MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Lukáš Macek

Orientace vektorového prostoru

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce:	Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Studijní program:	Učitelství matematiky pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy se sdruženým studiem Učitelství informatiky pro střední školy

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Poděkování

Rád bych poděkoval svému vedoucímu práce Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D. za pomoc, velkou ochotu a trpělivost při zhotovování této práce.

Děkuji členům své nejbližší rodiny, že mi dali možnost na tomto textu pracovat, krmili mě a respektovali mou potřebu dlouhodobého soustředění se, jakožto i můj pracovní režim, který pokrýval značnou část noci.

Děkuji svým prarodičům, že ve mě neustále věřili a často jezdili na návštěvy.

Děkuji těm skautům střediska Ratíškovice, kteří za mě převzali mé povinnosti týkající se vymýšlení programu pro mladé skauty na letní junácký tábor, abych práci stihl včas vypracovat.

Děkuji svým přátelům, zejména dvěma pog Želvičkám – Aufovi a Paxíkům, za pravidelnou podporu a možnost odreagování se po práci, a to ať hovorem, počítačovou hrou či filmem.

Děkuji své spolužačce Míše za podporu a společnost, kterou mi dělala po dobu posledních čtyř let. Dále jí děkuji za pomoc s převodem práce do formátu PDF/A.

Děkuji svému věrnému kamarádovi Ing. Jiřímu Kopáčkovi, který na mě nikdy nezapomněl a vždy se mnou byl ochotný konverzovat prakticky o čemkoliv, přičemž mi poskytoval jak podporu, tak zajímavou a užitečnou perspektivu.

Děkuji našemu pejsku Tripovi a našim třem koťátkům, jmenovitě Pumbovi, Simbovi a Timonovi, za to, že jsem s nimi mohl trávit zamyšlené chvíle, ve kterých jsem si potřeboval vyjít na čerstvý vzduch. Právě Pumbovi, který nás nedávno nešťastně opustil, bych tuto práci rád věnoval.

Název práce: Orientace vektorového prostoru

Autor: Bc. Lukáš Macek

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: V práci se zaměřujeme na vybudování názorné představy orientace vektorového prostoru a na její následné propojení s matematickou definicí. Díky tomu lze práci využít při vysokoškolské výuce jako doplňkový materiál, případně může sloužit jako inspirace pro učitele. Nejprve budujeme samotnou představu souhlasnosti dvou bází, potom zkoumáme její souvislost s permutováním vektorů báze ortonormální, při čemž motivujeme definici znaménka permutace. Pokračujeme pozorováním, co se děje se souhlasností při přechodu do opačného poloprostoru, a všimneme si, jak to souvisí s objemy, a na základě toho motivujeme koncept determinantů. Pak se věnujeme způsobu výpočtu determinantu, který celý odvodíme. Nakonec ukážeme, jak souvisí determinant matice přechodu mezi dvěma bázemi s jejich souhlasností a definujeme orientaci vektorového prostoru.

Klíčová slova: orientace báze matice přechodu znaménko permutace determinant

Title: Orientation of a real vector space

Author: Bc. Lukáš Macek

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: In this thesis, we focus on creating a visual understanding of orientation of a real vector space and its subsequent connection to the mathematical definiton. As a result, this thesis can be used as supplementary material in higher education or serve as inspiration for teachers. First, we develop the idea behind the equivalence of two bases, then we examine its connection to permutations of vectors in ortonormal basis, motivating the definition of parity of permutation. We continue by observing the behavior of the equivalence during a transition to the opposite half-space, noting the connection to volumes, and based on that, we motivate the concept of determinants. Next, we delve into the method of computing determinants, providing a complete derivation. Finally, we demonstrate how the determinant of a transition matrix between two bases relates to their equivalence and we define the orientation of vector space.

Keywords: orientation basis transition matrix parity of permutation determinant

Obsah

Úvod

V této diplomové práci se budeme soustředit na koncept orientace vektorového prostoru z didaktického hlediska. Pokusíme se osvětlit, proč bývá souhlasnost dvou bází definována pomocí znaménka determinantu jejich matice přechodu a jak souhlasnost bází s orientací vektorového prostoru souvisí.

V celé práci budeme pracovat pouze s vektorovými prostory konečné dimenze $n \in \mathbb{N}$ a navíc jenom nad polem reálných čísel. Často budeme předpokládat, že se dokonce jedná o vektorový prostor se standardním skalárním součinem, abychom mohli pracovat například s kolmostí, velikostmi úhlů a objemem. Je zásadní podotknout, že samotný koncept orientace vektorového prostoru skalární součin nevyžaduje, avšak jeho předpokládání nám usnadní, ba vůbec umožní popis intuitivních úvah, na kterých je celá práce díky jejímu didaktickému charakteru založena.

Cílem práce je názorně přiblížit téma orientace vektorového prostoru studentům prvního nebo druhého ročníku vysoké školy, kteří se s ní z odborného hlediska setkávají poprvé. Zvědaví středoškoláci v textu mohou také objevit spoustu zajímavých myšlenek, avšak odbornému porozumění textu práce by mohla bránit neznalost vektorových prostorů,[1] matic, determinantů a permutací. Je tedy na místě říct, že přestože je práce orientována didakticky, předpokládá základní znalosti z lineární algebry.

K napsání této práce jsem byl motivován především proto, že v odborné literatuře se tomuto tématu nevěnuje příliš pozornost. Obvykle se začíná definicí souhlasnosti dvou bází ve smyslu definice 3.10, ale vlastně není jasné, proč zrovna tato definice je vhodná a proč pak všechno funguje tak, jak nám napovídá intuice. Proto v práci kladu důraz především na samotnou intuitivní představu, ke které nabádáme obrázky a často neformálními popisy, a teprve na tu dále navazujeme matematickými výpočty, kterými naše myšlenky formalizujeme. Tento postup by měl usnadnit čtenáři pochopení jednotlivých konceptů, pomoci s jejich vizualizací a propojit intuitivní vnímání orientace vektorového prostoru s její matematickou definicí.

Konkrétně pak v knize [Be] je téma orientace vektorového prostoru zcela vynecháno. Známá učebnice [Se], podkapitola 1.13, strany 100–102, se tomuto tématu sice v rámci afinních prostorů alespoň věnuje, avšak po krátkém úvodu s popisem představy souhlasnosti dvou bází je už uvedena definice 1.13.2,[2] která je analogická zmiňované definici 3.10. Mezi knihy, které se orientaci věnují trochu podrobněji, patří například [By] a [Ma], ale v obou případech se myšlenky nezobecní do prostoru dimenze $n \in \mathbb{N}$. Probírá se zde orientace přímky a roviny, v [By] navíc orientace trojhranu os, odlišují se zde dále jakési dva pohledy na orientaci (názorná a matematická), ale samotné propojení na mě nepůsobilo intuitivně a přirozeně. Ze zahraniční literatury můžeme téma orientace najít například v knize [Ha], kapitola 25, strany 267–272, kde je studováno v souvislosti se shodnými zobrazeními, avšak pouze v eukleidovské rovině.[3]

[1] Hojně používám například pojmy *vektor*, *báze* vektorového prostoru, *dimenze*, vektorový *podprostor* a *souřadnice* vzhledem k nějaké bázi.

[2] V knize je chybně označená jako definice 1.12.2, což pravděpodobně způsobil přepis.

[3] Odliší se přímé shodnosti (*id*, rotace a posunutí) a nepřímé shodnosti (osová souměrnost).

