**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA**
**Univerzita Karlova**

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

Tomáš Macek

# Log-optimální přístup při sázení, složené jevy

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Michal Kupsa
Studijní program: Finanční a pojistná matematika
Studijní obor: MFPP

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ............ dne ............ ....................................

Podpis autora

Chtěl bych poděkovat Mgr. Michalu Kupsovi za cenné připomínky, ochotu i věnovaný čas při vedení mé diplomové práce.

Název práce: Log-optimální přístup při sázení, složené jevy

Autor: Tomáš Macek

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Michal Kupsa, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci se zabýváme log-optimálním přístupem při sázení. Cílem je maximalizovat sázkařův kapitál, a to v dlouhodobém horizontu. Během práce se propracujeme od základních případů až k problému zcela obecnému, přičemž úkolem je vždy získání log-optimální strategie sázení. Pro nejjednodušší případy k tomu využijeme propojení s teorií informace, pro další pak zformulujeme a dokážeme verzi Karush-Kuhn-Tuckerových podmínek vhodnou právě k log-optimálnímu přístupu při sázení. V práci se zaměříme především na stromové schéma sázek a odvodíme algoritmus pro získání log-optimální strategie libovolné sázkové příležitosti právě ze stromového schématu sázek, které pokrývá množství nejrůznějších sázkových příležitostí. Tento algoritmus následně využijeme k naprogramování aplikace v jazyce Python, která uživateli vypíše log-optimální strategii zadané sázkové příležitosti. Na závěr ověříme, že obdržené výsledky odpovídají Kellyho kritériu a ukážeme několik příkladů využití této práce.

Klíčová slova: Log-optimální přístup při sázení, složené jevy

Title: Log-optimal approach in betting, compound events

Author: Tomáš Macek

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Michal Kupsa, Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this Thesis we deal with the log-optimal betting approach. The goal is to maximize the gambler's wealth in the long term. In the course of the Thesis, we will work our way from the basic cases to a completely general problem, while the task is always to obtain a log-optimal betting strategy. For the simplest cases, we use the connection to information theory, and for others we will formulate and prove a version of the Karush-Kuhn-Tucker conditions suitable precisely for the log-optimal betting aproach. In this work, we focus primarily on the tree betting scheme and we will derive the algorithm for obtaining the log-optimal strategy of any betting opportunity from the tree betting scheme, which covers a large variety of betting opportunities. We will then use this algorithm to program an application in Python, which will print out the log-optimal strategy of a given betting opportunity to the user. Finally, we will verify that the obtained results correspond to the Kelly criterion and we will show several examples of the use of the Thesis.

Keywords: Log-optimal approach in betting, compound events

# Obsah

# Úvod

V této práci se budeme zabývat kurzovým sázením. Jelikož je cílem maximalizovat sázkařův kapitál v dlouhodobém horizontu, budeme využívat log-optimální přístup, jedná se totiž z dlouhodobého hlediska o nejlepší možnou strategii. Výhodou log-optimálního přístupu je také fakt, že sázkař, pokud není nucen na danou sázkovou příležitost vsadit celý svůj kapitál, nikdy nemůže zbankrotovat.

V první kapitole čtenáře seznámíme s log-optimálním přístupem. Vycházíme především z práce Cover a Thomas (2006a), odkud čerpáme také zavedené značení, které budeme využívat v celé práci. Oproti této knize však navíc ve větě 1 dokážeme konvergenci skoro jistě a také zformulujeme a dokážeme větu 2, která tvrdí, že výnos po dostatečně mnoha opakováních sázkové příležitosti při využití log-optimální strategie bude s pravděpodobností jedna vyšší, než při využití jakékoli jiné než log-optimální strategie. Dále jsme také oproti uvedené knize ve výpočtech uvažovali marži bookmakera. Značení pak poprvé využijeme na základním případu disjunktních sázkových možností za nutnosti prosázení celého kapitálu. Na tomto příkladu ukážeme propojení s teorií informace a získáme příslušnou log-optimální strategii, u které pak na závěr kapitoly ukážeme, že je výhodnější oproti strategii maximalizování střední hodnoty.

Pro řešení složitějších problémů budeme využívat obvyklý nástroj konvexní analýzy, a to verzi Karush-Kuhn-Tuckerových podmínek, zformulovanou na začátku druhé kapitoly právě k log-optimálnímu přístupu při sázení. Jako v manuálu řešení citované práce (viz Cover a Thomas (2006b)) uvedeme případ disjunktních sázkových možností bez nutnosti vsadit celý kapitál, avšak oproti uvedenému materiálu za pomoci KKT podmínek sami odvodíme a budeme interpretovat i výpočet log-optimální strategie. Tuto strategii poté porovnáme se strategií obdrženou v předešlé kapitole a také se strategií maximalizace jistého zisku, přičemž z obou porovnání vyjde získaná log-optimální strategie jako výhodnější.

Dále již v práci nevyužíváme žádné zdroje, odvozujeme totiž nové výsledky a zavádíme také vlastní značení. Ve třetí kapitole zavedeme schéma sázek a především stromové schéma sázek, které je pro tuto práci stěžejní, neboť lze s jeho pomocí vyjádřit množství nejrůznějších sázkových příležitostí, ale zároveň je možné souhrnně vyjádřit potřebné střední hodnoty z KKT podmínek pro libovolnou takovou sázkovou příležitost. V této kapitole také zjistíme log-optimální strategii pro případ, kdy sázková příležitost svým schématem odpovídá binárnímu stromu.

Hlavním výsledkem této práce je odvození algoritmu pro získání log-optimální strategie libovolné sázkové příležitosti splňující podmínky stromového schématu sázek a také naprogramovaná aplikace, která tento algoritmus aplikuje na zadanou sázkovou příležitost a uživateli vypíše log-optimální strategii. Výpočtům k tomu vedoucím se věnujeme v další části třetí kapitoly, byť už předchozí výpočty k tomuto výsledku postupně směřovaly. Abychom se neomezovali pouze na stromové schéma sázek, navrhneme také možnost, jak jakoukoli sázkovou příležitost ořezáváním méně výhodných možností převést právě do stromového schématu.

V závěrečné kapitole pak představíme aplikaci, kterou jsme naprogramovali v jazyce Python. Poté porovnáme obdržené závěry práce s Kellyho kritériem a na závěr ukážeme řešení několika praktických problémů, na kterých předvedeme využití postupů získaných v této práci i naprogramované aplikace.

# 1. Seznámení s log-optimálním přístupem

V této práci se budeme zabývat log-optimálním přístupem při sázení. Nejprve popíšeme princip log-optimálního přístupu a porovnáme jej s přístupem maximalizování střední hodnoty kapitálu. Je třeba také zmínit předpoklady, které u log-optimálního přístupu musíme uvažovat, přičemž rozebereme, jak je který předpoklad problematický vzhledem k aplikování poznatků z této práce do reality.

Základní situace je následující. Jsou dané jevy $\Omega_i$, $i \leq k$, s příslušnými pravděpodobnostmi $p_i$, na které je možné sázet s daným kurzem $o_i \geq 0$. Při sázení je důležité dobře odhadnout pravděpodobnosti $p_i$ a tomu pak přizpůsobit svou strategii. Můžeme si tedy problém rozdělit na dvě fáze, určení pravděpodobností $p_i$ (statistický odhad) a rozhodnutí na základě těchto hodnot. Ačkoliv první část problému je neméně podstatná, předmětem této práce bude pouze rozhodovací část problému. Ukážeme, že i při apriorní znalosti skutečných pravděpodobností, je samotné rozhodnutí netriviálním problémem, pro jehož řešení lze použít mnoho různých přístupů. My se soustředíme na log-optimální přístup, tedy maximalizaci střední hodnoty log-výnosu.

Na první pohled se může nabízet jako logická strategie maximalizování střední hodnoty výnosu, nikoliv log-výnosu, to ale v praxi znamená vsazení celého kapitálu na možnost s nejvyšším (relativním) očekávaným výnosem, tedy na možnost $i$ maximalizující $p_i o_i$. Při tomto přístupu je však problémem hrozba bankrotu. Log-optimální přístup využijeme pro dlouhodobou strategii sázení. Jak uvidíme později u Věty 2, jedná se z dlouhodobého hlediska o nejlepší strategii v tom smyslu, že výnos (i log-výnos) při její opakované aplikaci při nezávislé stejně rozdělené sekvenci závodů předčí s pravděpodobností 1 výnos z jakékoliv jiné opakované strategie. V tomto kompetitivním dlouhodobém kritériu tak předčí i strategii, která maximalizuje očekávaný výnos v každém jednotlivém závodě. To vše za předpokladu, že jediný kapitál, který může sázkař v budoucnu použít, je ten, který získal z předchozích sázek.

Pro budování teorie log-optimálního přístupu budeme předpokládat, že je sázkařův kapitál nekonečně dělitelný a zároveň že je možné sázet libovolnou částku. V praxi samozřejmě tyto předpoklady nejsou plně splněny, v České republice je obvykle možné vsadit sázku v minimální hodnotě 5 či 10 korun a nejmenší jednotkou jsou haléře. Přesto je však možné log-optimální přístup při sázení využít, neboť jednotky menší než haléře jsou zanedbatelné a sázky za méně než minimální povolené částky je možné také zanedbat či případně vsadit právě za povolená minima. Rozdíly oproti teoretickým výpočtům tak i v praxi bývají nepatrné. Bylo by také možné tyto odlišnosti zahrnout přímo do podmínek optimalizace. V práci od toho budeme abstrahovat, a to především protože se nejedná o výraznější komplikace pro použití v praxi a zbytečně by to komplikovalo vysvětlení i použití teoretických postupů.

## 1.1 Zavedení pojmů a značení, základní případ

Jak už jsme zmínili v úvodu, uvažujeme dané jevy $\Omega_i$, $1 \leq i \leq k$ (občas připustíme také index $i = 0$), s příslušnými pravděpodobnostmi $p_i$, na které je možné sázet s daným kurzem $o_i \geq 0$. To jsou naše sázkové možnosti. Variantu $i = 0$ budeme připouštět tehdy, může-li si sázkař část kapitálu ponechat, což odpovídá vsazení této části na jev jistý ($\Omega_0$) s kurzem $o_0 = 1$.

Náhodné veličiny

$$X_i = o_i \cdot \mathbb{I}\{\Omega_i\}, i \leq k,$$

kde $\mathbb{I}$ je charakteristická funkce daného jevu, reprezentují relativní výnosy z kapitálu vsazeného na možnost $i$ (jev $\Omega_i$). Sázkař má ovšem možnost rozdělit svůj kapitál a vsadit na více jevů současně, tedy kapitál $A \geq 0$ rozloží na části $A_i \geq 0$, $i \leq k$. Sázkařův absolutní výnos pak bude mít podobu $\sum_{i \leq k} A_i X_i$. Relativní výnos bude

$$S(b,X) = \frac{1}{A} \sum_{i \leq k} A_i X_i = \sum_{i \leq k} b_i X_i,$$

kde $b_i = \frac{A_i}{A}$, $i \leq k$, jsou relativní podíly počátečního kapitálu. Dále už budeme od absolutních hodnot abstrahovat. Bude nás tedy zajímat, jak se chová $S(b,X)$ v závislosti na výběru (relativního) rozložení sázek $\mathbf{b} = (b_i)_{i \leq k}$ z množiny

$$B = \{\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^k : b_i \in \mathbb{R}, b_i \geq 0, \sum_{i \leq k} b_i = 1\}.$$

Prvkům z $B$ budeme také jednoduše říkat rozložení sázek či strategie.

Tento matematický model pak pokrývá možnosti sázení na dostihové závody, fotbalové zápasy, ruletu či třeba prezidentské volby. Sázkové příležitosti nevylučují ani takový moment, kdy například nejsou ještě známí všichni prezidentští kandidáti nebo se z jiného důvodu na některý z jevů nedá vsadit.

Pro přehlednost definujme dva základní pojmy.

**Definice 1.** *Náhodnou veličinu $S(\boldsymbol{b},X) = \sum_{i \leq k} b_i X_i$, tedy kapitál sázkaře po realizaci náhodné veličiny $X = (X_i)_{i \leq k}$, nazýváme výnosem strategie $\boldsymbol{b}$. Náhodnou veličinu $\log S(\boldsymbol{b},X)$ pak budeme nazývat logaritmický výnos či log-výnos.*

Přirozeně budeme optimalizovat přes množinu $B$, tedy vybírat vhodnou strategii dle optimalizačních kritérií.

### 1.1.1 Očekávaný logaritmický výnos

Hlavním kritériem pro nás bude maximalizace očekávaného logaritmického výnosu.

**Definice 2.** *Očekávaný logaritmický výnos (očekávaný log-výnos) strategie $\boldsymbol{b}$ definujeme jako*

$$W(\boldsymbol{b}) = E \log S(\boldsymbol{b},X)$$

Taková strategie je výhodná z dlouhodobého hlediska. Řekněme, že jsou $\Omega_i$ odvozeny z nějaké sportovní události, která se opakuje každý rok a možné výsledky v dalších opakováních jsou stále stejně rozdělené, ovšem nezávislé na výsledcích v jiných letech. Máme tedy náhodné jevy $\Omega_{ij}$, $i \leq k$, $j \in \mathbb{N}$, a veličiny

$X_{ij} = o_i\mathbb{I}\{\Omega_{ij}\}$. Náhodné vektory $\mathbf{X}^{(j)} = (X_{ij})_{i\le k}$, $j \in \mathbb{N}$ pak tvoří nezávislou stejně rozdělenou posloupnost. Tedy $\mathbf{X}^{(j)}$ jsou vzájemně nezávislé kopie rozdělení $\mathbf{X}$. Představme si nyní, že v každém roce sázkař rozloží svůj kapitál, který tvoří výhry z předchozích let, stejným způsobem. Vybere tedy strategii $\mathbf{b} \in B$ a tento postup opakovaně aplikuje. Výnos $S_n(\mathbf{b})$ po $n$-tém roce tak bude splňovat rovnici

$$S_n(\mathbf{b}) = \sum_{i\le k} b_i S_{n-1}(\mathbf{b}) X_{in}.$$

Při předpokladu jednotkového vstupního kapitálu $S_0 = 1$ dostáváme

$$S_n(\mathbf{b}) = \prod_{j=1}^{n} \sum_{i\le k} b_i X_{ij}.$$

Neboli $S_n(\mathbf{b})$ je součinem veličin $s_j(\mathbf{b}) = \sum_{i\le k} b_i X_{ij}$, $j \le n$. Z předpokladů ovšem plyne, že jsou tyto veličiny vzájemně nezávislé. Každá z nich má stejné rozdělení jako $S(\mathbf{b},\mathbf{X})$. Podobně platí, že $\log s_j(\mathbf{b})$, $j \le n$, jsou vzájemně nezávislé a stejně rozdělené, s rozdělením stejným jako $\log S(\mathbf{b},\mathbf{X})$, navíc

$$\log S_n(\mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{n} \log s_j(\mathbf{b}).$$

Ze silného zákona velkých čísel pak plyne následující věta.

**Věta 1.** *Pro strategii $\boldsymbol{b} \in B$ platí*

$$\frac{1}{n}\log S_n(b) \to \mathsf{E}\log S(b,X) \quad \textit{skoro jistě.}$$

Pro úplnost je třeba dodat, že očekávaný log-výnos $\mathsf{E}\log S(b,X)$ může být nekonečný, konkrétně může nabývat hodnoty $-\infty$. V tu chvíli nemůžeme aplikovat klasický zákon velkých čísel. Ovšem takový případ nastane jen tehdy, pokud $S(\mathbf{b},\mathbf{X})$ bude rovno nule s nenulovou pravděpodobností. V takovém případě ovšem s pravděpodobností 1 bude $s_j(\mathbf{b}) = 0$ pro nějaké $j$ a hodnota $-\infty$ se objeví také v časové řadě $\log S_n(\mathbf{b})$. Věta tedy platí i v tomto případě, který odpovídá situaci, že má sázkař v každém roce nenulovou (stále stejnou) pravděpodobnost bankrotu $q$. Vzhledem k nezávislosti událostí v jednotlivých letech je pravděpodobnost bankrotu nejpozději v roce $n$ rovna $1-(1-q)^n$, což konverguje k jedné. Při takové situaci tedy sázkař jistě dříve či později zbankrotuje.

**Věta 2.** *Nechť $\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}' \in B$ jsou sázky takové, že $W(\boldsymbol{b}) > W(\boldsymbol{b}')$. Pak*

$$\frac{S_n(\boldsymbol{b})}{S_n(\boldsymbol{b}')} \to \infty \quad \textit{skoro jistě,}$$

*tedy pro každé $K > 0$,*

$$P\left(\inf_{j\ge n}\frac{S_j(\boldsymbol{b})}{S_j(\boldsymbol{b}')} > K\right) \to 1.$$

*Důkaz.* Budeme dokazovat $\log \frac{S_n(\mathbf{b})}{S_n(\mathbf{b}')} \to \infty$ s.j., což je ekvivalentní závěru věty. Platí

$$\log\frac{S_n(\mathbf{b})}{S_n(\mathbf{b}')} = n\left(\frac{1}{n}\log S_n(\mathbf{b}) - \frac{1}{n}\log S_n(\mathbf{b}')\right) \to \infty \quad \text{s.j.},$$

neboť z Věty 1 a z předpokladů věty víme, že

$$\left(\frac{1}{n}\log S_n(\mathbf{b}) - \frac{1}{n}\log S_n(\mathbf{b}')\right) \to (W(\mathbf{b}) - W(\mathbf{b}')) > 0 \quad \text{s.j.},$$

čímž jsme dokázali tvrzení věty.

□

Právě dokázaná věta ukazuje zajímavou věc, a to že v případě nezávislých stejně rozdělených sázkových příležitostí při opakování jedné dané strategie, bude sázkař nejúspěšnější, pokud si vybere strategii $\mathbf{b}$, která maximalizuje log-výnos jednotlivé sázky. V takovém případě bude i jeho výnos samotný dlouhodobě vyšší než výnos při jiné fixní strategii, a to s pravděpodobností rostoucí k jedné. Skoro jistě bude poměr výnosů větší než libovolně velká konstanta. Jedná se tedy o kompetitivní výhodu. S pravděpodobností 1 na tom od jisté chvíle bude sázkař lépe než jeho konkurent, který zvolil jinou strategii. To vše ale za předpokladu, že zvolenou strategii sázkař nemění. V případě proměnné strategie může být situace jiná. I tam je ovšem mnoho případů, kdy bude popsaná kompetitivní výhoda stále platná. Tomuto složitějšímu případu se ale v práci nevěnujeme.

Z našeho pohledu je tedy maximalizace dlouhodobého výnosu ekvivalentní úloze maximalizace očekávaného log-výnosu. Naše motivace k optimalizaci log-výnosu tedy není dána specifickou funkcí užitku z výnosu, ale komparativní výhodností takové strategie vzhledem k výnosu samotnému. V tomto směru argumentujeme stejně jako Kelly v článku Kelly (1956). Zároveň optimalizace log-výnosu explicitně nepracuje s omezením volatility výnosu nějakou předem danou mezí, která by byla odvozena ad hoc od preferencí sázkaře, přesto se ukazuje, že určitá averze k riziku je inherentně přítomna sama od sebe.

V dalším textu se tedy budeme věnovat maximalizaci očekávaného log-výnosu. Opět uveďme pro přehlednost definici.

