Posudok oponenta diplomovej práce

Názov: Delta metoda a její zobecnění
Autor: Bc. Ján Pavlech

Zhrnutie obsahu práce

Predložená diplomová práca sa zaoberá delta metódou, dôležitým nástrojom skúmania asymptotického rozdelenia transformácií náhodných veličín. Klasická delta metóda v $\mathbb{R}^k$ je predstavená v kapitole 1. Tam sú tiež skúmané dve jej rozšírenia: (i) na prípad, ak transformujúca funkcia g nemá spojité parciálne derivácie, a (ii) na prípad, keď sú prvé derivácie g nulové. V kapitole 2 je delta veta zavedená a dokázaná v abstraktnom normovanom lineárnom priestore, pomocou Hadamardovej derivácie. Táto silnejšia verzia delta vety je využitá v kapitole 3, kde je aplikovaná v priestoroch funkcií. Je odvodených niekoľko dôležitých dôsledkov, napr. Bahadurova reprezentácia empirických kvantilov. V záverečnej kapitole 4 je funkcionálna delta veta aplikovaná na odvodenie asymptotického výsledku Donskerovho typu pre empirickú kopulu.

Celkové hodnotenie práce

Téma práce. Tému práce hodnotím ako náročnú, ale zároveň zaujímavú a vhodnú.

Vlastný príspevok. Jedná sa o teoretickú prácu. Autor naštudoval a spracoval veľmi netriviálnu literatúru, a predviedol (zrejme) vlastné verzie niekoľkých dôležitých dôkazov. Za najzaujímavejšie považujem

- dôkaz delta vety v prípade, že prvé parciálne derivácie funkcie g sú nulové (veta 4),
- odvodenie asymptotického rozdelenia mediánovej absolútnej odchýlky (veta 10), a najmä
- detailné dôkazy Hadamardovskej diferencovateľnosti kvantilov (veta 9), a zobrazenia, ktoré, d-rozmernej distribučnej funkcii priradí kopulu (veta 12).

Matematická úroveň. Argumentácia je detailná a prehľadná, matematická úroveň je vysoká.

Práca so zdrojmi. Použité zdroje sú riadne citované. Z textu mi však nie je úplne jasné, či sú vety 5, 9 a 10 prevzaté z literatúry, alebo sa jedná o vlastné výsledky autora. Určite by bola zaujímavá širšia diskusia o tom, nakoľko sa využívanie priestoru $D[a, b]$ so suprémovou normou líši od štandardne používaných prístupov k odvodeniu týchto výsledkov.

Formálna úprava. Z formálneho hľadiska existuje priestor na zlepšenie. Text obsahuje nezanedbateľné množstvo preklepov, nejasného alebo konfliktného značenia, a typografických chýb. Celkove je však text dobre čitateľný, a napriek tomu, že problémy so značením a preklepy občas sťažujú pozorumenie argumentácii, dôkazy sú jasné a zrozumiteľné. Pre sprehľadnenie najmä obsiahlejších dôkazov by určite pomohli obrázky.

Špecifické pripomienky

1. V dôkaze vety 3 sa argumentuje, že g má *konečnú* m-tu deriváciu, a preto môžeme použiť vetu A.30. Táto veta ale predpokladá *spojitú* m-tu deriváciu g. Môžeme vetu A.30 v tejto situácii použiť?

2. Vo vete 3 stačil predpoklad existencie derivácie g, v jej viacrozmernej variante (veta 4) sa však už predpokladá spojitosť parciálnych derivácií g. Je možné vetu 4 formulovať aj bez tohto silnejšieho predpokladu?

3. Príklad 5: Nie je jasné, čo je mienené pod označením *interval*. Je $\mathbb{R} = [-\infty, \infty]$ interval, alebo nie?

4. Definícia 5: Hadamardova derivácia je zavedená, ale nie sú odvodené jej základné vlastnosti. Tie sú však bez dôkazov používané v priebehu práce (na str. 33 využívame jej linearitu, na str. 34 to, že diferencovateľnosť implikuje spojitosť, na str. 41 fakt, že Hadamardova derivácia spojitého lineárneho zobrazenia g je g). Tieto vlastnosti by bolo vhodné dokázať.

5. Definícia 5: Ak množina $\mathbb{D}_0$ všeobecne nemusí byť lineárnym podpriestorom $\mathbb{D}$, čo znamená *lineárne zobrazenie z* $\mathbb{D}_0$?