Z těchto důvodů jsem většinu práce vypracoval samostatně s tím, že občas odkazuji na knihu [Be] pro vysvětlení některých pojmů v případě, že se s nimi čtenář zatím nesetkal. První a čtvrtou kapitolu jsem vypracoval zcela samostatně; jednou odkazuji na [Be], jelikož poprvé používám pojem *lineární kombinace*. V kapitole 2 knihu [Be] využívám v souvislosti s úvodem do permutací v podkapitole 2.4, konkrétně odkazuji na základní výsledky z teorie permutací (permutace jako složení transpozic či nezávislých cyklů) a na poznatky související s grupami permutací a faktorizací $\mathbb{S}_n$ (grupu $\mathbb{S}_n$ lze faktorizovat podle její normální podgrupy $\mathbb{A}_n$); zbytek této kapitoly jsem vypracoval samostatně. Ve třetí kapitole používám z knihy [Be] definici matice přechodu, jelikož sám tuto definici záměrně uvádím až v podkapitole 3.2, dále tvrzení, že „po kolmici je to nejkratší“, větu o násobení determinantů a konečně větu popisující Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces, který v upravené formě uvádím do souvislosti s orientací v podkapitole 3.3. Všechna tři tvrzení z knihy [Be] přebírám proto, abychom v této práci mohli přeskočit jejich důkazy, a tím celou práci zpřehlednit – důležitá je souvislost s tématem orientace, která takto nezanikne. Zbytek kapitoly 3 jsem vyhotovil samostatně. Všech 19 obrázků, které se v práci vyskytují, jsem samostatně vytvořil v softwaru GeoGebra.

V první kapitole se věnujeme především budování představy souhlasnosti dvou bází, a to na příkladech prostorů dimenze 1, 2 a 3. Výklad je doplněn poznámkami, které poukazují na klíčové vlastnosti souhlasnosti, aby čtenář v dalších kapitolách věděl, jaké vlastnosti má smysl očekávat, což může usnadnit porozumění.[4] Konec první kapitoly je věnován prostorům dimenze 4 a vyšší, kde se pokoušíme objevit cestu, jak koncept souhlasnosti dvou bází systematicky rozšířit dál.

Poté budeme koncept orientace postupně formalizovat. Nejprve budeme souhlasnost dvou bází vnímat tak, že je jednu bázi možné převést na druhou pouhým otočením. U obecných souhlasných bází to však většinou možné není,[5] a proto se omezíme pouze na množinu bází ortonormálních. Pro tento speciální případ odvodíme klíčové vlastnosti zmiňované v první kapitole (záměna vektorů v bázi či výměna jednoho z vektorů za vektor vůči němu opačný vytvoří bázi s původní nesouhlasnou). Navíc zjistíme, že nemá smysl v prostoru dimenze $n \in \mathbb{N}$ uvažovat orientaci vektorového podprostoru dimenze ostře nižší než n, protože báze takového podprostoru jsou v prostoru dimenze n všechny navzájem souhlasné. Konečně téma propojíme s teorií permutací a ukážeme souvislost s jejich znaménkem. Jelikož je znaménko permutace jedním z klíčových pojmů tématu orientace, budeme se mu věnovat podrobněji a propojíme jeho obvyklou definici s naší názornou představou.

Dále se pokusíme rozšířit naše chápání souhlasnosti dvou bází na množinu všech bází daného prostoru. Využijeme k tomu myšlenky počáteční kapitoly, které propojíme s definicí poloprostoru.[6] Vzpomeneme si na to, že vektory báze určují nějaký n-rozměrný rovnoběžnostěn, a všimneme si, že spojitý přechod jednoho z vektorů do opačného poloprostoru je spojen se spojitým přechodem ob-

[4] Například, že se jedná o relaci ekvivalence, která indukuje rozklad množiny všech bází daného prostoru na právě dvě třídy.

[5] Vektory mohou mít různé velikosti a svírat úhly různých velikostí.

[6] Tato definice však nebude koincidovat s geometrickou definicí poloprostoru, jelikož my záměrně nebudeme považovat hranici za jeho součást.

jemu tohoto rovnoběžnostěnu přes hodnotu 0. Při těchto motivačních úvahách začneme postupně budovat koncept determinantu, který spojíme s orientovanou verzí zmiňovaného objemu.[7] Ukážeme, že determinant (ve smyslu orientovaného objemu) horní trojúhelníkové matice spočítáme snadno jako součin jejích diagonálních prvků. U obecné matice začneme cítit problém, a tak přijdeme s úvahou převést ji jistými úpravami na matici horní trojúhelníkovou, jako to děláme například při řešení soustav lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody. Dále budeme používat už jenom pojem determinant s tím, že na rozdíl od objemu ho budeme vnímat jako pojem „relativní".[8] Na základě této představy jednotlivé elementární úpravy odvodíme a poté konečně determinant čtvercové matice definujeme, a to jako hodnotu určenou jednoznačně námi popsaným (a odvozeným) způsobem výpočtu. V závěru třetí kapitoly ještě podrobnějším zkoumáním matic přechodu a jejich determinantů rozšíříme způsob posuzování souhlasnosti dvou bází na dvojice obecných bází[9] a konečně ukážeme souvislost s ortonormalizační verzí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu, čímž rozšíříme všechna pozorování z předchozí kapitoly na množinu všech bází daného prostoru,[10].

V závěrečné kapitole využijeme nabytých znalostí o relaci souhlasnosti na celé množině všech bází daného prostoru a definujeme samotnou orientaci vektorového prostoru. Pak už jenom upozorníme na nepřesné vyjadřování,[11] které se u tohoto tématu často používá, a práci zakončíme seznamem různých oblastí, kde se s orientací vektorového prostoru můžeme setkat.

V literatuře je také kromě chatrné motivace tématu orientace obvyklé, že se znaménko permutace definuje pomocí inverzí. Osobně tento postup pokládám za velmi neintuitivní, a proto je v práci přirozeně obsažena i motivace této definice; vycházíme z pojmu transpozice, jejíž aplikaci považuji za velmi snadno představitelnou. Mimo orientaci vektorového prostoru a znaménko permutace se nám v práci také daří motivovat souvislost determinantu matice přechodu mezi dvěma bázemi se souhlasností těchto bází. Právě motivační stránka je pro tuto práci stěžejní. Dáváme proto záměrně přednost místy neformálnímu vyjadřování, které má zajistit názornost a snazší pochopení, před naprostou matematickou přesností. Díky tomu můžeme pracovat konstruktivně a jednotlivé definice nám nemusí „padat z nebe".

[7] Aby to bylo možné, uvažujeme v této části pouze determinant matice přechodu od obecné báze k bázi ortonormální. Zároveň poukazujeme na rozdíly mezi objemem a determinantem, aby čtenář nenabyl dojmu, že se oba pojmy nijak neliší.

[8] Determinant matice přechodu závisí na obou patřičných bázích (relativita) a je nezávislý na skalárním součinu. Objem rovnoběžnostěnu závisí pouze na bázi, jejíž vektory toto těleso určují.

[9] Dosud jsme se soustředili především na posuzování souhlasnosti obecné báze s bází kanonickou.

[10] Před tím se vztahovala pouze na množinu všech ortonormálních bází daného prostoru.

[11] O dvou souhlasných bázích se nepřesně říká, že mají stejnou „orientaci". Orientace je však vlastnost celého prostoru, na rozdíl od náležení do jedné z rozkladových tříd ekvivalence „být souhlasná", což je vlastnost každé z jeho bází.