**Definice 3.** *Maximální hodnota $W(\boldsymbol{b})$ přes všechny možné sázky $\boldsymbol{b} \in B$ se nazývá optimální očekávaný log-výnos* : $W^* = \max_{\boldsymbol{b}} W(\boldsymbol{b})$. *Strategii $\boldsymbol{b}$ maximalizující $W(\boldsymbol{b})$ nazýváme log-optimální strategií a značíme ji $\boldsymbol{b}^*$.*

### 1.1.2 Log-optimální strategie základního modelu

Než se budeme věnovat komplexnějším sázkovým příležitostem, začneme se základním případem, kdy uvažujeme $k$ disjunktních jevů, $\Omega_i$, $i \leq k$, jejichž sjednocení je jev jistý. Na tyto jevy je sázkař nucen vsadit celý svůj kapitál. V takovém případě lze úlohu přeložit do informačně teoretického rámce, kde dostaneme ekvivalentní úlohu na minimalizaci KL divergence. Tato úloha je popsána v Cover a Thomas (2006a).

Popisovat a analyzovat jej budeme, vzhledem k výsadnímu postavení v historii sázení, na příkladu koňských dostihů, kdy uvažujeme $k$ koní na startu dostihu, přičemž zavedené značení a názvosloví budeme dále v práci používat analogicky.

Mějme tedy sázkovou příležitost, kdy je možné vsadit na vítěze dostihu, na jehož startu je $k$ koní. Částku (podíl kapitálu) vsazenou na vítězství koně $i$ značíme $b_i$, přičemž kůň $i$ zvítězí s pravděpodobností $p_i$ a kurz na jeho vítězství je $o_i$. Jev, že zvítězí kůň $i$, označujeme $\Omega_i$. Jevy jsou vzájemně disjunktní a jejich sjednocení je jev jistý. Výnos a log-výnos má jednoduché rozdělení, konkrétně bude roven $b_i o_i$, respektive $\log b_i o_i$, pokud nastane jev $\Omega_i$. Očekávaný log-výnos je dán vzorcem

$$W(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{k} p_i \log b_i o_i.$$

Pokusíme se nyní zjistit log-optimální strategii sázení, tedy $\mathbf{b}$ maximalizující očekávaný log-výnos za uvažovaných podmínek pomocí teorie informace.

Nechť $X$ je diskrétní náhodná veličina s hodnotami v konečné množině $A$ s pravděpodobnostním rozdělením určeným vektorem $\mathbf{p} = (p_x)_{x \in A}$, tedy $p_x = \mathrm{P}(X = x), x \in A$. Zde i dále v práci bude $\log x$ značit přirozený logaritmus.

**Definice 4.** *Entropie diskrétní náhodné veličiny $X$ s hodnotami v konečné množině $A$ s pravděpodobnostním rozdělením daným vektorem $\boldsymbol{p}$ je definována jako*

$$H(X) = H(\boldsymbol{p}) = \mathsf{E} \log \frac{1}{\boldsymbol{p}} = - \mathsf{E} \log \boldsymbol{p} = - \sum_{i \in A} p_i \log p_i.$$

Jelikož složky vektoru $\mathbf{p}$ splňují $0 \leq p_i \leq 1$ a tedy také $\log p_i \leq 0$, platí

$$H(X) \geq 0.$$

Na vektor (či matici) z Def. 4 nahlížíme jako na pravděpodobnostní rozdělení, což ospravedlňuje zápis $- \mathsf{E} \log \mathbf{p}$.

V práci budeme využívat standardní konvenci algebraických operací z rozšířené reálné osy $\mathbb{R}^*$ využívané v teorii míry. Připomeňme především vztah

$$0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = 0,$$

který budeme často využívat v případě $0 \cdot \log 0 = 0$. Navíc budeme využívat konvenci

$$\log 0 = -\infty, \qquad \log \frac{a}{0} = \infty, \quad a > 0, \qquad 0 \cdot \log \frac{a}{0} = 0, \quad a \geq 0.$$

Nyní zavedeme pojem KL divergence (neboli Kullback-Leibnerovy divergence či relativní entropie), která představuje míru odlišnosti mezi dvěma rozděleními. Tato míra odlišnosti je vždy nezáporná (ovšem není symetrická).

**Definice 5.** *KL divergence (Kullback-Leibnerova divergence, relativní entropie) mezi dvěma pravděpodobnostními rozděleními náhodné veličiny $X$ s hodnotami v $A$ danými vektory $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ je definována jako*

$$D(\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}) = \mathsf{E}_p \log \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} = \sum_{i \in A} p_i \log \frac{p_i}{q_i}.$$

Připomeňme základní vlastnost KL divergence formou věty. Důkaz lze najít v Cover a Thomas (2006a).

**Věta 3** (Věta 2.6.3 v Cover a Thomas (2006a))**.** *Mějme dvě pravděpodobnostní rozdělení diskrétní náhodné veličiny $X$ nad $A$ daná vektory $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$. Pak*

$$D(\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}) \geq 0,$$

*přičemž*

$$D(\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}.$$

Souvislost těchto pojmů s optimalizací očekávaného log-výnosu ukazuje následující výpočet.

$$\begin{aligned} W(\mathbf{b}) &= \sum_{i=1}^{k} p_i \log(b_i o_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i \log(o_i p_i \frac{b_i}{p_i}) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i \log o_i + \sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i - \sum_{i=1}^{k} p_i \log \frac{p_i}{b_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i \log o_i - H(\mathbf{p}) - D(\mathbf{p}||\mathbf{b})) \leq \qquad (1.1) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} p_i \log o_i - H(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Z Věty 3 víme, že $D(\mathbf{p}||\mathbf{b}) \geq 0$, přičemž rovnost nastává při $\mathbf{p} = \mathbf{b}$. Rovnost v 1.1 a tedy také $\max_{\mathbf{b}} W(\mathbf{b})$, neboť ostatní členy již nezávisí na $\mathbf{b}$, nastane při $\mathbf{b} = \mathbf{p}$, neboli $\forall i \in \{1, \dots, k\} : b_i = p_i$. Tím jsme dokázali následující větu.

**Věta 4** (O proporčním sázení)**.** *Pokud jsou jevy $\Omega_i$, $i \leq k$, na které sázkař sází, navzájem disjunktní a jejich sjednocení je jev jistý a zároveň sázkař musí prosázet celý svůj kapitál, pak optimální očekávaný log-výnos nastane právě tehdy, když $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p}$. Platí*

$$W^*(\boldsymbol{b}) = W(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{k} p_i \log o_i - H(\boldsymbol{p}).$$

*Důkaz.* Větu jsme dokázali v odstavci před jejím zformulováním.

□

Rozložení sázky, které kopíruje rozložení pravděpodobností nazýváme proporčním sázením. Věta tedy říká, že za daných předpokladů je log-optimální sázení totožné s proporčním.

Zaveďme nyní ještě značení

$$M = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{o_i}}, \quad r_i = \frac{\frac{1}{o_i}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{o_i}} = \frac{M}{o_i}.$$

To znamená, že $r_i$ značí bookmakerův odhad reálné pravděpodobnosti $p_i$, tedy vektor $\mathbf{r}$ je bookmakerův odhad vektoru $\mathbf{p}$, který určuje rozdělení náhodné veličiny $X$, zatímco $M$ značí bookmakerovu marži. Pro $M < 1$ nazýváme kurzy subfair a dá se předpokládat bookmakerův zisk. Pro $M > 1$ říkáme, že jsou kurzy superfair, s takovými kurzy se ale ve skutečnosti příliš nesetkáme, neboť se v tomto případě dá očekávat zisk sázkaře. Spravedlivou variantou pak je případ $M = 1$, tedy když jsou kurzy fair.

Nyní se pokusíme vyjádřit očekávaný log-výnos za využití zavedeného značení:

$$
\begin{aligned}
W(\mathbf{b}) &= \sum_{i=1}^{k} p_i \log(b_i o_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} p_i \log(\frac{b_i}{p_i}\frac{p_i}{r_i} M) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} p_i \log \frac{p_i}{r_i} - \sum_{i=1}^{k} p_i \log \frac{p_i}{b_i} + \log M = \\
&= D(\mathbf{p}||\mathbf{r}) - D(\mathbf{p}||\mathbf{b})) + \log M
\end{aligned}
$$

Z tohoto výpočtu získáváme nový náhled na očekávaný log-výnos, a to že jej můžeme interpretovat také jako rozdíl mezi nepřesnostmi v odhadu reálných pravděpodobností mezi bookmakerem ($D(\mathbf{p}||\mathbf{r})$) a sázkařem ($D(\mathbf{p}||\mathbf{b})$), přičemž musíme vzít v potaz také $\log M$. Úlohou sázkaře je, jak již víme, maximalizování očekávaného log-výnosu, i odsud tedy snadno vidíme (za použití Věty 3), že nejlepší možná strategie sázení z hlediska log-optimality je $\mathbf{b} = \mathbf{p}$.

Aby sázkař z dlouhodobého hlediska vydělával, neboli ($S_n > 1$), musí podle Věty 1 platit $W(\mathbf{b}) > 0$. Zjednodušeně řečeno to znamená, že sázkař svým odhadem reálné pravděpodobnosti musí být lepší než bookmaker o více než logaritmus jeho marže.

## 1.2 Srovnání s maximalizací střední hodnoty

Nyní se ještě jednou zaměříme na porovnání log-optimálního přístupu oproti strategii maximalizování střední hodnoty. Z Věty 2 plyne, že jakákoli jiná strategie je dlouhodobě horší oproti log-optimálnímu sázení. Vysvětlíme tedy nyní, proč tomu tak je i u přístupu maximalizace střední hodnoty.

Vzhledem k linearitě střední hodnoty lze rychle nahlédnout, že v případě maximalizace střední hodnoty sázkař sází veškerý svůj kapitál na možnosti $\Omega_i$, které mají maximální očekávaný výnos $p_i o_i$. Těchto možností může být více, v takovém případě je z pohledu této strategie jedno, jak mezi nimi sázkař distribuuje kapitál. Označme takovou strategii $\mathbf{b}'$. Ve všech případech dosáhne stejného očekávaného výnosu

$$\mathsf{E}\ S(\mathbf{b}') = \max_i o_i p_i.$$

Předpokládejme nyní následující podmínky:

1. Sjednocení všech jevů, na které lze sázet a které mají nenulový kurz, je jev jistý.

2. Sjednocení všech jevů s maximálním $p_i o_i$ není jev jistý.

V tomto vcelku častém případě lze snadno nahlédnout, že log-optimální strategie bude dlouhodobě dominovat nad tou, která maximalizuje střední hodnotu. Dominancí myslíme větší dlouhodobý výnos, viz předchozí kapitola.

V opakovaných vzájemně nezávislých sázkových příležitostech povede opakování maximalizace střední hodnoty ke dvěma efektům: střední hodnota výnosu $S_n(\mathbf{b}')$ v čase $n$ bude maximální možná, bohužel se ale zároveň bude zvyšovat pravděpodobnost bankrotu. Tato pravděpodobnost půjde exponenciálně rychle k jedné. To zaručuje druhá podmínka zmíněná výše.

První podmínka zaručuje, že existuje strategie $\mathbf{b}$ taková, že $S_n(\mathbf{b})$ je skoro jistě nenulový, kladný (například $b_i = \frac{1}{k}$, $i \leq k$). Tedy log-výnos je diskrétní veličina skoro všude konečná, $W(\mathbf{b}) > -\infty$. Pro log-optimální strategii tedy plyne, že $W^* = W(\mathbf{b}^*) > 0$.

Dle Věty 2 bude log-optimální strategie skoro jistě zaručovat výrazně vyšší výnos než strategie přímé maximalizace očekávaného výnosu, ačkoliv očekávaný výnos po libovolně mnoha závodech bude mít druhá strategie maximální. Je to ovšem za cenu velkého rizika bankrotu. V reálné situaci bychom zřejmě preferovali spíše první, méně rizikový přístup.

Vyšší dlouhodobý výnos budeme pozorovat dokonce i v případě, že bude $W^*$ záporné. V takové chvíli půjde výnos $S_n(\mathbf{b}^*)$ exponenciálně rychle k nule, ovšem skoro jistě to nikdy nebude nula. Ovšem $S_n(\mathbf{b}')$ bude s čím dál větší pravděpodobností rovno přesně nule.

# 2. KKT podmínky log-optimality

Zatímco jsme se věnovali základnímu případu, veškeré značení, definice a věty jsme zformulovali tak, aby bylo platné bez ohledu na uvažované podmínky sázení. Proto vše můžeme bez problémů využít v dalších, komplikovanějších, případech.

Zřejmě největší nevýhoda základního případu je nutnost prosázet celý kapitál. Sázkař se tedy nemůže rozhodnout nesázet, pokud kurzy nejsou výhodné, a v některých případech se tedy vlastně snaží pouze minimalizovat svoji ztrátu. Proto se nyní zaměříme na podobný případ, kde přidáme navíc pouze možnost nechat si část kapitálu stranou. Jedná se o velmi podstatný rozdíl, neboť se z čistě teoretického problému dostáváme do reálné situace, kdy si sázkař může zvolit, zda na sázkovou příležitost bude vůbec sázet, nevsazenou část kapitálu budeme v této kapitole značit $b_0$.

Jak jsme dříve zmínili, log-optimální přístup je výhodný z hlediska dlouhodobého sázení v obecném případě. Díky možnosti nevsadit veškerý kapitál pak z Vět 1 a 2 plyne další velmi důležitá vlastnost log-optimální strategie, a to že při jejím využití sázkař nikdy nemůže zbankrotovat.

## 2.1 KKT podmínky pro log-optimální sázení

V první kapitole jsme ukázali jak najít log-optimální strategii ve specifickém případě, kdy sázkař sází na vzájemně disjunktní jevy. V obecném případě ovšem neumíme převést problém na minimalizaci KL divergence a musíme využít obvyklého nástroje konvexní analýzy, konkrétně Karush-Kuhn-Tuckerových podmínek zformulovaných v následující větě. Věta je přímou aplikací Věty 16.2.1 z Cover a Thomas (2006a) na soubor jednoduchých náhodných veličin $X_i = o_i \mathbb{I}\{\Omega_i\}$, $i \leq k$, proto ji uvádíme bez důkazu.

**Věta 5.** *Strategie $\boldsymbol{b}^* \in B$ je log-optimální právě tehdy, když splňuje následující podmínky:*

$$\mathsf{E}\,\frac{X_i}{S(\boldsymbol{b}^*)} = 1, \quad b_i^* > 0,$$
$$\mathsf{E}\,\frac{X_i}{S(\boldsymbol{b}^*)} \leq 1, \quad b_i^* = 0.$$

## 2.2 Případ s možností nesázet celý kapitál

Základním případem opět rozumíme sázku na vítěze dostihu, tedy vzájemně disjunktní jevy, ovšem nyní má sázkař k dispozici ještě možnost ponechat si část kapitálu stranou. Uvažujeme tedy ještě jistý jev $\Omega_0$ s kurzem $o_0 = 1$.

Naší úlohou je najít v zadaném problému log-optimální strategii. U základního případu jsme poměrně snadno vyjádřili očekávaný log-výnos pomocí značení z teorie informace. Pouze přidání možnosti ponechat si část kapitálu stranou však tento přístup znemožní, neboť jako argument logaritmu dostaneme součet $b_0$ a $b_i o_i$, což další úpravy nedovolí: $W(\mathbf{b}) = \mathsf{E}\log S(b) = \sum_{i=1}^{k} p_i \log(b_0 + b_i o_i)$. Možností, jak se zbavit součtu v logaritmu, by bylo stále uvažovat vektory $\mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{o}$, jen o dimenzi $k+1$, pokud bychom zadefinovali $p_0 = 1, o_0 = 1$ (dále bude uvažovat tyto rozšířené vektory). K získání log-optimální strategie by nám to však nepomohlo, protože by $\mathbf{p}$ již neurčovalo pravděpodobnostní rozdělení, $\sum_{i=0}^{k} p_i \neq 1$.

Proto k určení log-optimální strategie budeme využívat právě Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky zformulované ve Větě 5. Jedná se o velmi užitečný prostředek, neboť jsou tyto podmínky nutné i postačující. Na druhou stranu se nejedná o nástroj pro snadný přímý výpočet, protože jsou podmínky rozdělené podle toho, zda na možnost $i$ sázkař sází nebo ne. Proto každé drobné zkomplikování řešeného problému velmi výrazně zkomplikuje výpočet log-optimální strategie.

### 2.2.1 Výpočet výše sázky v případě vsazení

Začneme tím, že vyjádříme potřebné střední hodnoty:

$$\mathsf{E}\,\frac{X_0}{S(\mathbf{b}^*)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{b_0 + b_i o_i}, \qquad \mathsf{E}\,\frac{X_i}{S(\mathbf{b}^*)} = \frac{p_i o_i}{b_0 + b_i o_i}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Nyní můžeme začít rozebírat jednotlivé případy pro určení log-optimální strategie. Vidíme, že komplikovanější formu má střední hodnota u $X_0$, neboť obsahuje sumu $k$ podílů. Proto se nejprve zaměříme na $X_i$, konkrétně na případ, kdy na možnost $i$ sázkař nevsadí.

Pozn.: Pokud nebude uvedeno jinak (např. u indexování sumy), indexem $i$ je dále v této kapitole myšlena možnost, na kterou je možné vsadit, tedy $i \in \{1, \dots, k\}$. Možnost ponechání části kapitálu stranou budeme značit přímo indexem 0 (případně později $\lambda$).

$$b_i = 0 \quad \Rightarrow \qquad \frac{p_i o_i}{b_0 + b_i o_i} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad p_i o_i \leq b_0.$$

Získali jsme tedy podmínku pro případ, kdy sázkař na některou variantu sázkař nevsadí nic, resp. pravidlo, na které možnosti nic nevsadit. Součin $p_i o_i$ se ve výpočtech objevuje velmi často, neboť se jedná o očekávaný výnos při sázce celého kapitálu na variantu $i$. Podobně jako v případě maximalizace střední hodnoty je právě tento součin klíčový, proto budeme dále uvažovat, že jsou možnosti $1, \dots, k$ seřazeny tak, aby platilo

$$p_1 o_1 \geq p_2 o_2 \geq \cdots \geq p_k o_k.$$

Dále nás zajímá, kolik má sázkař vsadit na možnost $i$, pokud na ni bude sázet:

$$b_i > 0 \quad \Rightarrow \qquad \frac{p_i o_i}{b_0 + b_i o_i} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p_i o_i = b_0 + b_i o_i \quad \Leftrightarrow \quad b_i = p_i - \frac{b_0}{o_i}.$$

**Definice 6.** *Výraz $b_0 + b_i o_i$ za předpokladu, že $b_i > 0$ a splňuje požadovanou rovnost z KKT podmínek, budeme dále nazývat potenciálním výnosem možnosti $i \in L$ a budeme jej označovat $r(i)$.*

V případě disjunktních sázkových možností platí $b_0 + b_i o_i = p_i o_i$. To znamená, že získanou podmínku výše pak lze interpretovat tak, že výnos ze sázky na možnost $i$ v případě výhry by byl záporný či nejvýš nulový.

