pre funkcie g, ktoré sú definované len na nejakom otvorenom okolí $\boldsymbol{\mu}$. V takom prípade je nutné dbať na to, aby bola ľavá strana rovnice (1.3) dobre definovaná. Keďže vieme, že $\boldsymbol{T}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \boldsymbol{\mu}$, tak je to s pravdepodobnosťou idúcou k jednej.

1.3 Delta vety pri nulových deriváciách

Pokiaľ by boli všetky parciálne derivácie v predchádzajúcich vetách nulové, tak by asymptotické rozdelenie bolo degenerované v nule, teda

$$r_n\Big(g(\boldsymbol{T}_n) - g(\boldsymbol{\mu})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mathbf{0}.$$

V princípe to znamená, že $g(\boldsymbol{T}_n)$ konverguje v pravdepodobnosti k $g(\boldsymbol{\mu})$ rádovo rýchlejšie než r_n k nekonečnu.

Aby sme získali nedegenerované asymptotické zobrazenie, pridáme predpoklad, že existuje $m-$tá parciálna derivácia, ktorá už je nenulová. Výsledok pre jednorozmerné zobrazenie, teda z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, možno nájsť v Serfling (2009) strana 118. Uvádzame ju v trochu odlišnom znení a s podrobnejším dôkazom.

Veta 3. *(Zovšeobecnenie jednorozmernej delta vety)*
Nech $r_n(T_n - \mu) = O_P(1)$, $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, $r_n > 0$, kde T_n sú náhodné veličiny a $\mu \in \mathbb{R}$. Ďalej nech $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zobrazenie, ktoré je m-krát diferencovateľné v μ, kde $m \geq 1$. Pričom $g^{(m)}(\mu) \neq 0$ a $g^{(j)}(\mu) = 0$ pre $j < m$. Potom

$$r_n^m\, m!\Big(g(T_n) - g(\mu)\Big) - \Big(r_n(T_n - \mu)\Big)^m \cdot g^{(m)}(\mu) = o_P(1). \tag{1.6}$$

Pokiaľ navyše $r_n(T_n - \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$, kde Z je náhodná veličina, tak

$$r_n^m\, m!\,\frac{g(T_n) - g(\mu)}{g^{(m)}(\mu)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} (Z)^m\,. \tag{1.7}$$

Dôkaz. Definujme funkciu

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(\mu)}{\frac{1}{m!}(x-\mu)^m} - g^{(m)}(\mu), & x \neq \mu, \\ 0, & x = \mu. \end{cases}$$

Keďže g má konečnú m-tú deriváciu v μ, tak platí na jeho okolí Peanov tvar zvyšku (viď. Veta A.30):

$$g(x) - g(\mu) = \sum_{k=1}^{m} \frac{g^{(k)}(\mu)}{k!}(x-\mu)^k + o(|x-\mu|^m),\;\; x \to \mu.$$

Potom

$$\lim_{x\to\mu} h(x) = \frac{g(x)-g(\mu)}{\frac{1}{m!}(x-\mu)^m} - g^{(m)}(\mu)$$

$$= \lim_{x\to\mu} \frac{\sum_{k=1}^{m} \frac{g^{(k)}(\mu)}{k!}(x-\mu)^k}{\frac{1}{m!}(x-\mu)^m} + \frac{o(|x-\mu|^m)}{\frac{1}{m!}(x-\mu)^m} - g^{(m)}(\mu)$$

$$= \lim_{x\to\mu} \frac{\frac{g^{(m)}(\mu)}{m!}(x-\mu)^m}{\frac{1}{m!}(x-\mu)^m} - g^{(m)}(\mu)$$

$$= g^{(m)}(\mu) - g^{(m)}(\mu) = 0,$$

kde v druhej rovnosti sme využili to, že $g^{(k)}(\mu) = 0$, pre $k < m$ a definície $o(|x-\mu|^m)$.

Ukázali sme, že h je spojitá funkcia v μ. Keďže $r_n(T_n - \mu) = O_P(1)$, tak $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu$ (viď. Lemma A.2) a vďaka vete o spojitom zobrazení (viď. Veta A.13 v Apendixe) platí

$$h(T_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} h(\mu) = 0, \text{ resp. } h(T_n) = o_P(1). \tag{1.8}$$

Z $r_n(T_n - \mu) = O_P(1)$ a Lemmatu A.1 pre $k = 1$ plynie

$$r_n^m (T_n - \mu)^m = O_P(1). \tag{1.9}$$

Následným použitím vlastností o_P a O_P (viď. Lemma A.14, bod (ii)) a predošlých výsledkov (1.9) a (1.8) môžeme písať

$$h(T_n) r_n^m (T_n - \mu)^m = O_P(1) o_P(1) = o_P(1).$$

Z čoho už získavame (1.6), pretože

$$r_n^m\, m! \Big(g(T_n) - g(\mu)\Big) - r_n^m (T_n - \mu)^m \cdot g^{(m)}(\mu) = h(T_n) r_n^m (T_n - \mu)^m = o_P(1).$$

Výsledok pre konvergenciu v distribúcii (1.7) potom plynie z vety o spojitom zobrazení, vzťahu (1.6) a následnom použití Cramér-Slutského vety.

□

Predpoklad $g^{(m)}(\mu) \neq 0$ v predchádzajúcej vete by sme mohli vynechať, ale opäť by sme dostali asymptotické rozdelenie degenerované v nule.

Príklad 1. Nech $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výber z alternatívneho rozdelenia s parametrom 1/2. Potom vďaka centrálnej limitnej vete (viď. Veta A.18) platí

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - 1/2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}(0{,}1/4).$$

Funkcia g definovaná ako $g(x) = x(1-x)$, je nekonečne veľakrát diferencovateľná. Keďže $g^{(1)}(x) = 1 - 2x$ a $g^{(1)}(1/2) = 0$, klasická delta veta nám dáva iba degenerované asymptotické rozdelenie:

$$\sqrt{n}\left(g(\overline{X}_n) - 1/4\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}(0{,}0),$$

(rozdelenie na pravej strane je rovné nule s pravdepodobnosťou rovnou 1). Ale môžeme použiť druhú deriváciu, pretože $g^{(2)}(1/2) = -2$. V tomto prípade $r_n = \sqrt{n}$, predpoklady Vety 3 sú splnené a platí

$$-n\Big(\overline{X}_n(1-\overline{X}_n) - 1/4\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\mathsf{N}(0,1/4))^2 = \frac{1}{4}(\mathsf{N}(0,1))^2.$$

Po úprave získavame

$$-4n\Big(\overline{X}_n(1-\overline{X}_n) - 1/4\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \chi^2_1.$$

△

Rovnako ako pre jednorozmernú verziu nás zaujíma aj situácia, keď sú parciálne derivácie prvého rádu nulové. Kvôli prehľadnosti sa obmedzíme len na zobrazenie z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}$.

Veta 4. *(Zovšeobecnenie viacrozmernej delta vety pri nulovej derivácii)*
Nech $r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) = O_P(1)$, $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, $r_n > 0$, kde $\boldsymbol{T}_n$ sú k-rozmerné náhodné vektory a $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$. Ďalej nech $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je reálne zobrazenie so spojitými parciálnymi deriváciami rádu $m \in \mathbb{N}$ v okolí $\boldsymbol{\mu}$, pričom všetky parciálne derivácie rádu menšieho ako m sú nulové v $\boldsymbol{\mu}$ a aspoň jedna parciálna derivácia rádu m je nenulová v $\boldsymbol{\mu}$. Potom

$$r_n\Big(g(\boldsymbol{T}_n) - g(\boldsymbol{\mu})\Big) - h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}\Big(r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu})\Big) = o_P(1), \tag{1.10}$$

kde zobrazenie $h_m^{g,\boldsymbol{\mu}} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je definované ako:

$$h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{i_m=1}^{k}\frac{\partial^m g(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}\prod_{j=1}^{m} y_{i_j}.$$

Pokiaľ navyše $r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \boldsymbol{Z}$, kde $\boldsymbol{Z} = (Z_1,\ldots,Z_k)^\mathsf{T}$ je k-rozmerný náhodný vektor, tak

$$r_n^m\Big(g(\boldsymbol{T}_n) - g(\boldsymbol{\mu})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{i_m=1}^{k}\frac{\partial^m g(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}\prod_{j=1}^{m} Z_{i_j}. \tag{1.11}$$

Všimnime si, že pravú stranu výrazu (1.11) môžeme zapísať aj ako $h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{Z})$.

Dôkaz. Dôkaz rozdelíme na dva kroky, v ktorých postupne rozoberieme členy výrazu (1.10).

1. Úprava funkcie $h_m^{g,\mu}$
Najprv rozpíšme druhý člen výrazu (1.11):

$$h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}\Big(r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu})\Big) = h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) \cdot r_n^m.$$

Pravá strana tohoto výrazu bez člena r_n^m je v skutočnosti m-tý člen Taylorovho polynómu dosadený v $\boldsymbol{T}_n$, respektíve

$$h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{i_m=1}^{k}\frac{\partial^m g(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}\prod_{j=1}^{m}(x_{i_j} - \mu_{i_j}).$$

Taktiež sa jedná sa o $m-$tú deriváciu, ktorá sa zvyčajne značí ako $g^{(m)}(\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu},\ldots,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$ (viď. značenie v Definícii A.29 v Apendixe). Zvoľme pomocnú funkciu

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{g(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{\mu})-h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}||^m}, & \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{\mu}, \\ 0, & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}. \end{cases}$$

Táto funkcia je spojitá v $\boldsymbol{\mu}$, pretože pri rozpísaní

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\mu}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\mu}} \frac{g(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{\mu})-h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}||^m}. \tag{1.12}$$

Limitu (1.12) môžeme prepísať pomocou Taylorovho rozvoja, pretože všetky členy okrem prvého a posledného členu rozvoja sú nulové. Následne použijeme Peanov tvar zbytku (viď. Veta A.30):

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\mu}} \frac{g(\boldsymbol{x})-T_m^{g,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{x})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}||^m} = 0 = f(\boldsymbol{x}).$$

Funkcia f je preto spojitá v $\boldsymbol{\mu}$.

2. Úprava prvého členu (1.10)
Keďže $r_n(\boldsymbol{T}_n-\boldsymbol{\mu}) = O_P(1)$, tak $\boldsymbol{T}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \boldsymbol{\mu}$ (viď. Lemma A.2) a následne z vety o spojitom zobrazení (viď. Veta A.13) $f(\boldsymbol{T}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} f(\boldsymbol{\mu}) = 0$.

Analogicky, ako v dôkaze Vety 2, prepíšeme prvý člen rovnice (1.10) pomocou funkcie f na dva sčítance, ktoré označme porade $\boldsymbol{A}_n$ a $\boldsymbol{B}_n$:

$$\begin{aligned} r_n^m\Big(g(\boldsymbol{T}_n)-g(\boldsymbol{\mu})\Big) &= r_n^m f(\boldsymbol{T}_n)||\boldsymbol{T}_n-\boldsymbol{\mu}||^m + r_n^m h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) \\ &=: \boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{B}_n. \end{aligned}$$

Prvý člen

$$\boldsymbol{A}_n = r_n^m f(\boldsymbol{T}_n)||\boldsymbol{T}_n-\boldsymbol{\mu}||^m \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0. \tag{1.13}$$

Pretože $f(\boldsymbol{T}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$, respektíve $f(\boldsymbol{T}_n) = o_P(1)$ a podľa Lemmatu A.1 platí $r_n^m||\boldsymbol{T}_n-\boldsymbol{\mu}||^m = O_P(1)$, tak spojením týchto dvoch výsledkov a vlastností o_P a O_P (viď. Lemma A.14, bod (ii)) získavame (1.13).

Pre druhý člen uplatníme úpravu funkcie $h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}$

$$\boldsymbol{B}_n = r_n^m h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{T}_n-\boldsymbol{\mu}) = h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}\Big(r_n(\boldsymbol{T}_n-\boldsymbol{\mu})\Big). \tag{1.14}$$

Spojením výsledkov (1.13), (1.14) získavame (1.10):

$$\begin{aligned} r_n^m\Big(g(\boldsymbol{T}_n)-g(\boldsymbol{\mu})\Big) - h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}\Big(r_n(\boldsymbol{T}_n-\boldsymbol{\mu})\Big) &= \boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{B}_n - \boldsymbol{B}_n \\ &= \boldsymbol{A}_n = o_P(1). \end{aligned}$$

Pre ukázanie konvergencie v distribúcii (1.11) si treba uvedomiť, že $h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}$ je polynóm a preto spojitá funkcia. Z vety o spojitej transformácii (viď. Veta A.13) platí

$$h_m^{g,\boldsymbol{\mu}}\Big(r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{i_m=1}^{k}\frac{\partial^m g(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_m}}\prod_{j=1}^{m} Z_{i_j}. \tag{1.15}$$

Spojením (1.10), (1.15) a použitím Cramér-Slutského vety (viď. Veta A.19) získavame (1.11).

□

Pre použitie práve dokázanej vety si môžeme predstaviť situáciu, v ktorej máme sadu k produktov, ktorých cena je normovaná na jedna. Respektíve, stredná hodnota je jedna u každého produktu. Ceny týchto produktov na sebe nezávisia. Nás zaujíma odhad toho, či niektorá z týchto cien *uteká* k nule alebo nekonečnu. K dispozícii máme n sád produktov spolu s cenami, za ktoré sa predal každý produkt. U každého produktu spočítame výberový priemer $\overline{X}_{n,i}$, pre $i = 1,\dots,k$. Ako testovú štatistiku použijeme

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\overline{X}_{n,i} + \frac{1}{\overline{X}_{n,i}}\right],$$

ktorá by za nulovej hypotézy mala byť blízka hodnote $2k$. V príklade nižšie odvodzujeme jej asymptotické rozdelenie.

Príklad 2. Nech $\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_n$ sú nezávislé rovnako rozdelené k-rozmerné náhodné vektory, ktorých zložky sú navzájom nekorelované, so strednou hodnotou 1 a rozptylom 1. Potom vďaka centrálnej limitnej vete (viď. Veta A.18) platí

$$\sqrt{n}\left(\overline{\mathbf{X}}_n - \mathbf{1}_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathbf{Z} \sim \mathsf{N}_k(\mathbf{0}_k,\mathbb{I}_k).$$

Zaujíma nás, aké bude mať asymptotické vlastnosti transformácia výberového priemeru funkciou

$$g(x_1,x_2,\dots,x_k) = \sum_{i=1}^{k}\left[x_i + \frac{1}{x_i}\right].$$

Použitie klasickej delta vety nedáva veľa informácií, pretože pre všetky $i = 1,\dots,k$ platí

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,x_2,\dots,x_k) = 1 - \frac{1}{x_i^2}, \text{ a po dosadení } \frac{\partial g}{\partial x_i}(1,1,\dots,1) = 0.$$

Preto potrebujeme druhé parciálne derivácie

$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_i}(x_1,x_2,\dots,x_k) = \frac{2}{x_i^3}, \text{ a } \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,x_2,\dots,x_k) = 0, \quad i \neq j$$

a po dosadení

$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x_i}(1,1,\dots,1) = 2, \text{ a } \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(1,1,\dots,1) = 0, \quad i \neq j.$$

Pre $m = 2$, $r_n = \sqrt{n}$ sú predpoklady Vety 4 splnené. Získavame

$$n\left(g(\overline{\mathbf{X}}_n) - g(\mathbf{1}_k)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{k}\sum_{i_2=1}^{k}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(1,1,\ldots,1)Z_{i_1}Z_{i_2}.$$

Po úprave oboch strán

$$n\left(\sum_{i=1}^{k}\left[\overline{X}_{n,i} + \frac{1}{\overline{X}_{n,i}}\right] - 2k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \sim \chi_k^2.$$

$\triangle$

2. Hadamardova derivácia

Od reálnych čísel sa posunieme k ľubovoľným normovaným lineárnym priestorom. Našim cieľom je delta veta, ktorá bude platiť pre zobrazenia $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{E}$, kde $\mathbb{D}$ a $\mathbb{E}$ sú normované lineárne priestory.

V úvode kapitoly pripomenieme pojem normovaného lineárneho priestoru spolu s ilustratívnymi príkladmi. Ďalej zavedieme zobrazenia medzi normovanými lineárnymi priestormi spolu s užitočnými vlastnosťami. Tie následne použijeme pri definovaní Hadamardovej derivácie. Na záver kapitoly uvedieme zovšeobecnenie konvergencie v distribúcii, v pravdepodobnosti a uvedieme delta vetu pre zobrazenia medzi normovanými lineárnymi priestormi spolu s dôkazom.

V nasledujúcich dvoch kapitolách pracujeme s prvkami rôznych normovaných lineárnych priestorov. Preto kvôli prehľadnosti ďalej nepoužívame hrubší font pri značení vektorov.

2.1 Normované lineárne priestory

Pod pojmom normovaného lineárneho priestoru rozumieme reálny vektorový priestor s vhodne zvolenou normou (podrobnejšie zavedenie možno nájsť v knihe Diferenciální počet II. Jarník (1984) kapitola VI. strana 225). Najzákladnejšie príklady sú nasledovné:

Príklad 3. Reálne vektory $\mathbb{R}^k$ s euklidovskou normou

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2},\ x \in \mathbb{R}^k.$$

△

Príklad 4. Priestor obmedzených funkcií $\ell^\infty(T)$ na množine T. Keďže sa jedná o obmedzené funkcie, ako intuitívna norma sa ponúka suprémová norma:

$$\|h\| = \sup_{t\in T} |h(t)|,\ \text{pre } h \in \ell^\infty(T). \tag{2.1}$$

△

Príklad 5. Priestor spojitých funkcií $C[T]$, so suprémovou normou, kde $T \subset \mathbb{R}$ je uzavretý interval, prípadne súčin uzavretých intervalov $T \subset \mathbb{R}^d$.

Jedná sa o podpriestor obmedzených funkcií $\ell^\infty(T)$, $h : T \to \mathbb{R}$, pretože spojitosť na uzavretom intervale zaručuje obmedzenosť. Na tomto podpriestore je definovaná suprémová norma (2.1). △

Poznámka. Niekedy sa používa značenie $C(a,b)$, alebo $C(T)$ pre množinu spojitých funkcií na intervale (a,b), prípadne na všeobecnej množine T. Tieto funkcie môžu byť aj neobmedzené a príslušné suprémové normy by neboli konečné, preto budeme obvykle uvažovať uzavreté intervaly.

Príklad 6. Priestor càdlàg funkcií D[T] so suprémovou normou, kde $T \subset \mathbb{R}$ je interval, prípadne súčin intervalov $T \subset \mathbb{R}^d$.

Opäť sa jedná o podpriestor obmedzených funkcií $\ell^\infty(T)$, $h : T \to \mathbb{R}$, ktoré sú navyše sprava spojité a majú limitu zľava. Na tomto priestore sa niekedy definuje takzvaná Skorochodova norma (prípadne Skorochodova metrika, viď. Billingsley, 1968, strana 111), my si ale vystačíme s intuitívnejšou suprémovou normou (2.1), no za cenu zovšeobecnenia konvergencie v distribúcii (viď. Definícia 8).

$\triangle$

Príklad 7. Súčinový normovaný lineárny priestor značíme $\mathbb{D} \times \mathbb{E}$, kde $\mathbb{D}$ a $\mathbb{E}$ sú normované lineárne priestory. Na súčinovom priestore uvažujeme normu

$$\|x \times y\| = \sqrt{\|x\|_{\mathbb{D}}^2 + \|y\|_{\mathbb{E}}^2}, \text{ pre } (x, y) \in \mathbb{D} \times \mathbb{E}.$$

$\triangle$

Pomocou noriem môžeme definovať konvergenciu na normovaných lineárnych priestoroch. Okrem konvergencie postupnosti prvkov indexovaných prirodzenými číslami $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ zavedieme aj konvergenciu prvkov indexovaných intervalom $(0,\epsilon)$, teda $\{x_t, t \in (0,\epsilon)\}$, kde ϵ je nejaké kladné číslo.

Definícia 2. *Nech $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{D}$ prípadne $\{x_t, t \in (0,\epsilon)\} \subset \mathbb{D}$ je postupnosť a $\mathbb{D}$ je normovaný lineárny priestor. Povieme, že táto postupnosť **konverguje** k $x \in \mathbb{D}$, pokiaľ*

$$\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \textit{ prípadne } \|x_t - x\| \xrightarrow[t\to 0+]{} 0 \textit{ v } \mathbb{R}.$$

Takto definovanú konvergenciu budeme zjednodušene značiť

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x, \textit{ prípadne } x_t \xrightarrow[t\to 0+]{} x.$$

Poznámka. Často budeme prechádzať medzi týmito dvoma konvergencimi. Môžeme si všimnúť, že pokiaľ $x_t \xrightarrow[t\to 0+]{} x$, potom pre ľubovoľnú kladnú postupnosť $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ je $x_n := x_{t_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Naopak, pokiaľ pre každú kladnú postupnosť $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ platí $x_{t_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, tak nutne $x_t \xrightarrow[t\to 0+]{} x$.

2.1.1 Zobrazenia v normovaných lineárnych priestoroch

Pre zobrazenia medzi normovanými lineárnymi priestormi zadefinujeme niekoľko vlastností, ktoré budeme požadovať od príslušnej derivácie.

Definícia 3. *Nech ϕ je zobrazenie z $\mathbb{D}$ do $\mathbb{E}$. Povieme, že zobrazenie ϕ je **lineárne** pokiaľ pre $\forall\, a,b \in \mathbb{D}$ a ľubovoľné $c_1,c_2 \in \mathbb{R}$ platí $\phi(c_1 a + c_2 b) = c_1\phi(a) + c_2\phi(b)$.*

Definícia 4. *Nech ϕ je zobrazenie z $\mathbb{D}$ do $\mathbb{E}$. Povieme, že ϕ je **spojité** v $x \in \mathbb{D}$, pokiaľ $\phi(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(x)$ v $\mathbb{E}$, pre každé $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ v $\mathbb{D}$.*

V prípade konečne dimenzionálneho priestoru, napríklad $\mathbb{R}^k$, môžeme ľubovoľné lineárne zobrazenie reprezentovať maticou a je automaticky spojité. Všeobecne ale linearita neimplikuje spojitosť. To budeme vidieť v Príkladoch 13 a 14.

Pre rozšírenie delta metódy potrebujeme vhodne definovanú deriváciu pre zobrazenia na všeobecných normovaných lineárnych priestoroch. Ako správna sa zdá byť práve Hadamardova derivácia popísaná nižšie.

Definícia 5. *(Hadamardova derivácia)*
Nech $\mathbb{D}$ a $\mathbb{E}$ sú normované lineárne priestory. Povieme, že zobrazenie $\phi : \mathbb{D}_\phi \subset \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ má Hadamardovu deriváciu v $\theta \in \mathbb{D}_\phi$ tangentne (tangentially) k $\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$, ak existuje spojité lineárne zobrazenie $\phi'_\theta : \mathbb{D}_0 \to \mathbb{E}$ splňujúce

$$\frac{\phi(\theta + th_t) - \phi(\theta)}{t} \xrightarrow[t \to 0+]{} \phi'_\theta(h), \tag{2.2}$$

pre každú konvergentnú $h_t \xrightarrow[t \to 0+]{} h$, kde $h \in \mathbb{D}_0$, pričom $\theta + th_t \in \mathbb{D}_\phi$ pre každé dostatočne malé t.

Poznámka. Hadamardova derivácia sa niekedy definuje pre postupnosti h_n a t_n (napríklad van der Vaart a Wellner, 1996, strana 372). To je ekvivalentná formulácia v zmysle poznámky za Definíciou 2.