1. Intuitivní představa

Vezměme si do ruky nějakou botu. Bez větších potíží bychom měli být schopni rozlišit, zda je levá, nebo pravá. Žádná bota není zároveň levá i pravá, ale lze ji zařadit právě do jedné z těchto dvou tříd. O dvou pravých, resp. o dvou levých botách můžeme říct, že jsou navzájem souhlasné,[12] o levé a pravé botě naopak řekneme, že jsou nesouhlasné. Koncept orientace vektorového prostoru vychází z této myšlenky, kdy v daném prostoru rozlišujeme právě dvě různé třídy rozkladu, který indukuje ekvivalence „být souhlasná“ na množině všech jeho bází.[13]

Otázka 1.1. *Co znamená, že jsou dvě báze daného prostoru souhlasné?*

Pokud lze jednu bázi převést na druhou pouhým otočením, pak už jsou jistě souhlasné. Opačná implikace však neplatí: Vezměme si například pravý pantofel velikosti 38 a pravý sandál velikosti 44. Obě boty jsou pravé, tedy souhlasné, avšak jistě na sebe nejdou převést nějakým otočením. Podobně je to u bází – mohou mít vektory různých velikostí, dokonce můžou mít obě báze jiný „tvar“,[14] a přesto být navzájem souhlasné.

Problém s velikostí a „tvarem“ můžeme vyřešit například podmínkou ortonormality.

Poznámka 1.1. *Platí:*
Pokud je jedna báze pouhým otočením druhé, pak jsou navzájem souhlasné.
Ortonormální báze je pouhým otočením druhé ortonormální báze právě tehdy, když jsou navzájem souhlasné.

Nejprve nahlédněme na situaci v 1D, 2D a 3D a pokusme se na tuto otázku odpovědět tam. Poté můžeme získané myšlenky rozšířit do dalších dimenzí, počínaje 4D, na kterém to předvedeme.

Poznámka 1.2. *V celé práci se budeme zabývat pouze vektorovými prostory konečné dimenze nad tělesem reálných čísel. Většinou budeme navíc předpokládat, že v prostoru máme standardní skalární součin.*

1.1 Vektorová přímka (1D)

Vektorovou přímku budeme modelovat slámkou: Vezměme si brčko a na jeden z jeho konců přilepme list papíru. Vhoďme dovnitř sirku, která má právě na jednom z jejich konců síru. Jsou dvě možnosti: Síra směřuje k papíru, nebo od něj.

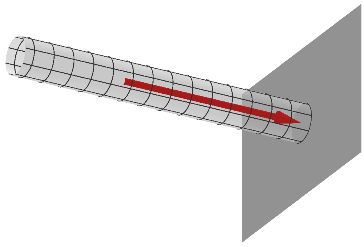
Za předpokladu, že sirku z brčka nevytáhneme, nemůžeme jeden stav změnit na druhý. Každý ze stavů určuje jednu třídu rozkladu, který indukuje naše ekvivalence: O dvou sirkách řekneme, že jsou souhlasné právě tehdy, když síra u obou směřuje buď k papíru, nebo od něj.

[12] Ve smyslu pravosti/levosti.

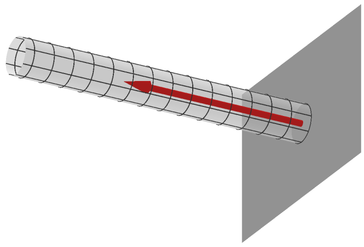
[13] Samotná orientace vektorového prostoru pak znamená volbu jedné z těchto tříd za *kladnou*; druhou třídu pokládáme za *zápornou*.

[14] Například báze $\big((1,0,0)^T,(0,1,0)^T,(0,0,1)^T\big)$ a $\big((3,1,0)^T,(1,7,-5)^T,(-6,1,2)^T\big)$. Pokud máme k dispozici skalární součin, můžeme spočítat, že příslušné dvojice vektorů svírají úhly různých velikostí.

Popsanou situaci znázorňuje obrázek:



síra směřuje k papíru



síra směřuje od papíru

Z pohledu lineární algebry jsou v 1D dvě báze $B = (\vec{u}_1)$ a $C = (\vec{v}_1)$ souhlasné právě tehdy, když je $\vec{v}_1$ kladným násobkem vektoru $\vec{u}_1$:

$$\text{Báze } B = (\vec{u}_1), C = (\vec{v}_1) \text{ jsou souhlasné} \iff \exists a_1 \in \mathbb{R}, a_1 > 0 : \vec{v}_1 = a_1 \cdot \vec{u}_1.$$

Poznámka 1.3. *B, C jsou nesouhlasné právě tehdy, když je $\vec{v}_1$ záporným násobkem $\vec{u}_1$. Nemá smysl uvažovat nulový násobek, protože pak by byl porušen předpoklad, že B i C jsou báze.*

Všimněme si, že pokud vyměníme vektor $\vec{u}_1$ za opačný, vytvoříme bázi s původní nesouhlasnou – podobně jako kdybychom vytáhli sirku z brčka a vložili ji tam obráceně.

Poznámka 1.4. *Výměnou vektoru za vektor k němu opačný vytvoříme bázi, která je s původní nesouhlasná.*

1.2 Vektorová rovina (2D)

Vektorovou rovinu budeme modelovat pomocí analogových hodin: Představme si, že máme na zdi zastavené hodiny s minutovou a hodinovou ručičkou, které například ukazují čas 2:00.[15] Představme si kružnici se středem v ciferníku, kterou obě ručičky protínají, a tedy ji rozdělují na dva oblouky. Zvolme kratší[16] z nich a po jeho obrysu si představme šipku od jedné ručičky ke druhé. Podle toho, kterou ručičku si zvolíme za „první“ a kterou za „druhou“, bude šipka směřovat buď po směru hodinových ručiček, nebo proti němu.

Za předpokladu, že hodiny ze zdi nesundáme, se tato vlastnost šipky nezmění, a to ani otáčením ciferníku.[17] Každý ze dvou směrů šipky určuje jednu třídu rozkladu: O dvou uspořádaných dvojicích ručiček[18] řekneme, že jsou souhlasné právě tehdy, když se shodují směry jejich šipek.[19]

[15] Pro náš příklad může být čas téměř libovolný; potřeba je vyhnout se případům, kdy ručičky leží na společné přímce, protože tehdy vektory ručiček netvoří bázi vektorové roviny, jelikož jsou lineárně závislé.

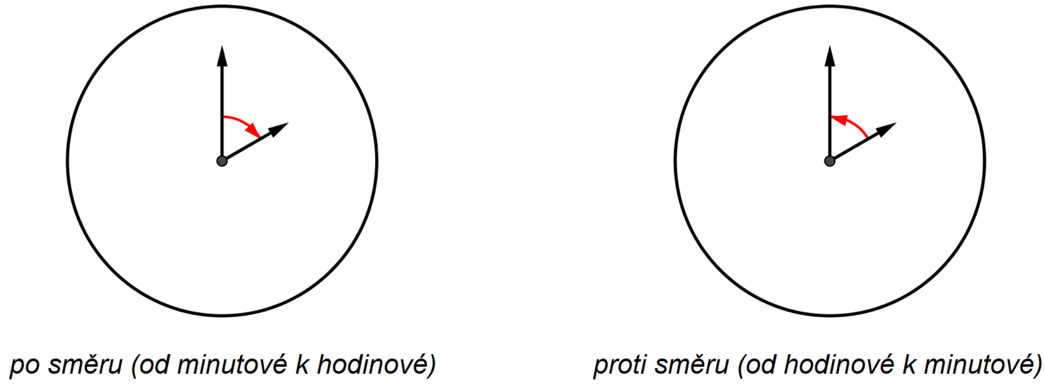
[16] Dokud jsou vektory ručiček lineárně nezávislé, mají oblouky různé, kladné délky.

[17] Připomínám, že hodiny jsou zastavené, a předpokládám, že ke změně indikovaného času na hodinách je potřeba hodiny ze stěny sundat. Pokud bychom čas změnily, mohlo by se stát, že se směr šipky otočí. Například změna na 2:30 by pro stejnou volbu pořadí ručiček směr šipky obrátila.

[18] Klidně každá dvojice může ukazovat odlišný čas, avšak stále ručičky žádné dvojice nesmí ležet na společné přímce.