Uveďme nyní variantu $b_0 = 0$, čímž se vlastně dostaneme zpět k základnímu modelu. Z výše uvedených podmínek pro $b_i$ dostaneme, že v takovém případě by měl sázkař vsadit na všechny možnosti $i = 1, \ldots, k$, a to podle očekávání proporčně: $b_i = p_i$. Dostali jsme tedy stejný výsledek jako v minulé kapitole. Situace však není totožná, neboť sázkař nyní vše vsadit nemusel. Aby byla tato strategie log-optimální, musí ještě platit podmínka, kterou opět získáme z KKT podmínek:

$$b_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{b_0 + b_i o_i} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{o_i} \leq 1. \tag{2.1}$$

To znamená, že sázkař vsadí celý kapitál pouze v případě, že se jedná o superfair (případně fair) kurzy. To je v souladu s logickou představou, neboť, jak jsme zmínili v první kapitole, superfair kurzy jsou výhodné pro sázkaře, a proto téměř není možné se s nimi v realitě setkat. V případě fair kurzů je pak otázkou volby, jestli na sázkovou příležitost nevsadit vůbec, prosázet veškerý kapitál proporčně (tedy strategií $b_i = p_i$) či zvolit jakoukoli konvexní kombinaci těchto dvou možností. Výsledek bude vždy stejný, a to že se sázkařův kapitál nezmění. U subfair kurzů, které tvoří drtivou většinu sázkových příležitostí ve skutečnosti, si tedy sázkař vždy nechá alespoň část kapitálu stranou.

### 2.2.2 Určení sázených možností, výpočet nesázené částky

Nyní využijeme poslední rovnici z KKT podmínek ve Větě 5 a pomocí ekvivalentních úprav dopočítáme hodnotu $b_0$:

$$\begin{aligned}
b_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad & \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{b_0 + b_i o_i} = 1 \\
& \sum_{i=1}^{t} \frac{p_i}{b_0 + p_i o_i - b_0} + \sum_{i=t+1}^{k} \frac{p_i}{b_0 + 0 \cdot o_i} = 1 \\
& \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{o_i} + \sum_{i=t+1}^{k} \frac{p_i}{b_0} = 1 \\
& \sum_{i=t+1}^{k} p_i = b_0 \cdot (1 - \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{o_i}) \\
& b_0 = \frac{1 - \sum_{i=1}^{t} p_i}{1 - \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{o_i}}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Pro upravení do rovnice 2.2 jsme využili rozdělení na možnosti, na které sázkař vsadí a na které sázet nebude, pak jsme mohli dosadit hodnoty $b_i$. K tomu jsme využili seřazení možností $i$ podle potenciálního výnosu $p_i o_i$. Víme totiž, že sázkař vsadí právě na možnosti $i : p_i o_i > b_0$. Index $t$ tak značí poslední možnost, na kterou sázkař ještě vsadí.

Posledním krokem je určení hranice $t$. K tomu zavedeme veličinu $C_j$, a to podle výsledné hodnoty $b_0$ tak, aby platilo $b_0 = C_t$. Položme tedy

$$C_j = \frac{1 - \sum_{i=1}^{j} p_i}{1 - \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{o_i}}, \quad j = 0, \ldots, k.$$

Pak sázkař vsadí na možnosti $i : p_i o_i > C_i$ a tedy

$$t = \max\{i : p_i o_i > C_{i-1}; 0\} = \min\{i : p_{i+1} o_{i+1} \leq C_i; k\}.$$

Hodnota $C_0 = 1$, která vychází z definice $C_j$, odpovídá tomu, že na sázkovou příležitost sázkař vůbec nebude sázet v případě, že pro žádnou možnost $i$ není potenciální výnos $p_i o_i > 1$ (ekvivalentně, platí $p_1 o_1 \leq 1$), neboli když výnos nebude vyšší než 1 při vsazení odpovídající částky $b_i$ pro žádný výsledek $i$ sázkové příležitosti. Pak logicky není důvod na žádnou příležitost sázet, protože to jednoduše pro sázkaře není výhodné. Naopak, pokud má některá z možností potenciální výnos větší než 1, pochopitelně na ni sázkař vsadí. Navíc, jak dokážeme ve Větě 6 níže, hodnota $C_j$ se tím sníží a tedy sázkař poté z hlediska log-optimality může chtít vsadit i na možnost, která má očekávaný výnos menší než 1. Dohromady se vsazením výhodnější varianty tím totiž zvyšuje očekávaný log-výnos a tedy stabilizuje zisk.

**Věta 6.** *Nechť jsou možnosti $i$ seřazeny sestupně podle potenciálního výnosu, tedy $p_1 o_1 \geq p_2 o_2 \geq \cdots \geq p_k o_k$. Pak pro $j = 1, \ldots, t$ platí $0 \leq C_j < C_{j-1}$.*

*Důkaz.* Postupujme pomocí matematické indukce. Ověřme nejprve případ $C_1 < C_0 = 1$. Jelikož platí $p_1 o_1 > 1 = C_0$, odkud $p_1 > \frac{1}{o_1}$, dostaneme

$$C_1 = \frac{1 - p_1}{1 - \frac{1}{o_1}} < 1 = C_0.$$

Pro indukční krok pak označme

$$x = 1 - \sum_{i=1}^{j-1} p_i, \quad y = 1 - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{o_i}, \quad r = p_j \quad \text{a} \quad q = \frac{1}{o_j},$$

přičemž předpokládáme, že platí $x > 0, y > x$. Pak je

$$C_{j-1} = \frac{x}{y} \quad \text{a} \quad C_j = \frac{x - r}{y - q}.$$

Protože na možnost $j$ sázkař sází ($j \leq t$), musí platit

$$p_j o_j = \frac{r}{q} > \frac{x}{y} = C_{j-1}, \quad \text{a tedy} \quad qx - ry < 0.$$

Počítejme

$$C_j - C_{j-1} = \frac{x - r}{y - q} - \frac{x}{y} = \frac{qx - ry}{y(y - q)} < 0,$$

neboť $y > 0$ z indukčního předpokladu a platí

$$y - q > x - \frac{y}{x} r \geq x - r = 1 - \sum_{i=1}^{j} p_i \geq 0,$$

kde jsme využili platnost $y \geq x$ a $q < \frac{y}{x} r$. Platnost

$$C_j = \frac{x - r}{y - q} \geq 0$$

je pak zřejmá, neboť jsme ukázali, že $y - q > x - r \geq 0$.

□

Získali jsme tedy log-optimální strategii pro model s $b_0$. Pro zpřehlednění se pokusíme shrnout v několika krocích, jak by měl sázkař postupovat, aby u sázkové příležitosti získal log-optimální strategii.

### 2.2.3 Algoritmus pro získání log-optimální strategie

1. Seřadit možnosti $i$ sázkové příležitosti sestupně podle potenciálního výnosu, tedy tak, aby platilo
$$p_1 o_1 \geq p_2 o_2 \geq \cdots \geq p_k o_k.$$

2. Vypočítat hodnoty
$$C_j = \frac{1 - \sum_{i=1}^{j} p_i}{1 - \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{o_i}}, \quad j = 0, \ldots, t, \qquad t = \max\{i : p_i o_i \leq C_{i-1}; 0\}.$$

3. Log-optimální strategie je $\mathbf{b}^* = (b_i)_{i=0,\ldots,k}, kde$
$$b_i = \begin{cases} C_t, \quad i = 0, \\ p_i - \frac{b_0}{o_i}, \quad i = 1, \ldots, t, \\ 0, \quad i = t+1, \ldots, k. \end{cases}$$

Pozn.: Také bychom mohli $b_i, i = 1, \ldots, k$ definovat společně jako
$$b_i = \max\{p_i - \frac{b_0}{o_i}; 0\}.$$

Výsledná strategie $\mathbf{b}^*$ vypadá poměrně komplikovaně a na první pohled není zřejmé, zda se opravdu jedná o strategii sázení, tedy zda platí $\sum_{i=0}^{k} b_i = 1$, proto to raději dokážeme:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} b_i = b_0 + \sum_{i=1}^{t} (p_i - \frac{b_0}{o_i}) = \\ = \sum_{i=1}^{t} p_i + b_0 \cdot (1 - \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{o_i}) = \\ = \sum_{i=1}^{t} p_i + \frac{1 - \sum_{i=1}^{t} p_i}{1 - \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{o_i}} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{o_i}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{t} p_i + 1 - \sum_{i=1}^{t} p_i = 1. \end{aligned}$$

Je třeba si uvědomit, že nemusí existovat jediná log-optimální strategie. Jak jsme uvedli v průběhu kapitoly, pokud se jedná o fair kurzy, je log-optimální strategií libovolná konvexní kombinace strategií nevsadit nic a vsadit celý kapitál proporčně. Výsledek je vždy stejný bez ohledu na výsledek sázkové příležitosti, a to že se kapitál sázkaře nezmění. V celé práci ve všech postupech a algoritmech volíme tu strategii, která dává přednost nadřazené možnosti, tedy v tomto případě vůbec nevsadit. Poznamenejme však, že volba ze všech log-optimálních strategií sázkařův kapitál nijak neovlivní.

### 2.2.4 Srovnání se základním případem bez $b_0$

Nyní pro získanou log-optimální strategii $\mathbf{b}^*$ vypočítáme očekávaný log-výnos (tedy optimální očekávaný log-výnos případu s možností nesázet celý kapitál) a porovnáme jej s optimálním očekávaným log-výnosem základního případu bez $b_0$, jenž pro tento účel označíme $W_0^*$.

$$
\begin{aligned}
W(\mathbf{b}^*) = W^*(\mathbf{b}) &= \max_{\mathbf{b}} \mathsf{E} \log S(b) = \max_{\mathbf{b}} \sum_{i=1}^{k} p_i \log(b_0 + b_i o_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{t} p_i \log(b_0 + p_i o_i - b_0) + \sum_{i=t+1}^{k} p_i \log(b_0 + 0 \cdot o_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{t} p_i \log p_i o_i + \sum_{i=t+1}^{k} p_i \log b_0 = \\
&= \sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i o_i + \sum_{i=t+1}^{k} p_i (\log b_0 - \log p_i o_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} p_i \log o_i - H(\mathbf{p}) + \sum_{i=t+1}^{k} p_i \log \frac{b_0}{p_i o_i} = \\
&= W_0^* + \sum_{i=t+1}^{k} p_i \log \frac{b_0}{p_i o_i} \geq W_0^* \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Získaný závěr je naprosto v souladu s logickou představou. Sázkař získal novou možnost pro volbu své strategie (ponechání libovolné části peněz stranou), kterou může, ale nemusí využít. Proto se očekávaný log-výnos nemůže snížit. Je třeba ještě dovysvětlit, proč platí nerovnost 2.3. Suma je pouze přes možnosti, na které sázkař nesází. Pro takové příležitosti, jak jsme dříve ukázali, platí $b_0 \geq p_i o_i$, čímž dostaneme nezápornost každého sčítance a tedy i celé sumy. Vidíme, že rovnost v 2.3 nastane v případě, kdy sázkař vsadí na všechny možnosti (tj. při $b_0 = 0$) či při fair kurzech, dohromady tedy pokud kurzy nejsou subfair, což v realitě nastane jen velmi zřídka. V praxi tedy sázkař téměř nikdy neprosází celý kapitál.

Získali jsme však také přímo informaci, o kolik se očekávaný log-výnos zvýší oproti základnímu případu. Zvýší se logicky právě o očekávaný rozdíl log-výnosů při nevsazení částky $b_0$ oproti vsazení i na možnosti s nízkým očekávaným výnosem ($p_i o_i \leq b_0$).

### 2.2.5 Srovnání s maximalizací jistého zisku

V průběhu výpočtu log-optimální strategie jsme také zjistili, že je někdy výhodné vsadit i na možnosti s očekávaným výnosem menším než 1. Dobrým příkladem tomu jsou superfair kurzy, byť se v realitě vyskytují jen velmi zřídka. V takovém případě se totiž jedná o arbitráž.

**Definice 7.** *Arbitráží nazveme sázkovou či investiční příležitost, při které má sázkař při vhodném rozložení sázek (portfolia) nulovou pravděpodobnost ztráty a kladnou pravděpodobnost zisku. To jest, sázkovou příležitost $X$ nazveme arbitráží, pokud existuje strategie $\boldsymbol{b}$ tak, že platí*

$$P\left(S(\boldsymbol{b}) < 1\right) = 0 \quad \wedge \quad P(S(\boldsymbol{b}) > 1) > 0.$$

Připomeňme značení a terminologii z první kapitoly

$$M = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{o_i}}, \quad r_i = \frac{\frac{1}{o_i}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{o_i}} = \frac{M}{o_i},$$

přičemž kurzy nazveme superfair, pokud $M > 1$, ekvivalentně $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{o_i} < 1$.

Pokud má sázkař k dispozici takové kurzy, stačí mu využít strategii $b_i = r_i$, díky které získá bez ohledu na výsledek sázkové příležitosti $X$ konstantní výnos

$$S(\mathbf{b}) = b_i o_i = \frac{M}{o_i} \cdot o_i = M > 1.$$

Taková strategie tedy garantuje sázkaři jistý předem daný zisk.

Log-optimální strategie v případě superfair kurzů bude $b_i = p_i$, neboť z vlastnosti $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{o_i} < 1$ plyne $p_i o_i > C_i, \quad i = 1, \ldots, k$. To odpovídá představě, že při velmi výhodných kurzech nemá sázkař důvod nevsadit vše a díky tomu, že vsadí na všechny možnosti, nemůže zbankrotovat, přestože prosází celý kapitál. Přestože z Věty 2 víme, že log-optimální strategie je z dlouhodobého hlediska nejlepší možnou strategií, porovnejme nyní obě strategie pomocí očekávaného log-výnosu, které pro tento účel označíme $W_a$ pro strategii využívající arbitráž, resp. $W^*$ pro log-optimální strategii:

$$\begin{aligned}
W^* - W_a = W(\mathbf{p}) - W(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^{k} p_i \log(p_i o_i) - \sum_{i=1}^{k} p_i \log(r_i o_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} p_i \log \frac{p_i o_i}{r_i o_i} = \sum_{i=1}^{k} p_i \log \frac{p_i}{r_i} \\
&= D(\mathbf{p}||\mathbf{r}) \geq 0,
\end{aligned}$$

z Věty 3, přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $\mathbf{p} = \mathbf{r}$, tedy když bookmaker odhadl reálnou pravděpodobnost naprosto přesně a obě strategie splynou. Doplníme ještě hodnoty očekávaných log-výnosů:

$$W_a = W(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{k} p_i \log(r_i o_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i \log M = \log M > 0,$$

$$W^* = W(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{k} p_i \log o_i - H(\mathbf{p}) \geq W_a = \log M > 0.$$

Ověřili jsme tedy i přímým výpočtem, že byť log-optimální strategie nemusí nutně sázkaři garantovat jistý zisk, je z dlouhodobého hlediska ještě výhodnější než strategie maximalizace jistého zisku.

# 3. Stromové schéma sázek

Doposud jsme se zabývali sázkovými příležitostmi, u kterých byly vypsané kurzy pouze na $k$ elementárních jevů. Ve druhé kapitole pak byla navíc možnost nevsadit libovolnou část kapitálu. V další sekci se budeme věnovat opět komplikovanějšímu problému. Zaveďme nejprve schéma sázek a stromové schéma sázek.

## 3.1 Zavedení schématu sázek

U sázkové příležitosti mohou být vypsané kurzy na mnoho různých možností. Budeme se nyní zabývat speciální situací, kdy tyto možnosti sázkové příležitosti tvoří stromovou strukturu. Nejprve však zaveďme obecné schéma sázek.

Jednotlivé možnosti sázkové příležitosti budeme indexovat konečnou posloupností prvků z nějaké konečné množiny $\Sigma$. Těmto posloupnostem říkáme slova a množině $\Sigma$ abeceda. Množinu všech slov značíme $\Sigma^*$ a zahrnujeme do ní i posloupnost délky nula, neboli prázdné slovo, pro které používáme symbol $\lambda$. Možnosti sázkové příležitosti jsou pak reprezentovány jazykem $L$, tedy konečnou množinou $L \subset \Sigma^*$.

Na množině $\Sigma^*$ budeme uvažovat částečné uspořádání, píšeme $u \preceq v$, pokud je $u$ prefixem slova $v$ ($v$ je prodloužením slova $u$), tedy pokud $\exists w \in L : v = uw$.

**Definice 8.** *Sázkové schéma je situace, kdy s každým slovem $w \in L$ je asociován náhodný jev $\Omega_w$, kurz $o_w \geq 0$, náhodná veličina $X_w = o_w \cdot \mathbb{I}\{\Omega_w\}$ a jeho pravděpodobnost $p_w = P(\Omega_w) \in [0,1]$ splňující*

$$\Omega_v \subseteq \Omega_u, \quad \forall u,v \in L, u \preceq v.$$

*Pokud navíc platí*

$$\Omega_u \cap \Omega_v = \emptyset, \quad \forall u,v \in L, u \not\preceq v \wedge v \not\preceq u,$$

*nazveme takové schéma sázek stromovým schématem sázek.*

Rozdíl mezi obecným a stromovým schématem sázek tedy spočívá v tom, že obecné pochopitelně nemusí splňovat podmínku stromového schématu, a tedy (z hlediska stromového schématu) alespoň jeden uzel má více otců, čímž je právě porušena druhá podmínka.

Se zavedeným značením tedy platí $\mathsf{E}(X_w) = p_w o_w, w \in L$. Dále budeme často využívat náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_w)_{w \in L}$. Definujme také množinu všech listů v této stromové struktuře:

$$L_l = \{w \in L : \nexists u,v \in L, u,v \neq \lambda \quad tak, že \quad u = wv\}.$$

Dále, předpokládáme, že

$$\sum_{w \in L_l} p_w = 1.$$

Případ $\sum_{w \in L_l} p_w < 1$ nenastane, neboť do stromu zahrnujeme všechny možné výsledky sázkové příležitosti, tedy i takové, na které není vypsán kurz.

Podstatnou roli budou hrát sázkové možnosti s nenulovým kurzem, přičemž jako možnosti s nulovým kurzem můžeme uvažovat například sázky, na které nejsou vypsané kurzy. Strategií, či rozložením sázek pak rozumíme rozklad jednotky $\mathbf{b} = (b_w)_{w \in L} \in B$, kde

$$B = \{\mathbf{b} = (b_w)_{w \in L} \quad \text{splňující} \quad \forall w \in L : b_w \geq 0 \wedge \sum_{w \in L} b_w = 1\}.$$

Jako výsledek sázkové příležitosti můžeme uvažovat realizaci náhodné veličiny $Y$ s diskrétním rozdělením na množině $L_l$. Výnos sázky $b$ pak můžeme vyjádřit následovně

$$S(\mathbf{b}) = \sum_{w \in L, w \preceq Y} b_w o_w = \sum_{w \in L} b_w X_w.$$

Připomeňme, že potenciálním výnosem možnosti $w \in L$ myslíme hodnotu

$$r(w) = b_\lambda + b_w o_w,$$

kde jako $b_w$ uvažujeme odpovídající hodnotu pro splnění KKT podmínek v případě $b_w > 0$, což v případě disjunktních jevů odpovídá $p_w o_w$.

Abychom shrnuli zavedenou stromovou strukturu, popíšeme ji nyní ještě jednou slovně. Kořen stromu odpovídá možnosti nevsadit libovolnou část kapitálu, což odpovídá pravděpodobnosti i kurzu rovnému jedné. Jedná se tedy vlastně o bezrizikovou sázku, mohli bychom proto také (jako bezrizikový investiční prostředek) uvažovat například státní dluhopis s konstantním výnosem a porovnávat výhodnost sázení na danou sázkovou příležitost oproti tomu. V uzlech jsou jednotlivé možnosti sázkové příležitosti s příslušným kurzem a pravděpodobností. Klíčovou roli pak sehrávají listy, neboť se jedná o elementární jevy, z nichž nastane právě jeden (nejedná se o nutný předpoklad, budovaná teorie by fungovala analogicky v případě teorie portfolia, avšak uvádíme jej pro příklad kurzového sázení, kterému se věnujeme). Jev odpovídající uzlu nastane právě tehdy, pokud nastane jev odpovídající některému z jeho synů, neboť předpokládáme, že pro uzel odpovídající slovu $w \in L$ platí

$$p_w = \sum_{u \in L} p_u,$$

tedy počítáme se všemi možnými výsledky sázkové příležitosti, i pokud na některou možnost není vypsaný kurz.