Vhodnosť Hadamardovej derivácie uvidíme pri zavedení a dôkaze delta vety na normovaných lineárnych priestoroch v Sekcii 2.2.2. Špeciálnym prípadom sú zobrazenia medzi euklidovskými priestormi $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, kde je Hadamardova derivácia, za určitých podmienok, ekvivalentná s Fréchetovou deriváciou definovanou nižšie.

Definícia 6. *(Fréchetova derivácia)*
Nech $\mathbb{D}$ a $\mathbb{E}$ sú normované lineárne priestory. Povieme, že zobrazenie $\phi : \mathbb{D}_\phi \subset \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ má Fréchetovu deriváciu v $\theta \in \mathbb{D}_\phi$, ak existuje spojité lineárne zobrazenie $\phi'_\theta : \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ splňujúce

$$\frac{\|\phi(\theta + a_t) - \phi(\theta) - \phi'_\theta(a_t)\|}{\|a_t\|} \xrightarrow[t \to 0+]{} 0, \tag{2.3}$$

kde $a_t \xrightarrow[t \to 0+]{} 0$ (nulový prvok priestoru $\mathbb{D}$), pričom $\theta + a_t \in \mathbb{D}_\phi$ pre každé dostatočne malé t.

Pokiaľ má funkcia $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ v nejakom bode $x \in \mathbb{D}$ Fréchetovu deriváciu, potom má zrejme aj Hadamardovu deriváciu a rovnajú sa. Stačí zvoliť $a_t = th_t$ v značení Definícii 5 a 6 a to bez ohľadu na to, o aké normované lineárne priestory sa jedná.

Ukážeme, že za predpokladu určitej *kompaktnosti* platí aj opačná implikácia. Tá sa v literatúre často uvádza bez uvažovania tangentnej množiny $\mathbb{D}_0$.

Veta 5. *Nech $\phi : \mathbb{D}_\phi \subset \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ má Hadamardovu deriváciu v $\theta \in \mathbb{D}_\phi$ tangentne k $\mathbb{D}_0$, pričom*

$$\exists\, c > 0 \text{ také, že } M := \{x \in \mathbb{D}; \|x\| = c\} \subset \mathbb{D}_0 \text{ je kompaktná množina.} \tag{2.4}$$

Potom ϕ má v θ aj Fréchetovu deriváciu a rovná sa Hadamardovej derivácii.

Dôkaz. Hadamardova derivácia ϕ'_θ je spojitá a lineárna. Zostáva ukázať (2.3). Pre spor predpokladajme, že existuje $a_t \xrightarrow[t \to 0+]{} 0$, $a_t \neq 0$ ale

$$\frac{\|\phi(\theta + a_t) - \phi(\theta) - \phi'_\theta(a_t)\|}{\|a_t\|} \not\xrightarrow[t \to 0+]{} 0.$$

Potom existuje $\epsilon > 0$ a postupnosť $a_{t_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ spĺňajúca

$$\frac{\|\phi(\theta + a_{t_n}) - \phi(\theta) - \phi'_\theta(a_{t_n})\|}{\|a_{t_n}\|} > \epsilon. \tag{2.5}$$

Zvoľme

$$t'_n := \frac{\|a_{t_n}\|}{c} \text{ a } h_n := c\,\frac{a_{t_n}}{\|a_{t_n}\|}.$$

Pri tejto voľbe platí, že $t'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ a zároveň $h_n \in M$. Keďže M je kompaktná množina, existuje podpostupnosť $h_{n_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} h \in M \subset \mathbb{D}_0$.

Rozpíšme ľavú stranu limity (2.3) z definície Fréchetovej derivácie

$$\frac{\phi(\theta + a_{t_{n_l}}) - \phi(\theta) - \phi'_\theta(a_{n_l})}{\left\|a_{t_{n_l}}\right\|}. \tag{2.6}$$

Zlomok rozšírime konštantou c

$$\frac{1}{c}\,\frac{\phi(\theta + a_{t_{n_l}}) - \phi(\theta) - \phi'_\theta(a_{n_l})}{\frac{\|a_{t_{n_l}}\|}{c}}$$

a pomocou linearity ϕ'_θ prevedieme $a_{t_{n_l}}$ na $h_{t_{n_l}}$

$$\frac{1}{c}\left[\frac{\phi(\theta + t'_{n_l}h_{n_l}) - \phi(\theta)}{t'_{n_l}} - \phi'_\theta(h_{n_l})\right].$$

Pripočítame a odpočítame člen $\phi'_\theta(h)$

$$\frac{1}{c}\left[\frac{\phi(\theta + t'_{n_l}h_{n_l}) - \phi(\theta)}{t'_{n_l}} - \phi'_\theta(h)\right] + \frac{1}{c}\Big[\phi'_\theta(h) - \phi'_\theta(h_{n_l})\Big]. \tag{2.7}$$

Vďaka Hadamardovej derivácii konverguje prvý člen (2.7) k nule. Druhý člen (2.7) konverguje rovnako k nule vďaka spojitosti ϕ'_θ. V každom prípade výraz (2.7) (ekvivalentne výraz (2.6)) konverguje k nule, ale to je spor s (2.5).

$\square$

Predpoklad (2.4) je splnený napríklad na euklidovských priestoroch $\mathbb{R}^k$, pokiaľ $\mathbb{D}_0$ obsahuje otvorené okolie počiatku. Pretože v takom prípade musí existovať c splňujúce (2.4).

Dôsledok 6. *Zobrazenie $\phi : \mathbb{D}_\phi \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ má Hadamardovu deriváciu v $\theta \in \mathbb{D}_\phi$ tangentne k $\mathbb{D}_0 = \mathbb{R}^k$ práve vtedy, keď ϕ má v θ Fréchetovu deriváciu. V takom prípade sa rovnajú.*

Z tohto dôvodu sa na $\mathbb{R}^k$ derivácie obvykle nerozlišujú. Ekvivalencia Hadamardovej a Fréchetovej derivácie za predpokladu $\mathbb{D}_0 = \mathbb{D}$ platí aj na iných normovaných lineárnych priestoroch a to práve vtedy, ak je jednotková guľa kompaktná, ekvivalentne, ak má $\mathbb{D}$ konečnú dimenziu (viď. van der Vaart a Wellner, 1996, strana 373). Je to práve predpoklad kompaktnosti, ktorý sme využili v dôkaze Vety 5. Pokiaľ by predpoklad (2.4) nebol splnený, tak môže nastať situácia, kedy existuje Hadamardova derivácia, ale neexistuje Fréchetova derivácia.

Príklad 8. Majme množinu $G = \Big\{(t, -\, t^3)^T; t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\Big\} \subset \mathbb{R}^2$, jedná sa o graf funkcie $f(x) = -x^3$ bez počiatku. Definujme funkciu $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ predpisom

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in G, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Nech tangentná množina je $\mathbb{D}_0 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Potom má funkcia ϕ Hadamardovu deriváciu v počiatku tangentne k $\mathbb{D}_0$, ale nemá Fréchetovu deriváciu v počiatku.

Dôkaz. Ukážeme, že Hadamardova derivácia v počiatku, tangentne k $\mathbb{D}_0$, je rovná nulovému zobrazeniu $\phi'_{(0,0)^T}(x) = 0$. Pokiaľ by existovala aj Fréchetova derivácia, museli by sa rovnať. Príslušná limita v definícii Fréchetovej derivácie (viď. Definícia 6) ale nebude konvergovať k nule.

Zvoľme $h \in \mathbb{D}_0$ a majme $h_t \xrightarrow[t \to 0+]{} h$. Nutne existuje t_0 dostatočne malé, také že pre každé $t < t_0$ už $h_t \in \mathbb{D}_0$, pretože $\mathbb{D}_0$ je otvorená množina. Taktiež $th_t \in \mathbb{D}_0$, pretože vynásobením t nezmeníme znamienka prvkov h_t. V každom prípade h_t, $th_t \notin G$, pretože G obsahuje len vektory s rôznym znamienkom v prvej a druhej zložke. Z toho získavame, že Hadamardova derivácia je skutočne $\phi'_{(0,0)}(x) = 0$, pretože

$$\frac{\phi((0{,}0)^T + th_t) - \phi((0{,}0)^T)}{t} = \frac{0}{t} = 0.$$

No nie je to Fréchetova derivácia, pretože pre voľbu $a_t = (t, -\, t^3)^T$

$$\frac{\Big\|\phi((0{,}0)^T + a_t) - \phi((0{,}0)^T) - 0\Big\|}{\|a_t\|} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + t^6}} \xrightarrow[t \to 0+]{} \infty.$$

△

Užitočná vlastnosť Hadamardovej derivácie je retiazkové pravidlo. To nám umožní spočítať Hadamardovu deriváciu komplikovaných zobrazení pomocou rozloženia na viacero jednoduchších zobrazení. Vetu možno nájsť vo van der Vaart (2000) ako Vetu 20.9. Uvádzame ju aj s priamočiarym dôkazom.

Veta 7. *(Retiazkové pravidlo)*
Nech $\phi : \mathbb{D}_\phi \subset \mathbb{D} \to \mathbb{E}_\psi$ a $\psi : \mathbb{E}_\psi \subset \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, kde $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$ a $\mathbb{F}$ sú normované lineárne priestory. Ďalej nech ϕ má Hadamardovu deriváciu v $\theta \in \mathbb{D}$ tangentne k $\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$ a ψ má Hadamardovu deriváciu v bode $\phi(\theta)$ tangentne k $\phi'(\mathbb{D}_0)$. Potom $\psi(\phi) : \mathbb{D}_\phi \to \mathbb{F}$ má Hadamardovu deriváciu v θ tangentne k $\mathbb{D}_0$ a rovná sa $\psi'_{\phi(\theta)}\big(\phi'_\theta(\cdot)\big)$.

Dôkaz. Majme ľubovoľnú $h_t \xrightarrow[t \to 0+]{} h \in \mathbb{D}_0$ v $\mathbb{D}$ a označme

$$g_t = \frac{\phi(\theta + th_t) - \phi(\theta)}{t}.$$

Keďže ϕ má Hadamardovu deriváciu v θ, tak $g_t \xrightarrow[t \to 0+]{} \phi'_\theta(h) \in \phi'(\mathbb{D}_0)$, potom dosadením a použitím Hadamardovej derivácie ψ získavame

$$\frac{\psi\left[\phi(\theta + th_t)\right] - \psi[\phi(\theta)]}{t} = \frac{\psi[\phi(\theta) + tg_t)] - \psi[\phi(\theta)]}{t} \xrightarrow[t \to 0+]{} \psi'_{\phi(\theta)}[\phi'_\theta(h)].$$

□

2.2 Konvergencie a delta veta

V tejto kapitole uvedieme všeobecnejšie konvergencie v pravdepodobnosti a distribúcii, spolu so všeobecnejšou delta vetou.

2.2.1 Konvergencia v distribúcii v normovaných lineárnych priestoroch

Vo všetkých normovaných lineárnych priestoroch $\mathbb{D}$ budeme uvažovať Borelovskú σ-algebru generovanú otvorenými množinami, pričom príslušná metrika ρ je indukovaná normou

$$\rho(x,y) = \|x - y\|\,,\ x,y \in \mathbb{D}.$$

Pri reálnych náhodných veličinách a vektoroch sa konvergencia v distribúcii obvykle definuje pomocou distribučných funkcií. Avšak, vo všeobecnom normovanom lineárnom priestore $\mathbb{D}$ nemusí byť distribučná funkcia definovaná. Vďaka Portmanteauovemu lemmatu (viď. Lemma A.20 v Apendixe) vieme, že konvergencia v distribúcii pre náhodné vektory je ekvivalentná s vlastnosťou

$$\mathsf{E}\ f(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathsf{E}\ f(\boldsymbol{X}), \tag{2.8}$$

pre každú spojitú obmedzenú funkciu $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$. Táto vlastnosť dáva zmysel na ľubovoľnom normovanom lineárnom priestore a pre X_n, X merateľné zobrazenia $X_n : \Omega_n \to \mathbb{D}$, $X : \Omega \to \mathbb{D}$. Z tohoto dôvodu definujeme konvergenciu na normovaných lineárnych priestoroch výrazom (2.8), (viď. Definícia A.15).

Ukazuje sa, že predpoklad na Borelovskú merateľnosť X_n, v prípade že $X_n = X_n(t), t \in T$ je náhodný proces a T je nespočetná, je príliš silný (viď. Príklad 9 nižšie). Preto pre účely tejto práce potrebujeme definovať konvergenciu v distribúcii a v pravdepodobnosti pre akékoľvek zobrazenia $X_n : \Omega_n \to \mathbb{D}$.

Príklad 9. Nech $F_n(x)$ je empirická distribučná funkcia definovaná pre náhodný výber $X_1,X_2,\dots,X_n$ ako

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\left[X_i \le x\right], x \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Je známe (viď. Pollard, 1984, strana 65), že $F_n : \Omega \to D[\mathbb{R}]$ nemusí byť merateľná vzhľadom k suprémovej norme.

Pre konkrétny protipríklad, nech $X_1,X_2,\dots,X_n$ je náhodný výber z $R[0,1]$ (rovnomerného rozdelenia na intervale $[0,1]$). Zvoľme ľubovoľnú množinu $A \subset [0,1]$ a k nej definujme množinu G_A v $D[\mathbb{R}]$ ako

$$G_A = \{f \in D[\mathbb{R}],\ f \text{ má skok v } A\}.$$

Potom množina G_A je otvorená.

Dôkaz. Zvoľme $f \in G_A$ a k nemu príslušné $a_f \in A$ také, že f má skok v a_f o veľkosti δ. Ďalej položme $\epsilon = \frac{\delta}{3}$. Potom otvorené okolie f o veľkosti ϵ (značíme $B_f(\epsilon) = \{g \in D[\mathbb{R}]; \|f - g\| < \epsilon\}$) leží v G_A. Pretože pre každú funkciu $g \in B_f(\epsilon)$, má g nutne skok v a_f a teda $g \in G_A$. Ak by g nemala skok v a_f, tak $g(a) = g(a-)$ a zároveň

$$\begin{aligned} \delta &= |f(a-) - f(a)| = |f(a-) - g(a-) + g(a) - f(a)| \\ &\leq 2\,\|f-g\| \underset{g \in B_f(\epsilon)}{\leq} 2\epsilon = \frac{2\delta}{3}, \end{aligned}$$

čo je zrejmý spor.

□

Otvorená množina G_A je Borelovsky merateľná, ale ukážeme, že jej vzor pri zobrazení F_n nemusí byť merateľný. Konkrétne zvoľme $n = 1$, potom platí rovnosť javov

$$\{F_1 \in G_A\} = \{X_1 \in A\}.$$

Ale A bola volená ľubovoľne a nie všetky množiny $\{X_1 \in A\}$ pre $X_1 \sim R[0{,}1]$ sú merateľné, pretože

$$\mathrm{P}(X_1 \in A) = \int_A 1 dx = \lambda(A),$$

kde λ značí Lebesgueovu mieru. Teda stačí zvoliť Lebesgueovsky nemerateľné množiny na [0,1]. Pre tieto množiny A je vzor merateľnej množiny G_A pri zobrazení F_1 nemerateľný. Z toho plynie, že F_1 nie je merateľné zobrazenie. △

Za účelom zovšeobecnenia konvergencie v distribúcii, definovanej cez $\mathsf{E}\, f_n(X)$ v (2.8), zovšeobecníme $\mathsf{E}\, f(X)$ kde $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$. Najprv zavedieme definíciu vonkajšej strednej hodnoty.

Definícia 7. *Nech $X : \Omega \to \mathbb{D}$ je ľubovoľné zobrazenie, a funkcia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$. Potom **vonkajšiu strednú hodnotu** $f(X)$ definujeme ako*

$$\mathsf{E}^*\, f(X) = \inf\{\mathsf{E}\, U; \textit{kde } U : \Omega \to \mathbb{R},\ \textit{je merateľné, } U \geq f(X)\ \textit{a}\ \mathsf{E}\, U\ \textit{existuje}\}.$$

Pomocou vonkajšej strednej hodnoty môžeme definovať konvergenciu v distribúcii pre ľubovoľné zobrazenia (viď. van der Vaart, 2000, strana 285). Všimnime si, že stále predpokladáme merateľnosť limitného zobrazenia.

Definícia 8. *Nech $X_n : \Omega_n \to \mathbb{D}$ sú ľubovoľné zobrazenia, $X : \Omega \to \mathbb{D}$ je merateľné zobrazenie. Pokiaľ pre každú obmedzenú spojitú funkciu $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ platí*

$$\mathsf{E}^*\, f(X_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathsf{E}\, f(X).$$

*Potom hovoríme, že X_n **konverguje v distribúcii** (prípadne **konverguje vo vonkajšej distribúcii**) k X, značíme*

$$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{d^*} X.$$

Taktiež si môžeme všimnúť, že ak sú zobrazenia X_n merateľné, tak $\mathsf{E}^*\, f(X_n) = \mathsf{E}\, f(X_n)$ a jedná sa o klasickú konvergenciu v distribúcii (viď. Definícia A.15 v Apendixe). Pokiaľ navyše $\mathbb{D} = \mathbb{R}^k$, potom vďaka Portmanteauovemu lemmatu (viď. Lemma A.20 v Apendixe) je táto definícia ekvivalentná so slabou konvergenciou distribučných funkcií.

Obdobne sa dá zovšeobecniť konvergencia v pravdepodobnosti pomocou vonkajšej pravdepodobnosti, ktorú budeme používať pri asymptotických zápisoch.

Definícia 9. *Nech $B \subset \Omega$ je ľubovoľná množina. Jej* ***vonkajšiu pravdepodobnosť*** *definujeme ako*

$$\mathrm{P}^*(B) = \inf\{\mathrm{P}(A); A \supset B, A \text{ je merateľná}\}.$$

Definícia 10. *Nech $X_n : \Omega_n \to \mathbb{D}$ sú ľubovoľné zobrazenia, $X : \Omega \to \mathbb{D}$ je merateľné zobrazenie. Pokiaľ pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ platí*

$$\mathrm{P}^*(\|X_n - X\| > \epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

potom hovoríme, že X_n ***konverguje v pravdepodobnosti*** *(prípadne* ***konverguje vo vonkajšej pravdepodobnosti*** *z anglického "outer probability") k X, značíme*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P^*} X.$$

Opäť si môžeme všimnúť, že pre merateľné množiny A platí $\mathrm{P}^*(A) = \mathrm{P}(A)$ a pre merateľné X_n odpovedá konvergencia bežnej konvergencii v pravdepodobnosti. Taktiež môžeme intuitívne definovať symboly o_{P^*} a O_{P^*} použitím vonkajšej pravdepodobnosti namiesto pravdepodobnosti v Definícii 1.

Medzi konvergenciami v P^* a d^* ku konštante platí podobný vzťah ako medzi klasickou konvergenciou v pravdepodobnosti a distribúcii (viď. Veta A.16 v Apendixe).

2.2.2 Delta veta

Nasledujúca veta je prevzatá z van der Vaart (2000) strana 297. V dôkaze pridávame podrobnejší komentár jednotlivých krokov.

Veta 8. *(Delta veta pre normované lineárne priestory) Nech $\mathbb{D}$ a $\mathbb{E}$ sú normované lineárne priestory. Majme zobrazenie $\phi : \mathbb{D}_\phi \subset \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ Hadamardovsky diferencovateľné v θ tangentne k $\mathbb{D}_0$. Zobrazenia $X_n : \Omega_n \to \mathbb{D}_\phi$ splňujú $r_n(X_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} X$, kde $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ a merateľné zobrazenie X má hodnoty v $\mathbb{D}_0$. Potom platí*

$$r_n\Big(\phi(X_n) - \phi(\theta)\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} \phi'_\theta(X). \tag{2.10}$$

Pokiaľ je navyše ϕ'_θ definované a spojité na celom $\mathbb{D}$, potom

$$r_n\Big(\phi(X_n) - \phi(\theta)\Big) - \phi'_\theta\Big(r_n(X_n - \theta)\Big) = o_{P^*}(1). \tag{2.11}$$

Dôkaz. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ definujme funkcie

$$g_n(h) = r_n\left(\phi(\theta + r_n^{-1}h) - \phi(\theta)\right)$$

na príslušných definičných oboroch $\mathbb{D}_n = \{h : \theta + r_n^{-1}h \in \mathbb{D}_\phi\}$. Podľa predpokladov je ϕ Hadamardovsky diferencovateľná v θ, preto

$$g_n(h_n) = \frac{\phi(\theta + \frac{1}{r_n}h_n) - \phi(\theta)}{\frac{1}{r_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi'_\theta(h), \text{ pre každé } h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} h \in \mathbb{D}_0.$$

Vďaka zovšeobecnenej vete o spojitom zobrazení (viď. Veta A.17 v Apendixe)

$$g_n\Big(r_n(X_n - \theta)\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} \phi'_\theta(X).$$

Tým získavame (2.10). Druhé tvrdenie vety (2.11) získame aplikovaním (2.10) na zobrazenie $\psi = (\phi, \phi'_\theta) : \mathbb{D} \to \mathbb{E} \times \mathbb{E}$. Toto zobrazenie má Hadamardovu deriváciu v bode θ a tá je rovná $(\phi'_\theta, \phi'_\theta)$, pretože prvá zložka zobrazenia ψ má deriváciu ϕ'_θ. Druhá zložka je podľa definície spojité lineárne zobrazenie, ktoré je samo sebe Hadamardovou deriváciou. Vďaka definícii normy na súčinovom priestore (viď. Príklad 7) platí, že z konvergencie po zložkách máme združenú konvergenciu a Hadamardova derivácia je zloženie Hadamardových derivácií po zložkách.

Podľa už dokázaného platí

$$r_n\Big(\psi(X_n) - \psi(\theta)\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} \Big(\phi'_\theta(X), \phi'_\theta(X)\Big).$$

Opäť použijeme zovšeobecnenú vetu o spojitom zobrazení, i keď len na jednu funkciu $g(x,y) = x - y$, no stále potrebujeme uvažovať zovšeobecnenú konvergenciu v distribúcii. Použitím definície g a linearity ϕ'_θ môžeme upraviť

$$\begin{aligned}
&r_n\Big(\phi(X_n) - \phi(\theta)\Big) - \phi'_\theta(r_n(X_n - \theta)) \\
&= g\left(r_n\Big(\psi(X_n) - \psi(\theta)\Big)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} g\Big(\phi'_\theta(X),\phi'_\theta(X)\Big) \\
&= \phi'_\theta(X) - \phi'_\theta(X) = 0.
\end{aligned}$$

Konvergencia v distribúcii ku konštante, konkrétne nulovému prvku priestoru $\mathbb{E}$, implikuje konvergenciu v pravdepodobnosti (viď. Veta A.16 v Apendixe). Z toho máme (2.11).

□

3. Použitia delta vety

Táto kapitola je zameraná na priame použitie analytických Hadamardovych derivácií a funkcionálnej delta vety. V prvej časti rozoberieme prípad výberových kvantilov pri náhodnom výbere a pri AR procesoch. Kapitola pokračuje aplikáciou na mediánovú absolútnu odchýlku a porovnanie s interkvartilovým rozpätím. Následne ukážeme, že použitie zovšeobecnenej delta vety na momenty nie je možné.

3.1 Výberové kvantily

Ako najčastejšia sa uvádza aplikácia delta vety na výberové kvantily. Výberový p-kvantil, pre $p \in (0,1)$, je definovaný ako ľubovoľná hodnota z intervalu

$$\Big[\sup\{t\colon F_n(t) < p\}, \sup\{t\colon F_n(t) \leq p\}\Big], \tag{3.1}$$

kde F_n je výberová distribučná funkcia, viď. výraz (2.9).