[19] Ve smyslu po směru hodinových ručiček vs. proti němu.

Obrázek ilustruje oba možné směry šipky:



Jelikož pouhým otočením směr šipky nezměníme, můžeme si posuzování souhlasnosti zjednodušit: Oba ciferníky otočme tak, aby jejich „první“ ručičky ukazovaly stejným směrem (například nahoru).[20] Hraniční přímka daná tímto směrem pak rozdělí ciferník na dvě poloviny (levou a pravou). Lze nahlédnout, že dvojice ručiček jsou souhlasné právě tehdy, když se obě „druhé“ ručičky každé z těchto dvojic po zmíněném otočení nachází ve stejné polovině ciferníku[21] (obě vlevo, nebo obě vpravo) – jejich šipky budou pak mít stejný směr.

Místo ručiček si nyní vezměme báze 2D prostoru B, C a souhlasnost posuzujme úplně stejně. Řekněme, že pomocným otočením báze B vytvoříme bázi $B' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, která je s B souhlasná,[22] a otočením báze C vytvoříme bázi $C' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, která je souhlasná s C. Otočení jsme provedli tak, aby byl $\vec{v}_1$ kladným násobkem $\vec{u}_1$. Navíc jsou dle předchozího odstavce báze B' a C' souhlasné právě tehdy, když vektory $\vec{u}_2$ a $\vec{v}_2$ leží ve stejném poloprostoru, což je právě tehdy, když je $\vec{v}_2$ takovou lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, že koeficient u vektoru $\vec{u}_2$ je kladný.

Zapišme obě podmínky souhlasnosti bází B', C', a tedy i bází B, C[23] symbolicky:

1. $\exists a_1 \in \mathbb{R}, a_1 > 0 : \vec{v}_1 = a_1 \cdot \vec{u}_1,$
2. $\exists b_1, b_2 \in \mathbb{R}, b_2 > 0 : \vec{v}_2 = b_1 \cdot \vec{u}_1 + b_2 \cdot \vec{u}_2.$

Všimněme si, že první z podmínek je stejná jako v případě 1D. Navíc je stále v platnosti poznámka 1.4.

Podotkněme, že záměnou vektorů[24] vytvoříme bázi, která je s původní nesouhlasná – podobně jako kdybychom změnili pořadí ručiček (otočil by se směr šipky).

Poznámka 1.5. *Záměnou dvou vektorů vytvoříme bázi, která je s původní nesouhlasná.*

[20] Někdy otáčení nebude třeba. Například u ciferníků indikujících 2:00 a 3:00, kde jsme si u každého zvolili za „první“ minutovou ručičku, již obě „první“ ručičky ukazují nahoru.

[21] Neodkazujme přitom na čísla na ciferníku. Například číslo 9 je obvykle vlevo, ale otáčením hodin může skončit kdekoliv, klidně i vpravo.

[22] Protože lze obě báze na sebe převést pouhým otočením.

[23] Relace „být souhlasná“ je ekvivalence, a tedy je tranzitivní. Báze B, C jsou souhlasné právě tehdy, když jsou souhlasné báze B', C' díky tranzitivitě.

[24] Ve smyslu jejich pořadí.

1.3 Trojrozměrný vektorový prostor (3D)

Použijeme příklad s botami, který jsme zmínili v úvodu kapitoly. Řekli jsme, že dvě boty jsou souhlasné právě tehdy, když jsou obě pravé, nebo obě levé.

Otázka 1.2. *Co ale znamená, že je bota pravá, resp. levá?*

Představme si, že od paty ke špičce míří šipka udávající směr *dopředu*, směrem od podešvi ke svršku zase šipka udávající směr *nahoru* a konečně směrem od vnější klenby k vnitřní[25] směřuje šipka udávající směr *dovnitř*. Pokud botu položíme před sebe (*dopředu* udává směr od nás k botě) tak, aby směr *nahoru* byl svislý vzhůru (tj. bota stála na své podrážce), rozlišíme dle směru *dovnitř* mezi botou pravou a levou: U pravých bot míří *dovnitř* z našeho pohledu doleva, u levých zase doprava.

Rozdíl mezi pravou a levou botou:

pravá bota (dovnitř směřuje vlevo) **levá bota** (dovnitř směřuje vpravo)

Místo bot si nyní vezměme ortogonální báze 3D prostoru B a C. Otočme je tak, aby jejich příslušné první vektory udávaly stejný směr,[26] tj. jeden byl kladným násobkem toho druhého, a to stejné pro jejich příslušné druhé vektory.[27] Tímto otočením vzniknou báze $B' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, která vznikla z B, a tedy je s ní souhlasná, a $C' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, která vznikla z C, a tedy je s ní souhlasná. Jako v příkladu s hodinami posuzujeme souhlasnost bází B', C' podle toho, zda jejich třetí vektory leží ve stejných poloprostorech[28] (pak báze jsou souhlasné), anebo v opačných (pak jsou nesouhlasné).

Pozorování 1.1. *Všechny vektory, které leží ve stejném poloprostoru jako $\vec{u}_3$, jsou vektorovým součtem nějakého vektoru z hraniční roviny $LO\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ a kladného násobku $\vec{u}_3$, tj. jsou takovou lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, že koeficient před $\vec{u}_3$ je kladný. Báze B', C' jsou tedy souhlasné právě tehdy, když tak lze vyjádřit i vektor $\vec{v}_3$.*

Pokud navíc upustíme od předpokladu ortogonality bází B, C, nemusí být podmínka, aby jejich příslušné druhé vektory udávaly stejný směr, splnitelná, pokud již totéž požadujeme pro příslušné první vektory. Můžeme se však spokojit s tím, že oba druhé vektory budou ležet ve stejné polorovině[29] Tj. otočením

[25] Kdybychom si botu obuli na správnou nohu, jednalo by se o směr od malíčku k palci.

[26] Například směr *dopředu*.

[27] Například směr *nahoru*.

[28] Rozdělením 3D prostoru hraniční rovinou $LO\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = LO\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ vzniknou dva opačné poloprostory, kde $LO\ M$ je lineární obal množiny M – viz [Be], kapitola 7, strana 67, definice 7.11. Poloprostory definujeme později, viz definice 3.1.

[29] Rozdělením prostoru $LO\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ hraniční přímkou $LO\{\vec{u}_1$ vzniknou dvě opačné poloroviny.

vzniknou takové báze B', C', které splňují jak, že $\vec{v}_1$ je kladným násobkem $\vec{u}_1$, tak, že $\vec{v}_2$ je takovou lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, že koeficient u $\vec{u}_2$ je kladný.

Celkem tak máme tři podmínky souhlasnosti bází B', C', a tedy bází B, C:

1. $\exists a_1 \in \mathbb{R}, a_1 > 0 : \vec{v}_1 = a_1 \cdot \vec{u}_1$,
2. $\exists b_1, b_2 \in \mathbb{R}, b_2 > 0 : \vec{v}_2 = b_1 \cdot \vec{u}_1 + b_2 \cdot \vec{u}_2$,
3. $\exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, c_3 > 0 : \vec{v}_3 = c_1 \cdot \vec{u}_1 + c_2 \cdot \vec{u}_2 + c_3 \cdot \vec{u}_3$.