Pomocí stromové struktury můžeme interpretovat velké množství sázkových možností. Příklady jsou sázky na vítěze dostihu, prezidentských voleb, vítěze fotbalového zápasu i různé kombinace sázek v rámci jedné sázkové příležitosti, například současně na vítěze zápasu, brankový rozdíl, počet vstřelených gólů, rohových kopů, žlutých karet a sázku, zda daný hráč vstřelí gól. S možností nevsazení části kapitálu i bez ní. Pro využití stromové struktury navíc není problém, pokud na některou možnost sázkové příležitosti není možné vsadit, jako v případě prezidentských voleb, kdy ještě mohou přibýt další kandidáti.

Všechny případy, kterými jsme se doposud v práci zabývali, je tedy možné interpretovat jako stromy. Konkrétně odpovídaly stromu hloubky 1 s $k$ listy. Možnost nevsadit část kapitálu pak byla zahrnuta v kořeni stromu.

## 3.2 Binární strom hloubky dva

Uvažujme nyní finále fotbalové Ligy mistrů, kde se vítězem stane právě jeden z obou finalistů, utkání nemůže skončit remízou. Jsou však dva způsoby, jak vítězství dosáhnout, a to v základní hrací době nebo po prodloužení. Kurzy jsou tedy vypsány na všechny čtyři elementární jevy (vítězství obou týmů v základní hrací době, označme: $11, 22$, i po prodloužení: $10, 20$), pouze na vítěze (tedy možnosti sdružující vítězství daného týmu v základní hrací době i po prodloužení: $1, 2$) a sázkař má stále také možnost nevsadit libovolnou část kapitálu: $\lambda$. Používáme tedy jazyk $L = \{11,10,20,22,1,2,\lambda\}$, přičemž na všechny tyto možnosti je vypsán kurz ($o_\lambda = 1$). Využíváme zde standardní značení z kurzového sázení, kde bývá domácí tým značen jako 1, hostující jako 2 a remíza v základní hrací době jako 0. Slova z $L$ jsou tedy odvozena intuitivně a zároveň tak, aby odpovídala pravidlům stromové struktury zavedené výše. Pokud nebude uvedeno jinak, indexy $i$,$j$ budeme myslet pouze jednotlivé znaky či slova délky 1, ale pouze takové, které dávají smysl vzhledem k zavedenému značení, tedy $i$,$ij \in L$, pro přehlednost tento zřejmý předpoklad nebudeme vždy uvádět. Pokud budeme mluvit o slovech z $L$, kdy nebude nutné rozlišovat jednotlivé znaky či délku slova (a tedy hloubku odpovídajícího uzlu), budeme obvykle využívat symboly $u$,$v$,$w$ či později $z$. Uveďme pro úplnost některé základní vztahy:

$$\sum_{ij \in L} p_{ij} = 1, \quad \sum_{i \in L} p_i = 1, \quad \sum_{j:ij \in L} p_{ij} = p_i, \quad \sum_{w \in L} b_w = 1.$$

### 3.2.1 Výpočet výše sázky v případě vsazení

Úlohou je opět najít log-optimální strategii zadaného problému. Budeme tedy postupovat analogicky jako v minulé kapitole za použití KKT podmínek z Věty 5. Vyjádřeme nejprve potřebné střední hodnoty:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,\frac{X_\lambda}{S(\mathbf{b}^*)} &= \frac{p_{11}}{b_\lambda + b_1 o_1 + b_{11} o_{11}} + \frac{p_{10}}{b_\lambda + b_1 o_1 + b_{10} o_{10}} + \\
&\quad + \frac{p_{20}}{b_\lambda + b_2 o_2 + b_{20} o_{20}} + \frac{p_{22}}{b_\lambda + b_2 o_2 + b_{22} o_{22}} = \\
&= \sum_{ij \in L} \frac{p_{ij}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} \\
\mathsf{E}\,\frac{X_i}{S(\mathbf{b}^*)} &= \frac{p_{ii} o_i}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ii} o_{ii}} + \frac{p_{i0} o_i}{b_\lambda + b_i o_i + b_{i0} o_{i0}} = \\
&= \sum_{j:ij \in L} \frac{p_{ij} o_i}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}}, \quad i \in L \\
\mathsf{E}\,\frac{X_{ij}}{S(\mathbf{b}^*)} &= \frac{p_{ij} o_{ij}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}}, \quad ij \in L
\end{aligned}$$

Podobně jako v minulé kapitole začneme s rovnicemi, které náleží k elementárním jevům, neboť příslušné hodnoty $b_{ij}$ je možné snadno z rovnic vyjádřit. Nejprve vypočítejme, kolik má sázkař vsadit na možnost $b_{ij}$, pokud se taková sázka vyplatí.

$$b_{ij} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{ij} o_{ij}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b_{ij} = p_{ij} - \frac{b_\lambda + b_i o_i}{o_{ij}}.$$

Dále tedy budeme za předpokladu $b_{ij} > 0$ využívat vypočítanou hodnotu. Zaměřme se nyní na výpočet $b_i$. Jelikož je příslušná střední hodnota součet dvou zlomků, které odpovídají vítězství týmu $i$ v základní hrací době ($ii$), resp. po prodloužení ($i0$), pro vyjádření do co nejjednodušího tvaru výpočet $b_i$ rozdělíme na případy podle toho, zda sázkař sází také na $b_{ii}$, resp. $b_{i0}$ :

$$b_i > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j:ij \in L} \frac{p_{ij} o_i}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} = 1,$$

$$\begin{aligned}
b_{ii} = 0, b_{i0} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{p_{ii} o_i}{b_\lambda + b_i o_i} + \frac{p_{i0} o_i}{b_\lambda + b_i o_i} = 1 \\
&\qquad \frac{p_i o_i}{b_\lambda + b_i o_i} = 1 \\
&\qquad b_i = p_i - \frac{b_\lambda}{o_i}, \\
b_{ii} > 0, b_{i0} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{p_{ii} o_i}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ii} o_{ii}} + \frac{p_{i0} o_i}{b_\lambda + b_i o_i} = 1 \\
&\qquad \frac{o_i}{o_{ii}} + \frac{p_{i0} o_i}{b_\lambda + b_i o_i} = 1 \\
&\qquad b_i = p_{i0} \cdot \frac{o_{ii}}{o_{ii} - o_i} - \frac{b_\lambda}{o_i}, \\
b_{ii} = 0, b_{i0} > 0 \quad &\Rightarrow \quad b_i = p_{ii} \cdot \frac{o_{i0}}{o_{i0} - o_i} - \frac{b_\lambda}{o_i}, \quad \text{dle výpočtu výše.}
\end{aligned}$$

Opět jako v případě $b_{ij}$ budeme získanou hodnotu v dalších výpočtech často využívat. Poslední případ $b_{ii} > 0, b_{i0} > 0$ při současném uvažování $b_i > 0$ není třeba rozebírat, neboť nikdy nenastane. Jedná se o analogickou situaci, jaká nastala v minulé kapitole při fair kurzech, kdy sázkař může nevsadit nic, vsadit odpovídající obnosy na všechny možnosti či zvolit konvexní kombinaci těchto dvou možností. Při samotném výpočtu pomocí $C_k$, díky kterému sázkař dosáhne log-optimální strategie však využíváme volbu varianty nevsadit nic, což nyní odpovídá $b_{ij} = 0$ a $b_i > 0$.

K výpočtům samozřejmě také náleží podmínky pro danou variantu, které získáme z KKT podmínek od každé možnosti, na kterou sázkař nevsadí. Těmi se však z důvodu menší přehlednosti výpočtů nebudeme zabývat nyní, ale shrneme je až na závěr.

### 3.2.2 Určení sázených možností, výpočet nesázené částky

Zbývá nám využít poslední rovnici z KKT podmínek, pomocí které zjistíme hodnotu $b_\lambda$, za předpokladu $b_\lambda > 0$:

$$b_\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{ij \in L} \frac{p_{ij}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} = 1.$$

Rozdělme nyní tuto sumu podle případů, které můžou nastat, označme:

$$
\begin{aligned}
(i) &= \sum_{ij \in L: b_i = 0, b_{ij} = 0} \frac{p_{ij}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}}, \\
(ii) &= \sum_{ij \in L: b_i = 0, b_{ij} > 0} \frac{p_{ij}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}}, \\
(iii) &= \sum_{ij \in L: b_i > 0} \frac{p_{ij}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}},
\end{aligned}
$$

pak platí $(i) + (ii) + (iii) = 1$. Rozeberme nyní jednotlivé případy:

$$
\begin{aligned}
(i) &= \sum_{ij \in L: b_i = 0, b_{ij} = 0} \frac{p_{ij}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} = \sum_{ij \in L: b_i = 0, b_{ij} = 0} \frac{p_{ij}}{b_\lambda}, \\
(ii) &= \sum_{ij \in L: b_i = 0, b_{ij} > 0} \frac{p_{ij}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} = \sum_{ij \in L: b_i = 0, b_{ij} > 0} \frac{p_{ij}}{b_\lambda + b_{ij} o_{ij}} = \sum_{ij \in L: b_i = 0, b_{ij} > 0} \frac{1}{o_{ij}} \\
(iii) &= \sum_{ij \in L: b_i > 0} \frac{p_{ij}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} = \\
&= \sum_{i \in L: b_i > 0, b_{ii} = 0, b_{i0} = 0} \frac{p_{ii} + p_{i0}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} + \sum_{i \in L: b_i > 0, b_{ii} = 0, b_{i0} > 0} \frac{p_{ii} + p_{i0}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} + \\
&+ \sum_{i \in L: b_i > 0, b_{ii} > 0, b_{i0} = 0} \frac{p_{ii} + p_{i0}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} + \sum_{i \in L: b_i > 0, b_{ii} > 0, b_{i0} > 0} \frac{p_{ii} + p_{i0}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} = \\
&= \sum_{i \in L: b_i > 0, b_{ii} = 0, b_{i0} = 0} \frac{p_{ii} + p_{i0}}{p_i o_i} + \sum_{i \in L: b_i > 0, b_{ii} = 0, b_{i0} > 0} \left( \frac{o_{i0} - o_i}{o_{i0} o_i} + \frac{1}{o_{i0}} \right) + \\
&+ \sum_{i \in L: b_i > 0, b_{ii} > 0, b_{i0} = 0} \left( \frac{1}{o_{ii}} + \frac{o_{ii} - o_i}{o_{ii} o_i} \right) = \\
&= \sum_{i \in L: b_i > 0, b_{ii} = 0, b_{i0} = 0} \frac{1}{o_i} + \sum_{i \in L: b_i > 0, b_{ii} = 0, b_{i0} > 0} \frac{1}{o_i} + \sum_{i \in L: b_i > 0, b_{ii} > 0, b_{i0} = 0} \frac{1}{o_i} = \\
&= \sum_{i \in L: b_i > 0} \frac{1}{o_i},
\end{aligned}
$$

přičemž jak jsme popsali výše, varianta $b_i > 0, b_{ii} > 0, b_{i0} > 0$ nemůže nastat. Dohromady dostaneme:

$$
\begin{aligned}
1 &= (i) + (ii) + (iii), \\
1 &= \sum_{ij \in L: b_i = 0, b_{ij} = 0} \frac{p_{ij}}{b_\lambda} + \sum_{ij \in L: b_i = 0, b_{ij} > 0} \frac{1}{o_{ij}} + \sum_{i \in L: b_i > 0} \frac{1}{o_i}, \\
b_\lambda &= \frac{\sum_{ij \in L: b_i = 0, b_{ij} = 0} p_{ij}}{1 - \sum_{i \in L: b_i > 0} \frac{1}{o_i} - \sum_{ij \in L: b_i = 0, b_{ij} > 0} \frac{1}{o_{ij}}}.
\end{aligned}
$$

Vypočítali jsme tedy kolik má sázkař vsadit na jakou možnost, v případě, že na ni bude sázet. Zbývá nám tedy určit, na kterou možnost se vsadit vyplatí. Nejprve využijeme KKT podmínky pro případy, kdy sázkař na jednotlivé možnosti nevsadí, čímž dostaneme požadovaná omezení. Připomeňme klíčové střední hodnoty a vztahy, které musí splňovat:

$$\begin{aligned}
b_\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{E}\,\frac{X_\lambda}{S(\mathbf{b}^*)} = \sum_{ij\in L} \frac{p_{ij}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} \leq 1 \\
b_i = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{E}\,\frac{X_i}{S(\mathbf{b}^*)} = \sum_{j:ij\in L} \frac{p_{ij} o_i}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} \leq 1, \quad i \in L \\
b_{ij} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{E}\,\frac{X_{ij}}{S(\mathbf{b}^*)} = \frac{p_{ij} o_{ij}}{b_\lambda + b_i o_i + b_{ij} o_{ij}} \leq 1, \quad ij \in L
\end{aligned}$$

Výhodou nyní je, že nemusíme provádět další komplikované výpočty, KKT podmínky se totiž u případu $b_w = 0$ oproti $b_w > 0, w \in L$ liší pouze v tom, že se jedná o nerovnost namísto rovnosti. Za každou rovnost $b_w = 0, w \in L$ dostaneme jedno omezení, pro $b_w > 0, w \in L$ pak využijeme dříve vypočítanou hodnotu. Rozebereme tedy jednotlivé případy:

$$\begin{aligned}
b_i = 0, b_{ii} = 0, b_{i0} = 0 \quad &\Rightarrow \quad p_i o_i \leq b_\lambda, \quad p_{ii} o_{ii} \leq b_\lambda, \quad p_{i0} o_{i0} \leq b_\lambda, \\
b_i = 0, b_{ii} > 0, b_{i0} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{p_{i0}}{\left(\frac{1}{o_i} - \frac{1}{o_{ii}}\right)} \leq b_\lambda, \quad p_{i0} o_{i0} \leq b_\lambda, \\
b_i = 0, b_{ii} = 0, b_{i0} > 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{p_{ii}}{\left(\frac{1}{o_i} - \frac{1}{o_{i0}}\right)} \leq b_\lambda, \quad p_{ii} o_{ii} \leq b_\lambda, \\
b_i > 0, b_{ii} = 0, b_{i0} = 0 \quad &\Rightarrow \quad p_{ii} o_{ii} \leq p_i o_i, \quad p_{i0} o_{i0} \leq p_i o_i,
\end{aligned}$$

Zamysleme se nyní nad získanými podmínkami. Nejprve se budeme věnovat případům, kdy sázkař vsadí nejvýše na jednu z možností. Aby nechtěl vsadit na další možnost, znamená to, že taková sázka není výhodná, a to za předpokladu současného vsazení zamýšlených sázek, podle toho totiž musíme uvažovat případnou hodnotu příslušné sázky tak, aby odpovídalo situaci. Obdržené podmínky u prvních třech případů pak přesně odpovídají tomu, že výnos případné sázky na odpovídající možnost, při současném uvažování předpokládaných sázek, je záporný či nejvýše nulový, což logicky ospravedlňuje sázkařovu volbu na takovou možnost nevsadit. V posledním případě pak vidíme, že sázkař nevsadí na žádnou jinou možnost než na $i$, pokud je příslušný výnos nejvyšší.

Podmínky uvádíme v takovém tvaru, aby byla možná i jiná interpretace obdržených závěrů. Aby sázkař vůbec nevsadil na některý z elementárních jevů (tedy ani na možnost sdružující daný elementární jev s jiným), je logické, že potenciální výnos sázky na danou možnost musí být nižší než nevsazená částka.

V případech, kdy sázkař vsadí přímo na druhý z elementárních jevů, pak podmínka nevýhodnosti vsazení na možnost odpovídající otci $i$ je ovlivněna právě sázením na možnost odpovídající druhému ze synů (bez újmy na obecnosti $ii$) a význam sázky $b_i$ by spočíval ve stabilizaci zisku pro případ výsledku $i0$. Podmínka při nevsazení na možnost $i$ proto zohledňuje právě pravděpodobnost $p_{i0}$ a srovnání výhodnosti kurzů $o_i$ a $o_{ii}$.

Pokud sázkař nevsadí na možnost odpovídající danému listu, ale na možnost odpovídající jeho otci ano, pak očekávaný výnos takové sázky musí být pochopitelně vyšší.

$$b_i = 0, b_{ii} > 0, b_{i0} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{o_i} \geq \frac{1}{o_{ii}} + \frac{1}{o_{i0}},$$
$$b_i > 0, b_{ii} > 0, b_{i0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{o_i} \leq \frac{1}{o_{ii}} + \frac{1}{o_{i0}},$$
$$b_i > 0, b_{ii} = 0, b_{i0} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{o_i} \leq \frac{1}{o_{ii}} + \frac{1}{o_{i0}}.$$

Zaměřme se nyní na případy, kdy sázkař vsadí na dvě ze tří možností uvažovaného podstromu. To nemusí nutně znamenat, že by poslední z možností nebyla výhodná, jen musí mít méně výhodný kurz. Jak víme z části, kdy jsme se zabývali marží bookmakera a férovostí kurzů, jejich výhodnost posuzujeme na základě převrácené hodnoty. Podmínky jsou tedy opět přirozené, pokud sázkař nevsadí na možnost odpovídající některému z listů, pak kurz na možnost odpovídající jejich otci nemůže být méně výhodný. Naopak pokud nevsadí na možnost odpovídající otci, příslušný kurz nemůže být výhodnější.

V průběhu kapitoly jsme počítali, jakých hodnot musí sázky na jednotlivé možnosti dosahovat za předpokladu vsazení, pokud bychom na ně vsadili. Uvažovali jsme tedy tak, jako bychom znali množinu možností, na které se má v log-optimální strategii vsadit. Označme nyní množinu všech uzlů, na které sázkař za využití log-optimální strategie vsadí

$$V^* = \{w \in L : b^*_w > 0\}.$$

Naším cílem je určit algoritmus k získání log-optimální strategie, kdy budeme postupně zařazovat nejvýhodnější možnosti do množiny uzlů, na které se vsadí. Definujme tedy

$$V_0 = \{\lambda\}, \quad V_{k+1} = V_k \cup \{w \in L \backslash V_k : w \text{ je nejvýhodnější}\}.$$

Množina $V_k$ tedy odpovídá vsazení $k$ nejvýhodnějších možností, přesný popis výběru nejvýhodnějších možností uvedeme později v algoritmu k získání log-optimální strategie.

V tuto chvíli tedy již víme, kolik má sázkař vsadit na kterou možnost sázkové příležitost za předpokladu, že na ni bude sázet. Zjistili jsme také podmínky, kdy na danou možnost sázkař nevsadí. Zbývá tedy podobně jako v minulé kapitole určit, jak velkou část kapitálu sázkař sázet nebude a na které z možností má vsadit. Budeme postupovat analogicky, kdy hodnotu $b_\lambda$ získáme iterováním hodnot $C$. Definujme

$$C(V_k) = \frac{\sum_{ij \in L : i \notin V_k, ij \notin V_k} p_{ij}}{1 - \sum_{i \in V_k} \frac{1}{o_i} - \sum_{ij \in V_k : i \notin V_k = 0} \frac{1}{o_{ij}}}.$$

Pak platí $b^*_\lambda = C(V_t)$ a $V^* = V_t$, kde $t$ značí počet možností, na které sázkař vsadí. Hodnota $C(V_0) = 1$ odpovídá tomu, že na sázkovou příležitost sázkař vůbec nebude sázet v případě, že pro žádnou možnost $w \in L$ není potenciální výnos $p_w o_w > 1$, neboli když výnos nebude kladný při vsazení odpovídající částky $b_w$ pro žádný výsledek $w \in L$ sázkové příležitosti.