Obvykle sa uvažuje najmenšia hodnota z (3.1), na ktorú môžeme nahliadať ako na zobrazenie výberovej distribučnej funkcie do reálnych čísel

$$\phi(F_n) = \inf\{t : F_n(t) \geq p\}. \tag{3.2}$$

Zobrazenie ϕ je dobre definované na množine $\mathbb{D}_\phi \subset D[a,b]$ neklesajúcich càdlàg funkcií, pretože všetky distribučné funkcie sú neklesajúce a càdlàg. Pripomeňme, že priestor $D[a,b]$ so suprémovou normou bol definovaný v Príklade 6. V nasledujúcej vete ukážeme, že za ďalších predpokladov na hladkosť F, je funkcia ϕ Hadamardovsky diferencovateľná.

Veta 9. *Nech $p \in \mathbb{R}$, ďalej nech $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\phi : \mathbb{D}_\phi \to [a,b]$, kde $\mathbb{D}_\phi \subset D[a,b]$ je množina neklesajúcich càdlàg funkcií F, ktoré splňujú*

$$F(\phi(F)-) \leq p \leq F(\phi(F)). \tag{3.3}$$

Majme pevné zobrazenie $F \in \mathbb{D}_\phi$ diferencovateľné v bode $\xi_p = \phi(F) \in (a,b)$ také, že $F(\xi_p) = p$ a derivácia $F'(\xi_p) > 0$. Potom ϕ je Hadamardovsky diferencovateľná v F tangentne k $\mathbb{D}_0 \subset D[a,b]$, kde $\mathbb{D}_0$ sú všetky funkcie z $D[a,b]$ spojité v ξ_p. Za týchto predpokladov je Hadamardova derivácia rovná

$$\phi'_F(h) = -\frac{h(\xi_p)}{F'(\xi_p)}. \tag{3.4}$$

Môžeme si povšimnúť, že zobrazenie definované v (3.2) splňuje vlastnosť (3.3) pre všetky distribučné funkcie a $p \in (0,1)$.

Dôkaz. Majme $h_t \xrightarrow[t\to 0+]{} h$ v $D[a,b]$ teda $\|h_t - h\| \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$, kde funkcia h je spojitá v ξ_p, pretože $h \in \mathbb{D}_0$. Označme $\xi_{pt} = \phi(F + th_t)$, kde $F + th_t \in \mathbb{D}_\phi$ je neklesajúca càdlàg funkcia. Tento predpoklad sa v literatúre často vyslovene neuvádza, pretože implicitne plynie priamo z definície Hadamardovej derivácie (viď. Definícia 5, $\theta + th_t \in \mathbb{D}_\phi$).

Podľa definície ϕ máme

$$(F + th_t)(\xi_{pt} - \epsilon_t) \leq p \leq (F + th_t)(\xi_{pt}), \tag{3.5}$$

pre každé $\epsilon_t > 0$, $\xi_{pt} - \epsilon_t \in [a,b]$. Volíme $\epsilon_t = o(t)$, čo sa ukáže ako vhodná voľba neskôr.

Ďalej dôkaz rozdelíme do štyroch krokov. V prvom kroku ukážeme, že pre ľubovoľné ϵ a dostatočne malé t je $\xi_{pt} > \xi_p - \epsilon$. V druhom kroku obdobne ukážeme, že pre dostatočne malé t je $\xi_{pt} - \epsilon_t < \xi_p + \epsilon$. Z toho už plynie, že $\xi_{pt} \xrightarrow[t \to 0+]{} \xi_p$. V treťom kroku dokážeme rýchlosť konvergencie $\xi_{pt} - \xi_p = O(t)$. V poslednom, štvrtom kroku odvodíme (3.4).

1. Krok $\boldsymbol{\xi_{pt} > \xi_p - \epsilon}$

Keďže h_t konverguje rovnomerne k obmedzenej funkcii h

$$\|h_t - h\| = \sup_{\xi \in [a,b]} |h_t(\xi) - h(\xi)| \xrightarrow[t \to 0+]{} 0,$$

je nutne táto postupnosť rovnomerne obmedzená a preto platí

$$th_t(\xi) = O(t) \text{ pre každé } \xi \in [a,b]. \tag{3.6}$$

Podľa predpokladov je funkcia F striktne monotónna a spojitá v ξ_p, preto pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ je ostro ohraničená od p na intervale $(\xi_p - \epsilon, \xi_p + \epsilon)$. Respektíve

$$F(\xi_p - \epsilon) < p < F(\xi_p + \epsilon). \tag{3.7}$$

Z (3.5) a (3.7) získame, že ξ_{pt} budú pre dostatočne malé t väčšie ako $\xi_p - \epsilon$. Pre spor predpokladajme, že neexistuje dostatočne malé t_0 splňujúce $\forall t < t_0$ je $\xi_p - \epsilon < \xi_{pt}$. Zvoľme $t_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, pre ktoré $\xi_{pt_n} \leq \xi_p - \epsilon$. Potom z monotónie F plynie, že

$$F(\xi_{pt_n}) \leq F(\xi_p - \epsilon). \tag{3.8}$$

Postupnými úpravami, kde popis každého kroku je pod výrazom, získavame

$$\begin{aligned} p &\leq (F + t_n h_{t_n})(\xi_{pt_n}) = F(\xi_{pt_n}) + t_n h_{t_n}(\xi_{pt_n}) \\ &\leq F(\xi_p - \epsilon) + t_n h_{t_n}(\xi_{pt_n}) = F(\xi_p - \epsilon) + O(t_n), \end{aligned} \tag{3.9}$$

kde v prvej nerovnosti sme dosadili (3.5) a rozpísali funkcie, v druhej nerovnosti sme použili (3.8). V nasledujúcej rovnosti sme uplatnili symbol $O(t)$ na základe (3.6).

Keďže zároveň $O(t_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, tak z (3.9) získavame $p \leq F(\xi_p - \epsilon)$. To je ale zrejmý spor s (3.7).

2. Krok $\boldsymbol{\xi_{pt} - \epsilon_t < \xi_p + \epsilon}$

Rovnako bude pre dostatočne malé t platiť $\xi_{pt} - \epsilon_t < \xi_p + \epsilon$. To opäť ukážeme sporom. Predpokladajme, že máme postupnosť $t_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, pre ktorú $\xi_p + \epsilon \leq \xi_{pt_n} - \epsilon_{t_n}$. Z monotónie F máme

$$F(\xi_p + \epsilon) \leq F(\xi_{pt_n} - \epsilon_{t_n}). \tag{3.10}$$

Opäť postupnými úpravami, kde popis každého kroku je pod výrazom, dostaneme

$$p \geq (F + t_n h_{t_n})(\xi_{pt_n} - \epsilon_{t_n}) = F(\xi_{pt_n} - \epsilon_{t_n}) + t_n h_{t_n}(\xi_{pt_n} - \epsilon_{t_n})$$

$$\geq F(\xi_p + \epsilon) + t_n h_{t_n}(\xi_{pt_n} - \epsilon_{t_n}) = F(\xi_p + \epsilon) + O(t_n).$$

V prvej nerovnosti sme použili výraz (3.5), ktorý sme v nasledujúcej rovnosti rozpísali na zložky. Druhá nerovnosť plynie z (3.10). Na poslednom riadku sme uplatnili (3.6). Pokiaľ pošleme n do nekonečna, tak získavame nerovnosť $p \geq F(\xi_p + \epsilon)$, ktorá je v priamom spore s (3.7).

Zlúčením prvého kroku a druhého kroku bude pre dostatočne malé t nutne $\xi_p - \epsilon < \xi_{pt}$ a zároveň $\xi_{pt} - \epsilon_t < \xi_p + \epsilon$, teda spolu

$$\xi_{pt} \xrightarrow[t \to 0+]{} \xi_p.$$

3. Krok $\boldsymbol{\xi_{pt} - \xi_p = O(t)}$

Rovnosť ukážeme v dvoch podkrokoch. Najprv ukážeme, že $\boldsymbol{\xi_{pt} - \xi_p \leq O(t)}$ a analogicky $\boldsymbol{\xi_{pt} - \xi_p \geq O(t)}$.

(i) $\boldsymbol{\xi_{pt} - \xi_p \leq O(t)}$

Vďaka rovnomernej konvergencii h_t a spojitosti h platí tiež

$$h_t(\xi_{pt} - \epsilon_t) \xrightarrow[t \to 0+]{} h(\xi_p), \text{ a zároveň } h_t(\xi_{pt}) \xrightarrow[t \to 0+]{} h(\xi_p).$$

To môžeme zapísať nasledovne:

$$h_t(\xi_{pt} - \epsilon_t) = h(\xi_p) + o(1), \text{ a zároveň } h_t(\xi_{pt}) = h(\xi_p) + o(1),$$

z čoho plynie

$$th(\xi_{pt} - \epsilon_t) = th(\xi_p) + o(t), \text{ a zároveň } th(\xi_{pt}) = th(\xi_p) + o(t). \tag{3.11}$$

Pomocou Peanovho tvaru zbytku (respektíve zapísaním definície derivácie pomocou symbolu malé o) rozvedieme funkciu F

$$F(\xi_{pt} - \epsilon_t) = F(\xi_p) + F'(\xi_p)(\xi_{pt} - \epsilon_t - \xi_p) + o(\xi_{pt} - \epsilon_t - \xi_p), \tag{3.12}$$

a zároveň

$$F(\xi_{pt}) = F(\xi_p) + F'(\xi_p)(\xi_{pt} - \xi_p) + o(\xi_{pt} - \xi_p). \tag{3.13}$$

Postupne dosadíme (3.11) a (3.12) do (3.5)

$$F(\xi_p) = p \geq (F + th_t)(\xi_{pt} - \epsilon_t) = F(\xi_{pt} - \epsilon_t) + th_t(\xi_{pt} - \epsilon_t)$$

$$= F(\xi_p) + F'(\xi_p)(\xi_{pt} - \epsilon_t - \xi_p) + o(\xi_{pt} - \epsilon_t - \xi_p)$$

$$+ th(\xi_p) + o(t), \tag{3.14}$$

čím získame

$$F(\xi_p) \geq F(\xi_p) + F'(\xi_p)(\xi_{pt} - \epsilon_t - \xi_p) + o(\xi_{pt} - \epsilon_t - \xi_p) + th(\xi_p) + o(t). \tag{3.15}$$

Upravíme nerovnicu (3.15) na

$$(\xi_{pt} - \epsilon_t - \xi_p)(F'(\xi_p) + o(1)) \leq o(t) - th(\xi_p) = O(t),$$

pre dostatočne malé t je člen $F'(\xi_p) + o(1) > 0$, preto ho môžeme previesť na druhú stranu

$$(\xi_{pt} - \epsilon_t - \xi_p) \leq 1/(F'(\xi_p) + o(1)) \cdot O(t) = O(t).$$

Vieme, že $\epsilon_t = o(t)$, preto

$$(\xi_{pt} - \xi_p) \leq O(t). \tag{3.16}$$

(ii) $\boldsymbol{\xi_{pt} - \xi_p \geq O(t)}$

Dosadením (3.11) a (3.13) do (3.5) získame

$$\begin{aligned} F(\xi_p) = p \leq (F + th_t)(\xi_{pt}) &= F(\xi_{pt}) + th_t(\xi_{pt}) \\ &= F(\xi_p) + F'(\xi_p)(\xi_{pt} - \xi_p) + o(\xi_{pt} - \xi_p) \\ &\quad + th(\xi_p) + o(t). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Z (3.17) máme nerovnosť

$$F(\xi_p) \leq F(\xi_p) + F'(\xi_p)(\xi_{pt} - \xi_p) + o(\xi_{pt} - \xi_p) + th(\xi_p) + o(t),$$

z ktorej po drobných úpravách dostávame

$$-(\xi_{pt} - \xi_p)(F'(\xi_p) + o(1)) \leq o(t) + th(\xi_p) = O(t).$$

Opäť pre dostatočne malé t máme

$$-(\xi_{pt} - \xi_p) \leq 1/(F'(\xi_p) + o(1)) \cdot O(t) = O(t).$$

A teda

$$-(\xi_{pt} - \xi_p) \leq O(t). \tag{3.18}$$

Zlúčením týchto dvoch výsledkov (3.16) a (3.18) sme ukázali požadovaný vzťah

$$\xi_{pt} - \xi_p = O(t) \text{ a rovnako } (\xi_{pt} - \epsilon_t - \xi_p) = O(t). \tag{3.19}$$

4. Krok: Odvodenie $\boldsymbol{\phi'_F(h)}$

Vďaka (3.19) môžeme v nerovniciach (3.14) a (3.17) nahradiť $o(\xi_{pt} - \xi_p)$ a $o(\xi_{pt} - \epsilon_t - \xi_p)$ za $o(t)$. Jednoduchými úpravami a použitím $\epsilon_t = o(t)$ získame

$$-\frac{h(\xi_p)}{F'(\xi_p)} + o(1) \leq \frac{\xi_{pt} - \xi_p}{t} \leq -\frac{h(\xi_p)}{F'(\xi_p)} + o(1). \tag{3.20}$$

Pričom prostredný člen (3.20) je z definície rovný

$$\frac{\xi_{pt} - \xi_p}{t} = \frac{\phi(F + th_t) - \phi(F)}{t}.$$

□

Použitie na výberové kvantily

Vetu 9 môžeme takmer okamžite použiť na výberové kvantily. Respektíve pre $\phi(F) = \inf\{t : F(t) \geq p\}$.

Príklad 10. Majme náhodný výber z rozdelenia s distribučnou funkciou F, ktorá má kladnú deriváciu v $F^{-1}(p)$, respektíve v p-kvantile pre $0 < p < 1$. A nejaký odhad tejto distribučnej funkcie F_n splňujúci

$$\sqrt{n}(F_n - F) \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} \mathbb{G}_F, \text{ v } D[F^{-1}(p) - \epsilon, F^{-1}(p) + \epsilon], \tag{3.21}$$

pre nejaké $\epsilon > 0$ a $\mathbb{G}_F$ značí $F-$Brownov most (viď. Definície A.21, A.23 a A.24 v Apendixe). Jedná sa o zovšeobecnenú konvergenciu v distribúcii podľa Definície 8.

Pri náhodnom výbere platí (3.21) podľa Donskerovej vety (viď. Veta A.27) pre empirickú distribučnú funkciu a to dokonca na celom $D[\mathbb{R}]$, nie len na $D[F^{-1}(p) - \epsilon, F^{-1}(p) + \epsilon]$.

V značení Hadamardovej derivácie (viď. Definícia 5) a delta vety (viď. Veta 8) máme splnené predpoklady pre funkciu $\phi(H) = \inf\{t : H(t) \geq p\} =: H^{-1}(p)$, v hodnote $\theta = F$, tangentne k $\mathbb{D}_0$ (càdlàg funkcie spojité v $\xi_p = F^{-1}(p)$), postupnosť konštánt $r_n = \sqrt{n}$ a zobrazenia $X_n = F_n : \Omega_n \to \mathbb{D}_\phi$, s limitou $X = \mathbb{G}_F$.

Keďže $\mathbb{G}_F$ má spojité trajektórie, teda špeciálne aj v $F^{-1}(p)$, znamená to, že sú splnené všetky predpoklady a platí

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(F_n^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \phi'_F(\mathbb{G}_F) &= -\frac{\mathbb{G}_F(F^{-1}(p))}{F'(F^{-1}(p))} \\ &= -\frac{\mathbb{G}(p)}{F'(F^{-1}(p))} \sim \mathsf{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{F'(F^{-1}(p))^2}\right),\end{aligned} \tag{3.22}$$

kde $\mathbb{G}$ značí štandardný Brownov most.

Zobrazenie $\phi'_F : h \to \frac{-1}{F'(F^{-1}(p))} h(F^{-1}(p))$ priraďuje funkcii jej konkrétnu hodnotu $F^{-1}(p)$, až na násobok konštantou. Preto je lineárne, spojité a definované na celom $\mathbb{D}$. Z toho dôvodu máme nasledovnú reprezentáciu

$$\sqrt{n}\,[F_n^{-1}(p) - F^{-1}(p)] - \phi'_F\Big(\sqrt{n}(F_n - F)\Big) = o_P(1),$$

po úprave ϕ'_F získame

$$\sqrt{n}\,[F_n^{-1}(p) - F^{-1}(p)] + \frac{1}{F'(F^{-1}(p))}\sqrt{n}\,[F_n(F^{-1}(p)) - p] = o_P(1). \tag{3.23}$$

Keďže zobrazenia vo výrazoch (3.22) a (3.23) sú merateľné, tak konvergencie splývajú s klasickými konvergenciami v distribúcii a pravdepodobnosti, preto nemusíme písať d^* ani o_{P^*}.

Rovnicu (3.23) môžeme prepísať ako asymptotickú reprezentáciu výberového kvantilu pomocou nezávislých náhodných veličín

$$F_n^{-1}(p) - F^{-1}(p) = -\frac{1}{F'(F^{-1}(p))}\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\{X_i \leq F^{-1}(p)\} - p\right] + o_P\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{3.24}$$

Zápis (3.24) sa niekedy označuje ako Bahadurova reprezentácia. O zvyškovom člene $o_P(1/\sqrt{n})$ sa dá ukázať, že má vyšší rád konvergencie, avšak na to nestačí delta veta (viď. Jurečková a kol., 2012, štvrtá kapitola). $\triangle$

Výsledok pre náhodný výber sa dá ukázať aj jednoduchšími metódami, bez použitia delta vety. Avšak delta veta sa dá použiť v situácii, keď nemáme náhodný výber, ale iba odhad distribučnej funkcie F s odvodeným asymptotickým rozdelením. To ukážeme na konkrétnom príklade AR procesu, ktorý splňuje β a α-mixing (viď. Definície A.25 a A.26 v Apendixe).

Príklad 11. Majme kauzálny $AR(d)$ proces $X_n = a_1 X_{n-1} + \cdots + a_d X_{n-d} + \epsilon_n$, kde ϵ_n sú nezávislé s rovnakým spojitým rozdelením.

Potom tento proces splňuje β-mixing s exponenciálnym rádom, respektíve $\beta(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ exponenciálne rýchlo (viď. Fan a Yao, 2003, kapitola 2.6).

Medzi α-mixingom a β-mixingom platí nerovnosť $2\alpha(n) \leq \beta(n)$ (viď. Bradley, 2005, strana 109), z ktorej máme exponenciálny rád konvergencie aj pre α-mixing. Potom vďaka zovšeobecnenej Donskerovej vete (viď. Veta A.28 v Apendixe)

$$\sqrt{n}(F_n - F) \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} \mathbb{G}.$$

Limitný $\mathbb{G}$ je centrovaný Gaussovský proces s kovariačnou funkciou

$$\Gamma(s, s') = \mathsf{E}\ g_1(s)g_1(s') + \sum_{n\geq 2} \mathsf{E}\ g_1(s)g_n(s') + \sum_{n\geq 2} \mathsf{E}\ g_n(s)g_1(s'),$$

kde $g_n(s) := \mathbb{I}[X_n \leq s] - F(s)$ sú centrované identifikátory.

Ďalej nech distribučná funkcia F príslušná X_n má kladnú deriváciu v hodnote $F^{-1}(p)$, respektíve v p-kvantile. Tým sú splnené predpoklady Vety 9, preto

$$\sqrt{n}\Big(F_n^{-1}(p) - F^{-1}(p)\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \phi'_F(\mathbb{G}).$$

Po dosadení získavame

$$\phi'_F(\mathbb{G}) = -\frac{\mathbb{G}(F^{-1}(p))}{F'(F^{-1}(p))}.$$

Pre asymptotické rozdelenie potrebujeme spočítať rozptyl $\mathbb{G}(F^{-1}(p))$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{var}\Big[\mathbb{G}(F^{-1}(p))\Big] = \Gamma\Big[F^{-1}(p),\, F^{-1}(p)\Big] \\
&= \mathsf{E}\ g_1\left(F^{-1}(p)\right) g_1\left(F^{-1}(p)\right) + 2\sum_{n\geq 2} \mathsf{E}\ g_1\left(F^{-1}(p)\right) g_n\left(F^{-1}(p)\right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Teraz môžeme využiť centrovanosť g_n a upraviť (3.25) na

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}\Big[g_1\left(F^{-1}(p)\right), g_1\left(F^{-1}(p)\right)\Big] + 2\sum_{n\geq 2} \mathrm{cov}\Big[g_1\left(F^{-1}(p)\right), g_n\left(F^{-1}(p)\right)\Big] \\
&= \mathrm{var}\Big[\mathbb{I}[X_1 \leq F^{-1}(p)]\Big] + 2\sum_{n\geq 2} \mathrm{cov}\Big[\mathbb{I}[X_1 \leq F^{-1}(p)], \mathbb{I}[X_n \leq F^{-1}(p)]\Big] \\
&= p(1-p) + r_p,
\end{aligned}$$

kde člen r_p značí:

$$r_p = 2 \sum_{k \geq 2} \Big[\mathrm{P}\Big(X_1 \leq F^{-1}(p),\, X_k \leq F^{-1}(p) \Big) - p^2 \Big].$$

Asymptotické rozdelenie je podobné ako pri náhodnom výbere (viď. výraz (3.22)), ale závislosť sa prejaví v asymptotickom rozptyle v člene r_p, respektíve

$$\sqrt{n}(F_n^{-1}(p) - F^{-1}(p)) \xrightarrow[n \to \infty]{d} \mathsf{N}\left(0, \frac{p(1-p) + r_p}{(F'[F^{-1}(p)])^2}\right).$$

△

3.2 Mediánová absolútna odchýlka

Všeobecnejšia aplikácia zovšeobecnenej delta vety je výpočet asymptotického rozdelenia pre mediánovú absolútnu odchýlku (z anglického *median absolute deviation*) definovanú pre náhodný výber $X_1, \ldots, X_n$, ako

$$MAD_n = \operatorname*{med}_{1 \leq i \leq n} \left| X_i - \operatorname*{med}_{1 \leq j \leq n} X_j \right|.$$

Môžeme si všimnúť, že MAD_n je dvakrát aplikovaná kvantilová funkcia. Aby sme mohli použiť výsledky odvodené v Kapitole 3.1, potrebujeme použiť retiazkové pravidlo pre Hadamardovu deriváciu (viď. Veta 7). Mediánovú absolútnu odchýlku najprv rozložíme na tri zobrazenia

$$\phi = \phi_3[\phi_2(\phi_1)], \tag{3.26}$$

kde prvé je zobrazenie do mediánu a identita, teda

$$\phi_1(F) = (F^{-1}(1/2), F). \tag{3.27}$$

Druhé zobrazuje hodnotu θ a distribučnú funkciu F príslušnú náhodnej veličine X na distribučnú funkciu G príslušnú náhodnej veličine $|X - \theta|$ (viď. Lemma A.3 v Apendixe), teda

$$\phi_2(\theta, F) = F(\theta + \cdot) - F_-(\theta - \cdot) =: G, \tag{3.28}$$

kde $F_-(x)$ značí limitu zľava v premennej x, respektíve $\lim_{\delta \to 0+} F(x - \delta)$. A tretie zobrazenie je opäť do mediánu

$$\phi_3(G) = G^{-1}(1/2). \tag{3.29}$$

Veta 10. *Majme distribučnú funkciu F a konštanty m_F, m_G splňujúce*

$$F(m_F) = 1/2,$$

a súčasne

$$G(m_G) := F(m_F + m_G) - F_-(m_F - m_G) = 1/2.$$

Nech funkcia F má kladnú deriváciu v m_F. Ďalej nech je spojito diferencovateľná na okolí $m_F + m_G$ a $m_F - m_G$, pričom aspoň v jednom z bodov $m_F + m_G$ a $m_F -$

m_G má kladnú deriváciu. Potom zobrazenie $\phi : \mathbb{D}_\phi \subset D[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$ definované v (3.26), kde $\mathbb{D}_\phi$ sú distribučné funkcie, má Hadamardovu deriváciu v F tangentne k funkciám spojitým v m_F a na okolí $m_F + m_G$ a $m_F - m_G$. Derivácia $\phi'_F(h)$ má tvar

$$\frac{h(m_F)}{F'(m_F)} \frac{F'(m_F + m_G) - F'(m_F - m_G)}{F'(m_F + m_G) + F'(m_F - m_G)} - \frac{h(m_F + m_G) - h(m_F - m_G)}{F'(m_F + m_G) + F'(m_F - m_G)}. \tag{3.30}$$

Dôkaz. Vďaka spojitej diferencovateľnosti F na okolí $m_F + m_G$ a $m_F - m_G$ je G spojito diferencovateľná na okolí m_G. Taktiež vďaka predpokladu, že aspoň v jednom z bodov $m_F + m_G$ a $m_F - m_G$ má F kladnú deriváciu vyplýva, že G má kladnú deriváciu v m_G.