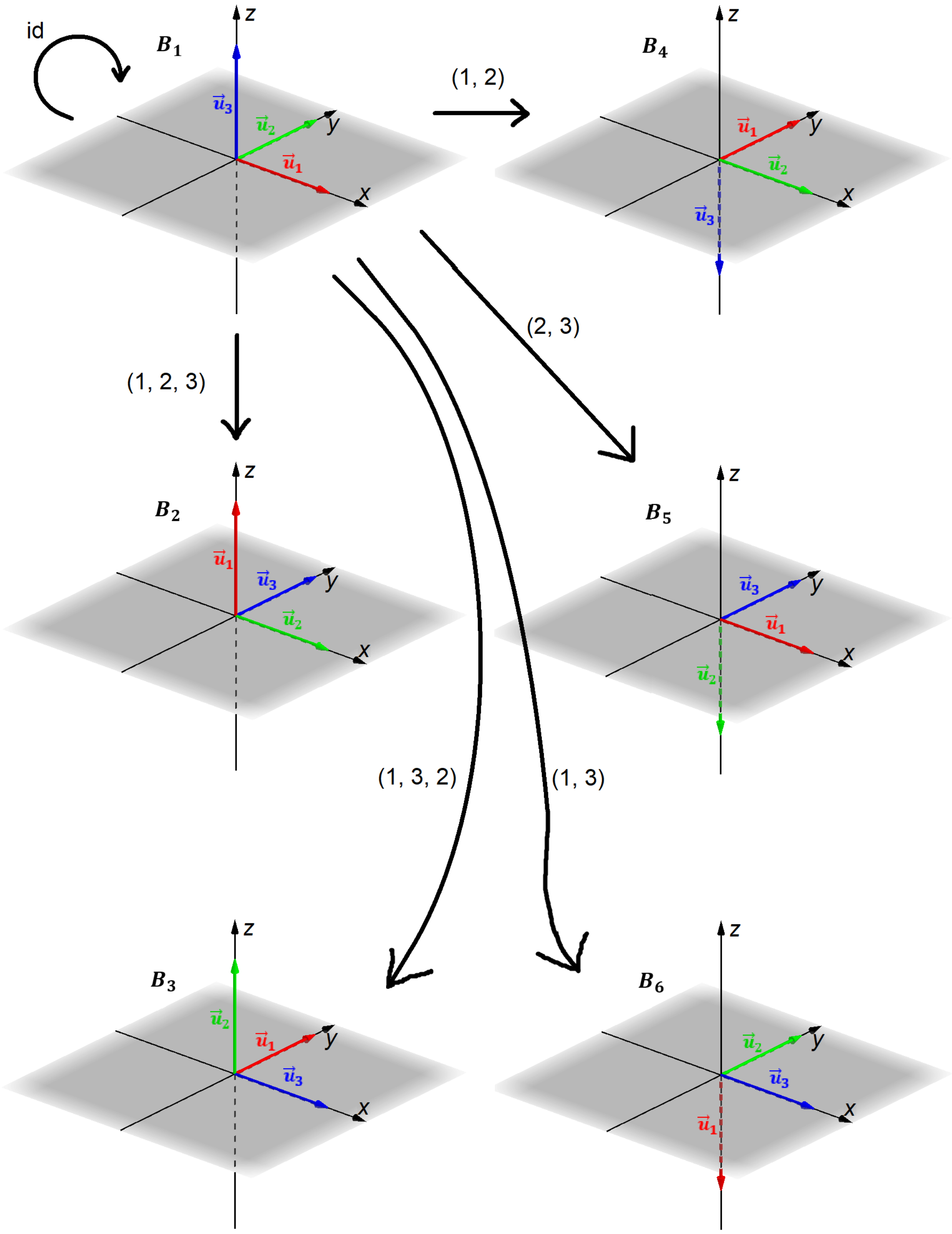
Opět si všimněme, že pokračujeme v minulém trendu – první dvě podmínky jsou stejné jako v případě 2D.

V minulých podkapitolách jsme si všimli, že záměnou vektorů či výměnou vektoru za vektor k němu opačný můžeme vytvořit bázi s původní nesouhlasnou – poznámky 1.4 a 1.5. Všimněme si, že platí i zde, avšak nyní máme k dispozici hned 6 permutací. Mohlo by se stát, že každá permutaci vytvoří „jinak nesouhlasnou“ bázi, a tedy že ekvivalence „být souhlasná“ indukuje rozklad na víc tříd než 2? Pro jednoduchost si vezměme ortonormální bázi.

Otázka 1.3. *Co se děje, když permutujeme vektory nějaké ortonormální báze $B_1 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$?*

Na příští straně nám na tuto otázku odpoví obrázek.

Následující obrázek znázorňuje aplikaci všech permutací z $\mathbb{S}_3$ na vektory báze B_1:



V levém sloupci jsou báze, které vznikly aplikací sudé permutace, v pravém zase báze, které vznikly aplikací permutace liché. Všimněme si, že všechny báze v jednom sloupci lze na sebe převést pouhým otočením (jsou souhlasné), ale zároveň jsou báze v levém sloupci s bázemi v pravém sloupci navzájem nesouhlasné.[30]

Poznámka 1.6. *Při ekvivalenci „být souhlasná“ se množina všech bází daného vektorového prostoru rozpadá na právě* 2 *třídy.*
Sudé permutace vytváří bázi, která je s původní souhlasná.
Liché permutace vytváří bázi, která je s původní nesouhlasná.

[30] V každém řádku platí, že báze v pravém sloupci vznikla z příslušné báze v levém sloupci záměnou dvou vektorů.

1.4 Čtyřrozměrný vektorový prostor (4D)

Zde už naše intuice selhává, a proto se budeme držet trendu, který jsme mohli pozorovat v minulých třech podkapitolách.

Jak určíme, zda jsou báze B a C souhlasné, či nikoliv? Pomozme si opět rotací: Otočením B vznikne $B' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$, otočením C zase $C' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$.

Trend z minulých podkapitol byl otáčet tak, aby platily podmínky z předchozí podkapitoly. Budeme tedy otáčet tak, aby platily všechny 3 podmínky ze 3D. Dále rozdělíme 4D prostor na dva 4D poloprostory.[31] Souhlasnost bází poznáme tak, že vektory $\vec{u}_4$, $\vec{v}_4$ leží ve stejném 4D poloprostoru.

Báze B a C tedy otočíme tak, aby:

1. $\vec{v}_1$ měl stejný směr jako $\vec{u}_1$ (je jeho kladným násobkem),
2. $\vec{v}_2$ ležel v polorovině určené vektorem $\vec{u}_2$ a hraniční přímkou $LO\{\vec{u}_1\}$,
3. $\vec{v}_3$ ležel v poloprostoru určeném vektorem $\vec{u}_3$ a hraniční rovinou $LO\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

Předchozí podmínky lze zapsat následovně:

1. $\exists a_1 \in \mathbb{R}, a_1 > 0 : \vec{v}_1 = a_1 \cdot \vec{u}_1,$
2. $\exists b_1, b_2 \in \mathbb{R}, b_2 > 0 : \vec{v}_2 = b_1 \cdot \vec{u}_1 + b_2 \cdot \vec{u}_2,$
3. $\exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, c_3 > 0 : \vec{v}_3 = c_1 \cdot \vec{u}_1 + c_2 \cdot \vec{u}_2 + c_3 \cdot \vec{u}_3.$

Pak řekneme, že báze B' a C' jsou souhlasné právě tehdy, když navíc platí:

4. $\exists d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}, d_4 > 0 : \vec{v}_4 = d_1 \cdot \vec{u}_1 + d_2 \cdot \vec{u}_2 + d_3 \cdot \vec{u}_3 + d_4 \cdot \vec{u}_4.$

Celkově tedy máme čtyři podmínky souhlasnosti bází B a C.[32]

Konečně poznamenejme, že všechna předchozí pozorování shrnutá v podmínkách 1.4, 1.5 a 1.6 platí i zde. Stejným principem, který shrnuje poznámka 1.7, lze relaci „být souhlasná“, a tedy i orientaci vektorového prostoru rozšířit do prostoru dimenze $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka 1.7. *Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ se standardním skalárním součinem a B, C jsou jeho báze. Pak platí, že jsou obě navzájem souhlasné právě tehdy, když existují báze $B' = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n)$, souhlasná s B (vznikla pouhým jejím otočením), a $C' = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$, souhlasná s C (vznikla pouhým jejím otočením), takové, že platí následující podmínky:*