Vzhledem ke stromové struktuře hloubky větší než jedna je však nyní výrazně komplikovanější určit, na které možnosti má sázkař vsadit, a to z důvodu provázanosti sázkových možností v jednotlivých podstromech (s kořeny v uzlech v hloubce jedna). Klíčovým rozdílem jsou podmínky pro nevsazení na danou možnost v případě vsazení na některou z možností z téhož podstromu, kdy už nestačí uvažovat $p_w o_w, w \in L$ (potenciální výnos totiž může být jiný z důvodu jiné výše sázky), neboť tento přístup funguje pouze pro disjunktní jevy. Sázkař vsadí právě na možnosti, které nesplňují příslušnou podmínku pro nevsazení uvedenou výše, přičemž postupuje tak, že v jednom kroku vždy zařadí do svého portfolia sázek jednu sázkovou možnost, a to tu nejvýhodnější.

Zaveďme nyní pro pro problém výběru, na které sázkové možnosti má sázkař vsadit, následující značení. Jednotlivé možnosti jsou zařazovány do prioritní fronty od nejvýhodnější (dále budeme prvky této fronty značit $q_1$,$q_2, \dots$ a příslušné potenciální výnosy $r(q_1), r(q_2), \dots$, tedy platí $r(q_1) \geq r(q_2), \dots$) a postupně s výpočtem hodnot $C(V_k)$ sázkař určuje, na které možnosti ještě vsadí, tedy vezme prvek z prioritní fronty, který je na řadě ($q_k$) a porovná hodnoty $r(q_k)$ a $C(V_{k-1})$. V případě disjunktních sázkových možností by tedy platilo $r(q_1) = \max\{p_w o_w, w \in L\}$.

Sázkař tedy vybere z obou podstromů (s kořeny v uzlech v hloubce jedna) možnost s nejvyšším očekávaným výnosem a následně tyto podstromy seřadí tak, aby platilo $\max\{p_1 o_1, p_{11} o_{11}, p_{10} o_{10}\} = r(q_1) \geq r(q_2) = \max\{p_2 o_2, p_{22} o_{22}, p_{20} o_{20}\}$ a poté vsadí na možnost $q_1$, pokud platí $r(q_1) > C(V_0)$, v opačném případě na sázkovou příležitost nebude sázet vůbec.

V tuto chvíli se tedy jedná o stejný postup jako u stromu hloubky jedna pro dvě možnosti. Rozdíl však spočívá v tom, že je třeba uvažovat také ostatní, méně výhodné možnosti z daného podstromu, a to v rámci výše uvedených pravidel pro nevsazení na jednotlivé možnosti. Při vsazení na možnost $ij \in L$ je proto do fronty třeba zařadit také další nejvýhodnější možnost (sázkař vsadí nejvýše na jednu z nich). Proto sázkař porovná, zda je vyšší potenciální výnos u možnosti $i$ či $ik \in L, k \neq j$. V této chvíli však již z důvodu sázky na možnost $ij$ (a tedy jiné výše případné sázky) je potenciální výnos možnosti $i$ roven $p_{ik} / \left( \frac{1}{o_i} - \frac{1}{o_{ij}} \right)$ namísto $p_i o_i$ a ten je tedy třeba porovnat s $p_{ik} o_{ik}$ a možnost odpovídající vyšší z těchto hodnot zařadit do prioritní fronty. V případě, že sázkař vsadí na možnost $i \in L$, do fronty již není třeba zařazovat žádnou další, neboť by pro možnost $ij \in L$ nemohla být splněna podmínka $p_{ij} o_{ij} > p_i o_i$.

V případě rovnosti příslušných potenciálních výnosů vždy sázkař zvolí možnost, která odpovídá uzlu v menší hloubce, tedy nadřazenou možnost. Z důvodu přehlednosti a zjednodušení značení odbavujeme prioritní frontu tím způsobem, že prvky z fronty nemažeme, ale přesuneme ukazatel začátku fronty na další prvek (kterému zůstane stejný index), v případě zařazování nového prvku do fronty je pak tento prvek zařazen na odpovídající pozici, ale nikdy před ukazatel začátku fronty.

Celkově tedy sázkař vsadí právě na možnosti $q_k \in L$, splňující $r(q_k) > C_{k-1}$. Jak jsme uvedli výše, $b_\lambda = C_t$, kde $t$ značí počet možností, na které sázkař vsadí, se zavedeným značením tedy platí

$$t = \max\{k : r(q_k) > C(V_{k-1}); 0\}.$$

Jak dokážeme ve Větě 8, hodnota $C(V_k)$ se snižuje s každou další vsazenou možností. To znamená, že sázkař poté z hlediska log-optimality může chtít vsadit i na možnost, která má potenciální výnos menší než 1. Dohromady se vsazením výhodnější varianty tím totiž zvyšuje očekávaný log-výnos a tedy stabilizuje zisk. Snižování $C(V_k)$ je logické, neboť sázkař vsadí jen na možnosti, které jsou výhodné, a proto s každou takovou sázkou sníží částku, kterou si ponechá stranou.

Popsali jsme tedy log-optimální strategii pro případ binárního stromu hloubky dva. Pro zpřehlednění se pokusíme shrnout v několika krocích, jak by měl sázkař postupovat, aby u takové sázkové příležitosti získal log-optimální strategii.

### 3.2.3 Algoritmus pro získání log-optimální strategie

1. Zařadit do prioritní fronty jednu možnost z každého podstromu s kořenem v hloubce jedna, a to tu s nejvyšším potenciálním výnosem, přičemž poté možnosti ve frontě seřadí sestupně právě dle potenciálního výnosu. Pro přehlednost značíme prvky této fronty $q_1, q_2, \ldots$ a příslušné potenciální výnosy $r(q_1), r(q_2), \ldots$, tedy platí $r(q_1) \geq r(q_2), \ldots$

2. (a) Počítat hodnoty
$$C(V_k) = \frac{\sum_{ij \in L: i \notin V_k, ij \notin V_k} p_{ij}}{1 - \sum_{i \in V_k} \frac{1}{o_i} - \sum_{ij \in V_k: i \notin V_k} \frac{1}{o_{ij}}}.$$
   (b) Rozhodovat o vsazení či nevsazení nejvýhodnější dosud nesázené možnosti, tedy pokud platí $r(q_{k+1}) > C(V_k)$, pak $V_{k+1} = V_k \cup q_{k+1}$.

   (c) Pokud $r(q_{k+1}) > C(V_k)$, $q_{k+1}$ odpovídá možnosti $ij \in L$ a zbývá více než jedna nevsazená možnost z příslušného podstromu s kořenem v uzlu $i$, je třeba do prioritní fronty na příslušné místo zařadit další možnost s nejvyšším potenciálním výnosem z téhož podstromu (u možnosti $i$ je nutné uvažovat změnu potenciálního výnosu z důvodu jiné výše případné sázky). Pokud tedy platí $p_{ik}o_{ik} > p_{ik}/\left(\frac{1}{o_i} - \frac{1}{o_{ij}}\right)$, je třeba zařadit možnost $ik$, v opačném případě možnost $i$, a to na odpovídající pozici dle příslušného potenciálního výnosu.

   (d) Opakovat body (a),(b),(c) dokud nenastane $r(q_{k+1}) \leq C(V_k)$. Tím bude dokončeno hledání možností, na které sázkař vsadí a vsazených možností tedy bude $t = \max\{k : r(q_k) > C(V_{k-1}); 0\}$, přičemž se jedná o možnosti $q_1, \ldots, q_t$.

3. Log-optimální strategie $\mathbf{b}^*$ je
$$b_w = \begin{cases} C(V_t), & w = \lambda, \\ p_i - \frac{b_\lambda}{o_i}, & w = i \in V_t \wedge ii, i0 \notin V_t, \\ (p_i - p_{ij}) \cdot \frac{o_{ii}}{o_{ii} - o_i} - \frac{b_\lambda}{o_i}, & w = i \in V_t \wedge ij \in V_t, \\ p_{ij} - \frac{b_\lambda + b_i o_i}{o_{ij}}, & w = ij \in V_t, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

   Poznamenejme, že je třeba v případě vsazení na obě možnosti $i,ij \in L$ vypočítat nejprve $b_i$, neboť se tato hodnota objevuje ve výpočtu $b_{ij}$. Připomeňme také ještě jednou, že potenciální výnos možnosti $ij \in L$ je vždy $r(ij) = p_{ij}o_{ij}$, pokud však jde o možnost odpovídající jeho otci $i$, záleží, zda sázkař vsadí také na některého z jeho synů. Pokud vsadí na syna $ij$ a nikoli na $ik \in L$, pak $r(i) = p_{ik}/\left(\frac{1}{o_i} - \frac{1}{o_{ij}}\right)$, pokud na žádnou z těchto možností, pak platí standardně $r(i) = p_i o_i$.

## 3.3 Obecné stromové schéma

Na začátku kapitoly jsme zavedli stromové schéma sázek a následně jsme zjistili log-optimální strategii pro případ, kdy jednotlivé možnosti sázkové příležitosti strukturou odpovídají binárnímu stromu hloubky dva. Nyní bude naším úkolem vyřešit problém hledání log-optimální strategie pro případ, kdy schéma možností sázkové příležitosti odpovídá libovolnému stromu.

Jak jsme uvedli v minulé části, pomocí stromové struktury je možné interpretovat velké množství sázkových možností. Je možné současně vsadit například na různé kombinace sázek, třeba ve fotbale na vítěze zápasu, brankový rozdíl, počet vstřelených gólů, rohových kopů, žlutých karet i sázku, zda daný hráč vstřelí gól. Pomocí stromové struktury je možné interpretovat i akumulovanou sázku, tedy sázku na více sázkových příležitostí současně, aby se však jednalo o stromovou strukturu, není možné do schématu zařazovat příliš nadřazených možností. Například pro případ dvou sázkových příležitostí, ve které je v obou možné vsadit pouze na to, který ze dvou týmů vyhraje, bychom pak uvažovali jako elementární jevy (listy) všechny čtyři kombinace, jak oba zápasy dopadnou. Abychom dodrželi stromovou strukturu, je možné jako nadřazené možnosti (otce) uvažovat například pouze vítěze prvního zápasu (tedy sjednocení přes oba možné výsledky druhého) a nikoli zvlášť na vítěze prvního i druhého zápasu, neboť by každý z listů měl mít dva otce a nejednalo by se tedy o strom.

Nechť jsou dány sázkové možnosti, které odpovídají stromové struktuře a zavedenému značení ze začátku minulé kapitoly. Navíc zavedeme značení

$$L_i = \{w \in L : |w| = i, \text{tedy } w \text{ je v hloubce } i\}.$$

Navíc pro zjednodušení zápisu budeme předpokládat, že jsou všechny listy ve stejné hloubce, aby $L_l = L_d$, kde $d$ je hloubka stromu. Pokud by některý z listů $w \in L_i$ byl v menší hloubce, stačí přidat uzel $wi \in L_{i+1}$ odpovídajícímu jeho synovi se s $p_{wi} = p_w$ a $o_{wi} = 0$, vždy bude platit $b_{wi} = 0$ a je tedy zřejmé, že se jedná o ekvivalentní úlohu k úloze původní. Případně je třeba tento postup opakovat, dokud nedosáhneme požadované hloubky.

Označme ještě množinu všech uzlů, na které sázkař za využití log-optimální strategie vsadí

$$V^* = \{w \in L : b_w^* > 0\}.$$

Naším cílem je určit algoritmus k získání log-optimální strategie, kdy budeme postupně zařazovat nejvýhodnější možnosti do množiny uzlů, na které se vsadí. Definujme tedy

$$V_0 = \{\lambda\}, \quad V_{k+1} = V_k \cup \{w \in L \backslash V_k : w \text{ je nejvýhodnější}\}.$$

Množina $V_k$ tedy odpovídá vsazení $k$ nejvýhodnějších možností, přesný popis výběru nejvýhodnějších možností uvedeme později v algoritmu k získání log-optimální strategie.

### 3.3.1 Výpočet výše sázky v případě vsazení

Vyjádřeme opět nejprve potřebné střední hodnoty pro využití KKT podmínek:

$$\mathsf{E}\,\frac{X_\lambda}{S(\mathbf{b}^*)} = \sum_{w \in L_d} \frac{p_w}{\sum_{u \in L: u \preceq w} b_u o_u}$$

$$\mathsf{E}\,\frac{X_i}{S(\mathbf{b}^*)} = \sum_{w \in L_d : i \preceq w} \frac{p_w o_i}{\sum_{u \in L: u \preceq w} b_u o_u}$$

$$\vdots$$

$$\mathsf{E}\,\frac{X_v}{S(\mathbf{b}^*)} = \frac{p_v o_v}{\sum_{u \in L: u \preceq v} b_u o_u}, \quad v \in L_d$$

Pozn.: Platí $o_\lambda = 1$ a pro $u \in L^* \setminus L$ (na možnost $u$ není možné vsadit) je $b_u = 0$, tedy také $b_u o_u = 0$, proto není třeba tyto možnosti nijak zvlášť ošetřovat.

Můžeme si všimnout, že všechny uvedené střední hodnoty je možné definovat dohromady:

$$\mathsf{E}\,\frac{X_v}{S(\mathbf{b}^*)} = \sum_{w \in L_d : v \preceq w} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L: u \preceq w} b_u o_u}, \quad v \in L.$$

Přesto jsme pro lepší představu uvedli, jak vypadají také jednotlivé střední hodnoty. Můžeme vidět, že každá z těchto středních hodnot je součtem zlomků, přičemž právě tolika, kolika listům je daná možnost nadřazená (kolika listům tvoří daná možnost prefix). To znamená, že střední hodnota odpovídající listu má právě jeden sčítanec, střední hodnota příslušící jeho otci má sčítanců tolik, kolik má synů a střední hodnota odpovídající kořeni celého stromu jich má $|L_l|$ (počet všech listů). Proto je opět nejjednodušší začínat s výpočty hodnot jednotlivých sázek u listů, přičemž, jak jsme uvedli, často budeme využívat výpočty z minulé kapitoly. Doplňme ještě, že zápisem $u \prec v$ budeme zkracovat $u \preceq v, u \neq v$.

$$\begin{aligned} & v \in V^*, v \in L_d \quad \Rightarrow \\ & \qquad \frac{p_v o_v}{\sum_{u \in L: u \preceq v} b_u o_u} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b_v = p_v - \frac{\sum_{u \in L: u \prec v} b_u o_u}{o_v}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Postupme nyní k další vrstvě, která odpovídá otcům jednotlivých listů. Jako již obvykle budeme u výpočtů využívat dříve dosažených hodnot, nyní tedy již můžeme za $b_v, v \in L_d$ dosadit buď hodnotu vypočtenou výše, či 0, podle toho, zda sázkař na možnost $v$ vsadí.

$$
\begin{aligned}
v \in V^*, v \in L_{d-1} \quad \Rightarrow \quad & \\
& \sum_{w \in L_d : v \preceq w} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u} = 1 \\
& \sum_{w \in L_d : v \preceq w \wedge w \in V^*} \frac{o_v}{o_w} + \sum_{w \in L_d : v \preceq w \wedge w \notin V^*} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \prec w} b_u o_u} = 1 \\
& \sum_{w \in L_d : v \preceq w \wedge w \in V^*} \frac{o_v}{o_w} + \frac{o_v \cdot \sum_{w \in L_d : v \preceq w \wedge w \notin V^*} p_w}{\sum_{u \in L : u \preceq v} b_u o_u} = 1 \\
& \left(1 - \sum_{w \in L_d : v \preceq w \wedge w \in V^*} \frac{o_v}{o_w}\right) \cdot \sum_{u \in L : u \preceq v} b_u o_u = o_v \cdot \sum_{w \in L_d : v \preceq w \wedge w \notin V^*} p_w \\
& b_v o_v = \frac{o_v \cdot \sum_{w \in L_d : v \preceq w \wedge w \notin V^*} p_w}{1 - \sum_{w \in L_d : v \preceq w \wedge w \in V^*} \frac{o_v}{o_w}} - \sum_{u \in L : u \prec v} b_u o_u \\
& b_v = \frac{\sum_{w \in L_d : v \preceq w \wedge w \notin V^*} p_w}{1 - \sum_{w \in L_d : v \preceq w \wedge w \in V^*} \frac{o_v}{o_w}} - \frac{\sum_{u \in L : u \prec v} b_u o_u}{o_v}
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Provedli jsme výpočty hodnot $b_v, v \in L_d$ a $v \in L_{d-1}$. Jak jsme již dříve zjistili, hodnotu $b_v$ ovlivňují možnosti $u \prec v$ splňující $u \in V^*$. Proto nebyl výpočet $b_v, v \in L_d$ nijak komplikovaný a v případě $b_v, v \in L_{d-1}$ stačilo rozdělit sumu na dva případy podle toho, zda sázkař vsadí na možnost odpovídající listu. Jelikož bude nyní cílem odvodit vzorec pro hodnotu $b_v$ libovolné možnosti $v \in L_k, k \in \{0, \ldots, d\}$, rozdělíme nyní sumu podle toho, v jaké nejmenší hloubce větší než $k$ (neboť $v \in L_k$) se nachází možnost, na kterou sázkař vsadí, a to z pohledu každé cesty (určené dle listu $w \in L_d$). Definujme tedy pro $V \subset L, \lambda \in L$ množinu

$$M_i^n(v,V) = \{w \in L_n : i = \min\{j : u \in L_j, v \prec u \preceq w \wedge u \in V; d+1\}\},$$

přičemž pro $V = V^*$ budeme využívat zkrácený zápis $M_i^n(v)$. Množinu takových možností $u$ můžeme označit také zkráceně $M_i(v)$ namísto $M_i^i(v)$. Využijme nyní zavedené značení k výpočtu obecné hodnoty $b_v, v \in L$:

$$
\begin{aligned}
v \in V^*, v \in L_k \quad \Rightarrow \quad & \sum_{w \in L_d : v \preceq w} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u} = 1 \\
& \sum_{i=k+1}^{d+1} \sum_{w \in M_i^d(v)} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u} = 1
\end{aligned}
$$

Počítejme nyní pro větší přehlednost zvlášť jednotlivé sčítance, ve výpočtech budeme využívat dříve získané hodnoty $b_v, v \in V^*$ pro případy $v \in L_d$ a $v \in L_{d-1}$.