Hadamardovu deriváciu zobrazenia ϕ spočítame pomocou retiazkového pravidla (viď. Veta 7) použitého na zobrazenia ϕ_1, ϕ_2 a ϕ_3 definované pred vetou porade ako (3.27), (3.28) a (3.29).

Zobrazenie $\boldsymbol{\phi_1}$ (viď. (3.27))
Máme $\phi_1 : D[\mathbb{R}] \to \mathbb{R} \times D[\mathbb{R}]$, ktoré má dve zložky, ale vďaka zavedeniu normy v súčinovom normovanom lineárnom priestore (viď. Príklad 7) stačí, aby sme spočítali Hadamardovu deriváciu pre každú zložku zvlášť. Keďže F má kladnú deriváciu v m_F, tak prvá zložka zobrazenia ϕ_1 je podľa Vety 9 Hadamardovsky diferencovateľná tangentne k množine všetkých càdlàg funkcií spojitých v m_F. Druhá zložka zobrazenia ϕ_1 je identita, ktorá je zároveň svoja Hadamardova derivácia, pretože pre $h_t \xrightarrow[t \to 0+]{} h \in D[\mathbb{R}]$

$$\frac{\phi_{1,2}(F + th_t) - \phi_{1,2}(F)}{t} = \frac{F + th_t - F}{t} = h_t \xrightarrow[t \to 0+]{} h.$$

Spolu získavame Hadamardovu deriváciu zobrazenia ϕ_1 tangentne k $\mathbb{D}_0 \subset D[\mathbb{R}]$ funkcií spojitých v m_F. A to v tvare

$$\phi'_{1,F}(h) = \left(-\frac{h(m_F)}{F'(m_F)}, h \right).$$

Zobrazenie $\boldsymbol{\phi_2}$ (viď. (3.28))
Z predpokladov je distribučná funkcia F diferencovateľná na okolí bodov $m_F + m_G$ a $m_F - m_G$, preto zvoľme $\epsilon > 0$ splňujúce, že F je spojito diferencovateľná na intervaloch $(m_F + m_G - 2\epsilon, m_F + m_G + 2\epsilon)$ a $(m_F - m_G - 2\epsilon, m_F - m_G + 2\epsilon)$ respektíve, G je spojito diferencovateľná na intervale $(m_G - 2\epsilon, m_G + 2\epsilon)$. Vďaka tomu môžeme definovať zobrazenie ϕ_2 ako $\phi_2 : \mathbb{R} \times D[\mathbb{R}] \to D[m_G - \epsilon, m_G + \epsilon]$.

Potom ukážeme, že ϕ_2 má Hadamardovu deriváciu v (m_F, F) tangentne k (θ, h), kde h je spojitá na intervaloch $(m_F + m_G - 2\epsilon, m_F + m_G + 2\epsilon)$ a $(m_F - m_G - 2\epsilon, m_F - m_G + 2\epsilon)$.

Keďže ϕ_2 možno zapísať ako rozdiel

$$\phi_2(\theta, H) = H(\theta + \cdot) - H_-(\theta - \cdot),$$

odvodíme deriváciu postupne pre oba členy $H(\theta + \cdot)$ a $H_-(\theta - \cdot)$.

(i) Zobrazenie $\boldsymbol{H(\theta + \cdot)}$

Označme $\tilde{\phi}_2(\theta, H) = H(\theta + \cdot)$ a ukážeme, že Hadamardova derivácia zobrazenia $\tilde{\phi}_2$ v (m_F, F) je

$$\tilde{\phi}'_{2,(m_F,\, F)}(\theta, h) = \theta F'(m_F + \cdot) + h(m_F + \cdot). \tag{3.31}$$

Začnime z definície Hadamardovej derivácie, nech $\theta_t \xrightarrow[t\to 0+]{} \theta$ a $h_t \xrightarrow[t\to 0+]{} h$ v suprémovej norme, potom

$$\frac{\tilde{\phi}_2[(m_F,\, F) + t(\theta_t,\, h_t)] - \tilde{\phi}_2[(m_F,\, F)]}{t} = \frac{(F + th_t)[m_F + t\theta_t + \cdot] - F[m_F + \cdot]}{t}. \tag{3.32}$$

Po rozpísaní pravej strany (3.32) získame

$$\frac{F[m_F + t\theta_t + \cdot] - F[m_F + \cdot]}{t} + h_t(m_F + t\theta_t + \cdot). \tag{3.33}$$

Ukážeme, že oba sčítance z (3.33) konvergujú k sčítancom z (3.31).

Zobrazenie $h_t(m_F + t\theta_t + \cdot)$ konverguje rovnomerne k $h(m_F + \cdot)$ použitím Lemmatu A.8 v Apendixe, pre $(a,b) = (m_G - 2\epsilon,\, m_G + 2\epsilon)$, $[c,d] = [m_G - \epsilon,\, m_G + \epsilon]$, $a_t = t\theta_t$ na funkcie $h_t(m_F + \cdot)$.

Obdobne ukážeme, že prvý sčítanec (3.33) konverguje k $\theta F'(m_F + \cdot)$. Predovšetkým nájdime t_0 také, že pre $t < t_0$ je $|t\theta_t| < \frac{1}{4}\epsilon$ a pracujme ďalej len s $t < t_0$. Zvoľme pevné $x \in (m_G - \frac{3}{2}\epsilon,\, m_G + \frac{3}{2}\epsilon)$ pomocou vety o strednej hodnote (viď. Veta A.34 v Apendixe), rozpíšme výraz

$$\frac{F[m_F + t\theta_t + x] - F[m_F + x]}{t} = \theta_t F'[m_F + x + \xi_t(x)], \text{ kde } |\xi_t(x)| \le t|\theta_t|, \tag{3.34}$$

(keďže θ_t môže byť kladné aj záporné, tak rovnaké znamienko bude mať príslušné $\xi_t(x)$, v dôkaze to ale nie je podstatné). Pravú stranu výrazu (3.34) rozšírime na

$$\theta_t F'[m_F + x + \xi_t(x)] = (\theta_t - \theta)F'[m_F + x + \xi_t(x)] + \theta F'[m_F + x + \xi_t(x)].$$

Máme $\theta_t \xrightarrow[t\to 0+]{} \theta$. Keďže $|\xi_t(x)| \le |t\theta_t| < \frac{1}{4}\epsilon$ potom pre ľubovoľné $x \in [m_G - \epsilon,\, m_G + \epsilon]$ je $m_F + x + \xi_t(x) \in [m_F + m_G - \frac{3}{2}\epsilon,\, m_F + m_G + \frac{3}{2}\epsilon]$, na tomto intervale je F' spojitá a predovšetkým obmedzená. Nutne teda

$$\sup_{x\in[m_G-\epsilon,\, m_G+\epsilon]} (\theta_t - \theta)F'[m_F + x + \xi_t(x)] \xrightarrow[t\to 0+]{} 0. \tag{3.35}$$

Druhý člen výrazu (3.35) je $\theta F'[m_F + x + \xi_t(x)]$, ktorý konverguje rovnomerne k $\theta F'[m_F + x]$ pre $x \in [m_G - \epsilon,\, m_G + \epsilon]$. A to na základe Lemmatu A.6 v Apendixe, pre $(a,b) = (m_G - \frac{3}{2}\epsilon,\, m_G + \frac{3}{2}\epsilon)$, $[c,d] = [m_G - \epsilon,\, m_G + \epsilon]$, $\xi_t(x) = \xi_t(x)$ a $a_t = t\theta_t$.

Výsledkom je, že oba sčítance v (3.33) konvergujú v suprémovej norme k sčítancom vo výraze (3.31).

(ii) Zobrazenie $\boldsymbol{H_-(\theta - \cdot)}$

Ekvivalentnými úpravami odvodíme, že pre zobrazenie

$$\tilde{\tilde{\phi}}_2(\theta, h) = H_-(\theta - \cdot),$$

je Hadamardova derivácia rovná

$$\tilde{\tilde{\phi}}'_{2,(m_F,\,F)}(\theta,\,h) = \theta F'(m_F - \cdot) + h(m_F - \cdot). \tag{3.36}$$

Opäť rozpíšme definíciu Hadamardovej derivácie, nech $\theta_t \xrightarrow[t\to 0+]{} \theta$ a $h_t \xrightarrow[t\to 0+]{} h$ v suprémovej norme, potom

$$\frac{\tilde{\tilde{\phi}}_2[(m_F,\,F) + t(\theta_t,\,h_t)] - \tilde{\tilde{\phi}}_2[(m_F,\,F)]}{t} = \frac{(F + th_t)_-[m_F + t\theta_t - \cdot] - F_-[m_F - \cdot]}{t}. \tag{3.37}$$

Po rozpísaní pravej strany (3.37) získame

$$\frac{F_-[m_F + t\theta_t - \cdot] - F_-[m_F - \cdot]}{t} + h_{t-}(m_F + t\theta_t - \cdot), \tag{3.38}$$

kde $h_{t-}(x)$ značí limitu zľava funkcie h v premennej x. Ukážeme, že oba sčítance z (3.38) konvergujú k sčítancom z (3.36).

Opäť zobrazenie $h_{t-}(m_F + t\theta_t - \cdot)$ konverguje rovnomerne k $h_-(m_F - \cdot)$ použitím Lemmatu A.8 v Apendixe, pre $(a,b) = (m_G - 2\epsilon,\ m_G + 2\epsilon)$, $[c,d] = [m_G - \epsilon,\ m_G + \epsilon]$, $a_t = t\theta_t$ a $h_{t-}(m_F - \cdot)$. Pretože $h_t \xrightarrow[t\to 0+]{} h$ zrejme implikuje $h_{t-} \xrightarrow[t\to 0+]{} h_-$ (rovnomerne). Zobrazenie $h(m_F - \cdot)$ je spojité na intervale $[m_G - \epsilon, m_G + \epsilon]$ preto $h_-(m_F - \cdot) = h(m_F - \cdot)$ na $[m_G - \epsilon, m_G + \epsilon]$.

Prvý sčítanec (3.38) opäť rozpíšeme pomocou vety o strednej hodnote. Stanovme t_0 rovnako ako v predošlej časti dôkazu, teda pre $t < t_0$ je $|t\theta_t| < \frac{1}{4}\epsilon$ a uvažujme ďalej len $t < t_0$. Zvoľme $x \in (m_G - \frac{3}{2}\epsilon,\ m_G + \frac{3}{2}\epsilon)$, pre takúto voľbu x a t sú zobrazenia F_- v prvom člene (3.38) spojité a rovné F. Použitím vety o strednej hodnote (viď. Veta A.34 v Apendixe), získavame

$$\frac{F[m_F + t\theta_t - x] - F[m_F - x]}{t} = \theta_t F'[m_F - x + \xi_t(x)], \text{ kde } |\xi_t(x)| \le t|\theta_t|. \tag{3.39}$$

Rozšírme výraz (3.39) na

$$\theta_t F'[m_F - x + \xi_t(x)] = (\theta_t - \theta)F'[m_F - x + \xi_t(x)] + \theta F'[m_F - x + \xi_t(x)]. \tag{3.40}$$

Z predpokladov platí $\theta_t \xrightarrow[t\to 0+]{} \theta$. Keďže $|\xi_t(x)| \le |t\theta_t| < \frac{1}{4}\epsilon$, tak opäť pre ľubovoľné $x \in [m_G - \epsilon,\ m_G + \epsilon]$ je $m_F - x + \xi_t(x) \in [m_F - m_G - \frac{3}{2}\epsilon,\ m_F - m_G + \frac{3}{2}\epsilon]$, F' je spojitá na uzavretom intervale a preto je obmedzená. To implikuje

$$\sup_{x\in[m_G-\epsilon,\ m_G+\epsilon]} (\theta_t - \theta)F'[m_F - x + \xi_t(x)] \xrightarrow[t\to 0+]{} 0.$$

Druhý sčítanec výrazu (3.40) je $\theta F'[m_F - x + \xi_t(x)]$, ktorý konverguje rovnomerne k $\theta F'[m_F - x]$ pre $x \in [m_G - \epsilon,\ m_G + \epsilon]$. A to opäť na základe Lemmatu A.6 v Apendixe, pre $(a,b) = (m_G - \frac{3}{2}\epsilon,\ m_G + \frac{3}{2}\epsilon)$, $[c,d] = [m_G - \epsilon,\ m_G + \epsilon]$, $\xi_t(x) = \xi_t(x)$ a $a_t = t\theta_t$.

Získali sme, že oba sčítance v (3.38) konvergujú v suprémovej norme k sčítancom vo výraze (3.36).

Spojením výsledkov (3.31) a (3.36) získavame Hadamardovu deriváciu zobrazenia ϕ_2 v tvare

$$\phi'_{2,(m_F,\,F)}(\theta,\,h) = \theta\Big(F'(m_F+\cdot) - F'(m_F-\cdot)\Big) + h(m_F+\cdot) - h(m_F-\cdot),$$

tangentne k $(\theta,\,h)$, kde h je spojitá na intervaloch $(m_F+m_G-2\epsilon,\,m_F+m_G+2\epsilon)$ a $(m_F-m_G-2\epsilon,\,m_F-m_G+2\epsilon)$.

Zobrazenie $\boldsymbol{\phi_3}$ (viď. (3.29))
Máme $\phi_3 : D[m_G-\epsilon, m_G+\epsilon] \to \mathbb{R}$. Keďže zobrazenie G má podľa predpokladov kladnú deriváciu v m_G, tak z Vety 9 je jeho Hadamardova derivácia rovná

$$\phi'_{3,G}(h) = -\frac{h(m_G)}{G'(m_G)},$$

tangentne k zobrazeniam $h \in D[m_G-\epsilon, m_G+\epsilon]$ spojitým v m_G.

Retiazkové pravidlo
Tangentná množina $\mathbb{D}_0 \subset D[\mathbb{R}]$ je podľa predpokladov množina funkcií spojitých v m_F a na okolí m_F+m_G a m_F-m_G. Preto spĺňa predpoklady na tangentnú množinu pre zobrazenie ϕ_1, ktorá požaduje len spojitosť v m_F. Množina $\phi'_1(\mathbb{D}_0)$ obsahuje dvojice (θ,h), kde $\theta \in \mathbb{R}$ a $h \in \mathbb{D}_0$. Taktiež spĺňa predpoklady na tangentnú množinu ϕ_2, ktorá požaduje spojitosť na okolí m_F+m_G a m_F-m_G. Nakoniec množina $\phi'_2(\phi'_1(\mathbb{D}_0))$ obsahuje funkcie spojité na okolí m_G, teda spĺňa predpoklady na tangentnú množinu ϕ_3. To znamená, že predpoklady retiazkového pravidla (viď. Veta 7) sú splnené a jeho použitím získavame (3.30).

□

Použitie vety ukazujeme v nasledujúcom príklade pre prípad náhodného výberu, kde môžeme použiť Donskerovu vetu pre zistenie asymptotického rozdelenia.

Príklad 12. Nech $X_1,\ldots,X_n$ je náhodný výber s distribučnou funkciou F a mediánom m_F. Ďalej zadefinujme $X'_i = X_i - m_F$ pre $i = 1,\ldots,n$. Potom $X'_1,\ldots,X'_n$ je náhodný výber z rozdelenia s distribučnou funkciou $G(x) = F(m_F-x) - F_{-}(m_F-x)$ (viď. Lemma A.3 v Apendixe). Podobne označme medián tohoto rozdelenia ako m_G.

Od distribučnej funkcie F požadujeme, aby mala kladnú deriváciu v m_F a aby bola spojito diferencovateľná na okolí bodov m_F+m_G a m_F-m_G, pričom aspoň v jednom z týchto dvoch bodov má kladnú deriváciu.

Ďalej majme nejaký odhad distribučnej funkcie F_n spĺňajúci

$$\sqrt{n}(F_n - F) \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} \mathbb{G}_F, \text{ v } D[\mathbb{R}],$$

kde $\mathbb{G}_F$ značí $F-$Brownov most (viď. Definície A.21, A.23 a A.24 v Apendixe). Potom na základe Vety 10 platí, že

$$\sqrt{n}(MAD_n - MAD) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \phi'_F(\mathbb{G}_F), \text{ v } \mathbb{R},$$

kde MAD značí teoretický med$|X - \text{med}(X)|$ respektíve m_G. Člen $\phi'_F(\mathbb{G}_F)$ má pomerne komplikovaný tvar, konkrétne

$$\phi'_F(\mathbb{G}_F) = \frac{\mathbb{G}(1/2)}{F'(m_F)} \frac{F'(m_F + m_G) - F'(m_F - m_G)}{F'(m_F + m_G) + F'(m_F - m_G)}$$

$$- \frac{\mathbb{G}_F(m_F + m_G) - \mathbb{G}_F(m_F - m_G)}{F'(m_F + m_G) + F'(m_F - m_G)}, \tag{3.41}$$

kde $\mathbb{G}$ značí štandardný Brownov most získaný dosadením

$$\mathbb{G}_F(m_F) = \mathbb{G}_F(F^{-1}(1/2)) = \mathbb{G}(1/2).$$

Výraz (3.41) sa podstatne zjednoduší pre rozdelenia symetrické okolo nuly. V takom prípade je totiž $m_F = F^{-1}(1/2) = 0$, $m_G = G^{-1}(1/2) = F^{-1}(3/4)$ a $-m_G = F^{-1}(1/4)$. Taktiež prvý člen (3.41) úplne zmizne, pretože F' je symetrická okolo nuly. Celý výraz sa upraví nasledovne:

$$\phi'_F(\mathbb{G}_F) = -\frac{\mathbb{G}(3/4) - \mathbb{G}(1/4)}{2F'(F^{-1}(3/4))}. \tag{3.42}$$

Rozdelenie na pravej strane (3.42) je centrované a normálne, musíme ešte spočítať jeho rozptyl.

$$\begin{aligned}
&\text{var}\left(-\frac{\mathbb{G}(3/4) - \mathbb{G}(1/4)}{2F'(F^{-1}(3/4))}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{(F'[F^{-1}(3/4)])^2}\text{var}\Big(\mathbb{G}(3/4) - \mathbb{G}(1/4)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(F'[F^{-1}(3/4)])^2}\left[\text{var}\Big(\mathbb{G}(3/4)\Big) + \text{var}\Big(\mathbb{G}(1/4)\Big) - 2\text{cov}\Big(\mathbb{G}(3/4),\mathbb{G}(1/4)\Big)\right] \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(F'[F^{-1}(3/4)])^2}\left[\frac{3}{16} + \frac{3}{16} - 2\frac{1}{16}\right] = \frac{1}{16}\frac{1}{(F'[F^{-1}(3/4)])^2}.
\end{aligned}$$

Preto asymptotické rozdelenie je

$$\sqrt{n}(MAD_n - MAD) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}\left(0, \frac{1}{16}\frac{1}{(F'[F^{-1}(3/4)])^2}\right).$$

Poznámka. Tento výsledok platí za príslušných predpokladov aj pre zobrazenia symetrické okolo ľubovoľného mediánu. V takom prípade $m_F = F^{-1}(1/2)$, $m_G = G^{-1}(1/2) = F^{-1}(3/4) - F^{-1}(1/2)$ a $-m_G = F^{-1}(1/4) - F^{-1}(1/2)$.

△

3.3 Interkvartilové rozpätie

Ďalším často používaným odhadom polohy je interkvartilové rozpätie definované ako

$$IQR := \psi(F) = F^{-1}\left(\tfrac{3}{4}\right) - F^{-1}\left(\tfrac{1}{4}\right).$$

Pre jeho odhad sa používajú výberové kvantily a jedná sa preto o funkciu empirickej distribučnej funkcie $IQR_n := \psi(F_n)$.

Majme splnené podobné predpoklady ako v Príklade 12. Nech $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výber s distribučnou funkciou F, ktorá má kladnú deriváciu v bodoch $F^{-1}(1/4)$ a $F^{-1}(3/4)$.

Pokiaľ rozdelíme $\psi(F) = \psi_1(F) - \psi_2(F)$, kde $\psi_1(F) = F^{-1}(3/4)$ a $\psi_2(F) = F^{-1}(1/4)$, tak sú splnené predpoklady Vety 9 pre ψ_1 a aj pre ψ_2. Použitím linearity derivácie získavame, že

$$\psi'_F(h) = -\frac{h(F^{-1}(3/4))}{F'(F^{-1}(3/4))} + \frac{h(F^{-1}(1/4))}{F'(F^{-1}(1/4))}.$$

Ak máme rovnako ako v Príklade 12 odhad distribučnej funkcie F_n splňujúci

$$\sqrt{n}(F_n - F) \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} \mathbb{G}_F, \text{ v } D[\mathbb{R}],$$

kde $\mathbb{G}_F$ značí $F-$Brownov most, potom

$$\sqrt{n}(IQR_n - IQR) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \psi'_F(\mathbb{G}_F) = -\frac{\mathbb{G}_F(3/4)}{F'(F^{-1}(3/4))} + \frac{\mathbb{G}_F(1/4)}{F'(F^{-1}(1/4))}, \text{ v } \mathbb{R}.$$

Po dosadení a výpočte asymptotického rozptylu (obdobne ako v Príklade 12) získavame asymptotické rozdelenie

$$\begin{aligned}\psi'_F(\mathbb{G}_F) \sim \mathsf{N}\Bigg(0,\ & \frac{3}{16}\frac{1}{(F'[F^{-1}(1/4)])^2} + \frac{3}{16}\frac{1}{(F'[F^{-1}(3/4)])^2} \\ & - \frac{2}{16}\frac{1}{F'[F^{-1}(1/4)]}\frac{1}{F'[F^{-1}(3/4)]}\Bigg).\end{aligned}$$

Pokiaľ sa opäť obmedzíme na symetrické rozdelenie, tak

$$F'[F^{-1}(1/4)] = F'[F^{-1}(3/4)]$$

a výraz sa zjednoduší na

$$\sqrt{n}(IQR_n - IQR) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}\left(0, \frac{1}{4}\frac{1}{(F'[F^{-1}(3/4)])^2}\right).$$

V porovnaní s MAD_n má IQR_n štyrikrát väčší asymptotický rozptyl, treba si ale uvedomiť, že MAD_n a IQR_n neodhadujú to isté. V normálnom rozdelení $\mathsf{N}(0, \sigma^2)$ odhaduje MAD_n parameter $\Phi^{-1}(3/4) \cdot \sigma$, zatiaľ čo IQR_n odhaduje dvakrát väčší parameter $2\Phi^{-1}(3/4)\cdot\sigma$, kde Φ značí kvantilovú funkciu normovaného normálneho rozdelenia. Teda príslušne znormované verzie majú, za predpokladu normality, rovnaké asymptotické rozdelenie.