1. $\exists a_1^1 \in \mathbb{R}, a_1^1 > 0 : \vec{v}_1 = a_1^1 \cdot \vec{u}_1,$
2. $\exists a_1^2, a_2^2 \in \mathbb{R}, a_2^2 > 0 : \vec{v}_2 = a_1^2 \cdot \vec{u}_1 + a_2^2 \cdot \vec{u}_2,$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \ddots$

$n.$ $\exists a_1^n, ..., a_n^n \in \mathbb{R}, a_n^n > 0 : \vec{v}_n = a_1^n \cdot \vec{u}_1 + \cdots + a_n^n \cdot \vec{u}_n.$

[31] Podobně jako při dělení 2D jsme měli hraniční přímku a při dělení 2D jsme měli hraniční rovinu, zde máme hraniční 3D prostor – konkrétně $LO\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = LO\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

[32] Díky tranzitivitě opět platí, že B a C jsou souhlasné právě tehdy, když jsou souhlasné báze B' a C'.

2. Souhlasnost ortonormálních bází

Nyní budeme směřovat k matematickému popisu samotné orientace vektorového prostoru. Intuitivní představa nám pomohla určit, co od orientace očekáváme, a postupně nás dovede k tomu, co to vlastně orientace je.

Na úvod si představme, že máme dvě souhlasné báze (ve smyslu předchozí kapitoly). Rádi bychom tuto relaci matematicky definovali tak, aby odpovídala naší intuitivní představě.

Otázka 2.1. *Kdy chceme, aby byly dvě báze souhlasné?*

Na podobnou otázku jsme odpověděli v minulé kapitole, kde jsme však postupovali čistě intuitivně. Nyní budeme chtít na základě získané představy zvolit pro relaci „být souhlasná“ pouze základní vlastnosti a ostatní matematicky odvodit, a to v prostorech obecné dimenze $n \in \mathbb{N}$. Vycházet budeme z poznámky 1.1:

Předpoklady 2.1. *Pokud máme dvě báze takové, že na sebe jdou převést pouhým otočením, jsou souhlasné.*
Pro dvě ortonormální báze platí, že na sebe jdou převést pouhým otočením právě tehdy, když jsou souhlasné.

Otázka 2.2. *Mějme bázi B a pouze permutováním jejích vektorů vytvářejme další báze. Jsou všechny nově vzniklé báze pouhým otočením původní báze B, nebo ne?*

Dle poznámky 1.5 z minulé kapitoly již tušíme, že odpověď na otázku bude: „Ne.“ Musíme to však dokázat.

Pro jednoduchost rozebereme v této kapitole pouze permutace vektorů v bázích ortonormálních. K obecným bázím se vrátíme v kapitole 3.

2.1 Záměna dvou vektorů

Zkoumat ihned všechny permutace je pro nás v tento moment příliš velké sousto. Zabývejme se zatím pouze případy, kdy v bázi zaměníme pouze nějaké její dva vektory.[33] Bude pak vždy vzniklá báze pouhým otočením té původní, nebo ne?

2.1.1 Strategie

Zvolíme obecnou bázi B. Nebudeme však zaměňovat vektory v samotné B, ale vezmeme si „pěknou“ bázi E_1 a zaměňovat budeme až v ní. Slovem „pěkná“ zde míníme, že E_1 vytvoříme z B tak, aby B vůči E_1 splňovala podmínky pro souhlasnost z první kapitoly,[34] a to navíc tak, aby byla E_1 ortonormální.[35] K určování, co

[33] Aplikujeme nějakou transpozici.

[34] Tj. vektory báze B vzhledem k bázi E_1 je možné vyjádřit pomocí uvedených lineárních kombinací v první kapitole. V dimenzi $n \in \mathbb{N}$ budeme mít n podmínek.

[35] V praxi toho docílíme pomocí ortonormalizační verze Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace, viz věta 3.25.

se s bází E_1 záměnou vektorů děje, budeme používat souřadnice vektorů báze B vzhledem k bázi E_1, resp. k bázi, která z E_1 záměnou vektorů vznikla.

Pokud je báze, která vznikla záměnou vektorů, s bází E_1 souhlasná, je ji díky ortonormalitě a předpokladům 2.1 možné z E_1 vytvořit pouhým otočením. Předpokládejme tedy, že tomu tak je, a pokusme se v E_1 pouhým otočením simulovat záměnu dvou jejích vektorů. Vyberme i-tý a j-tý vektor.

Postup:

1. Otočíme bázi E_1 nejprve tak, aby se její i-tý vektor dostal na místo původního j-tého (tím vznikne báze E_2),

2. poté dále tak, aby se j-tý vektor dostal z jeho nového místa na místo původního i-tého, zatímco i-tým vektorem už nepohneme (dostaneme bázi E_3).

Poznámka 2.1. *Otáčíme vždy pouze ve vektorové rovině – vektory, které v ní neleží, zůstanou na místě.*

První z otočení tedy proběhne v rovině generované i-tým a j-tým vektorem báze E_1, druhé otočení v rovině generované j-tým vektorem báze E_2 a libovolným dalším mimo i-tý. Jelikož chceme nechat i-tý vektor na jeho novém místě,[36] nesmí do této roviny patřit. Který vektor je nejlepší zvolit?

Prohlédněme si ještě jednou podmínky pro souhlasnost dvou bází z minulé kapitoly a proveďme klíčové pozorování:

Pozorování 2.1. *V minulé kapitole v prostoru dimenze $n \in \mathbb{N}$ pro podmínky souhlasnosti bází $B' = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n)$ a $C' = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ platí:*
Všechny vektory $\vec{v}_k$ kromě posledního lze vyjádřit jako takovou lineární kombinaci vektorů báze B', že koeficient u vektoru $\vec{u}_n$ je nulový.[37]
Jinými slovy: Poslední souřadnice všech vektorů báze C' kromě posledního vzhledem k bázi B' jsou nulové.

To znamená, že pokud v rovině obsahující poslední vektor otočíme tak, že se u příslušných souřadnic změní pouze znaménka, postihne tato změna ze všech posledních souřadnic pouze tu u posledního vektoru.[38] Jestliže tedy zachováme fakt, že všechny poslední souřadnice všech vektorů kromě posledního jsou nulové, můžeme poslední souřadnici posledního vektoru využívat jako jistý indikátor.

Dohoda: *V případě, že si budeme moct vybrat, ve které vektorové rovině chceme otáčet, zvolíme takovou, která obsahuje poslední vektor báze, kterou otáčíme. Případná změna v souřadnicích se tak projeví u něho.*

Po provedení obou otočení si všimněme, že jsme sice pozice i-tého a j-tého vektoru zaměnili, ale ne všechny ostatní vektory zůstaly na svém místě – poslední vektor se změnil na opačný. Pokud bychom se ho pokusili otočit zpět, změníme

[36] Jedná se tedy o i-tý vektor báze E_2, protože ta obsahuje vektory, které vznikly prvním otočením.

[37] Ve vyjádření $\vec{v}_n$ je tento koeficient kladný, a tedy nenulový.

[38] Není to však jediná změna. Pokud v této rovině například navíc leží k-tý vektor, změní se ještě znaménka u k-tých souřadnic.

alespoň jeden další vektor. Vypadá to, že pouhým otočením záměnu dvou vektorů simulovat nelze.