$$\sum_{w\in M_{d+1}^d(v)} \frac{p_w o_v}{\sum_{u\in L:u\preceq w} b_u o_u} = \sum_{w\in M_{d+1}^d(v)} \frac{p_w o_v}{\sum_{u\in L:u\preceq v} b_u o_u}, \tag{3.3}$$

$$\sum_{w\in M_d^d(v)} \frac{p_w o_v}{\sum_{u\in L:u\preceq w} b_u o_u} = \sum_{w\in M_d^d(v)} \frac{p_w o_v}{b_w o_w + \sum_{u\in L:u\prec w} b_u o_u} = \sum_{w\in M_d(v)} \frac{o_v}{o_w}, \quad \text{z 3.1},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{wi\in M_{d-1}^d(v)} \frac{p_{wi} o_v}{\sum_{u\in L:u\preceq wi} b_u o_u} &= \sum_{wi\in M_{d-1}^d(v):wi\in V^*} \frac{p_{wi} o_v}{\sum_{u\in L:u\preceq wi} b_u o_u} + \\
&+ \sum_{wi\in M_{d-1}^d(v):wi\notin V^*} \frac{p_{wi} o_v}{\sum_{u\in L:u\preceq wi} b_u o_u} = \\
&= \sum_{wi\in M_{d-1}^d(v):wi\in V^*} \frac{p_{wi} o_v}{b_{wi} o_{wi} + \sum_{u\in L:u\prec wi} b_u o_u} + \\
&+ \sum_{wi\in M_{d-1}^d(v):wi\notin V^*} \frac{p_{wi} o_v}{b_w o_w + \sum_{u\in L:u\prec w} b_u o_u} = \\
\text{z 3.1} \qquad &= \sum_{wi\in M_{d-1}^d(v):wi\in V^*} \frac{o_v}{o_{wi}} + \\
\text{z 3.2} \qquad &+ \sum_{wi\in M_{d-1}^d(v):wi\notin V^*} \frac{p_{wi} o_v \cdot \left(1 - \sum_{z\in M_{d-1}^d(v):z\in V^*} \frac{o_w}{o_z}\right)}{o_w \cdot \sum_{z\in M_{d-1}^d(v):z\notin V^*} p_z} = \\
&= \sum_{wi\in M_{d-1}^d(v):wi\in V^*} \frac{o_v}{o_{wi}} + \\
&+ \sum_{w\in M_{d-1}(v)} \frac{o_v}{o_w} \cdot \left(1 - \sum_{z\in M_{d-1}^d(v):z\in V^*} \frac{o_w}{o_z}\right) = \\
&= \sum_{wi\in M_{d-1}^d(v):wi\in V^*} \frac{o_v}{o_{wi}} + \sum_{w\in M_{d-1}(v)} \frac{o_v}{o_w} - \sum_{z\in M_{d-1}^d(v):z\in V^*} \frac{o_v}{o_z} = \\
&= \sum_{w\in M_{d-1}(v)} \frac{o_v}{o_w}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Z vypočítaných hodnot můžeme vytušit, jak by mohla vypadat výsledná hodnota pro všechny případy, a to

$$\sum_{w\in M_i^d(v)} \frac{p_w o_v}{\sum_{u\in L:u\preceq w} b_u o_u} = \sum_{w\in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}, \quad i \in \{k+1, \dots, d\}. \tag{3.4}$$

Obecný vzorec bychom pak dopočítali následovně:

$$
\begin{aligned}
v \in V^*, v \in L_k \quad \Rightarrow \qquad & \sum_{w \in L_d : v \preceq w} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u} = 1 \\
& \sum_{i=k+1}^{d+1} \sum_{w \in M_i^d(v)} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u} = 1 \\
\text{z 3.4 a 3.3} \qquad & \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w} + \sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq v} b_u o_u} = 1 \\
& \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w} + \frac{o_v \cdot \sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} p_w}{\sum_{u \in L : u \preceq v} b_u o_u} = 1 \\
& \left(1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}\right) \cdot \sum_{u \in L : u \preceq v} b_u o_u = o_v \cdot \sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} p_w \\
& b_v o_v = \frac{o_v \cdot \sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}} - \sum_{u \in L : u \prec v} b_u o_u \\
& b_v = \frac{\sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}} - \frac{\sum_{u \in L : u \prec v} b_u o_u}{o_v}.
\end{aligned}
$$

**Věta 7.** *Pro $v \in V^*, v \in L_k$ platí*

$$
b_v = \frac{\sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}} - \frac{\sum_{u \in L : u \prec v} b_u o_u}{o_v}.
$$

*Důkaz.* Důkaz provedeme pomocí matematické indukce. Je třeba si uvědomit, že pro výpočet $b_v, v \in L_k$ využíváme pomocné rovnosti pro $i \in \{k+1, \dots, d\}$ a naopak v průběhu výpočtu pomocné rovnosti pro sumu

$$
\sum_{w \in M_i^d(v)} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u}
$$

dosazujeme vypočítané hodnoty $b_v, v \in V^*$ pro $v \in L_j, j \in \{i, \dots, d\}$. V provedených výpočtech postupujeme směrem od listů ke kořeni a před zformulováním znění věty jsme prokázali platnost pro první hodnoty, nyní systematicky vyjádříme, jak postupně využíváme jednotlivé ověřené rovnosti:

$$
b_v, v \in L_d \quad \Rightarrow \quad \sum_{w \in M_d^d(z)} \quad \Rightarrow \quad b_v, v \in L_{d-1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{w \in M_{d-1}^d(z)} \quad \Rightarrow \quad \dots
$$

Zbývá nám tedy pouze indukční krok, to znamená, že chceme dokázat následující implikace (jako předpoklad v indukčním kroku uvádíme pouze poslední předpokládanou rovnost, pochopitelně však předpokládáme také všechny předchozí rovnosti, viz schéma výše):

$$(i)\quad \sum_{w\in M^d_{k+1}(z)} \frac{p_w o_z}{\sum_{u\in L: u\preceq w} b_u o_u} = \sum_{w\in M_{k+1}(z)} \frac{o_z}{o_w}, \quad z \in \bigcup_{j=0}^{k} L_j \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b_v = \frac{\sum_{w\in M^d_{d+1}(v)} p_w}{1-\sum_{i=k+1}^{d}\sum_{w\in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}} - \frac{\sum_{u\in L: u\prec v} b_u o_u}{o_v}, \quad v\in L_k,$$

$$(ii)\quad b_v = \frac{\sum_{w\in M^d_{d+1}(v)} p_w}{1-\sum_{i=k+1}^{d}\sum_{w\in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}} - \frac{\sum_{u\in L: u\prec v} b_u o_u}{o_v}, \quad v\in L_k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{w\in M^d_{k}(z)} \frac{p_w o_z}{\sum_{u\in L: u\preceq w} b_u o_u} = \sum_{w\in M_{k}(z)} \frac{o_z}{o_w}, \quad z \in \bigcup_{j=0}^{k-1} L_j.$$

Část $(i)$ jsme dokázali v odstavci před zněním věty výpočtem obecné hodnoty $b_v$, kde jsme pro $v \in L_k$ předpokládali právě platnost pomocných rovnic pro $i = k+1, \dots, d$. Zbývá nám tedy bod $(ii)$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{w\in M^d_{k}(z)} \frac{p_w o_z}{\sum_{u\in L: u\preceq w} b_u o_u} = \\
&\quad= \sum_{v\in M_k(z)} \sum_{i=k+1}^{d+1} \sum_{w\in M^d_i(v)} \frac{p_w o_z}{\sum_{u\in L: u\preceq w} b_u o_u} \\
&\quad= \sum_{v\in M_k(z)} \left( \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w\in M_i(v)} \frac{o_z}{o_w} + \sum_{w\in M^d_{d+1}(v)} \frac{p_w o_z}{\sum_{u\in L: u\preceq v} b_u o_u} \right) \\
&\quad= \sum_{v\in M_k(z)} \left( \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w\in M_i(v)} \frac{o_z}{o_w} + \sum_{w\in M^d_{d+1}(v)} \frac{p_w o_z \left(1-\sum_{i=k+1}^{d}\sum_{y\in M_i(v)} \frac{o_v}{o_y}\right)}{o_v \cdot \sum_{y\in M^d_{d+1}(v)} p_y} \right) \\
&\quad= \sum_{v\in M_k(z)} \left( \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w\in M_i(v)} \frac{o_z}{o_w} + \frac{o_z}{o_v} - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{y\in M_i(v)} \frac{o_z}{o_y} \right) \\
&\quad= \sum_{v\in M_k(z)} \frac{o_z}{o_v}, \quad z\in \bigcup_{j=0}^{k-1} L_j,
\end{aligned}$$

přičemž ve druhé rovnosti využíváme předpoklad pomocných rovnic a ve třetí předpoklad hodnoty $b_v, v \in L_k$. Tím jsme dokončili výpočet hodnot $b_v$ pro případ $v \in V^*$, ukázali jsme, že platí

$$v\in V^*, v\in L_k \quad \Rightarrow \quad b_v = \frac{\sum_{w\in M^d_{d+1}(v)} p_w}{1-\sum_{i=k+1}^{d}\sum_{w\in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}} - \frac{\sum_{u\in L: u\prec v} b_u o_u}{o_v}.$$

□

### 3.3.2 Určení sázených možností, výpočet nesázené částky

Nyní se zaměřme na omezení, které dostaneme také z KKT podmínek, a to v případě $v \notin V^*$. Jedná se tedy o podmínku, kdy sázkař na možnost $v$ nevsadí. Rozeberme rozdíl v KKT podmínkách pro $v \in V^*$ a $v \notin V^*$.

$$v \in V^*, v \in L \quad \Rightarrow \quad \sum_{w \in L_d : v \preceq w} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u} = 1$$

$$v \notin V^*, v \in L \quad \Rightarrow \quad \sum_{w \in L_d : v \preceq w} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u} \leq 1$$

Uvědomme si, že pokud platí $v \in V^*$, tak je hodnota $b_v$ jednoznačně určena právě tak, aby platila uvedená rovnost, a to vzorcem uvedeným výše. Pro případ $v \notin V^*$ pak dostaneme omezení, které musí být splněno, pokud na možnost $v$ sázkař nemá vsadit. Rádi bychom však této na první pohled komplikované podmínce nalezli vhodnou interpretaci. Všimněme si, že se hodnota $b_v$ (respektive součin $b_v o_v$) vyskytuje v každém sčítanci sumy, avšak pouze ve jmenovali. To znamená, že za triviálního předpokladu $b_v \geq 0, o_v \geq 0$ se při zvýšení hodnoty $b_v$ se hodnota celé sumy sníží.

Předpokládejme $v \notin V^*$ a spočtěme levou stranu uvedené nerovnosti. Pokud je podmínka splněna, je předpoklad v pořádku, zvýšením sázky ($b_v > 0$) na možnost $v$ by se hodnota celé sumy snížila a nesplňovala by danou rovnost. Pokud však podmínka splněna není, docházíme ke sporu, což znamená, že je třeba předpoklad přehodnotit a na možnost $v$ vsadit, a to právě vypočítanou částku, díky čemuž nastane rovnost. Dohromady tedy vlastně na možnost $v$ sázkař nevsadí právě tehdy, pokud by hodnota sázky ($b_v$) pro dosažení rovnosti v KKT byla záporná či nejvýš nulová, pokud vyjde hodnota $b_v > 0$, sázkař na možnost $v$ vsadí příslušnou částku. Ekvivalentně bychom v těchto úvahách mohli namísto vsazené hodnoty na možnost $v$ ($b_v$) uvažovat výnos ze sázky na možnost $v$ v případě výhry ($b_v o_v$), neboť $o_v > 0$. Takže sázkař, jelikož vždy v případě sázky na možnost $v$ vsadí částku dle uvedeného vzorce, na možnost $v$ skutečně vsadí právě tehdy, když výnos ze sázky na možnost $v$ v případě výhry je kladný. Tím budou KKT podmínky splněny.

Nyní jsme opět v situaci, kdy již víme, kolik má sázkař vsadit na kterou možnost za předpokladu, že na ni bude sázet a známe i podmínky, za kterých na danou možnost nevsadí. Zbývá tedy určit, na které z možností má sázkař vsadit a na které nikoli, díky čemuž pak bude možné dopočítat rozložení sázek. Analogicky zavedeme veličinu $C(V_k)$, která odpovídá nevsazené části kapitálu při sázce na $k$ nejvýhodnějších možností. Definujme tedy

$$C(V_j) = \frac{\sum_{w \in M^d_{d+1}(\lambda)} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in L_i^\lambda}^{(i,\lambda)} \frac{1}{o_w}}.$$

To znamená, že platí $b_\lambda = C(V_t)$ a $V^* = V_t$ kde $t$ značí počet možností, na které sázkař vsadí. Hodnota $C(V_0) = 1$ odpovídá tomu, že sázkař vůbec nebude sázet na sázkovou příležitost, pokud pro žádnou možnost $w \in L$ není potenciální výnos (ve chvíli kdy zatím sázkař nesází na žádnou možnost) větší než jedna, tedy $b_\lambda + b_w o_w = p_w o_w > 1$, což odpovídá tomu, že je nejvýhodnější strategií nic nevsadit $b_\lambda + b_w o_w = b_\lambda = 1$.

Budeme využívat značení prioritní fronty ($q_1, q_2, \dots$) a potenciálního výnosu $r(q_i)$ možnosti $q_i = w \in L$, který se mění se vsazením na možnost z téhož podstromu, zavedené v minulé kapitole. Sázkař vždy vezme nejvýhodnější možnost $q_j$ (prvek z prioritní fronty, který je na řadě) a porovná jeho potenciální výnos $r(q_j)$

s aktuální hodnotou $C_{j-1}$. Pokud je potenciální výnos vyšší, sázkař na možnost $q_j$ vsadí a zařadí do prioritní fronty možnost, které není nadřazená, s aktuálně nejvyšším potenciálním výnosem (při uvažování všech již vsazených možností včetně $q_j$) z téhož podstromu. Na dosud nevsazené možnosti, pro které je vsazená možnost nadřazená, sázkař pochopitelně nevsadí, neboť pokud by případná sázka byla výherní, byla by výherní i sázka na vsazenou nadřazenou možnost, která měla vyšší potenciální výnos.

V případě rovnosti příslušných potenciálních výnosů v rámci jednoho podstromu vždy sázkař upřednostní možnost, která odpovídá uzlu v menší hloubce, tedy nadřazenou možnost. Pokud se jedná o rovnost potenciálních výnosů mezi disjunktními možnostmi, je jedno, kterou z nich sázkař uvažuje jako první, neboť v případě vsazení se hodnota $C(V_j)$ sníží a vsadí i na druhou z možností, v případě nevsazení jedné pak nevsadí ani na druhou. Z důvodu přehlednosti a zjednodušení značení odbavujeme prioritní frontu tím způsobem, že prvky z fronty nemažeme, ale přesuneme ukazatel začátku fronty na další prvek (kterému zůstane stejný index), v případě zařazování nového prvku do fronty je pak tento prvek zařazen na odpovídající pozici, ale nikdy před ukazatel začátku fronty.

Celkově tedy sázkař vsadí právě na možnosti $q_j \in L$, splňující $r(q_j) > C(V_{j-1})$. Jak jsme uvedli výše, $b_\lambda = C(V_t)$, kde $t$ značí počet možností, na které sázkař vsadí, to znamená, že platí

$$t = \max\{j : r(q_j) > C_{j-1}; 0\}.$$

Ve větě 8 dokážeme, že analogicky jako ve druhé kapitole také platí, že se hodnota $C(V_j)$ snižuje s každou vsazenou možností, přestože je nyní situace komplikovanější.

To znamená, že sázkař poté z hlediska log-optimality může chtít vsadit i na možnost, která má potenciální výnos menší než 1. Dohromady se vsazením výhodnější varianty tím totiž zvyšuje očekávaný log-výnos a tedy stabilizuje zisk. Snižování $C(V_j)$ je logické, neboť sázkař vsadí jen na možnosti, které jsou výhodné, a proto s každou takovou sázkou sníží částku, kterou si ponechá stranou.

Popsali jsme tedy postup, jak získat log-optimální strategii pro případ, kdy jednotlivé sázkové možnosti odpovídají libovolné stromové struktuře. Pro zpřehlednění se nyní pokusíme shrnout v několika krocích, jak by měl sázkař postupovat, aby u takové sázkové příležitosti získal log-optimální strategii.

Jelikož, jak výše popisujeme, v algoritmu postupujeme iterativně, zaveďme k tomu nyní pro přehlednost následující značení. Nechť $V \subset L, \lambda \in V$, definujme hodnoty sázek pro $v \notin V : b_v(V) = 0$ a pro $v \in V$

$$b_v(V) = \frac{\sum_{w \in M^d_{d+1}(v,V)} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v,V)} \frac{o_v}{o_w}} - \frac{\sum_{u \in L: u \prec v} b_u(V) o_u}{o_v}$$

a také potenciální výnos možnosti $v \notin V$:

$$r(v,V) = b_\lambda(V \cup \{v\}) + b_v(V \cup \{v\}) o_v.$$

### 3.3.3 Algoritmus pro získání log-optimální strategie

1. Zařadit do prioritní fronty jednu možnost z každého podstromu s kořenem v hloubce jedna, a to tu s nejvyšším potenciálním výnosem

$$r(v,V_0) = b_\lambda(V_0) + b_v(V_0) o_v = p_v o_v, \quad v \in L \backslash L_0,$$

kde $L_0 = \{\lambda\}$, přičemž poté možnosti ve frontě seřadí sestupně právě dle potenciálního výnosu. Pro přehlednost značíme prvky této fronty $q_1, q_2, \dots$ a příslušné potenciální výnosy $r(q_1), r(q_2), \dots$, tedy platí $r(q_1) \geq r(q_2), \dots$

2. (a) Počítat hodnoty

$$C(V_j) = b_\lambda(V_j) = \frac{\sum_{w \in M^d_{d+1}(\lambda, V_j)} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(\lambda, V_j)} \frac{1}{o_w}}.$$

   (b) Rozhodovat o vsazení či nevsazení nejvýhodnější dosud nesázené možnosti, tedy pokud platí $r(q_{j+1}, V_j) > C(V_j)$, pak $V_{j+1} = V_j \cup \{q_{j+1}\}$.

   (c) Pokud $r(q_{j+1}) > C(V_j)$, na možnosti, kterým je $q_{j+1}$ nadřazená, sázkař již nikdy nevsadí a pokud navíc v příslušném podstromu zbývá alespoň jedna cesta délky $d-1$ (od listu až po kořen v hloubce jedna celého stromu), na které není žádná sázená možnost (tedy v tomto podstromu se stále nachází proherní možnost), je třeba do prioritní fronty na příslušné místo zařadit možnost s aktuálně nejvyšším (kladným) potenciálním výnosem při uvažování všech již vsazených možností včetně $q_{j+1}$. To znamená, že je nutné přepočítat potenciální výnosy pro všechny možnosti nadřazené $q_{j+1}$, tedy pro $v \in L \backslash V_{k+1} : v \preceq q_{j+1}$,

$$r(v, V_{k+1}) = b_\lambda(V_{k+1}) + b_v(V_{k+1}) o_v = \frac{o_v \cdot \sum_{w \in M^d_{d+1}(v, V_{k+1})} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v, V_{k+1})} \frac{o_v}{o_w}}.$$

   (d) Opakovat body (a),(b),(c) dokud nenastane $r(q_{j+1}) \leq C(V_j)$. Tím bude dokončeno hledání možností, na které sázkař vsadí a vsazených možností tedy bude $t = \max\{j : r(q_j) > C_{j-1}; 0\}$, přičemž se jedná o možnosti $q_1, \dots, q_t$,

3. Log-optimální strategie $\mathbf{b}^*$ je

$$b_v = b_v(V_t) = \begin{cases} \frac{\sum_{w \in M^d_{d+1}(v)} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}} - \frac{\sum_{u \in L : u \prec v} b_u o_u}{o_v}, & v \in V_t, \\ 0, \quad \text{jinak}, \end{cases}$$

   přičemž pro její získání je vhodné hodnoty $b_v$ počítat od kořene k listům, neboť k výpočtu každého z uzlů je třeba znát hodnotu sázek na nadřazené možnosti. Speciálně samozřejmě platí $b_v(V_t) = C(V_t)$.