3.4 Stredná hodnota

Teraz ukážeme, že i keď je zovšeobecnená delta veta často veľmi užitočná, tak nie vždy je možné ju použiť. Podobne ako pri kvantiloch sa môžeme na strednú hodnotu, prípadne vyššie momenty, pozerať ako na funkcionál distribučnej funkcie, konkrétne

$$\mathsf{E}\ X = \int_{\mathbb{R}} x\, dF(x).$$

Pokiaľ by nás zaujímali iné momenty, jednoducho by stačilo predefinovať náhodnú veličinu $X' := X^{\alpha}$.

Príslušný odhad na základe náhodného výberu môžeme definovať ako funkciu empirickej distribučnej funkcie nasledovne

$$\widehat{\mu}_n = \int_{\mathbb{R}} x \, dF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Vďaka centrálnej limitnej vete (viď. Veta A.18 v Apendixe) máme asymptotické rozdelenie okamžite a nepotrebujeme k tomu používať delta vetu. Ako ukážeme nižšie, jej použitie by ani nebolo také priamočiare ako pri výberových kvantiloch.

Definujme zobrazenie $\mu : \mathbb{D}_{\mu} \to \mathbb{R}$, kde $\mathbb{D}_{\mu} \subset D[\mathbb{R}]$ je množina neklesajúcich càdlàg funkcií ako

$$\mu(F) = \int_{\mathbb{R}} x \, dF(x). \tag{3.43}$$

Zrejme pre empirickú distribučnú funkciu F_n platí $\mu(F_n) = \widehat{\mu}_n$.

Pre použitie delta vety (viď. Veta 8) potrebujeme nájsť lineárne spojité zobrazenie, ktoré bude zároveň Hadamardovou deriváciou. Keďže ϕ je samo o sebe lineárne, javí sa ako vhodný kandidát. Problém je, že toto zobrazenie nemusí byť spojité, čo ukážeme v protipríkladoch nižšie.

Príklad 13. Majme $X \sim \mathit{Cauchy}$ a $Y_n = |X| \cdot \mathbb{I}\{|X| > n\}$, potom distribučná funkcia Y_n má tvar

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,0), \\ \frac{2}{\pi}\arctan(n), & x \in [0,n), \\ \frac{2}{\pi}\arctan(x), & x \in [n,\infty). \end{cases}$$

Pre podrobné odvodenie viď. Lemma A.4 v Apendixe. Zrejme $F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} F = \mathbb{I}[0,\infty)$ v $D[\mathbb{R}]$, pretože

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \le 1 - \frac{2}{\pi}\arctan(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ale

$$\infty = \int_{\mathbb{R}} x \, dF_n(x) = \mu(F_n) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(F) = \int_{\mathbb{R}} x \, dF(x) = 0.$$

Zobrazenie μ preto nie je spojité na $D[\mathbb{R}]$. △

V Príklade 13 možno namietať, že sme uvažovali distribučné funkcie, ktoré nedávajú konečnú strednú hodnotu. Ako ukážeme v nasledujúcom príklade, ani obmedzenie sa na množinu $\mathbb{D}_{\mu_0} \subset \mathbb{D}_{\mu}$ funkcií s konečnou strednou hodnotou, nezaručuje spojitosť.

Príklad 14. Majme náhodnú veličinu $X \sim \mathit{Exp}(1)$ a k nej

$$Y_n = X \cdot \mathbb{I}\{X < n \text{ alebo } X \ge e^n + n + 1\} + (e^n + n + 1) \cdot \mathbb{I}\{n \le X < e^n + n + 1\}.$$

Jedná sa o exponenciálne rozdelenia, ktoré sú cenzurované na intervaloch $[n,e^n + n+1)$, hodnotou $e^n + n + 1$ s príslušnou distribučnou funkciou $F_n \in D[\mathbb{R}]$ definovanou ako

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,0), \\ (1-e^{-x}), & x \in [0,n), \\ (1-e^{-n}), & x \in [n,e^n+n+1), \\ (1-e^{-x}), & x \in [e^n+n+1,\infty). \end{cases}$$

Formálne odvodenie možno nájsť v Apendixe ako Lemma A.5. Ďalej platí

$$F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} F \in \mathbb{D}_{\mu_0},$$

kde $F = (1-e^{-x}) \cdot \mathbb{I}\{[0,\infty)\}$, $x \in \mathbb{R}$ je distribučná funkcia exponenciálneho rozdelenia $Exp(1)$. Konvergencia platí, pretože

$$\|F - F_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - F_n(x)| \leq 1 - (1-e^{-n}) = e^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Taktiež zobrazenie μ, definované v (3.43), zobrazuje F_n do reálnych hodnôt

$$\begin{aligned}
\mu(F_n) &= \int_{\mathbb{R}} x\, dF_n(x) \\
&= \int_0^n x dF(x) + (e^n+n+1) \cdot \Big((1-e^{-(e^n+n+1)}) - (1-e^{-n})\Big) \\
&\quad + \int_{e^n+n+1}^{\infty} x dF(x) \\
&= \Big[-e^{-x}(x+1)\Big]_0^n + \Big[-e^{-x}(x+1)\Big]_{e^n+n+1}^{\infty} \\
&\quad + (e^n+n+1) \cdot (e^{-n} - e^{-(e^n+n+1)}) \\
&= -e^{-n}(n+1) + 1 - 0 + e^{-(e^n+n+1)}(e^n+n+1+1) \\
&\quad + 1 + (n+1)e^{-n} - e^{-e^n-1} - (n+1)e^{-e^n-n-1} \\
&= 2 + e^{-e^n-1} + e^{-e^n-n-1}(n+1) + e^{-(e^n+n+1)} \\
&\quad - e^{-e^n-1} - (n+1)e^{-e^n-n-1} \\
&= 2 + \exp\{-e^n - n - 1\}.
\end{aligned}$$

To znamená, že pre každé n, $F_n \in \mathbb{D}_{\mu_0}$. V každom prípade limita $\mu(F_n)$ nekonverguje k $\mu(F)$, pretože

$$\mu(F_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \neq 1 = \mu(F).$$

Z toho vyplýva, že zobrazenie μ nie je spojité ani v prípade, ak sa obmedzíme na $\mathbb{D}_{\mu_0}$. $\triangle$

Možnosti, ako spočítať obdobu Hadamardovej derivácie a použiť modifikovanú funkcionálnu delta vetu na momenty, sú uvedené v Beutner a Zähle (2010).

4. Copule

V poslednej kapitole sa zameriame na asymptotické vlastnosti copulí. V prvej časti zavedieme potrebné pojmy a ukážeme, že sa stačí zaoberať len rozdeleniami na $[0,1]^d$, ktorých marginálne rozdelenia sú rovnomerné na $[0,1]$.

Následne rozpracovávame dôkaz Hadamardovej diferencovateľnosti copulí pôvodne publikovaný v Bücher a Volgushev (2013). Pridávame podrobnejší komentár k jednotlivým krokom. Dôkaz ukazujeme pre postupnosti so spojitým indexom h_t namiesto h_n (v zmysle poznámky za Definíciou 2). Niektoré kroky pôvodného dôkazu sme prerobili, aby boli priamočiarejšie. Taktiež pridávame podrobný popis krokov, ktoré autori vynechali, respektíve sa odkázali na to, že sa ukážu obdobne.

V tejto kapitole pracujeme len s euklidovskými priestormi, preto pre prehľadnosť značíme vektory hrubším fontom rovnako, ako v prvej kapitole. Keďže v celej kapitole pracujeme len s parciálnymi deriváciami prvého rádu, skrátene ich budeme zapisovať ako $\partial_p C(\boldsymbol{u}) := \partial C(\boldsymbol{u})/\partial u_p$.

4.1 Úvod k copuliam

Vo výraze (3.2) sme zaviedli kvantilovú funkciu, tú zovšeobecníme pre hraničné hodnoty distribučných funkcii $F(-\infty) := 0$ a $F(\infty) := 1$ nasledovne

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \inf\{x \in [-\infty,\infty] : F(x) \geq u\}, & \text{pre } u \in (0,1], \\ \sup\{x \in [-\infty,\infty] : F(x) = u\}, & \text{pre } u = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Pre náhodné vektory je zavedený pojem copulovej funkcie, ktorá charakterizuje závislosti medzi jednotlivými zložkami vektoru.

Definícia 11. *Majme d-rozmerný náhodný vektor s distribučnou funkciou F s príslušnými spojitými marginálnymi distribučnými funkciami $F_1,\ldots,F_d$. Potom zobrazenie*

$$C(\boldsymbol{u}) = F\Big(F_1^{-1}(u_1),\ldots,F_d^{-1}(u_d)\Big), \text{ pre } \boldsymbol{u} \in [0,1]^d,$$

kde $F_1^{-1},\ldots,F_d^{-1}$ sú zovšeobecnené inverzné zobrazenia podľa (4.1)*, budeme nazývať* ***copulou*** *príslušnou distribučnej funkcii F.*

Skrátene budeme zapisovať $C(\boldsymbol{u}) = F(\mathbb{F}^{-1}(\boldsymbol{u}))$, pre $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$, kde

$$\mathbb{F}^{-1}(\boldsymbol{u}) := (F_1^{-1}(u_1),\ldots,F_d^{-1}(u_d)).$$

Obdobne ako v predchádzajúcich sekciách zadefinujeme zobrazenie

$$\phi(F) := F(\mathbb{F}^{-1}) = C, \tag{4.2}$$

ktoré distribučnej funkcii priraďuje copulu. Konkrétne $\phi : D_\phi \subset D[0,1]^d \to \ell^\infty([0,1]^d)$, kde D_ϕ obsahuje len distribučné funkcie na $[0,1]^d$. Je to z dôvodu, aby sme mohli spočítať Hadamardovu deriváciu tohoto zobrazenia.

Pre odhadnutie copule sa používa empirická copula zostavená pomocou empirických distribučných funkcii. Pre $\boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_n$ striktne stacionárnu postupnosť

d-rozmerných náhodných vektorov s príslušnou copulou C, zostavíme empirickú copulu ako

$$C_n(\boldsymbol{u}) = F_n\Big(F_{n,1}^{-1}(u_1), \ldots, F_{n,d}^{-1}(u_d)\Big), \text{ pre } \boldsymbol{u} \in [0,1]^d, \tag{4.3}$$

kde F_n značí združenú empirickú distribučnú funkciu a $F_{1,n}, \ldots, F_{d,n}$ značia marginálne empirické distribučné funkcie príslušné zložkám $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ definované podľa (2.9).

Predovšetkým nás zaujímajú asymptotické vlastnosti empirických copulí, konkrétne chovanie

$$\sqrt{n}\Big(C_n(\boldsymbol{u}) - C(\boldsymbol{u})\Big) = \sqrt{n}\Big(\phi(F_n)(\boldsymbol{u}) - \phi(F)(\boldsymbol{u})\Big), \tag{4.4}$$

ako náhodného procesu pre $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$. Najskôr ukážeme, že stačí ak budeme skúmať copule náhodných vektorov, ktorých zložky majú rovnomerné rozdelenia na $[0,1]$.

Lemma 11. *Nech $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ je striktne stacionárna postupnosť d-rozmerných náhodných vektorov s distribučnou funkciou F a príslušnými spojitými marginálnymi distribučnými funkciami $F_1, \ldots, F_d$. K nej zostavme postupnosť náhodných vektorov $\boldsymbol{U}_1, \ldots, \boldsymbol{U}_n$, kde pre $i \in \{1, \ldots, n\}$, $p \in \{1, \ldots, d\}$ je $U_{i,p} = F_p(X_{i,p}) \sim R[0,1]$. Potom je táto postupnosť striktne stacionárna, s distribučnou funkciou C na $[0,1]^d$, a pokiaľ označíme*

$$G_n(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\left[\boldsymbol{U}_i \leq \boldsymbol{u}\right], \boldsymbol{u} \in [0,1]^d,$$

tak C_n definovaná v (4.3) splňuje, že

$$C_n(\boldsymbol{u}) = G_n\Big(\mathbb{G}_n^{-1}(\boldsymbol{u})\Big), \text{ pre } \boldsymbol{u} \in [0,1]^d. \tag{4.5}$$

Dôkaz. Postupnosť $\boldsymbol{U}_1, \ldots, \boldsymbol{U}_n$ je striktne stacionárna, pretože na každý člen postupnosti $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ aplikujeme to isté zobrazenie nezávisle na sebe. Najskôr ukážeme, že náhodné vektory $\boldsymbol{U}_i$, kde $i \in \{1, \ldots, n\}$ majú distribučnú funkciu C na $[0,1]^d$. Pre $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ postupne upravme

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{U}_i \leq \boldsymbol{u}) = \mathrm{P}(U_{i,1} \leq u_1, \ldots, U_{i,d} \leq u_d) = \mathrm{P}(F_1(X_{i,1}) \leq u_1, \ldots, F_d(X_{i,d}) \leq u_d). \tag{4.6}$$

Pokiaľ sa obmedzíme len na javy ω z množiny

$$\Omega_c = \{\omega \in \Omega : F_p \text{ je rastúca v } X_p(\omega), \text{ pre každé } p = 1, \ldots, d\},$$

tak (4.6) môžeme ďalej upraviť na

$$\mathrm{P}\Big(X_{i,1} \leq F_1^{-1}(u_1), \ldots, X_{i,d} \leq F_d^{-1}(u_d)\Big) = F\Big(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_d^{-1}(u_d)\Big) = C(\boldsymbol{u}).$$

Preto stačí, ak ukážeme, že doplnková množina $\Omega_0 = \Omega \backslash \Omega_c$ má nulovú pravdepodobnosť

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\Omega_0) &= \mathrm{P}\Big(\cup_{p=1}^{d}\{\omega \in \Omega : F_p \text{ je konštantná aspoň z jednej strany } X_p(\omega)\}\Big)\\
&\leq \sum_{p=1}^{d} \mathrm{P}\left(\{\omega \in \Omega : F_p \text{ je konštantná aspoň z jednej strany } X_p(\omega)\}\right)\\
&= \sum_{p=1}^{d} 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Prvá rovnosť je rozpísanie množiny Ω_0, následná nerovnosť je σ-subaditivita a rovnosť na treťom riadku plynie z toho, že F_p nemá skoky, preto môže byť konštantná len na uzavretých intervaloch s nulovou pravdepodobnosťou. Ihneď tiež získavame, že pre každé $i \in \{1, \ldots ,n\}$, $p \in \{1, \ldots ,d\}$ je $U_{i,p} \sim R[0,1]$, pretože

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\Big(U_{i,p} \leq u\Big) = \mathrm{P}\Big(F_p(X_{i,p}) \leq u\Big) &= \mathrm{P}\Big(X_{i,p} \leq F_p^{-1}(u)\Big)\\
&= F_p\Big(F_p^{-1}(u)\Big) = u.
\end{aligned}
$$

Zobrazenie $G_n(\boldsymbol{u})$ je v skutočnosti empirická distribučná funkcia postupnosti $\boldsymbol{U}_1, \ldots ,\boldsymbol{U}_n$. Zvoľme $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ a rozpíšme pravú stranu výrazu (4.5):

$$
\begin{aligned}
G_n(G_n^{-1}(\boldsymbol{u})) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\left[\boldsymbol{U}_i \leq G_n^{-1}(\boldsymbol{u})\right]\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\left[U_{i,1} \leq G_{n,1}^{-1}(u_1), \ldots , U_{i,d} \leq G_{n,d}^{-1}(u_d)\right]. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Teraz použijeme vlastnosti empirickej kvantilovej funkcie. Napríklad $G_{n,1}^{-1}$ je monotónna, zľava spojitá, má skoky v bodoch $1/n, 2/n, \ldots , n/n$ a nadobúda len hodnoty $U_{1,1}, U_{2,1}, \ldots , U_{n,1}$. Zisťovať, či pre $u_1 \in [0,1]$ je $G_{n,1}^{-1}(u_1) \geq U_{i,1}$, je rovnaké ako zisťovať, v ktorom $1/n, 2/n, \ldots , n/n$ má $G_{n,1}^{-1}$ skok do hodnoty $U_{i,1}$ (od toho bodu ďalej je vďaka monotónii už $G_{n,1}^{-1}$ nutne väčšie ako $U_{i,1}$). Tento bod je práve počet $U_{j,1}$ ostro menších ako $U_{i,1}$ vydelený počtom n, respektíve $(\#j : U_{j,1} < U_{i,1})/n$. Keďže $G_{n,1}^{-1}$ je zľava spojitá, tak hodnotu $U_{i,1}$ nadobúda až v limite sprava a preto pre hodnoty $u_1 \in (0,1]$ potrebujeme ostrú nerovnosť. No keďže v nule je $G_{n,1}^{-1}$ spojitá aj sprava, tak špeciálne pre $u_1 = 0$ potrebujeme neostrú nerovnosť. Výraz (4.7) preto môžeme zapísať ako

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\left[\frac{\#j : U_{j,1} < U_{i,1}}{n} \overset{(\leq 0)}{<} u_1, \ldots , \frac{\#j : U_{j,d} < U_{i,d}}{n} \overset{(\leq 0)}{<} u_d\right]\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\Bigg[\frac{\#j : F_1(X_{j,1}) < F_1(X_{i,1})}{n} \overset{(\leq 0)}{<} u_1,\\
&\qquad \ldots , \frac{\#j : F_d(X_{j,d}) < F_d(X_{i,d})}{n} \overset{(\leq 0)}{<} u_d\Bigg]. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Pre ďalšie úpravy použijeme rovnosť javov s.j.

$$
\{X_{j,1} < X_{i,1}\} = \{F_1(X_{j,1}) < F_1(X_{i,1})\},
$$

kde $\supseteq$ plynie z monotónie F_1 a $\subseteq$ plynie taktiež z monotónie F_1 a toho, že $X_{j,1}$ a $X_{i,1}$ nemôžu s nenulovou pravdepodobnosťou nadobúdať hodnoty z intervalov, na ktorých je F konštantná. To použijeme v ďalšej úprave spolu s vlastnosťami empirickej kvantilovej funkcie. Získavame úpravu (4.8) na:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}\left[\frac{\#j : X_{j,1} < X_{i,1}}{n} \overset{(\leq 0)}{<} u_1, \ldots, \frac{\#j : X_{j,d} < X_{i,d}}{n} \overset{(\leq 0)}{<} u_d\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}\left[X_{i,1} \leq F_{n,1}^{-1}(u_1), \ldots, X_{i,1} \leq F_{n,d}^{-1}(u_d)\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}\left[\boldsymbol{X}_i \leq F_n^{-1}(\boldsymbol{u})\right] = F_n(F_n^{-1}(\boldsymbol{u})) = C_n(\boldsymbol{u}).
\end{aligned}$$

Respektíve $G_n(G_n^{-1}(\boldsymbol{u})) = C_n(\boldsymbol{u})$.

□

Ďalej potrebujeme niekoľko dodatočných podmienok.

Podmienka 1. *Pre striktne stacionárnu postupnosť* $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$

$$\alpha_n = \sqrt{n}(G_n - C) \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} \mathbb{B}_{\mathbb{C}} \text{ v } \ell^\infty([0,1]^d),$$

kde $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}$ *je tesný centrovaný Gaussovský proces (viď. Definícia A.21 v Apendixe) koncentrovaný na množine*

$$\mathbb{D}_0 = \{h \in C([0,1]^d, h(1,\ldots,1) = 0 \text{ a } h(\boldsymbol{u}) = 0 \text{ pokiaľ existuje } p \text{ a } u_p = 0\},$$

s kovarianciou

$$\operatorname{cov}\left(\mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{u}), \mathbb{B}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v})\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}\operatorname{cov}(\mathbb{I}[\boldsymbol{U}_0 \leq \boldsymbol{u}], \mathbb{I}[\boldsymbol{U}_i \leq \boldsymbol{v}]).$$

Podmienka 2. *Pre* $p \in \{1,\ldots,d\}$ *parciálna derivácia* $\partial_p C(\boldsymbol{u})$ *existuje a je spojitá na množine* $\{\boldsymbol{u} \in [0,1]^d, u_p \in (0,1)\}$.

Druhá podmienka znamená, že nepožadujeme spojitosť parciálnych derivácii v niektorých hranách $d-$rozmernej kocky. To je výhodné, pretože spojitosť na hranách nie je splnená u väčšiny copulových modelov (viď. Bücher a Volgushev (2013), strana 62). Na množine $\{\boldsymbol{u} \in [0,1]^d, u_p \in \{0,1\}\}$ budeme z praktických dôvodov definovať parciálne derivácie ako nulové, respektíve $\partial_p C(\boldsymbol{u}) = 0$.

Pomocou zobrazenia ϕ, definovaného v (4.2), môžeme zapísať (4.4) ako

$$\sqrt{n}(C_n - C) = \sqrt{n}\Big(\phi(G_n) - \phi(C)\Big).$$

Spočítaním Hadamardovej derivácie ϕ'_C tangentne k $\mathbb{D}_0$ definovanom v Podmienke 1 a použitím delta vety (viď. Veta 8) s Podmienkou 1 okamžite získame asymptotické rozdelenie (4.4):

$$\sqrt{n}(C_n - C) \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} \phi'_C(\mathbb{B}_C).$$

Asymptotické rozdelenie je centrovaný Gaussovský proces na $[0,1]^d$, ktorý má trajektórie $\phi'_C(h)(\boldsymbol{u})$, pričom $h(\boldsymbol{u})$ pre $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ sú trajektórie procesu $\mathbb{B}_C$, ktorý sme predstavili v Podmienke 1.

4.2 Hadamardova derivácia copulí

Veta 12. *Nech je splnená Podmienka 2, potom ϕ je Hadamardovsky diferencovateľné v C tangentne k $\mathbb{D}_0$ definovanej v Podmienke 1. Derivácia je rovná*

$$\phi'_C(h)(\boldsymbol{u}) = h(\boldsymbol{u}) - \sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u}) h(\boldsymbol{u}^{(p)}), \text{ pre } h \in \mathbb{D}_0, \tag{4.9}$$

kde $\boldsymbol{u}^{(p)} = (1,\ldots,1,u_p,1,\ldots,1)$ značí vektor, kde sú všetky zložky okrem p-tej nahradené jednotkou.

Dôkaz. Podobne, ako v dôkaze pre mediánovú absolútnu odchýlku (viď. Sekcia 3.2), rozdelíme zobrazenie ϕ na tri zobrazenia $\phi = \phi_3(\phi_2(\phi_1))$, pre ktoré spočítame Hadamardovu deriváciu zvlášť a použijeme retiazkové pravidlo. Nech $E \subset D[0,1]$ značí množinu všetkých distribučných funkcii F na $[0,1]$ s $F(0) = 0$. K tomu označme $E^- \subset \ell^\infty([0,1])$ obsahujúcu všetky zovšeobecnené inverzné zobrazenia F^{-1} pre $F \in \mathbb{E}$.

Prvé zobrazenie je definované z distribučných funkcii na $[0,1]^d$ (značíme D_ϕ) do $D_{\phi_2} = D_\phi \times E^d$ ako

$$\phi_1(H) = (H,H_1,\ldots,H_d), \tag{4.10}$$

kde H_p pre $p = 1,\ldots,d$ značí marginálne distribučné funkcie, teda $H_p(u_p) = H(1,\ldots,1,u_p,1,\ldots,1)$ je zobrazenie H so všetkými premennými rovnými jednej okrem p-tej.