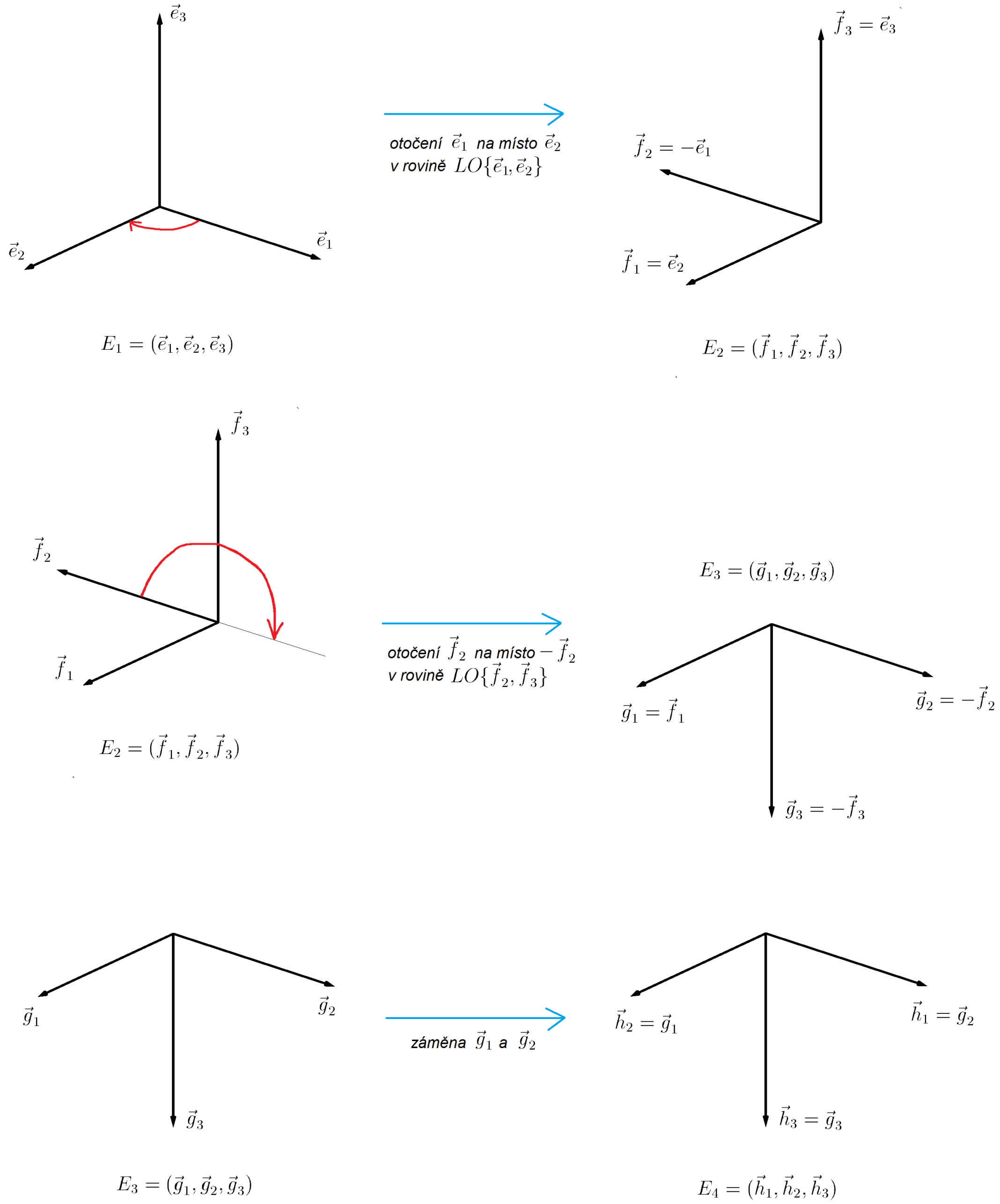
Pozorujme, co se stalo z pohledu souřadnic – podrobně tento pohled popíšeme v příští podkapitole. Tam si všimneme, že kdybychom zaměnili i-té a j-té souřadnice u všech vektorů báze B vzhledem k bázi E_3, získali bychom jejich souřadnice vzhledem k bázi E_1 (s výjimkou jedné z nich, a to právě poslední souřadnice posledního vektoru) – pozorování 2.2. Vytvoříme tedy bázi E_4, která vznikne z E_3 záměnou jejího i-tého a j-tého vektoru.

Dřívější postup tedy doplňme o třetí krok:

3. Konečně zaměníme i-tý a j-tý vektor v bázi E_3 (vznikne báze E_4).

Na příští straně naše myšlenky vyjádříme obrázkem.

Výše popsaný postup znázorníme na obrázcích. Konkrétně zaměníme první a druhý vektor ve 3D prostoru, tj. $i = 1$, $j = 2$, $n = 3$:



Báze E_4 a E_1 ale už souhlasné nejsou, jelikož se všechny souřadnice vektorů báze B vzhledem k těmto dvěma bázím shodují kromě poslední souřadnice posledního vektoru báze B.

Proč už to nutně znamená nesouhlasnost? Kdybychom bychom chtěli, aby se tyto souřadnice také shodovaly, museli bychom E_4 otočit tak, aby se její poslední vektor dostal na místo vektoru k němu opačnému. Dle poznámky 2.1 otáčíme vždy v nějaké vektorové rovině. To ale znamená, že bychom změnili alespoň jednu z ostatních souřadnic, což by nám v důsledku nepomohlo – opět by se vektory v alespoň jedné souřadnici lišily, a to ať si zvolíme vektorovou rovinu jakoukoliv. Tímto způsobem v příští podkapitole ukážeme, že báze E_4 opravdu nemohla vzniknout pouhým otočením báze E_1.

2.1.2 Matematický pohled

Postupujme přesně tak, jak jsme popsali v minulé podkapitole, ale nyní od začátku pozorujme, co se děje se souřadnicemi[39] vektorů báze B vzhledem k bázím E_k, $k \in \{1,2,3,4\}$.

Mějme vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ dimenze $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, se standardním skalárním součinem, a jeho bázi $B = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n)$ Zkonstruujme ortonormální bázi $E_1 = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ tohoto prostoru tak, aby platily následující podmínky:[40]

$$\begin{aligned}
&\exists u^1_{1,1} \in \mathbb{R}, u^1_{1,1} > 0 : \vec{u}_1 = u^1_{1,1} \cdot \vec{e}_1,\\
&\exists u^1_{2,1}, u^1_{2,2} \in \mathbb{R}, u^1_{2,2} > 0 : \vec{u}_2 = u^1_{2,1} \cdot \vec{e}_1 + u^1_{2,2} \cdot \vec{e}_2,\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots\\
&\exists u^1_{n,1}, ..., u^1_{n,n} \in \mathbb{R}, u^1_{n,n} > 0 : \vec{u}_n = u^1_{n,1} \cdot \vec{e}_1 + \cdots + u^1_{n,n} \cdot \vec{e}_n.
\end{aligned}$$

Matice přechodu od báze B k bázi E_1[41] pak vypadá následovně:

$$P_{BE_1} = \begin{pmatrix} u^1_{1,1} & u^1_{2,1} & \cdots & u^1_{n-1,1} & u^1_{n,1} \\ 0 & u^1_{2,2} & \cdots & u^1_{n-1,2} & u^1_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u^1_{n-1,n-1} & u^1_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u^1_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Poznámka 2.2. *Matice přechodu od báze B k bázi E_1 je horní trojúhelníková a na diagonále má kladná čísla.*

Označení 2.2. *Souřadnice vektoru $\vec{u}_i$ báze B vzhledem k bázi E_k budeme značit*

$$[\vec{u}_i]_{E_k} = (u^k_{i,1}, ..., u^k_{i,n})^T, \;\; i \in \{1, ..., n\}, \;\; k \in \mathbb{N}.^{42}$$

Dle poznámky 2.2 platí:

$$\forall i \in \{1, ..., n\} : u^1_{i,i} > 0, \tag{2.1}$$

$$\forall i \in \{1, ..., n-1\} \forall j \in \{i+1, ..., n\} : u^1_{i,j} = 0. \tag{2.2}$$

Pokusíme se modelovat záměnu i-tého a j-tého vektoru báze B s tím, že $i, j \in \{1, ..., n-1\}$, $i \neq j$.[43] Dle obrázku z předchozí podkapitoly nyní provedeme dvě otočení a vytvoříme tak postupně báze $E_2 = (\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n)$ a $E_3 = (\vec{g}_1, ..., \vec{g}_n)$. Budeme se soustředit na jejich souřadnice a uvědomíme si, že všechny báze E_1, E_2 a E_3 jsou navzájem souhlasné (vznikly pouhým otočením jedna z druhé).