Je třeba připomenout, že log-optimální strategie nemusí být jednoznačně určená. Jak jsme již v práci dříve uvedli, například v případě fair kurzů je log-optimální strategií libovolná konvexní kombinace strategií nevsadit nic a vsadit celý kapitál proporčně. Výsledek je však stejný pro všechny log-optimální strategie bez ohledu na výsledek sázkové příležitosti, a to že se kapitál sázkaře nezmění. V celé práci ve všech postupech a algoritmech a tedy také v aplikaci, kterou představíme během příští kapitoly, volíme tu strategii, která dává přednost nadřazené možnosti, tedy v tomto případě vůbec nevsadit.

Dokažme nyní obecnější verzi Věty 6.

**Věta 8.** *Nechť sázkař postupuje dle uvedeného algoritmu 3.3.3. Pak pro*

$$v \notin V_j, \quad j \leq t, \quad v \prec z, \quad z \in V_j \setminus V_{j-1}, \quad v \in L_k, \quad z \in L_h$$

*platí*

$$0 \leq r(v,V_j) < r(v,V_{j-1}) \quad \textit{a také} \quad 0 \leq C(V_j) < C(V_{j-1}).$$

*Důkaz.* Chceme tedy dokázat, že

$$\frac{o_v \cdot \sum_{w \in M_{d+1}^d(v,V_j)} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^d \sum_{w \in M_i(v,V_j)} \frac{o_v}{o_w}} - \frac{o_v \cdot \sum_{w \in M_{d+1}^d(v,V_{j-1})} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^d \sum_{w \in M_i(v,V_{j-1})} \frac{o_v}{o_w}} < 0,$$

$$\frac{\sum_{w \in M_{d+1}^d(v,V_j)} p_w}{\frac{1}{o_v} - \sum_{i=k+1}^d \sum_{w \in M_i(v,V_j)} \frac{1}{o_w}} - \frac{\sum_{w \in M_{d+1}^d(v,V_{j-1})} p_w}{\frac{1}{o_v} - \sum_{i=k+1}^d \sum_{w \in M_i(v,V_{j-1})} \frac{1}{o_w}} < 0.$$

Využijme postup z důkazu Věty 6 pro

$$x = \sum_{w \in M_{d+1}^d(v,V_{j-1})} p_w, \quad y = \frac{1}{o_v} - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v,V_{j-1})} \frac{1}{o_w},$$

$$r = p_z - \sum_{i=h+1} \sum_{w \in M_i(z,V_j)} p_w, \quad q = \frac{1}{o_z} - \sum_{i=h+1} \sum_{w \in M_i(z,V_j)} \frac{1}{o_w},$$

čímž je tento důkaz hotov.

□

Formálně bychom nyní měli ukázat, že skutečně je **b** strategií sázení, tedy že platí $\sum_{w \in L} b_w = 0$ a $\forall w \in L : b_w \geq 0$. V tomto případě jsme však využili empirická pozorování z využívání algoritmu a věříme, že algoritmus skutečně vrací strategii sázení. Ověřme však raději jeho funkčnost, přestože jsme algoritmus během kapitoly odvodili, tedy že je výsledná strategie log-optimální, neboli že jsou splněny KKT podmínky.

1. $v \in V^*, v \in L \quad \Rightarrow \qquad \sum_{w \in L_d : v \preceq w} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u} = 1$

   *Důkaz.* Hodnota $b_v$ je určená ekvivalentními úpravami níže tak, aby při vsazení platila KKT rovnost:

$$
\begin{aligned}
v \in V^*, v \in L_k \quad \Rightarrow \quad & \sum_{w \in L_d : v \preceq w} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u} = 1 \\
& \sum_{i=k+1}^{d+1} \sum_{w \in M_i^d(v)} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u} = 1 \\
\text{z 3.4 a 3.3} \quad & \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w} + \sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq v} b_u o_u} = 1 \\
& \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w} + \frac{o_v \cdot \sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} p_w}{\sum_{u \in L : u \preceq v} b_u o_u} = 1 \\
& \left(1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}\right) \cdot \sum_{u \in L : u \preceq v} b_u o_u = \\
& \qquad = o_v \cdot \sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} p_w \\
& b_v o_v = \frac{o_v \cdot \sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}} - \sum_{u \in L : u \prec v} b_u o_u \\
& b_v = \frac{\sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}} - \frac{\sum_{u \in L : u \prec v} b_u o_u}{o_v},
\end{aligned}
$$

čímž jsme prokázali platnost tvrzení.

❑▮

2. $v \notin V^*, v \in L \quad \Rightarrow \quad \sum_{w \in L_d : v \preceq w} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u} \leq 1$

*Důkaz.* Postupujme opět pomocí ekvivalentních úprav podobně jako výše:

$$
\begin{aligned}
v \in V^*, v \in L_k \quad \Rightarrow \quad & \sum_{w \in L_d : v \preceq w} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u} \leq 1 \\
& \sum_{i=k+1}^{d+1} \sum_{w \in M_i^d(v)} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq w} b_u o_u} \leq 1 \\
\text{z 3.4 a 3.3} \quad & \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w} + \sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} \frac{p_w o_v}{\sum_{u \in L : u \preceq v} b_u o_u} \leq 1 \\
& \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w} + \frac{o_v \cdot \sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} p_w}{\sum_{u \in L : u \preceq v} b_u o_u} \leq 1 \\
& \left(1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}\right) \cdot \sum_{u \in L : u \preceq v} b_u o_u \geq \\
& \qquad \geq o_v \cdot \sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} p_w \\
& 0 = b_v o_v \geq \frac{o_v \cdot \sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}} - \sum_{u \in L : u \prec v} b_u o_u \\
& \sum_{u \in L : u \prec v} b_u o_u \geq \frac{o_v \cdot \sum_{w \in M_{d+1}^d(v)} p_w}{1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}}, \\
(a) \quad & \sum_{u \in L : u \prec v} b_u o_u \geq 0, \\
(b) \quad & r(w, V_k) \geq r(v, V_k), \\
(c) \quad & \sum_{u \in L : u \prec v} b_u o_u \geq r(v, V^*),
\end{aligned}
$$

neboť v žádném z kroků nenásobíme ani nedělíme záporným číslem. Výraz $\left(1 - \sum_{i=k+1}^{d} \sum_{w \in M_i(v)} \frac{o_v}{o_w}\right)$ je kladný, což jsme dokázali v důkazu Věty 6. Jediná změna nerovnosti byla z důvodu prohození stran v zápisu. Na závěr jsme výpočet rozdělili na tři různé možnosti, neboť se jedná o tři možné důvody, proč $v \notin V^*$. Prvním je $\sum_{w \in V^*, v \preceq w} p_w = p_v$. Druhým je vsazení nadřazené možnosti $w \in V^*, w \prec v$ v momentě $V_k$ před vybráním $v$ a posledním je varianta, že vsazení možnosti $v$ je méně výhodné, než její nevsazení, což přesně odpovídá kontrolované podmínce v algoritmu. Všechny tyto tři případy jsme ekvivalentními úpravami převedli do tvaru KKT nerovnosti, čímž jsme dokázali tento bod.

□

## 3.4 Libovolné schéma sázkových možností

V celé práci jsme se věnovali sázkovým možnostem, které odpovídaly stromové struktuře. Pokud totiž mají strukturu jinou než stromovou, je obecně velmi obtížné získat log-optimální strategii jiným způsobem, než využitím softwaru, jedná se o problém lineárního programování. Jelikož v této práci klademe důraz kromě získání log-optimální strategie především na popsání principů a interpretaci, není pro nás tento způsob řešení zajímavý. Proto, abychom pouze neodkazovali na softwarovou pomoc, alespoň navrhneme způsob, jak zjednodušit obecné schéma sázek na stromovou strukturu.

### 3.4.1 Ořezávání do stromového schématu

Jak jsme popsali v minulé kapitole při zavádění schématu sázek, stromová struktura je definována tak, že pro každé dvě sázkové možnosti platí, že buď je jedna podmnožinou druhé, nebo jsou disjunktní. Jediná možnost, jak mít sázkové schéma, které nesplňuje podmínky stromové struktury je, že alespoň jeden z uzlů má více nadřazených možností, které nesplňují dané podmínky, jinými slovy má některý z uzlů více otců, pro které pak nenastane ani jedna z uvedených možností.

Jedná se tedy o jediný problém, který potřebujeme eliminovat, abychom mohli získat strategii z postupu pro stromové schéma. Snadné řešení, které se nabízí, je ořezávání, tedy vybrat jediného z otců dané možnosti (jedinou z možností, které vzájemně nesplňují podmínky stromového schématu), který ve schématu sázek bude figurovat a ostatní ze sázkových možností vyřadit. Pokud budeme tento způsob opakovat pro všechny možnosti, které nevyhovují podmínkám stromové struktury, zjednodušíme úlohu na případ, se kterým si již umíme poradit.

Nastává problém, kterou z možností v řešení ponechat. Snadná a logická volba je zvolit tu možnost, která má nejvyšší aktuální potenciální výnos. Existuje však lepší způsob. Postupujme jako v případě stromového schématu dle získaného algoritmu (viz sekce 3.3.3). Myšlenka vybrání možnosti s nejvyšším potenciálním výnosem je pochopitelně správná, je však třeba potenciální výnos aktualizovat u každé možnosti, kterým je vsazená možnost nadřazená tak, jako tomu je v algoritmu pro stromové schéma.

Potenciální výnos se nikdy nezvýší, což je možné dokázat analogicky jako Větu 6, proto jediný případ, kdy by nebylo nejlepším řešením vybrání možnosti $w \in L$ s nejvyšším počátečním potenciálním výnosem $r(w)$ je, když je výhodnější vsadit na některou možnost $wu \in L, wu \prec w$ a uvedený potenciální výnos $r(w)$ tímto vsazením poklesne. Potenciální výnos už se nemůže změnit v případě, kdy byla daná možnost přidána do prioritní fronty. Jelikož se potenciální výnos jiné možnosti nemůže zvýšit, znamená to, že jakmile je první z možností porušujících stromové schéma přidána do prioritní fronty, je výhodnější než ostatní a všechny zbylé možnosti, spolu s kterými neodpovídá pravidlům stromového schématu, sázkař vyřadí z možností na vsazení. Tento postup je třeba opakovat pro všechny skupiny možností, ve kterých jednotlivé možnosti vzájemně nesplňují to, že je jedna možnost podmnožinou druhé, nebo jsou disjunktní.

Je třeba zmínit, že takové řešení již nijak nezaručuje log-optimalitu obdržené strategie. Jedná se však o postup, který libovolné schéma sázek ořezáváním méně výhodných možností převede na stromové schéma a z toho již exaktním algoritmem (viz sekce 3.3.3) získá strategii, která obvykle bude velmi dobře aproximovat log-optimální strategii.

# 4. Aplikace

Hlavním výsledkem práce je získaná log-optimální strategie pro případ libovolného stromového schématu. Proto jsme dle uvedeného algoritmu (viz sekce 3.3.3) vytvořili aplikaci, která pro libovolné stromové schéma sázek sázkaři zjistí log-optimální strategii.

## 4.1 Použití

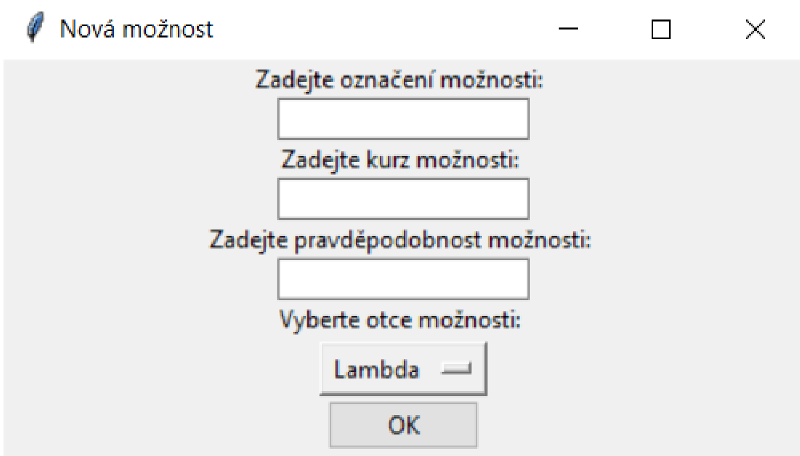
Použití aplikace je poměrně intuitivní, přesto popíšeme, jak vypadá a jak s ní má uživatel pracovat. Aplikace je určená primárně pro čtenáře této práce, její užívání tedy vyžaduje jistou míru pochopení principu stromového schématu, log-optimálního sázení a zavedeného značení.

Po otevření aplikace je automaticky začleněná možnost nevsazení kapitálu označená $\lambda$, která má pravděpodobnost i kurz jedna tak, jako v práci. Není důvod tuto možnost pro praktické využití vynechávat a usnadní to uživateli práci. Jak je možné vidět například na Obrázku 4.5, uživatel má k dispozici dvě tlačítka.

### 4.1.1 Přidání možnosti

První z tlačítek umožňuje přidání nové možnosti do stromového schématu. Kliknutím na Přidej možnost se otevře nové okno (viz Obrázek 4.1), ve kterém sázkař zvolí parametry nové možnosti, konkrétně její označení, kurz, pravděpodobnost a zařazení do stromového schématu, tedy vybere uzel odpovídající otci této možnosti. Díky tomu je možné označovat jednotlivé sázkové možnosti libovolně, není třeba dodržovat prefixový způsob značení, jako tomu bylo v této práci, což je praktické z hlediska přehlednosti v reálném problému.

Jelikož předpokládáme, že je aplikace využívána čtenářem práce, ověřuje se pro jistotu pouze to, zda některý z parametrů nové možnosti nezůstal nevyplněný, její pravděpodobnost je mezi 0 a 1 a kurz je roven alespoň jedné. Raději upozorněme, že v případě desetinného zápisu je třeba využít tečku, nikoli čárku.




Obrázek 4.1: Okno pro přidání nové možnosti

Pokud by tedy uživatel namísto hodnot pravděpodobnost či kurzu zadal nesmyslnou hodnotu, jako například text, aplikace se ukončí chybou. Otce možnosti pak vybere ze seznamu již existujících sázkových možností, po potvrzení tlačítkem OK již není možné zadané údaje měnit. Přidáváním jednotlivých možností se tedy zadávaný strom postupně rozrůstá, stromové schéma sázkové příležitosti je v aplikaci přehledně zakreslené (viz Obrázek 4.5). Může se také stát, že uživatel omylem zadá údaje, které nedávají smysl, příkladem toho může být třeba situace, kdy součet pravděpodobností synů dané možnosti je větší než pravděpodobnost jí samotné. Pak ani výsledná strategie pochopitelně nebude dávat smysl, v takovém případě se v ní mohou objevit i záporné částky ke vsazení.

### 4.1.2 Získání log-optimální strategie

Druhé tlačítko pak uživatel použije, pokud již dokončil stromové schéma tak, jak zamýšlel. Kliknutím na Najdi strategii totiž požádá o vypsání log-optimální strategie pro zadaný problém. Výsledná strategie se vypíše v novém okně (viz například 4.6), a to tak, že pro každou možnost, na kterou má sázkař vsadit, je uvedená příslušná částka. Vždy je pak uvedená částka, jakou sázkař nemá vsadit. Částky, stejně jako v celé práci, odpovídají jednotkovému počátečnímu kapitálu, proto součet všech uvedených hodnot je vždy 1. V případě, že má počáteční kapitál určený k sázení hodnotu $k$, stačí každou z hodnot hodnotou $k$ vynásobit.

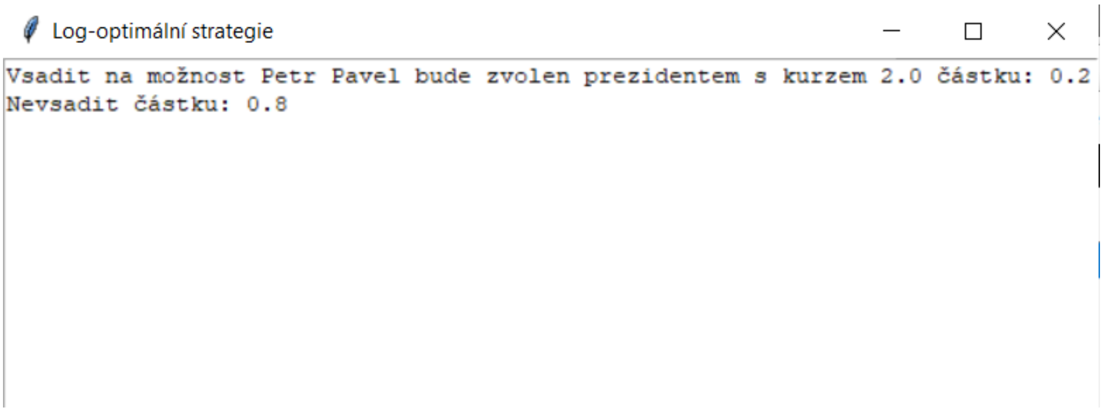
## 4.2 Příklady využití

Zaměřme se nyní na některé konkrétní příklady využití této práce. Na příklady z první kapitoly není třeba se zaměřovat, neboť závěr byl pokaždé stejný, a to vsadit na každou možnost částku odpovídající její pravděpodobnosti. Z případu řešeného ve druhé i třetí kapitole nyní vyřešíme konkrétní příklad, a to jak postupem uvedeným v dané kapitole, tak pomocí aplikace, tedy algoritmu ze čtvrté kapitoly. Výsledek bude pochopitelně totožný, neboť případy řešené v předchozích kapitolách také odpovídají stromovému schématu. Na závěr pak vyřešíme jeden případ obecného stromového schématu, k čemuž využijeme pouze aplikaci, neboť ta odpovídá používanému algoritmu, a ukážeme také, jak aplikace zobrazuje stromové schéma sázek. Než začneme řešit jednotlivé problémy, je třeba zmínit, že uvedené pravděpodobnosti i kurzy jednotlivých sázkových možností jsou smyšlené, byť jsme se snažili, aby se blížily realitě. Začněme s příkladem na Kellyho kritérium.

### 4.2.1 Kellyho kritérium, prezidentské volby

Uvažujme nyní sázkovou možnost na prezidentské volby, a to konkrétně, zda bude zvolen Petr Pavel. Nechť je v určitou chvíli pravděpodobnost jeho zvolení $p = 0{,}6$ a je na to vypsán kurz $o = 2$. Úlohou je zjistit, jakou část kapitálu má sázkař vsadit. Definujme nejprve známé Kellyho kritérium, následně se budeme snažit ukázat, že závěry této práce odpovídají také právě Kellyho kritériu.

**Definice 9.** *Kellyho kritérium sázkové možnosti s kurzem $o$ a pravděpodobností*




Obrázek 4.2: Log-optimální strategie - Kellyho kritérium

*p je definováno jako hodnota*

$$K = p - \frac{1-p}{o-1}.$$

Jelikož u kurzového sázení není možné sázet zápornou částku (na rozdíl například od investování), sázkař má vsadit $b = \max\{K, 0\}$, tedy v tomto případě $b = K = 0{,}2$.

Jak je známo, Kellyho kritérium odpovídá právě log-optimální strategii sázení. Ukažme tedy, že použitím postupu z druhé kapitoly i z obecného stromového schématu, tedy použitím aplikace, dostaneme tentýž výsledek.