Zobrazenie ϕ_2 prevádza marginálne distribučné funkcie na inverzné zobrazenia, teda z D_{ϕ_2} do $D_{\phi_3} = D_\phi \times (E^-)^d$ nasledovne

$$\phi_2(H,G_1,\ldots,G_d) = (H,G_1^{-1},\ldots,G_d^{-1}). \tag{4.11}$$

Nakoniec, tretie zobrazenie prevedie zovšeobecnené inverzné zobrazenia a distribučnú funkciu na copulu. Respektíve z D_{ϕ_3} do $\ell^\infty([0,1]^d)$, konkrétne

$$\phi_3(H,F_1,\ldots,F_d) = H(F_1,\ldots,F_d). \tag{4.12}$$

Spočítame postupne Hadamardove derivácie.

Zobrazenie $\boldsymbol{\phi_1}$ (viď. (4.10))
Toto zobrazenie je lineárne na $\ell^\infty([0,1]^d)$. Nech $H, G \in \ell^\infty([0,1]^d)$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, potom

$$\begin{aligned} \phi(c_1H + c_2G) &= (c_1H + c_2G,(c_1H + c_2G)_1,\ldots,(c_1H + c_2G)_d) \\ &= c_1(H,H_1,\ldots,H_d) + c_2(G,G_1,\ldots,G_d) \\ &= c_1\phi(H) + c_2\phi(G), \end{aligned}$$

pretože pre ľubovoľné $p = 1,\ldots,d$ je zobrazenie do marginály len dosadenie jednotiek až na p-tu premennú:

$$\begin{aligned} (c_1H + c_2G)_p(u_p) &= (c_1H + c_2G)(1,\ldots,1,u_p,1,\ldots,1) \\ &= c_1H(1,\ldots,1,u_p,1,\ldots,1) + c_2G(1,\ldots,1,u_p,1,\ldots,1) \\ &= c_1H_p(u_p) + c_2G_p(u_p) \text{ pre } u_p \in [0,1]. \end{aligned}$$

Taktiež je toto zobrazenie spojité, pretože je spojité v každej zložke. Prvá zložka je identita a tá je spojitá triviálne, pre zvyšné zložky zvoľme $p = 1, \dots, d$ a $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} H$ v $\ell^\infty[0,1]^d$. Potom

$$\begin{aligned}\|H_{n,p} - H_p\| &= \sup_{u\in[0,1]} |H_{n,p}(u) - H_p(u)| \\ &= \sup_{u\in[0,1]} |H_n(1,\dots,1,u,1,\dots,1) - H(1,\dots,1,u,1,\dots,1)| \\ &\le \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} |H_n(\boldsymbol{u}) - H(\boldsymbol{u})| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Z dôvodu, že je zobrazenie ϕ_1 lineárne a spojité, tak sa nutne rovná svojej Hadamardovej derivácii, formálne zapísané

$$\phi'_{1,C}(h) = (h,h_1,\dots,h_d).$$

Zobrazenie $\boldsymbol{\phi_2}$ (viď. (4.11))
Rovnako, ako v dôkaze Vety 10, stačí spočítať deriváciu pre každú zložku zobrazenia zvlášť. Prvá zložka je identita, ktorá je lineárna a spojitá rovnako ako pri zobrazení ϕ_1. Zvyšné zložky zderivujeme zvlášť.

Vo Vete 9 sme mali zobrazenie do kvantilovej funkcie v jednom bode. Avšak teraz potrebujeme zobrazenie do celej kvantilovej funkcie v $U \in E$, kde $U(u) = u,\ u \in [0,1]$, pretože marginálne rozdelenia príslušné copuli C sú $R[0,1]$ (viď. Lemma 11). Označme ďalej zobrazenie $\Lambda : E \to E^-$ definované ako $\Lambda(F) = F^{-1}$. Toto zobrazenie má Hadamardovu deriváciu v U tangentne k množine

$$E_0 = \{g \in C[0,1], g(0) = g(1) = 0\} \tag{4.13}$$

rovnú $\Lambda'_U(g) = -g$.

To ukážeme z definície Hadamardovej derivácie. Nech $g_t \in \ell^\infty([0,1])$ splňujúce $g_t \xrightarrow[t\to 0+]{} g \in E_0$, a $U + tg_t \in E$. Musíme ukázať, že

$$\begin{aligned}&\sup_{u\in[0,1]} \left|\frac{\Lambda(U+tg_t) - \Lambda(U)}{t} - \Lambda'_U(g)\right|(u) \\ &= \sup_{u\in[0,1]} \left|\frac{(U+tg_t)^{-1}(u) - u}{t} + g(u)\right| \xrightarrow[t\to 0+]{} 0.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Postupne rozoberieme dva možné prípady. Najprv $u = 0$ a následne $u \in (0,1]$.

(i) Prípad $u = 0$
Pre tento účel ukážme, že

$$A_t := (U+tg_t)^{-1}(0) = \sup_{u\in[0,1]} \{u \in [0,1], u + tg_t(u) = 0\} = o(t), \tag{4.15}$$

potom totiž

$$\left|\frac{(U+tg_t)^{-1}(0) - 0}{t} + g(0)\right| = \left|\frac{o(t)}{t}\right| \xrightarrow[t\to 0+]{} 0.$$

Keďže $U + tg_t \in E$ a pre každé $F \in E$ je $F(0) = 0$, tak $A_t \geq 0$. Pokiaľ existuje t_0 také, že pre každé $t < t_0$ je $A_t = 0$, tak (4.15) zrejme platí, preto predpokladajme, že tomu tak nie je. A_t je definované ako suprémum cez neprázdnu množinu, zvoľme z tejto množiny $x_t \in [A_t/2, A_t]$ splňujúce $x_t + tg_t(x_t) = 0$, to môžeme vďaka definícii A_t a vlastnosti supréma. Takto volené x_t splňujú, že $g_t(x_t) = -x_t/t$. Keďže $g_t \xrightarrow[t \to 0+]{} g$ rovnomerne a g je obmedzená, tak pre dostatočne malé $t < t_0$ sú aj g_t rovnomerne obmedzené konštantou nezávislou na t a z toho plynie, že $x_t = O(t) = o(1)$. Spolu s rovnomernou konvergenciou g_t a spojitosťou g získavame:

$$\frac{-x_t}{t} = g_t(x_t) = [g_t(x_t) - g(x_t)] + g(x_t) \xrightarrow[t \to 0+]{} 0 + g(0) = 0,$$

teda $x_t = o(t)$. A keďže $0 \leq A_t \leq 2x_t = o(t)$, tak aj $A_t = o(t)$.

(ii) Prípad $u \in (0,1]$
Keďže $(U + tg_t)(0) = 0$, tak distribučná funkcia $U + tg_t$ nemôže mať skok v nule. Z toho vyplýva, že kvantilová funkcia $(U + tg_t)^{-1}$ nie je nulová na pravom okolí nuly. Konkrétne môžu nastať len dve situácie

1. $U + tg_t$ je rastúca na pravom okolí nuly.
   Potom aj $(U + tg_t)^{-1}$ je rastúca a pre $u > 0$ je $(U + tg_t)^{-1}(u) > 0$.

2. $U + tg_t$ je konštantná na pravom okolí nuly.
   Potom pre $u > 0$ je

   $$(U+tg_t)^{-1}(u) \geq (U+tg_t)^{-1}(0) = \sup\{x \in [-\infty,\infty] : (U+tg_t)(x) = 0\} > 0.$$

V každom prípade, pre každé $u \in (0,1]$ platí $\xi_t(u) := (U + tg_t)^{-1}(u) \in (0,1]$. Voľbou $\epsilon_t(u) = \min\{t^2, \xi_t(u)\}$ je $\epsilon_t(u) \geq 0$ a získavame

$$(U + tg_t)(\xi_t(u) - \epsilon_t(u)) \leq u \leq (U + tg_t)(\xi_t(u)) \text{ pre } u \in (0,1], \tag{4.16}$$

kde minimum zaručuje, že ľavá strana nerovnosti (4.16) je definovaná.

Rozpíšeme a upravíme (4.16), dosadením za identitu U získame

$$\xi_t(u) - \epsilon_t(u) + tg_t(\xi_t(u) - \epsilon_t(u)) \leq u \leq \xi_t(u) + tg_t(\xi_t(u)),$$

ďalej jednoduchými úpravami

$$-tg_t(\xi_t(u)) \leq \xi_t(u) - u \leq \epsilon_t(u) - tg_t(\xi_t(u) - \epsilon_t(u))$$

a dodatočným odhadom $\epsilon_t(u) \leq t^2$ získame

$$-tg_t(\xi_t(u)) \leq \xi_t(u) - u \leq -tg_t(\xi_t(u) - \epsilon_t(u)) + t^2. \tag{4.17}$$

Keďže $g_t \xrightarrow[t \to 0+]{} g$ rovnomerne a g je obmedzená, tak pre dostatočne malé $t < t_0$ sú g_t rovnomerne obmedzené. Preto dolný aj horný odhad v (4.17) konverguje k nule a teda $\xi_t(u) \xrightarrow[t \to 0+]{} u$ rovnomerne v $u \in (0,1]$. Po vydelení (4.17) hodnotou t, získame

$$-g_t(\xi_t(u)) \leq \frac{\xi_t(u) - u}{t} \leq -g_t(\xi_t(u) - \epsilon_t(u)) + t. \tag{4.18}$$

Potrebujeme ešte ukázať, že pravá aj ľavá strana výrazu (4.18) konverguje rovnomerne k $g(u)$. Z rovnomernej konvergencie g_t a spojitosti g platí bodovo

$$g_t(\xi_t(u)) = [g_t(\xi_t(u)) - g(\xi_t(u))] + g(\xi_t(u)) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0 + g(u) = g(u) \tag{4.19}$$

a zároveň

$$\begin{aligned} g_t(\xi_t(u) - \epsilon_t(u)) = {} & [g_t(\xi_t(u) - \epsilon_t(u)) - g(\xi_t(u) - \epsilon_t(u))] \\ & + g(\xi_t(u) - \epsilon_t(u)) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0 + g(u) = g(u). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Prvé členy v (4.19) a (4.20) konvergujú k nule rovnomerne, zostáva ukázať, že aj členy $g(\xi_t(u))$ a $g(\xi_t(u) - \epsilon_t(u))$ konvergujú k $g(u)$ rovnomerne. Keďže g je spojitá na uzavretom intervale, tak je nutne aj rovnomerne spojitá, zvoľme $\epsilon' > 0$, k nemu existuje z rovnomernej spojitosti $\delta > 0$. Keďže $\xi_t(u) \xrightarrow[t\to 0+]{} u$ rovnomerne a $\epsilon_t(u) \leq t^2$, tak môžeme nájsť t_1 také, že pre $t < t_1$ je

$$|\xi_t(u) - u| < \delta \text{ a zároveň } |\xi_t(u) - \epsilon_t(u) - u| < \delta \text{ rovnomerne v } u.$$

Vďaka rovnomernej spojitosti platí

$$|g(\xi_t(u)) - g(u)| < \epsilon' \text{ a zároveň } |g(\xi_t(u) - \epsilon_t(u)) - g(u)| < \epsilon' \text{ rovnomerne v } u,$$

preto (4.19) a (4.20) platia rovnomerne v $u \in (0,1]$. Spojením (4.18), (4.19) a (4.20) dostávame, že

$$\frac{\xi_t(u) - u}{t} \xrightarrow[t\to 0+]{} -g(u) \text{ rovnomerne pre } u \in (0,1].$$

Tým sme získali (4.14), ktoré znamená, že ϕ_2 je Hadamardovsky diferencovateľná v $(C,U,\ldots,U)$ tangentne k $\mathbb{D}_0 \times E_0^d$ s deriváciou

$$\phi'_{2,(C,U,\ldots,U)}(h,g_1,\ldots,g_d) = (h,-g_1,\ldots,-g_d).$$

Zobrazenie $\boldsymbol{\phi_3}$ (viď. (4.12))

Keďže $U^{-1} = U$, tak nakoniec ukážeme, že ϕ_3 je Hadamardovsky diferencovateľná v $\phi_2(C,U,\ldots,U) = (C,U,\ldots,U)$, tangentne k $\mathbb{D}_0 \times E_0^d$ s deriváciou

$$\phi'_{3,(C,U,\ldots,U)}(h,f_1,\ldots,f_d)(\boldsymbol{u}) = h(\boldsymbol{u}) + \sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u}) f_p(u_p).$$

Majme $(h_t,f_{t,1},\ldots,f_{t,d}) \in (\ell^\infty[0,1]^d) \times (\ell^\infty[0,1])^d$ také, že

$$(h_t,f_{t,1},\ldots,f_{t,d}) \xrightarrow[t\to 0+]{} (h,f_1,\ldots,f_d) \in \mathbb{D}_0 \times E_0^d$$

v suprémovej norme a splňujúce $(C + th,U + tf_{t,1},\ldots,U + tf_{t,d}) \in D_\phi \times (E^-)^d$. Rozdeľme definíciu limity v Hadamardovej derivácii na dva členy

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_3(C + th_t,U + tf_{t,1},\ldots,tf_{t,d}) - \phi_3(C,U,\ldots,U)}{t} \\ & = \frac{(C + th_t)(U + tf_{t,1},\ldots,U + tf_{t,d}) - C}{t} = L_{t1} + L_{t2}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

kde prvý člen je

$$L_{t1} = \frac{C(U + tf_{t,1}, \ldots ,U + tf_{t,d}) - C}{t}$$

a druhý člen je

$$L_{t2} = h_t(U + tf_{t,1}, \ldots ,U + tf_{t,d}).$$

Rozpíšme najprv druhý člen:

$$\begin{aligned} L_{t2} = &[h_t(U + tf_{t,1}, \ldots ,U + tf_{t,d}) - h(U + tf_{t,1}, \ldots ,tf_{t,d})] \\ &+ h(U + tf_{t,1}, \ldots ,U + tf_{t,d}). \end{aligned}$$

Keďže $h_t \xrightarrow[t\to 0+]{} h$ rovnomerne, tak

$$[h_t(U + tf_{t,1}, \ldots ,U + tf_{t,d}) - h(U + tf_{t,1}, \ldots ,tf_{t,d})] \xrightarrow[t\to 0+]{} 0 \tag{4.22}$$

tiež rovnomerne. Zostáva $h(U+tf_{t,1}, \ldots ,U+tf_{t,d})$, o ktorom ukážeme, že konverguje rovnomerne k h. Keďže h je spojitá na uzavretom intervale $[0,1]^d$ je nutne aj rovnomerne spojitá na $[0,1]^d$. Zvoľme $\epsilon' > 0$ a z rovnomernej spojitosti nájdime $\delta > 0$. Vďaka tomu, že $f_{t,p} \xrightarrow[t\to 0+]{} f_p$ rovnomerne pre $p = 1, \ldots ,d$ a f_p sú obmedzené, tak existuje t_0 také, že pre $t < t_0$ sú $f_{t,p}$ rovnomerne obmedzené a $|tf_{t,p}(u_p)| < \delta/\sqrt{d}$ pre každé $u_p \in [0,1]$, $p = 1, \ldots ,d$. Potom

$$\left\|(u_1 + tf_{t,1}(u_1), \ldots ,u_d + tf_{t,d}(u_d))^T - (u_1, \ldots ,u_d)^T\right\| = \sqrt{\sum_{p=1}^{d} t^2 f_{t,p}^2(u_p)} < \delta$$

a z rovnomernej spojitosti získavame, že

$$|h(u_1 + tf_{t,1}(u_1), \ldots ,u_d + tf_{t,d}(u_d)) - h(\boldsymbol{u})| < \epsilon' \text{ rovnomerne v } \boldsymbol{u} \in [0,1]^d,$$

respektíve $h(U + tf_{t,1}, \ldots ,U + tf_{t,d}) \xrightarrow[t\to 0+]{} h$. Spolu s (4.22) nutne $L_{t2} \xrightarrow[t\to 0+]{} h$ rovnomerne na $[0,1]^d$.

Prvý člen L_{t1} rozpíšeme najprv pre $\boldsymbol{u} \in (0,1)^d$ pomocou viacrozmernej vety o strednej hodnote (viď. Veta A.35 v Apendixe).

$$\begin{aligned} L_{t1}(\boldsymbol{u}) &= \frac{C(u_1 + tf_{t,1}(u_1), \ldots ,u_d + tf_{t,d}(u_d)) - C(\boldsymbol{u})}{t} \\ &= \frac{\nabla C(\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})) \cdot t(f_{t,1}(u_1), \ldots ,f_{t,d}(u_d))}{t} \\ &= \sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u}))f_{t,p}(u_p) = \sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u})f_{t,p}(u_p) + r_t(\boldsymbol{u}), \end{aligned} \tag{4.23}$$

kde $r_t(\boldsymbol{u}) = \sum_{p=1}^{d} [\partial_p C(\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})) - \partial_p C(\boldsymbol{u})] f_{t,p}(u_p)$ a $\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u}) \in [0,1]^d$ leží na úsečke medzi $\boldsymbol{u}$ a $(u_1 + tf_{t,1}(u_1), \ldots ,u_d + tf_{t,d}(u_d))$.

Ukážeme, že hlavný člen (4.23) konverguje rovnomerne k $\sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u}) f_p(u_p)$. Použitím trojuholníkovej nerovnosti na normy, obmedzenosti copule hodnotou 1 a rovnomernou konvergenciou $f_{t,p} \xrightarrow[t\to 0+]{} f_p$, $p = 1,\ldots,d$ získavame

$$\begin{aligned}
&\sup_{\boldsymbol{u}\in(0,1)^d} \left| \sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u}) f_{t,p}(u_p) - \sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u}) f_p(u_p) \right| \\
&= \sup_{\boldsymbol{u}\in(0,1)^d} \left| \sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u}) \Big(f_{t,p}(u_p) - f_p(u_p) \Big) \right| \\
&\le \sum_{p=1}^{d} \sup_{\boldsymbol{u}\in(0,1)^d} \left| \partial_p C(\boldsymbol{u}) \Big(f_{t,p}(u_p) - f_p(u_p) \Big) \right| \\
&\le \sum_{p=1}^{d} \sup_{\boldsymbol{u}\in(0,1)^d} |f_{t,p}(u_p) - f_p(u_p)| \xrightarrow[t\to 0+]{} 0.
\end{aligned}$$

Musíme ešte ukázať, že zbytkový člen $r_t(\boldsymbol{u}) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$ rovnomerne. To je trochu technickejšie, pretože $\partial_p C$ nemusia byť spojité v krajných bodoch $u_p \in \{0,1\}$. Keďže f_p, $p = 1,\ldots,d$ sú obmedzené a $f_{t,p} \xrightarrow[t\to 0+]{} f_p$ rovnomerne, tak nájdime t_0 také, že pre $t < t_0$ sú $f_{t,p}$ rovnomerne obmedzené kladnou konštantou K, respektíve

$$\sup_{\substack{p\in\{1,\ldots,d\} \\ \boldsymbol{u}\in[0,1]^d}} |f_{t,p}(u_p)| < K. \tag{4.24}$$

Ďalej pracujme len s $t < t_0$. Zvoľme $\epsilon > 0$, zo spojitosti f_p, $p = 1,\ldots,d$ na uzavretom intervale plynie rovnomerná spojitosť a preto existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x,y \in [0,1]$ splňujúce $|x - y| < \delta$ je $|f_p(x) - f_p(y)| < \epsilon/4$ pre každé $p = 1,\ldots,d$. Teraz už pracujme s pevným p a voľme $y = 0$ a $y = 1$, pretože z predpokladov na množinu E_0 je $f_p(0) = f_p(1) = 0$, tak máme, že pre $x \in [0,1]$ splňujúce $|x| < \delta$, alebo $|x - 1| < \delta$ je $|f_p(x)| < \epsilon/4$. A preto pre $u_p \in [0,1]$ splňujúce $u_p < \delta$, alebo $u_p > 1 - \delta$ je

$$|f_p(u_p)| < \epsilon/4. \tag{4.25}$$

Z rovnomernej konvergencie $f_{t,p} \xrightarrow[t\to 0+]{} f_p$ nájdime $t_{1,p} < t_0$ také, že pre $t < t_{1,p}$ je

$$\|f_{t,p} - f_p\| < \epsilon/4. \tag{4.26}$$

Spojením (4.25) a (4.26) získavame, že pre $t < t_{1,p}$ a $u_p < \delta$, alebo $u_p > 1 - \delta$ je

$$\begin{aligned}
|f_{t,p}(u_p)| &= |f_{t,p}(u_p) - f_p(u_p) + f_p(u_p)| \\
&\le |f_{t,p}(u_p) - f_p(u_p)| + |f_p(u_p)| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že p-ty sčítanec zvyškového členu $r_t(\boldsymbol{u})$ je obmedzený ϵ-nom pre $u_p < \delta$, alebo $u_p > 1 - \delta$, pretože použitím obmedzenosť parciálnej derivácie copule jednotkou (viď. Lemma A.9 v Apendixe) máme:

$$\begin{aligned}
\Big| \left[\partial_p C(\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})) - \partial_p C(\boldsymbol{u})\right] f_{t,p}(u_p) \Big| &\le \Big| \partial_p C(\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})) f_{t,p}(u_p) \Big| + \Big| \partial_p C(\boldsymbol{u}) f_{t,p}(u_p) \Big| \\
&\le \Big| f_{t,p}(u_p) \Big| + \Big| f_{t,p}(u_p) \Big| \\
&\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Tento odhad platí pre $0 < u_p < \delta$, alebo $1 > u_p > 1 - \delta$, nezávisle na zvyšných hodnotách $u_q \in (0,1)$, $q \neq p$.

Aby sme ale získali rovnomernú konvergenciu, musíme ešte ukázať, že pre dostatočne malé t je p-ty sčítanec menší ako ϵ aj pre hodnoty $u_p \in [\delta, 1 - \delta]$.

Keďže $\partial_p C$ je spojitá na uzavretej množine $M_p := [0,1]^d \backslash \{u_p < \delta/2 \text{ alebo } u_p > 1 - \delta/2\}$, tak je nutne aj rovnomerne spojitá. Pre $\epsilon > 0$ volené vyššie nájdime z rovnomernej spojitosti $\delta_{1,p} > 0$ také, že pre každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M_p$ splňujúce $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta_{1,p}$ je $|\partial_p C(\boldsymbol{x}) - \partial_p C(\boldsymbol{y})| < \epsilon/K$.

Nájdime $t_{2,p} < t_{1,p}$ také, že pre každé $t < t_{2,p}$, $\boldsymbol{u} \in (0,1)^d$ je

$$|t f_{t,p}(u_p)| < \delta/2, \text{ a zároveň } \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})\| < \delta_{1,p}, \tag{4.27}$$

to môžeme vďaka (4.24) a definície $\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})$. Vďaka týmto voľbám pre $\boldsymbol{u} \in (0,1)^d$ splňujúce $u_p \in [\delta, 1 - \delta]$ a $t < t_{2,p}$ je

$$|u_p - z_{t,p}(\boldsymbol{u})| \leq |u_p - [u_p + t f_{t,p}(u_p)]| = |t f_{t,p}(u_p)| < \frac{\delta}{2}.$$

Inak vyjadrené, $z_{t,p}(\boldsymbol{u})$ nemôže byť od u_p ďalej než o $\delta/2$ a preto $\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u}) \in M_p$ (to je dôvod, prečo sme volili M_p o trochu väčšiu, aby sme zaručili, že sa doň dostaneme so $z_{t,p}(\boldsymbol{u})$ nezávisle na voľbe $\boldsymbol{u}$).