6. Mám problém s porozumením znenia vety 8. Podľa definície 5 je ϕ'_θ definované iba na $\mathbb{D}_0$. V (2.11) ale vyžadujeme, že ϕ'_θ je definované na celom $\mathbb{D}$, takže predpokladám, že tým máme nutne $\mathbb{D}_0 = \mathbb{D}$. Spojitosť ϕ'_θ by teda mala byť zaručená priamo z definície 5. V príklade 10 je však veta 8 využívaná trochu inak, a $\mathbb{D}_0 \neq \mathbb{D}$. Ďalej, čo znamená *merateľné zobrazenie* X do $\mathbb{D}_0$ (veta 8) v prípade, že $\mathbb{D}_0$ je ľubovoľná podmnožina $\mathbb{D}$? Akú σ-algebru na $\mathbb{D}_0$ uvažujeme?

7. Oceňujem zaujímavý príklad 9. Záver dôkazu je ale technicky nepresný. Ak uvažujeme A ľubovoľné, nemôžeme písať $\lambda(A)$, pretože A nemusí byť merateľná. Ide o detail, ale podobná nekorektná argumentácia sa v práci vyskytuje častejšie.

8. Nepotrebujeme pre dôkaz vety 9, aby (3.6) bolo $O(t)$ rovnomerne pre všetky $\xi \in [a, b]$?

9. Krok 3 dôkazu 9: Nie je mi jasné, čo znamená $\xi_{pt} - \xi_p \geq O(t)$. Ako je definovaný výraz $f \geq O(g)$?

10. Veta 10: Nepotrebujeme, aby $\mathbb{D}_0$ obsahovalo funkcie, ktoré sú všetky spojité na *rovnakom* okolí $m_F + m_G$? V znení vety 10 sa zdá, že nám stačí, aby každá funkcia z $\mathbb{D}_0$ bola spojitá na inom okolí tohto bodu. Ďalej, v dôkaze vety 10 využívame vetu 9 pre prípad intervalu $[a, b] = \mathbb{R}$, vo vete 9 sme ale predpokladali $a, b \in \mathbb{R}$. Je teda možné vetu 9 použiť?

11. Veta 10: Je možné odvodiť Bahadurovu reprezentáciu aj pre MAD, tak ako pre kvantil?

12. Začiatok str. 45: Ako z obmedzenosti kopule C plynie obmedzenosť jej derivácie $\partial_p C$?

13. Kapitola 4 je zaujímavá, pôsobí však neúplne. Diskusia je tu pomerne strohá, a chýba príklad využitia vety 12.

Niektoré formálne chyby

1. Číslované výrazy ako *Sekcia 1*, *Veta 2*, alebo *Príklad 3* sa v slovenskom jazyku zväčša nezačínajú veľkým písmenom. Slovensky sa píše *zvyškový*, nie *zbytkový*. Zväčša sa píše *kopula*, a nie *copula*.

2. Vo výraze pre limitu na r. 10, str. 9 sa využíva značenie $T_m^{g,\boldsymbol{\mu}}$, ktoré je zavedené až na str. 60. Vhodnejšie by bolo túto limitu rozpísať pomocou značenia zavedeného v dôkaze vety 4.

3. Transpozície vektorov sa občas píšu x^T, občas $x^\top$, občas chýbajú (koniec str. 3 alebo vo výraze pre $\boldsymbol{B}_n$ na str. 5). Limita funkcie g v 0 zľava sa v (3.3) označuje $g(0-)$, inde, napr. v (3.28), však $g_-(0)$. x' znamená miestami deriváciu x, miestami bod $x' \neq x$.

4. Vo vzorci na začiatku str. 7 chýba lim. Vo vzorci (1.10) chýba mocnina. Vo vzorci (2.6) má byť $a_{t_{n_l}}$. $\boldsymbol{X}$ v (2.8) nemá byť tučné. V (3.24) chýba zátvorka. V definícii X_i' v príklade 12 chýba absolútna hodnota. $\mathbb{G}_n^{-1}$ v (4.5) je inde označované ako G_n^{-1}. Str. 30, Podmienka 1: $\boldsymbol{U}_0$ ani $\boldsymbol{U}_{-1}$ nebolo definované. E je v dôkaze vety 12 značené aj $\mathbb{E}$. V (4.21) a (4.22) chýba U. V znení Lemmy A.4 a A.5 sú zbytočné bodky.

Záver

Najmä z formálneho hľadiska by sa text stále dal vylepšovať. Napriek tomu som však presvedčený, že sa jedná o výbornú a ďaleko nadštandardnú prácu. Rozhodne ju odporúčam uznať ako diplomovú prácu na MFF UK.

Stanislav Nagy
KPMS MFF UK
28. júla 2023