Z algoritmu druhé kapitoly dostaneme, že

$$b = 0, \text{ pokud } po \leq 1 \Leftrightarrow p - \frac{1-p}{o-1} \leq 0 \Leftrightarrow K \leq 0.$$

V případě $po > 1$ pak platí

$$b = p - \frac{\frac{1-p}{1-\frac{1}{o}}}{o} = p - \frac{1-p}{o-1} = K.$$

Dohromady platí $b = \max\{K, 0\} = K = 0{,}2$. Dospěli jsme tedy k závěru, že závěry této práce odpovídají také Kellyho kritériu. Pozn.: Kelly se samozřejmě zabýval také obecnějšími problémy než otázkou log-optimální výše sázky v případě jediné sázkové možnosti, jako například problematikou druhé kapitoly této práce (viz Kelly (1956)). Jak jsme však popsali v úvodu, vycházeli jsme z manuálu řešení Cover a Thomas (2006b).

### 4.2.2 Dostih

Uvažujme nyní dostih, kterého se účastní koně s kurzy a pravděpodobnostmi dle Tabulky 4.1. Jsme tedy v situaci jako ve druhé kapitole. Postupujme dle uvedeného algoritmu.

Koně jsme si očíslovali tak, aby platilo $p_1o_1 \geq p_2o_2 \geq \cdots \geq p_8o_8$. Můžeme tedy počítat hodnoty $C_j$.

| Kůň | Číslo | Kurz | Pravděpodobnost |
|---|---|---|---|
| Mr Spex | 2 | 4,00 | 0,30 |
| Talent | 3 | 3,10 | 0,30 |
| Player | 5 | 5,80 | 0,15 |
| Sacamiro | 6 | 8,50 | 0,10 |
| Argano | 8 | 15,00 | 0,05 |
| Stretton | 1 | 25,00 | 0,05 |
| Lombargini | 4 | 30,00 | 0,03 |
| Dulcar de Sivolar | 7 | 40,00 | 0,02 |

Tabulka 4.1: Sázkové možnosti - dostih

$$\begin{aligned} p_1 o_1 &= 1{,}250 > 1{,}000 = C_0, \\ p_2 o_2 &= 1{,}200 > 0{,}990 \doteq C_1, \\ p_3 o_3 &= 0{,}930 > 0{,}915 \doteq C_2, \\ p_4 o_4 &= 0{,}900 \leq 0{,}903 \doteq C_3. \end{aligned} \tag{4.1}$$

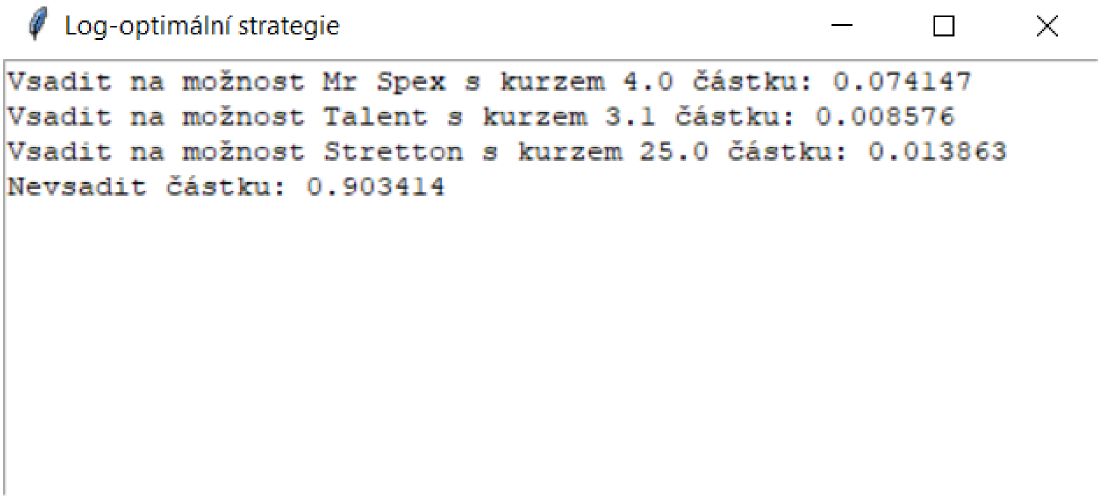
Sázkař tedy vsadí na koně číslo 1, 2 a 3, nyní můžeme dopočítat jaké částky.

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1 - p_1 - p_2 - p_3}{1 - \frac{1}{o_1} - \frac{1}{o_2} - \frac{1}{o_3}} \doteq 0{,}903414, \quad \text{nevsadit}, \\ b_1 &= p_1 - \frac{b_0}{o_1} \doteq 0{,}013863, \quad \text{Stretton}, \\ b_2 &= p_2 - \frac{b_0}{o_2} \doteq 0{,}074147, \quad \text{Mr Spex}, \\ b_3 &= p_3 - \frac{b_0}{o_3} \doteq 0{,}008576, \quad \text{Talent}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Výše tedy můžeme vidět, jak vypadá log-optimální strategie, výsledek můžeme porovnat se strategií obdrženou pomocí aplikace (viz Obrázek 4.3), pochopitelně je totožný. Pokud by sázkař disponoval kapitálem určenému k sázení ve výši 1000000 Kč, měl by za předpokladu správnosti jednotlivých pravděpodobností vsadit 13863 Kč na Strettona, dále 74147 Kč na Mr Spexe a také 8576 Kč na Talenta. Pokud by dostih nevyhrál ani jeden z těchto koní, sázkařův kapitál bude činit 903414 Kč.

### 4.2.3 Finále fotbalové Ligy mistrů

Přenesme se nyní zpět do třetí kapitoly, kde jsme řešili problém hledání log-optimální strategie binárního stromu hloubky dva. Uvažujeme tedy finále fotbalové Ligy mistrů, kde se vítězem stane právě jeden z obou finalistů, utkání nemůže skončit remízou (v případě remízy v základní hrací době jde zápas do prodloužení). Jednotlivé sázkové možnosti spolu s kurzy a pravděpodobnostmi můžeme najít v Tabulce 4.2. Postupujme dle uvedeného algoritmu.




Obrázek 4.3: Log-optimální strategie - dostih

Do prioritní fronty zařadíme možnosti $q_2 :=$ Manchester City vyhraje po prodloužení a $q_1 :=$ Inter Milán vyhraje v základní hrací době, které mají z obou stromů aktuálně nejvyšší potenciální výnos, a to $r(q_1) = 1{,}156$ a $r(q_2) = 0{,}975$. Nyní můžeme počítat hodnoty $C_k$ a současně rozhodovat o vsazení či nevsazení dané možnosti. Nesmíme také zapomenout na přidávání možnosti s nejvyšším aktuálním potenciálním výnosem do prioritní fronty.

$$
\begin{aligned}
&r(q_1) = 1{,}156 > 1{,}000 = C_0\\
&\quad q_3 := q_2,\\
&\quad q_2 := \text{Inter Milán vyhraje}, \quad r(q_2) \doteq 0{,}995\\
&r(q_2) \doteq 0{,}995 > 0{,}973 \doteq C_1,\\
&r(q_3) = 0{,}975 > 0{,}969 \doteq C_2,\\
&\quad q_4 := \text{Manchester City vyhraje v základní hrací době}, \quad r(q_4) = 0{,}825,\\
&r(q_4) = 0{,}825 < 0{,}968 \doteq C_3.
\end{aligned}
$$

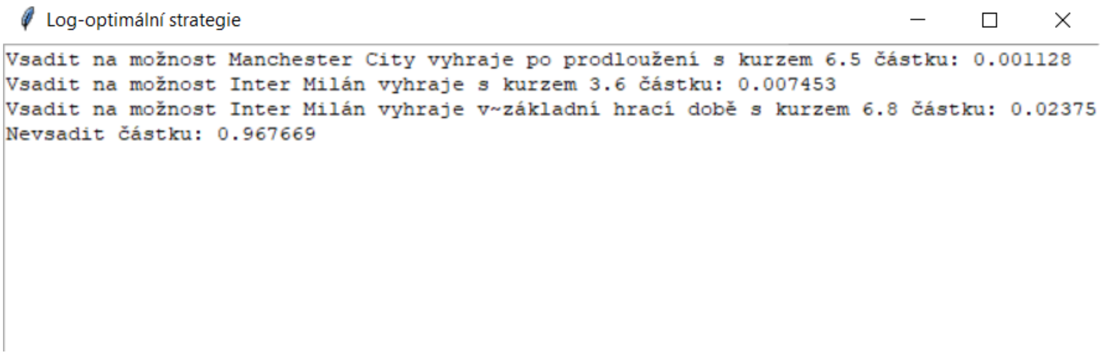
Sázkař tedy vsadí na možnosti $q_1, q_2$ a $q_3$. Nyní můžeme vypočítat hodnoty jednotlivých sázek.

$$
\begin{aligned}
b_\lambda &= \frac{1 - p_{q_2} + p_{q_3}}{1 - \frac{1}{o_{q_2}} - \frac{1}{o_{q_3}}} \doteq 0{,}967669, \quad \text{nevsadit},\\
b_{q_2} &= (p_{q_2} - p_{q_1}) \cdot \frac{o_{q_1}}{o_{q_1} - o_{q_2}} - \frac{b_\lambda}{o_{q_2}} \doteq 0{,}007453, \quad \text{Inter Milán vyhraje},\\
b_{q_1} &= p_{q_1} - \frac{b_\lambda + b_{q_2} o_{q_2}}{o_{q_1}} \doteq 0{,}023750, \quad \text{Inter Milán vyhraje v základní hrací době},\\
b_{q_3} &= p_{q_3} - \frac{b_\lambda}{o_{q_3}} \doteq 0{,}008576, \quad \text{Manchester City vyhraje po prodloužení}.
\end{aligned}
$$

Získali jsme tedy log-optimální strategii, vidíme, že výsledek je stejný jako výpočtem pomocí aplikace (viz Obrázek 4.4). Opět, pro lepší představu, předpokládejme, že má sázkař k dispozici 1000000 Kč určených k sázení. Pak by v případě správnosti uvedených pravděpodobností měl vsadit 23750 Kč na to, že Inter

| Sázková možnost | Kurz | Pravděpodobnost |
|---|---|---|
| Manchester City vyhraje | 1,20 | 0,70 |
| Manchester City vyhraje v základní hrací době | 1,50 | 0,55 |
| Manchester City vyhraje po prodloužení | 6,50 | 0,15 |
| Inter Milán vyhraje | 3,60 | 0,30 |
| Inter Milán vyhraje v základní hrací době | 6,80 | 0,17 |
| Inter Milán vyhraje po prodloužení | 6,50 | 0,13 |

Tabulka 4.2: Sázkové možnosti - finále fotbalové Ligy mistrů




Obrázek 4.4: Log-optimální strategie - finále fotbalové Ligy mistrů

Milán vyhraje v základní hrací době, 7453 Kč na možnost Inter Milán vyhraje a také částku 8576 Kč na to, že Manchester City vyhraje po prodloužení. Sázkař nevyhraje žádnou sázku pouze pokud Manchester City vyhraje v základní hrací době, v tom případě mu zůstane kapitál ve výši 967669 Kč.

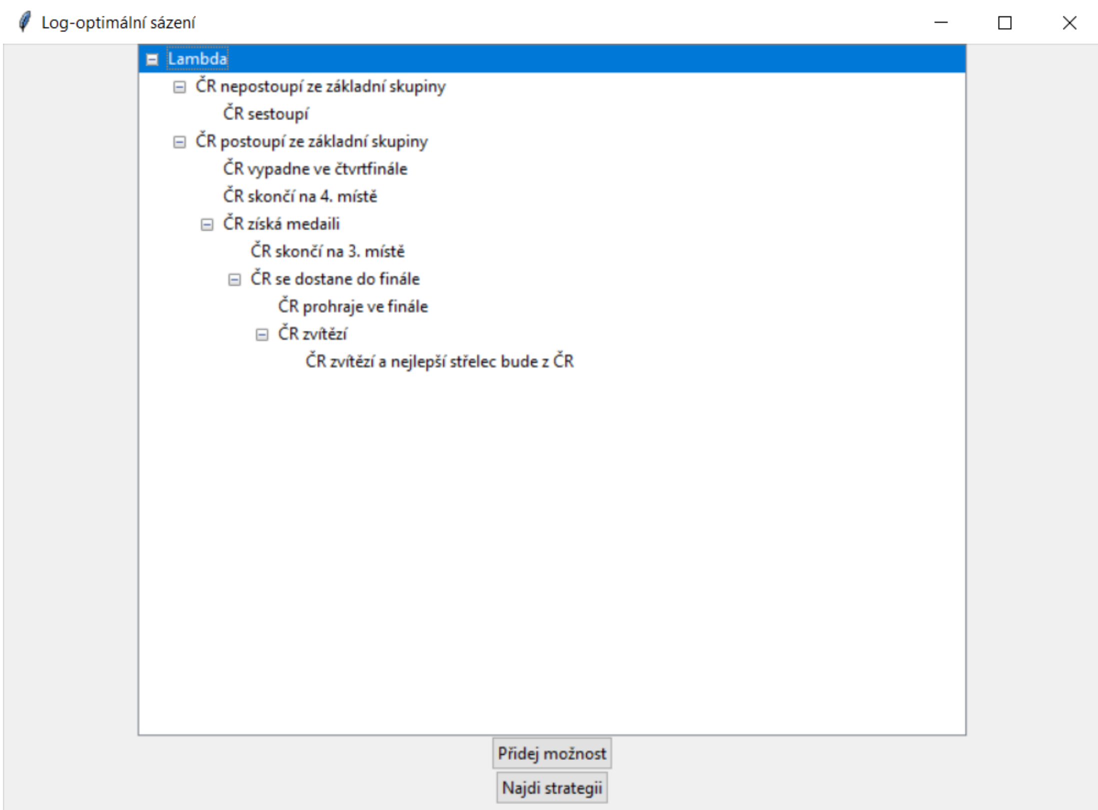
### 4.2.4 Mistrovství světa v ledním hokeji

Ukažme na závěr ještě jeden příklad využití této práce i aplikace pro získávání log-optimální strategie, a to u sázkové příležitosti výsledku týmu České republiky (ČR) na Mistrovství světa v ledním hokeji 2024 (dále MS). Nechť jsou vypsané sázkové možnosti o příslušných pravděpodobnostech s odpovídajícími kurzy uvedené v Tabulce 4.3. Náhled stromového schématu můžeme vidět v aplikaci (viz 4.5).

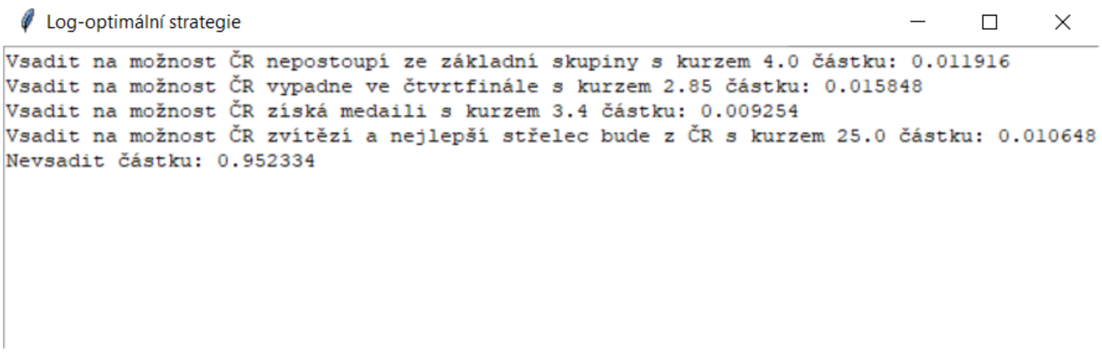
Jak můžeme vidět na Obrázku 4.6, za uvedených pravděpodobností a kurzů jednotlivých sázkových možností a uvažovaného kapitálu určeného na sázení ve výši 1000000 Kč je log-optimální strategií vsadit 11916 Kč na to, že ČR nepostoupí ze základní skupiny, dále 15848 Kč na možnost, že ČR vypadne ve čtvrtfinále, 9254 na to, že ČR získá medaili, a jako poslední 10648 Kč na možnost, že ČR zvítězí a nejlepší střelec bude z ČR. V případě, že by Mistrovství světa nakonec nedopadlo žádnou ze vsazených sázkových možností, sázkaři zůstane kapitál 952334 Kč.

| Sázková možnost | Kurz | Pravděpodobnost |
|---|---|---|
| ČR nepostoupí ze základní skupiny | 4.00 | 0.25 |
| ČR sestoupí | 90.00 | 0.01 |
| ČR postoupí ze základní skupiny | 1.15 | 0.75 |
| ČR vypadne ve čtvrtfinále | 2.85 | 0.35 |
| ČR skončí na 4. místě | 8.50 | 0.10 |
| ČR získá medaili | 3.40 | 0.30 |
| ČR skončí na 3. místě | 8.50 | 0.10 |
| ČR se dostane do finále | 4.00 | 0.20 |
| ČR prohraje ve finále | 8.50 | 0.10 |
| ČR zvítězí | 6.50 | 0.10 |
| ČR zvítězí a nejlepší střelec bude z ČR | 25.00 | 0.05 |

Tabulka 4.3: Sázkové možnosti - Mistrovství světa v ledním hokeji




Obrázek 4.5: Schéma sázek - Mistrovství světa v ledním hokeji




Obrázek 4.6: Log-optimální strategie - Mistrovství světa v ledním hokeji

# Závěr

Cílem této práce bylo maximalizovat sázkařův kapitál u dané sázkové příležitosti, a to v dlouhodobém horizontu po teoretické i praktické stránce a interpretovat dosažené mezivýsledky i závěry. Dokázali jsme, že nejlepší možnou strategií je z dlouhodobého hlediska log-optimální přístup, proto se práce věnovala právě jemu. Další výhodou je, že při využití log-optimální strategie, za předpokladu, že není nucen vsadit celý kapitál na nevýhodnou sázkovou příležitost, sázkař nemůže nikdy zbankrotovat. Naopak, log-optimální strategie při dostatečném počtu sázkových příležitostí skoro jistě zaručí, že výnos sázkaře bude roven alespoň jedné, tedy že sázkař dosáhne zisku či v nejhorším případě nebude ve ztrátě.

V jednotlivých kapitolách jsme se propracovali od základních případů až k těm zcela obecným, přičemž hlavním výsledkem práce bylo odvození algoritmu pro získání log-optimální strategie libovolné sázkové příležitosti splňující podmínky stromového schématu sázek. Tento algoritmus jsme následně využili k naprogramování aplikace v jazyce Python, která uživateli vypíše log-optimální strategii zadané sázkové příležitosti. Na závěr jsme pak teoretické výsledky i implementaci získaného algoritmu využili na řešení několika praktických problémů, na kterých jsme předvedli využití postupů a principů popsaných v této práci.

Na tuto práci by bylo vhodné navázat především v otázce odhadu reálné pravděpodobnosti jednotlivých sázkových možností, tedy parametru $\mathbf{p}$, o kterém v práci předpokládáme, že je známý. Při schopnosti odhadu těchto pravděpodobností by pak tato práce získala velmi výrazné uplatnění v oblasti kurzového sázení i v otázce výběru portfolia při investování. Možným rozšířením této práce by bylo také řešení problematiky hledání log-optimální strategie jiného než stromového schématu sázek.

# Seznam použité literatury


Cover, T. M. a Thomas, J. A. (2006a). *Elements of Information Theory.* 2nd ed. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ. Zbl 1140.94001.

Cover, T. M. a Thomas, J. A. (2006b). Elements of information theory solutions manual. https://dokumen.tips/documents/397-p-complete-solutions-elements-of-information-theory-2nd-edition-complete.html.

Kelly, J. L., J. (1956). *A new interpretation of information rate.* 35. Bell System Technical Journal.