Následne pre voľbu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \in (0,1)^d$ s $u_p \in [\delta, 1 - \delta]$ a $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})$ je zrejme $\boldsymbol{u} \in M_p$ a práve sme ukázali, že aj $\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u}) \in M_p$. Taktiež vďaka (4.27) platí, že

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})\| < \delta_{1,p},$$

čím sú splnené podmienky rovnomernej spojitosti, takže

$$|\partial_p C(\boldsymbol{u}) - \partial_p C(\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u}))| < \epsilon/K.$$

Preto p-ty sčítanec zvyškového členu $r_t(\boldsymbol{u})$, kde $\boldsymbol{u} \in (0,1)^d$ a $u_p \in [\delta, 1 - \delta]$ splňuje

$$\Big| \left[\partial_p C(\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})) - \partial_p C(\boldsymbol{u})\right] f_{t,p}(u_p) \Big| \leq K \Big| \partial_p C(\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})) - \partial_p C(\boldsymbol{u}) \Big| < K \frac{\epsilon}{K} = \epsilon.$$

Tento odhad môžeme odvodiť pre každý člen $p = 1, \ldots, d$ zvlášť. Nakoniec zvoľme $t_3 = \min\{t_{2,p}, p = 1, \ldots, d\}$, potom pre $t < t_3$ je

$$\begin{aligned}
\sup_{\boldsymbol{u} \in (0,1)^d} |r_t(\boldsymbol{u})| &= \sup_{\boldsymbol{u} \in (0,1)^d} \left| \sum_{p=1}^{d} \left[\partial_p C(\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})) - \partial_p C(\boldsymbol{u})\right] f_{t,p}(u_p) \right| \\
&\leq \sum_{p=1}^{d} \sup_{\boldsymbol{u} \in (0,1)^d} \Big| \left[\partial_p C(\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})) - \partial_p C(\boldsymbol{u})\right] f_{t,p}(u_p) \Big| \\
&\leq \sum_{p=1}^{d} \Bigg\{ \sup_{\substack{\boldsymbol{u} \in (0,1)^d \\ u_p \in (0,\delta) \cup (1-\delta, 1)}} \Big| \left[\partial_p C(\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})) - \partial_p C(\boldsymbol{u})\right] f_{t,p}(u_p) \Big| \\
&\quad + \sup_{\substack{\boldsymbol{u} \in (0,1)^d \\ u_p \in [\delta, 1-\delta]}} \Big| \left[\partial_p C(\boldsymbol{z}_t(\boldsymbol{u})) - \partial_p C(\boldsymbol{u})\right] f_{t,p}(u_p) \Big| \Bigg\} \\
&< \sum_{p=1}^{d} \Big\{ \epsilon + \epsilon \Big\} = 2d\epsilon.
\end{aligned}$$

Tým sme ukázali rovnomernú konvergenciu L_{t1} na $(0,1)^d$. Ostáva ošetriť hraničné prípady, pokiaľ sa niektorá zložka rovná 0 alebo 1. Tých je konečne veľa, preto to nenaruší rovnomernú konvergenciu L_{t1}. Najprv sa zamerajme na hornú hranicu 1.

Zaveďme značenie pre hodnoty na hornej hranici na určenie, ktoré zložky sú rovné jednej. Nech $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{(p_1,\ldots,p_l)} \in [0,1]^d$, kde $u_p = 1$ pre $p \in \{p_1, \ldots, p_l\}$ a existuje aspoň jedno $u_q \in (0,1)$ pre $q \notin \{p_1, \ldots, p_l\}$. Člen $L_{t1}(\boldsymbol{u})$ ešte rozložme na dva sčítance

$$L_{t1}(\boldsymbol{u}) = \frac{C(u_1 + tf_{t,1}(u_1), \ldots, u_d + tf_{t,d}(u_d)) - C(\boldsymbol{u})}{t} = L_{t1}^{(1)}(\boldsymbol{u}) + L_{t1}^{(2)}(\boldsymbol{u}),$$

kde

$$L_{t1}^{(1)}(\boldsymbol{u}) = \frac{C((u_1 + tf_{t,1}(u_1), \ldots, u_d + tf_{t,d}(u_d))_{(p_1,\ldots,p_l)}) - C(\boldsymbol{u}_{(p_1,\ldots,p_l)})}{t},$$

$$\begin{aligned} L_{t1}^{(2)}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{t}\Big[&C(u_1 + tf_{t,1}(u_1), \ldots, u_d + tf_{t,d}(u_d)) \\ &- C((u_1 + tf_{t,1}(u_1), \ldots, u_d + tf_{t,d}(u_d))_{(p_1,\ldots,p_l)})\Big]. \end{aligned}$$

V podstate sme len pričítali a odčítali copulu C v hodnote $(u_1+tf_{t,1}(u_1), \ldots, u_d+tf_{t,d}(u_d))$ ale na pozíciách $p_1, \ldots, p_l$ sú dosadené jednotky. Tým sme získali copulu $C_0(\boldsymbol{v})$ (viď. Lemma A.10 v Apendixe) s $\boldsymbol{v} \in (0,1)^{d-l}$ a zložky $\boldsymbol{v}$ odpovedajú porade zložkám $\boldsymbol{u}$ rôznym od 1. Všetky predpoklady na zložky $\boldsymbol{v}$ zostávajú nezmenené a preto platí pre $L_{t1}^{(1)}$ rovnaký výsledok ako pre L_{t1} s $d-l$ zložkami namiesto d zložiek. Respektíve môžeme použiť nasledujúce úpravy, kde podrobnejší popis každého kroku je pod výrazom:

$$\begin{aligned} L_{t1}^{(1)}(\boldsymbol{u}) &\xrightarrow[t\to 0+]{} \sum_{p=1}^{d-l} \partial_p C_0(\boldsymbol{v}) f_p(v_p) \\ &= \sum_{q\notin\{p_1,\ldots,p_l\}} \partial_q C(\boldsymbol{u}) f_q(u_q) \\ &= \sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u}) f_p(u_p). \end{aligned}$$

V prvej rovnosti sme využili toho, že parciálne derivácie copule C_0 a C podľa príslušných zložiek $q \notin \{p_1, \ldots, p_l\}$ sa rovnajú:

$$\begin{aligned} \partial_p C_0(\boldsymbol{v}) &= \lim_{t\to 0} \frac{C_0(v_1, \ldots, v_p + t, \ldots, v_{d-l}) - C_0(\boldsymbol{v})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{C(u_1, \ldots, u_q + t, \ldots, u_d) - C(\boldsymbol{u})}{t} = \partial_q C(\boldsymbol{u}), \end{aligned}$$

pretože $\boldsymbol{u}$ má na príslušných pozíciách jednotky. A v poslednej rovnosti sme do sumy pridali aj členy $u_p : \ p \in \{p_1, \ldots, p_l\}$, pretože $f_p \in E_0$ a to znamená, že $f(u_p) = f(1) = 0$.

Člen $L_{t1}^{(2)}(\boldsymbol{u})$ môžeme odhadnúť zhora pomocou Lemmatu A.11 z Apendixu.

$$\begin{aligned} |L_{t1}^{(2)}(\boldsymbol{u})| &\leq \frac{\sum_{p\in\{p_1,\ldots,p_l\}} |(1 + tf_{t,p}(1)) - 1|}{t} \\ &= \sum_{p\in\{p_1,\ldots,p_l\}} |f_{t,p}(1))| \xrightarrow[t\to 0+]{} \sum_{p\in\{p_1,\ldots,p_l\}} |f_p(1))| = 0, \end{aligned}$$

nezávisle na voľbe $\boldsymbol{u}$. V dosadení sme použili to, že všetky zložky až na $p_1, \dots, p_l$ sú rovnaké v oboch sčítancoch $L_{t1}^{(2)}(\boldsymbol{u})$. Rozdielne zložky na pozíciach $p_1, \dots, p_l$ sú rovné $1 + tf_{t,p}(1)$ v prvom sčítanci a 1 v druhom.

Tým sme získali, že L_{t1} konverguje rovnomerne k $\sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u}) f_p(u_p)$ aj pre $\boldsymbol{u}$, ktoré má najviac $d-1$ zložiek rovných 1 a zvyšné ležia v $(0,1)$. Teraz sa zameriame na prípad, ak je aspoň jedna zložka vektoru $\boldsymbol{u}$ rovná nule.

Majme $\boldsymbol{u}$ ľubovoľné, ktorého p-ta zložka je rovná nule, potom postupne upravujme

$$|L_{t1}(\boldsymbol{u})| = \left| \frac{C(u_1 + tf_{t,1}(u_1), \dots, u_p + tf_{t,p}(u_p), \dots, u_d + tf_{t,d}(u_d)) - C(\boldsymbol{u})}{t} \right|. \tag{4.28}$$

Ďalej využijeme skutočnosť, že ak je niektorá zložka copule rovná nule, tak je celá copula nulová. Upravíme (4.28) na

$$\begin{aligned} &\left| \frac{C(u_1 + tf_{t,1}(u_1), \dots, 0 + tf_{t,p}(0), \dots, u_d + tf_{t,d}(u_d))}{t} \right| \\ &= \left| \frac{C(u_1 + tf_{t,1}(u_1), \dots, 0 + tf_{t,p}(0), \dots, u_d + tf_{t,d}(u_d))}{t} \right. \\ &\left. - \frac{C(u_1 + tf_{t,1}(u_1), \dots, 0, \dots, u_d + tf_{t,d}(u_d))}{t} \right|. \end{aligned}$$

Následne použijeme odhad z Lemmatu A.11 z Apendixu, a rovnomernú konvergenciu $f_{t,p}$:

$$\leq \frac{|tf_{t,p}(0)|}{t} = |f_{t,p}(0)| \xrightarrow[t \to 0+]{} |f_p(0)| = 0.$$

Podľa Lemmatu A.12 z Apendixu je pre $q \neq p$ nutne $\partial_q C(\boldsymbol{u}) = 0$ a $\partial_p C(\boldsymbol{u}) = 0$ z predpokladov vety. Vždy $\sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u}) f_p(u_p) = 0$ a preto

$$L_{t1}(\boldsymbol{u}) \xrightarrow[t \to 0+]{} \sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u}) f_p(u_p) \text{ rovnomerne.}$$

Ostáva posledný prípad pokiaľ $\boldsymbol{u} = (1, \dots, 1)$. Odhadneme člen $L_{t1}(\boldsymbol{u})$ použitím Lemmatu A.11 z Apendixu a následne použijeme rovnomernú konvergenciu $f_{t,p}$:

$$\begin{aligned} |L_{t1}(\boldsymbol{u})| &= \left| \frac{C(1 + tf_{t,1}(1), \dots, 1 + tf_{t,d}(1)) - C(1, \dots, 1)}{t} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{p=1}^{d} |1 + tf_{t,p}(1) - 1|}{t} \\ &= \sum_{p=1}^{d} |f_{t,p}(1)| \xrightarrow[t \to 0+]{} \sum_{p=1}^{d} |f_p(1)| = 0. \end{aligned}$$

Rovnako $\sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u}) f_p(u_p) = 0$, pretože v každom člene sumy je $f_p(1) = 0$. Teda opäť

$$L_{t1}(\boldsymbol{u}) \xrightarrow[t\to 0+]{} \sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u}) f_p(u_p) \text{ rovnomerne.}$$

Tým sme ošetrili všetky možnosti $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$, týchto možností je konečne veľa a spolu s výsledkom pre $L_{t2}(\boldsymbol{u})$ môžeme upraviť (4.21) na

$$L_{t1}(\boldsymbol{u}) + L_{t2}(\boldsymbol{u}) \xrightarrow[t\to 0+]{} h(\boldsymbol{u}) + \sum_{p=1}^{d} \partial_p C(\boldsymbol{u}) f_p(u_p) \text{ rovnomerne pre } \boldsymbol{u} \in [0,1]^d.$$

Retiazkové pravidlo
Množina $\mathbb{D}_0$ obsahuje funkcie spojité na $[0,1]^d$, ktoré sú rovné nule pokiaľ sú všetky dosadené hodnoty rovné jednej, alebo pokiaľ je aspoň jedna dosadená hodnota rovná nule. Hadamardova derivácia zobrazenia ϕ_1 nemá žiadne predpoklady na tangentnú množinu, preto sú triviálne splnené.

Množina $\phi_1'(\mathbb{D}_0)$ obsahuje prvky $(H,H_1,\ldots,H_d)$, kde $H \in \mathbb{D}_0$ a $H_p(u_p) = H(1,\ldots,1,u_p,1,\ldots,1)$ sú získané z funkcie H dosadením jednotiek do všetkých zložiek okrem p-tej. Tieto zobrazenia sú spojité a platí, že $H_p(1) = H_p(0) = 0$ pre $p = 1,\ldots,d$, tým splňuje požiadavky na tangentnú množinu E_0 zobrazenia ϕ_2 stanovených v (4.13).

Množina $\phi_2'(\phi_1'(\mathbb{D}_0))$ obsahuje prvky $(H,-H_1,\ldots,-H_d)$, kde $H \in \mathbb{D}_0$ a $-H_p$ sú spojité a splňujú $-H_p(1) = -H_p(0) = 0$, tým sú splnené požiadavky aj na tangentnú množinu zobrazenia ϕ_3 viď. začiatok sekcie dôkazu, kde sa derivuje Φ_3.

Je dobré povšimnúť si, že množiny $\phi_1'(\mathbb{D}_0)$ a $\phi_2'(\phi_1'(\mathbb{D}_0))$ sú ostré podmnožiny tangentných množín požadovaných v deriváciách ϕ_2 a ϕ_3. Napríklad $\phi_1'(\mathbb{D}_0) \subsetneq \mathbb{D}_0 \times (E_0)^d$,pretože v $\phi_1'(\mathbb{D}_0)$ sú prvky $(H,H_1,\ldots,H_d)$, kde dosadené funkcie odpovedajú prvej funkcii. Zatiaľ čo v $\mathbb{D}_0 \times (E_0)^d$ sú prvky $(H,G_1,\ldots,G_d)$, kde G_p nemusia mať nijaký vzťah s H. To ale nie je žiaden problém, pretože Hadamardova derivácia požaduje, aby platila limita (2.2) pre všetky prvky z tangentnej množiny. V takom prípade platia aj pre ľubovoľnú jej podmnožinu. Môžeme preto použiť retiazkové pravidlo a získavame (4.9).

□

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali zovšeobecnením klasickej vektorovej delta vety na prípad existencie totálneho diferenciálu bez spojitých parciálnych derivácií. Treba podotknúť, že situácie, kedy existuje totálny diferenciál, ale neexistujú spojité parciálne derivácie, zatiaľ nemajú veľké uplatnenie v praxi. Rovnako sme sa zaoberali situáciou nulových parciálnych derivácií do určitého rádu, pričom sme uviedli aj konkrétny príklad uplatnenia. Pri porovnávaní Hadamardovej a Fréchetovej derivácie sme formulovali a dokázali vetu, ktorá ukazuje kedy a za akých podmienok sú príslušné derivácie ekvivalentné. K tomu sme zostrojili príklad situácie, kde sú predpoklady porušené. Hadamardovu deriváciu sme úspešne použili v delta vete aplikovanej na výberové kvantily a mediánovú absolútnu odchýlku. Oproti predlohe z literatúry sme podrobnejšie rozpracovali jednotlivé kroky dôkazov s prípadnými zmenami. Okrem príkladov z literatúry sme použili funkcionálnu delta vetu na interkvartilové rozpätie a výberové kvantily v prípade AR(d) procesu. Pri snahe použiť funkcionálnu delta vetu na odhady momentov sme sa stretli s problémom, že príslušný funkcionál nemusí byť spojitý. To sme ukázali na dvoch príkladoch.

V poslednej kapitole sme sa zamerali na použitie Hadamardovej derivácie vo funkcionálnej delta vete pre copule. Odvodenie a dôkaz pôvodne publikovali Bücher a Volgushev (2013). V práci sme podrobne rozpísali každý krok odvodenia, pričom niektoré sme upravili a nahradili alternatívami. Do budúcna by bolo možné prácu rozšíriť o ďalšie užitočné odhady, prípadne sa zaoberať modifikáciou Hadamardovej derivácie pre použitie na momenty.

Zoznam použitej literatúry

BEUTNER, E. a ZÄHLE, H. (2010). A modified functional delta method and its application to the estimation of risk functionals. *Journal of Multivariate Analysis*, **101**(10), 2452–2463.

BILLINGSLEY, P. (1968). *Convergence of probability measures.* John Wiley & Sons, New York.

BRADLEY, R. C. (2005). Basic properties of strong mixing conditions. A survey and some open questions. *Probability Surveys*, **2**, 107–144.

BÜCHER, A. a VOLGUSHEV, S. (2013). Empirical and sequential empirical copula processes under serial dependence. *Journal of Multivariate Analysis*, **119**, 61–70.

DEHLING, H. a PHILIPP, W. (2002). Empirical process techniques for dependent data. In DEHLING, H., MIKOSCH, T. a SØRENSEN, M., editors, *Empirical process techniques for dependent data*, pages 4–113. Birkhäuser Boston.

DUDLEY, R. (2003). *Real analysis and probability.* Druhé vydanie. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 0-521-00754-2.

DURANTE, F. a SEMPI, C. (2015). *Principles of copula theory.* CRC Press, Boca Raton.

FAN, J. a YAO, Q. (2003). *Nonlinear time series: nonparametric and parametric methods.* Springer, New York. ISBN 0-387-95170-9.

JARNÍK, V. (1974). *Diferenciální počet I.* Šieste vydanie. Academia, Praha.

JARNÍK, V. (1984). *Diferenciální počet II.* Tretie vydanie. Academia, Praha.

JUREČKOVÁ, J., SEN, P. K. a PICEK, J. (2012). *Methodology in robust and nonparametric statistics.* CRC Press, Boca Raton. ISBN 978-1-4398-4069-6.

NELSEN, R. B. (2007). *An introduction to copulas.* Springer Science & Business Media, New York.

POLLARD, D. (1984). *Convergence of Stochastic Processes.* Springer, New York. ISBN 0-387-90990-7.

SERFLING, R. J. (2009). *Approximation theorems of mathematical statistics.* New York. John Wiley & Sons, New York. ISBN 0-471-21927-4.

VAN DER VAART, A. (2000). *Asymptotic statistics.* Tretie vydanie. Cambridge university press, New York. ISBN 0-521-78450-6.

VAN DER VAART, A. a WELLNER, J. A. (1996). *Weak convergence and empirical processes: with applications to statistics.* Springer Science & Business Media, New York. ISBN 0-387-94640-3.

A. Pomocné vety a tvrdenia

Lemma A.1. *Nech $r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) = O_P(1)$, pre $0 < r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, kde $\boldsymbol{T}_n$ sú k-rozmerné náhodné vektory a $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$. Potom pre $\forall m > 0$*

$$r_n^m \left\| \boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu} \right\|^m = O_P(1).$$

Dôkaz. Tvrdenie plynie priamo z definície O_P, zvoľme $\epsilon > 0$ ľubovoľne, nájdime $K < \infty$ tak, aby

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}\left(r_n \left\| \boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu} \right\| > K\right) < \epsilon,$$

potom stačí zvoliť $K' = K^m$ a platí

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}\left(\left\|r_n^m \left\| \boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu} \right\|^m\right\| > K^m\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}\left(r_n \left\| \boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu} \right\| > K\right) < \epsilon.$$

□

Lemma A.2. *Nech $r_n(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) = O_P(1)$, respektíve $\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu} = O_P(1/r_n)$, pre $0 < r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, kde $\boldsymbol{T}_n$ sú k-rozmerné náhodné vektory a $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$. Potom platí, že*

$$\boldsymbol{T}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \boldsymbol{\mu}.$$

Dôkaz. Z konvergencie po zložkách plynie konvergencia celého vektoru. Preto stačí, ak ukážeme, že každá zložka vektoru $\boldsymbol{T}_n$ konverguje v pravdepodobnosti k príslušnej zložke vektoru $\boldsymbol{\mu}$.
Z definície O_P, pokiaľ je celý vektor $O_P(1)$, potom je každá jeho zložka $O_P(1)$. Zvoľme $j \in \{1, \dots, k\}$, potom

$$r_n(T_{n,j} - \mu_j) = O_P(1).$$

Ďalej zvoľme deterministickú postupnosť $Y_n = 1/r_n$. Tá je zrejme $o(1)$ a zároveň $o_P(1)$. Použitím aritmetiky pre o_P a O_P (pozri Lemma A.14, bod (ii)) získame, že

$$Y_n \cdot r_n(T_{n,j} - \mu_j) = o_P(1) \cdot O_P(1) = o_P(1).$$

Po dosadení $Y_n = 1/r_n$ získavame

$$T_{n,j} - \mu_j = o_P(1).$$

□

Lemma A.3. *Nech X je náhodná veličina s distribučnou funkciou F_X a θ je konštanta. Potom náhodná veličina $Y = |X - \theta|$ má distribučnú funkciu*

$$F_Y(y) = F_X(\theta + y) - F_{X-}(\theta - y), \text{ pre } y \in \mathbb{R}^+,$$

kde $F_{X-}(x)$ značí limitu zľava v premennej x.

Dôkaz. Jedná sa o priame rozpísanie definície pre $y \geq 0$:

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(|X-\theta| \leq y) \\ &= \mathrm{P}(-y \leq X-\theta \leq y) = \mathrm{P}(\theta - y \leq X \leq \theta + y) \\ &= F_X(\theta + y) - F_{X-}(\theta - y).\end{aligned}$$

□

Lemma A.4. *Nech $X \sim$ Cauchy s hustotou:*

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Ďalej nech $n \in \mathbb{N}$, potom $Y = |X| \cdot \mathbb{I}\{|X| > n\}$ má distribučnú funkciu v tvare

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty,0), \\ \frac{2}{\pi}\arctan(n), & y \in [0,n), \\ \frac{2}{\pi}\arctan(y), & y \in [n,\infty). \end{cases}$$

.

Dôkaz. Distribučná funkcia Cauchyho rozdelenia je

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}, \text{ pre } x \in \mathbb{R}.$$

Odvoďme najprv distribučnú funkciu pre $Z = |X|$. Môžeme použiť Lemma A.3 s $\theta = 0$, spolu so spojitosťou a nepárnosťou F_X získavame pre $z \geq 0$:

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= F_X(z) - F_{X-}(-z) \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan(z) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan(-z) - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\arctan(z).\end{aligned}$$

Nakoniec odvodíme distribučnú funkciu $Y = |X| \cdot \mathbb{I}\{|X| > n\} = Z \cdot \mathbb{I}\{Z > n\}$. Pre $y < 0$ je

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y < 0) = \mathrm{P}(|X| \cdot \mathbb{I}\{|X| > n\} < y < 0) = 0.$$

Pre $y \in [0,n)$ je

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(Y = 0) = \mathrm{P}(Z \leq n) = \frac{2}{\pi}\arctan(n).$$

Pre $y \in [n,\infty)$ je

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(Z \cdot \mathbb{I}\{Z > n\} \leq y) = \mathrm{P}(Z \leq y) = \frac{2}{\pi}\arctan(y).$$

□

Lemma A.5. *Nech $X \sim Exp(1)$ a $n \in \mathbb{N}$, potom*

$$Y = X \cdot \mathbb{I}\{X < n \text{ alebo } X \geq e^n + n + 1\} + (e^n + n + 1) \cdot \mathbb{I}\{n \leq X < e^n + n + 1\}$$

má distribučnú funkciu v tvare

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty,0), \\ (1 - e^{-y}), & y \in [0,n), \\ (1 - e^{-n}), & y \in [n,e^n + n + 1), \\ (1 - e^{-y}), & y \in [e^n + n + 1,\infty). \end{cases}$$

.

Dôkaz. Distribučná funkcia $X \sim Exp(1)$ je $(1 - e^{-x})\mathbb{I}\{x \geq 0\}$, pre $x \in \mathbb{R}$. Prejdeme jednotlivo všetky prípady.
Pre $y < 0$ je

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y < 0) = \mathrm{P}(X < y < 0) = 0.$$

Pre $y \in [0,n)$ je

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(X \leq y) = (1 - e^{-y}).$$

Pre $y \in [n,e^n + n + 1)$ je

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(X < n) = (1 - e^{-n}).$$

Pre $y \in [e^n + n + 1,\infty)$ je

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(X \leq y) = (1 - e^{-y}).$$

□

Pomocné tvrdenia o rovnomernej konvergencii

Lemma A.6. *Nech $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia spojitá na intervale (a,b). Ďalej nech $[c,d] \subset (a,b)$, a pre $x \in (a,b)$ existuje $\xi_t(x)$ a $a_t \xrightarrow[t \to 0+]{} 0$ v $\mathbb{R}$ pričom $|\xi_t(x)| \leq |a_t|$. Potom platí $h(\xi_t(x) + x) \xrightarrow[t \to 0+]{} h(x)$ rovnomerne pre $x \in [c,d]$, respektíve v suprémovej norme.*

Dôkaz. Zvoľme $\delta_0 > 0$ splňujúce $[c - \delta_0,d + \delta_0] \subset (a,b)$. Vďaka spojitosti je h rovnomerne spojitá na $[c - \delta_0,d + \delta_0]$, prípadne, pre každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňujúce

$$\sup_{\substack{x \in [c - \delta_0, d + \delta_0] \\ x + y \in [c - \delta_0, d + \delta_0] \\ |y| < \delta}} |h(y + x) - h(x)| < \epsilon. \tag{A.1}$$

Nájdime t_0 také, že pre každé $t < t_0$ je $|a_t| < \delta$ a zároveň $|a_t| < \delta_0$. Tým zabezpečíme, že pre $x \in [c,d]$ a $y = \xi_t(x)$ je $x + y \in [c - \delta_0, d + \delta_0]$ a $|y| \leq |a_t| < \delta$. Potom (A.1) môžeme prepísať na

$$\sup_{x \in [c,d]} |h(\xi_t(x) + x) - h(x)| < \epsilon.$$

□

Lemma A.7. *Nech $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia spojitá na intervale (a,b). Ďalej nech $[c,d] \subset (a,b)$, a $a_t \xrightarrow[t \to 0+]{} 0$ v $\mathbb{R}$. Potom platí $h(a_t + \cdot) \xrightarrow[t \to 0+]{} h(\cdot)$ rovnomerne na $[c,d]$, respektíve v suprémovej norme.*

Dôkaz. Lemma je špeciálny prípad Lemmatu A.6 pre $\xi_t(x) = a_t$.

□

Lemma A.8. *Nech $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia spojitá na intervale (a,b). A $h_t \xrightarrow[t \to 0+]{} h$ rovnomerne na $\mathbb{R}$. Ďalej nech $[c,d] \subset (a,b)$, a $a_t \xrightarrow[t \to 0+]{} 0$ v $\mathbb{R}$. Potom platí $h_t(a_t + \cdot) \xrightarrow[t \to 0+]{} h(\cdot)$ rovnomerne na $[c,d]$, respektíve v suprémovej norme.*

Dôkaz. Rozpíšme

$$h_t(a_t + \cdot) = h_t(a_t + \cdot) - h(a_t + \cdot) + h(a_t + \cdot).$$

Keďže $h_t \xrightarrow[t \to 0+]{} h$ rovnomerne, tak prvé dva členy

$$[h_t(a_t + \cdot) - h(a_t + \cdot)] \xrightarrow[t \to 0+]{} 0.$$

rovnomerne pre $x \in \mathbb{R}$. Posledný člen konverguje rovnomerne na $[c,d]$ vďaka Lemmatu A.7.

□

Pomocné tvrdenia o copuliach

Nasledujúce Lemma ukazuje obmedzenosť parciálnych derivácií copulí. Jeho dôkaz možno nájsť v Nelsen (2007) na strane 13.

Lemma A.9. *Nech C je copula na $[0,1]^d$ a existuje parciálna derivácia podľa p-tej premennej $\partial_p C(\boldsymbol{u})$ na $(0,1)^d$. Potom táto parciálna derivácia leží v $[0,1]$, respektíve*

$$\partial_p C(\boldsymbol{u}) \in [0,1] \text{ pre } \boldsymbol{u} \in (0,1)^d.$$

Ďalej ukážeme niekoľko technických tvrdení o copuliach, ktoré sú užitočné v dôkazoch Kapitoly 4.

Lemma A.10. *Majme copulu C príslušnú d-rozmernému náhodnému vektoru $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)^\mathsf{T}$, ktorý má spojité marginálne rozdelenia.*

Ďalej nech sú $p_1, \ldots, p_l$ a $q_1, \ldots, q_{d-l}$ indexy, ktoré tvoria disjunktný rozklad všetkých indexov zložiek vektoru

$$\{p_1, \ldots, p_l, q_1, \ldots, q_{d-l}\} = \{1, \ldots, d\}.$$

Ak zadefinujeme zobrazenie $C_0 : [0,1]^{d-l} \to [0,1]$ pomocou copule C, pričom na pozíciách $p_1, \ldots, p_l$ dosadíme jednotky, tak C_0 tvorí copulu príslušnú náhodnému vektoru $\boldsymbol{X}_0 = (X_{q_1}, \ldots, X_{q_{d-l}})^\mathsf{T}$.

Dôkaz. Pre $p \in \{1, \ldots, d\}$ označme $U_p = F_p(X_p)$, rovnako ako v Lemmatu 11 v Kapitole 4. Potom podľa toho istého Lemmata copula C príslušná vektoru $\boldsymbol{X}$ je distribučná funkcia náhodného vektoru $\boldsymbol{U} = (U_1, \ldots, U_d)$ a copula C_0' príslušná náhodnému vektoru $\boldsymbol{X}_0$ je distribučná funkcia $\boldsymbol{U}_0 = (U_{q_1}, \ldots, U_{q_{d-l}})$. Distribučná funkcia $\boldsymbol{U}_0$ je marginálna distribučná funkcia $\boldsymbol{U}$, ktorú získame práve dosadením jednotiek do C na príslušné pozície. Respektíve $C_0' = C_0$.

□

Dôkaz nasledujúceho Lemmata možno nájsť v Durante a Sempi (2015) ako Vetu 1.5.1.

Lemma A.11. *Nech C je copula na $[0,1]^d$, potom pre ľubovoľné $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in [0,1]^d$ platí*

$$|C(\boldsymbol{u}) - C(\boldsymbol{v})| \leq \sum_{p=1}^{d} |u_p - v_p|.$$

Lemma A.12. *Nech C je copula na $[0,1]^d$ a existuje parciálna derivácia $\partial_p C(\boldsymbol{u})$ podľa premennej $p \in \{1, \ldots, d\}$ na $\{\boldsymbol{u} \in [0,1]^d,\ u_p \in (0,1)\}$. Potom pre ľubovoľné $\boldsymbol{v} \in \{\boldsymbol{u} \in [0,1]^d,\ u_p \in (0,1)\}$ také, že pre $q \neq p$ je $v_q = 0$ platí $\partial_p C(\boldsymbol{v}) = 0$.*

Dôkaz. Tvrdenie plynie z definície parciálnej derivácie:

$$\partial_p C(\boldsymbol{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{C(v_1, \ldots, v_p + t, \ldots, v_d) - C(\boldsymbol{v})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0,$$

pretože copula je rovná nule, pokiaľ je ktorákoľvek zložka z dosadeného vektoru nulová.

□

Vety a definície o konvergencii náhodných veličín

Nasledujúca veta je prevzatá z knihy van der Vaart (2000), kde ju možno nájsť ako Vetu 2.3.

Veta A.13. *(O spojitom zobrazení)*
Nech $\boldsymbol{X}_n$, $\boldsymbol{X}$ sú k-rozmerné náhodné vektory a $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ je spojité na $C \subset \mathbb{R}^k$. Ďalej nech $\mathrm{P}(\boldsymbol{X} \in C) = 1$, potom platí

- $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} \boldsymbol{X}$ *implikuje* $g(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow[n \to \infty]{d} g(\boldsymbol{X})$,

- $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} \boldsymbol{X}$ *implikuje* $g(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} g(\boldsymbol{X})$,
- $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \boldsymbol{X}$ *implikuje* $g(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} g(\boldsymbol{X})$.

Nasledujúce lemma spolu so zavedením symbolov o_P a O_P možno nájsť v knihe van der Vaart (2000) na stranách 12 a 13, prípadne sa jedná o priame zovšeobecnenia.

Lemma A.14. *(Aritmetika o_P a O_P)*
Pre symboly o_P a O_P platia nasledujúce vzťahy.

(i) $o_P(1) + o_P(1) = o_P(1)$

(ii) $o_P(1)O_P(1) = o_P(1)$

(iii) $o_P(1) + O_P(1) = O_P(1)$

(iv) $o_P(1) + o(1) = o_P(1)$

(v) $O_P(1) + O(1) = O_P(1)$.

Definícia A.15. *(Konvergencia v distribúcii na normovaných lineárnych priestoroch)*
Nech $X_n : \Omega_n \to \mathbb{D}$ sú merateľné zobrazenia, $X : \Omega \to \mathbb{D}$ je merateľné zobrazenie, kde $\mathbb{D}$ je normovaný lineárny priestor. Pokiaľ pre každú obmedzenú spojitú funkciu $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ platí

$$\mathsf{E}\, f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathsf{E}\, f(X).$$

*Potom hovoríme, že X_n **konverguje v distribúcii** k X, značíme*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X.$$

Vetu A.16, ktorá ukazuje vzťah konvergencie v pravdepodobnosti a distribúcii, možno nájsť vo všeobecnejšej podobe v knihe van der Vaart (2000) ako Vetu 18.10. Vetu používame na normované lineárne priestory s metrikou indukovanou normou (pozri začiatok Sekcie 2.2.1).

Veta A.16. *(Rozšírená veta o vzťahu konvergencií)*
Majme $\mathbb{D}$ metrický priestor a zobrazenia $X_n : \Omega_n \to \mathbb{D}$. Ďalej nech $c \in \mathbb{D}$ je konštanta. Potom

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} c \text{ práve vtedy, keď } X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P^*} c.$$

Nasledujúcu vetu, o spojitom zobrazení, možno nájsť vo van der Vaart (2000) ako Vetu 18.11, v znení sa používa zovšeobecnená definícia konvergencie v distribúcii na normovaných lineárnych priestoroch (viď. Definícia 8). Jedná sa o zovšeobecnenie vety o spojitom zobrazení.

Veta A.17. *(Rozšírená veta o spojitom zobrazení)*
Majme $\mathbb{D}$ a $\mathbb{E}$ metrické priestory, nech $\mathbb{D}_n \subset \mathbb{D}$ a $g_n : \mathbb{D}_n \to \mathbb{E}$ splňujú, že pokiaľ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, kde $x_n \in \mathbb{D}_n$ pre každé n a $x \in \mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$, tak $g_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)$, kde $g : \mathbb{D}_0 \to \mathbb{E}$. Ďalej nech X_n sú zobrazenia s hodnotami v $\mathbb{D}_n$, X je merateľné zobrazenie s hodnotami v $\mathbb{D}_0$ a $g(X)$ je merateľné zobrazenie s hodnotami v $\mathbb{E}$. Potom

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} X \text{ implikuje } g_n(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} g(X).$$

Ďalej uvádzame Centrálnu limitnú vetu. Znenie aj s dôkazom vety možno nájsť v knihe Dudley (2003) na strane 306.

Veta A.18. *(Centrálna limitná veta)*
Nech $\boldsymbol{X}_1, \ldots \boldsymbol{X}_n$ je náhodný výber k-rozmerných vektorov so strednou hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a konečnou rozptylovou maticou Σ. Potom platí

$$\sqrt{n}(\overline{\boldsymbol{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathsf{N}_k(\boldsymbol{0}_k,\Sigma).$$

Nasledujúca veta je prevzatá z knihy van der Vaart (2000), kde ju možno nájsť ako Slutského Lemma 2.8 spolu s komentárom za lemmatom.

Veta A.19. *(Cramér-Slutsky)*
Nech $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \boldsymbol{X}$, kde $\boldsymbol{X}_n$, a $\boldsymbol{X}$ sú k-rozmerné náhodné vektory. Rovnako $\boldsymbol{Y}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \boldsymbol{K}$, kde $\boldsymbol{Y}_n$ sú k-rozmerné náhodné vektory a $\boldsymbol{K}$ je vektor konštánt. Ďalej nech $\mathbb{Z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mathbb{Z}$, kde $\mathbb{Z}_n$ sú $m \times k$ rozmerné náhodné matice a $\mathbb{Z}$ je konštantná matica. Potom platí

- $\mathbb{Z}_n\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathbb{Z}\boldsymbol{X}$,
- $\boldsymbol{X}_n + \boldsymbol{Y}_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \boldsymbol{X} + \boldsymbol{K}$.

Portmanteauovo lemma, uvedené nižšie, možno nájsť vo van der Vaart (2000), vo všeobecnejšom znení označené ako Lemma 2.2.

Lemma A.20. *(Portmanteau)*
Pre náhodné vektory $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}_n$ sú nasledujúce podmienky ekvivalentné

- $F_n(\boldsymbol{x}) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(\boldsymbol{x})$, *vo všetkých bodoch spojitosti $F(\boldsymbol{x})$, kde $F_n(\boldsymbol{x})$ a $F(\boldsymbol{x})$ značia porade distribučné funkcie $\boldsymbol{X}_n$ a $\boldsymbol{X}$.*
- $\mathsf{E}\, f(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathsf{E}\, f(\boldsymbol{X})$ *pre všetky obmedzené spojité funkcie f.*

Zavedenie Brownovho mostu, ktoré uvádzame v nasledujúcich troch definíciách, možno nájsť v knihe Dudley (2003) na stranách 445 a 446.

Definícia A.21. *(Gaussovský proces)*
Nech T je množina indexov. Potom povieme, že náhodný proces $\mathbb{G} := \{\mathbb{G}(t) : t \in T\}$ je Gaussovský proces, pokiaľ pre každú konečnú množinu indexov $t_1, \ldots ,t_d$ z T platí, že náhodný vektor $(\mathbb{G}(t_1), \ldots ,\mathbb{G}(t_d))^T$ má viacrozmerné normálne rozdelenie.

Definícia A.22. *(Centrovaný proces)*
Nech T je množina indexov, potom povieme, že náhodný proces $\mathbb{G} := \{\mathbb{G}(t) : t \in T\}$ je centrovaný, pokiaľ je stredná hodnota $\mathsf{E}\,\mathbb{G}(t)$ konštantne nulová.

Definícia A.23. *(Štandardný Brownov most)*
Centrovaný Gaussovský proces $\mathbb{G}(t)$ s $t \in [0,1]$, ktorý má spojité trajektórie, kovariačnú funkciu

$$\operatorname{cov}\Big[\mathbb{G}(s),\mathbb{G}(t)\Big] = s(1-t) \text{ pre } 0 \le s \le t \le 1,$$

a $\mathbb{G}(0) = \mathbb{G}(1) = 0$ s.j. nazveme štandardný Brownov most.

Analógia s mostom vzniká kvôli hodnotám v krajných bodoch $\mathbb{G}(0) = \mathbb{G}(1) = 0$.

Definícia A.24. *(F-Brownov most)*
Nech $\mathbb{G}(t)$, $t \in [0,1]$ je štandardný Brownov most a $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ je distribučná funkcia, potom F-Brownov most je definovaný ako

$$\mathbb{G}_F(x) := \mathbb{G}(F(x)),\ x \in \mathbb{R}.$$

Ďalej uvádzame za akých podmienok spĺňajú náhodné procesy α-mixing a β-mixing.

Definícia A.25. *(α-mixing)*
Majme postupnosť $\{X_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ náhodných veličín, povieme, že táto postupnosť je α-mixing (spĺňa α-mixing) pokiaľ

$$\alpha(n) := \sup\left\{|P(A \cap B) - P(A)P(B)| : A \in \mathcal{F}_1^k,\ B \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty,\ k \geq 1\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

kde $\mathcal{F}_a^b$ značí σ-algebru generovanú náhodnými veličinami $X_a, \ldots, X_b$.

Definícia A.26. *(β-mixing)*
Majme postupnosť $\{X_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ náhodných veličín, povieme, že táto postupnosť je β-mixing (spĺňa β-mixing) pokiaľ

$$\beta(n) := \mathsf{E} \sup\left\{\left|P(B|\mathcal{F}_1^k) - P(B)\right| : B \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty,\ k \geq 1\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

kde $\mathcal{F}_a^b$ značí σ-algebru generovanú náhodnými veličinami $X_a, \ldots, X_b$.

Vlastnosť α-mixing sa tiež nazýva silný mixing (*strong mixing*). Môžeme si všimnúť, že pokiaľ by boli X_k nezávislé, tak $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ a $\alpha(n) = 0$ pre každé n.

Vlastnosť β-mixing sa tiež nazýva absolútna regulárnosť (*absolutely regular*). Podobne ak by boli X_k nezávislé, tak $\mathrm{P}(B|\mathcal{F}_1^k) = \mathrm{P}(B)$ a $\beta(n) = 0$ pre každé n.

Poznámka Definície mixing-ov sú zavedené aj pre striktne stacionárne procesy na $\mathbb{Z}$, respektíve pre $\{Z_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Ekvivalentne stačí, aby príslušná kladná časť $\{Z_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ spĺňala nejakú definíciu mixing-u (Definície A.25 a A.26), potom nutne celý proces spĺňa príslušnú podmienku mixing-u (viď. Fan a Yao, 2003, strana 70, poznámka vii).

Donskerovu vetu v nasledujúcom všeobecnom znení možno nájsť vo van der Vaart (2000) ako Vetu 19.3.

Veta A.27. *(Donskerova veta)*
Nech $X_1, \ldots X_n$ je náhodný výber s distribučnou funkciou F. Potom postupnosť empirických procesov $\sqrt{n}(F_n - F)$ konverguje v distribúcii v priestore $D[\mathbb{R}]$ so suprémovou normou k náhodnému procesu $\mathbb{G}_F$, kde $\mathbb{G}_F$ označuje F-Brownov most.

Všeobecnejšiu verziu Donskerovej vety pre α-mixing možno nájsť v Dehling a Philipp (2002) strana 40.

Veta A.28. *(zovšeobecnená Donskerova veta)*
Nech $X_1, \dots X_n$ je striktne stacionárna postupnosť s distribučnou funkciou F, ktorá spĺňa α-mixing s rádom $\alpha(n) \ll n^{-6-\epsilon}$ pre nejaké $0 < \epsilon < 1$.

Označme $g_n(s) := \mathbb{I}[X_n \leq s] - F(s)$, potom kovariačná funkcia

$$\Gamma(s, s') := \mathsf{E}\, g_1(s)g_1(s') + \sum_{n\geq 2} \mathsf{E}\, g_1(s)g_n(s') + \sum_{n\geq 2} \mathsf{E}\, g_n(s)g_1(s')$$

je dobre definovaná pre každé s,$s' \in \mathbb{R}$. Navyše pre empirickú distribučnú funkciu F_n platí

$$\sqrt{n}(F_n - F) \xrightarrow[n\to\infty]{d^*} \mathbb{G},$$

kde $\mathbb{G}$ je centrovaný Gaussovský proces na $\mathbb{R}$ s kovariačnou funkciou $\Gamma(s, s')$.

Pokiaľ v predošlej vete uvažujeme náhodný výber, potom sú jej predpoklady na rád konvergencie splnené, pretože $\alpha(n) = 0$ pre každé n. Kovariačná funkcia sa podstatne zjednoduší, pretože po rozpísaní jej členov pre $s \leq s'$ je

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\, g_1(s)g_1(s') &= \mathsf{E}\, \mathbb{I}[X_1 \leq s]\mathbb{I}[X_1 \leq s'] - \mathsf{E}\, \mathbb{I}[X_1 \leq s]F(s') \\ &\quad - \mathsf{E}\, \mathbb{I}[X_1 \leq s']F(s) + F(s)F(s') \\ &= F(s) - F(s)F(s') - F(s)F(s') + F(s)F(s') = F(s)\big(1 - F(s')\big)\end{aligned}$$

a súčasne pre $i \neq j$ použijeme centrovanosť g_n a nezávislosť X_i a X_j:

$$\mathsf{E}\, g_i(s)g_j(s') = \mathrm{cov}(\mathbb{I}[X_i \leq s],\mathbb{I}[X_j \leq s']) = 0.$$

Spolu získavame, že $\Gamma(s, s') = F(s)\,(1 - F(s'))$ a to znamená, že pre náhodný výber je proces $\mathbb{G}$ priamo F-Brownov most rovnako ako v obyčajnej Donskerovej vete.

Vety a definície z matematickej analýzy

Vety s dôkazmi tejto sekcie možno nájsť v knihe Diferenciální počet II. Jarník (1984) kapitola VII.

Definícia A.29. *(Taylorov rozvoj)*
Majme funkciu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a $f^{(k)}(\boldsymbol{x}_0)$ (derivácia funkcie f rádu k) existuje. Potom Taylorov polynóm stupňa k funkcie f v $\boldsymbol{x}_0$ definujeme ako

$$T_k^{f,\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0, \dots, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$

Veta A.30. *(Peanov tvar zbytku)*
Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a f má spojité parciálne derivácie rádu k na okolí $\boldsymbol{x}_0$. Potom platí

$$f(\boldsymbol{x}) - T_k^{f,\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}) = o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|^k),\ \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0,$$

kde $T_k^{f,\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})$ je Taylorov polynóm funkcie f v $\boldsymbol{x}_0$ stupňa k.

Veta A.30 je uvedená ako cvičenie v Jarník (1984) na strane 417.

Definícia A.31. *(Totálny diferenciál)*
Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a existuje lineárne zobrazenie $L_f(\boldsymbol{x}_0; \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ splňujúce

$$\frac{f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{t}) - f(\boldsymbol{x}_0) - L_f(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{t})}{\|\boldsymbol{t}\|} \xrightarrow[\boldsymbol{t}\to\boldsymbol{0}]{} 0,$$

potom zobrazenie $L_f(\boldsymbol{x}_0; \cdot)$ nazývame totálnym diferenciálom funkcie f v $\boldsymbol{x}_0$.

Lemma A.32. *Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a funkcia f má v $\boldsymbol{x}_0$ totálny diferenciál L_f, potom existujú parciálne derivácie funkcie f v $\boldsymbol{x}_0$ a platí, že*

$$L_f(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{t}) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{t}.$$

Lemma A.33. *Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bode $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ spojité parciálne derivácie, potom má f v $\boldsymbol{x}_0$ totálny diferenciál.*

Nasledujúcu vetu preberáme z Diferenciální počet I. Jarník (1974) kapitola IX, Veta 133.

Veta A.34. *(Veta o strednej hodnote)*
Nech funkcia f je spojitá na intervale $[a,b]$ a má deriváciu na (a,b) potom existuje aspoň jedno $c \in (a,b)$ splňujúce

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Potrebujeme aj všeobecnejšiu verziu vety o strednej hodnote, ktorú možno nájsť v Jarník (1984) kapitola VII, Veta 182.

Veta A.35. *(Viacrozmerná veta o strednej hodnote)*
Nech funkcia $f : M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, kde M je otvorená množina, má parciálne derivácie na M. Ďalej nech úsečka $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ leží celá v M. Potom existuje $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ splňujúce:

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$