Označení 2.3. *Nechť M je nějaká množina vektorů z našeho vektorového prostoru. Pak LO M značí lineární obal množiny M, tj. množinu všech lineárních kombinací vektorů množiny M.*[44]

[39]U souřadnic používáme trojité indexování. Značení $u^k_{i,j}$ znamená, že se jedná o j-tou souřadnici vektoru $\vec{u}_i$ vzhledem k bázi E_k.

[40]Jedná se přesně o podmínky pro souhlasnost bází E_1 a B z první kapitoly, akorát v prostoru obecné dimenze $n \in \mathbb{N}$. Ty shrnuje poznámka 1.7.

[41]Ve sloupcích jsou souřadnice vektorů báze B vzhledem k bázi E_1, viz definice 3.9. Prvky této matice jsou koeficienty $u^k_{i,j}$ z předchozích podmínek.

[42]Ve skutečnosti bude nejvyšší hodnota k v tomto textu rovna 7, ale to zatím nevíme.

[43]Při volbě $i = n$ či $j = n$ by nastal problém. Situaci rozebereme zvlášť později, viz lémma 2.6.

[44]Lineární kombinace je definována v [Be], kapitola 7, strana 67, definice 7.11.

První otočení ($\vec{e}_i$ otáčíme[45] na místo $\vec{e}_j$ v rovině $LO\{\vec{e}_i, \vec{e}_j\}$):

$$\begin{aligned}
&\forall r \in \{1, ..., n\}, r \neq i, r \neq j : \vec{f}_r = \vec{e}_r,\\
&\vec{f}_i = \vec{e}_j,\\
&\vec{f}_j = -\vec{e}_i.
\end{aligned}$$

První otočení – v souřadnicích:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n\}, r \neq i, r \neq j : u^2_{q,r} = u^1_{q,r},\\
&\forall q \in \{1, ..., n\} : u^2_{q,i} = u^1_{q,j},\\
&\forall q \in \{1, ..., n\} : u^2_{q,j} = -u^1_{q,i}.
\end{aligned}$$

Druhé otočení ($\vec{f}_j$ otáčíme[46] na místo $-\vec{f}_j$[47] v rovině $LO\{\vec{f}_j, \vec{f}_n\}$):

$$\begin{aligned}
&\forall r \in \{1, ..., n-1\}, r \neq j : \vec{g}_r = \vec{f}_r,\\
&\vec{g}_j = -\vec{f}_j,\\
&\vec{g}_n = -\vec{f}_n.
\end{aligned}$$

Druhé otočení – v souřadnicích:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n-1\}, r \neq i, r \neq j : u^3_{q,r} = u^2_{q,r} = u^1_{q,r},\\
&\forall q \in \{1, ..., n\} : u^3_{q,i} = u^2_{q,i} = u^1_{q,j},\\
&\forall q \in \{1, ..., n\} : u^3_{q,j} = -u^2_{q,j} = u^1_{q,i},\\
&\forall q \in \{1, ..., n\} : u^3_{q,n} = -u^2_{q,n} = -u^1_{q,n}.
\end{aligned}$$

Dle vztahu (2.2) jsou poslední souřadnice téměř všech vektorů báze B (kromě posledního) vzhledem k E_1 nulové. Díky tomu můžeme poslední řádek nahradit následujícími dvěma:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \{1, ..., n-1\} : u^3_{q,n} = 0 = u^1_{q,n},\\
&u^3_{n,n} = -u^2_{n,n} = -u^1_{n,n}.
\end{aligned}$$

Nyní přišel čas na slíbené pozorování:

Pozorování 2.2. *Pokud zaměníme i-tý a j-tý vektor v bázi E_3 a nově vzniklou bázi nazveme $E_4 = (\vec{h}_1, ..., \vec{h}_n)$, budou se všechny souřadnice vektorů báze B (kromě poslední souřadnice posledního vektoru) vzhledem k bázím E_1 a E_4 rovnat.*

To znamená, že nám pouhé otáčení k simulování záměny nestačilo. Samotnou záměnu proto nyní proveďme.

Záměna ($\vec{g}_i$ zaměníme[48] s $\vec{g}_j$):

$$\begin{aligned}
&\forall r \in \{1, ..., n\}, r \neq i, r \neq j : \vec{h}_r = \vec{g}_r,\\
&\vec{h}_i = \vec{g}_j,\\
&\vec{h}_j = \vec{g}_i.
\end{aligned}$$

[45] E_1 je báze před otočením, E_2 vznikne otočením.

[46] E_2 je báze před otočením, E_3 vznikne otočením.

[47] Protože chceme otočit na místo $\vec{e}_i$ a platí $\vec{e}_i = -\vec{f}_j$.

[48] E_3 je báze před záměnou, E_4 vznikne záměnou.

Záměna – v souřadnicích:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \{1,...,n\} \forall r \in \{1,...,n-1\}, r \neq i, r \neq j : u^4_{q,r} = u^3_{q,r} = u^2_{q,r} = u^1_{q,r},\\
&\forall q \in \{1,...,n\} : u^4_{q,i} = u^3_{q,j} = -u^2_{q,j} = u^1_{q,i},\\
&\forall q \in \{1,...,n\} : u^4_{q,j} = u^3_{q,i} = u^2_{q,i} = u^1_{q,j},\\
&\forall q \in \{1,...,n-1\} : u^4_{q,n} = 0 = u^1_{q,n},\\
&u^4_{n,n} = u^3_{n,n} = -u^2_{n,n} = -u^1_{n,n}.
\end{aligned}$$

První čtyři řádky vyjadřují, že se souřadnice vektorů báze B vzhledem k bázím E_1 a E_4 rovnají, pátý řádek poukazuje na jedinou výjimku – poslední souřadnici posledního vektoru, která změnila znaménko.[49] Zapišme tuto skutečnost přehledněji na dva řádky:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \{1,...,n\} \forall r \in \{1,...,n\}, (q,r) \neq (n,n) : u^4_{q,r} = u^1_{q,r},\\
&u^4_{n,n} = -u^1_{n,n}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Pozor: *Obecně rovnost všech souřadnic neznamená, že se v bázích, vzhledem ke kterým souřadnice uvažujeme, všechny vektory rovnají.*
Například mějme vektor $\vec{u} = (2, 3, -1)^T$ *a dvě báze 3D prostoru:*

$$A_1 = \left((1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\right), \ A_2 = \left((2,0,1)^T, (0,1,1)^T, (2,0,6)^T\right).$$

Platí $[\vec{u}]_{A_1} = [\vec{u}]_{A_2} = (2, 3, -1)^T$, *přestože se dokonce žádný z vektorů báze* A_1 *neshoduje s žádným z vektorů báze* A_2.

Avšak v našem případě můžeme díky platnosti vztahů (2.2) a (2.3) zapsat vektory báze B jako následující lineární kombinace vektorů báze E_1, resp. E_4:

$$\begin{aligned}
&\vec{u}_1 = u^1_{1,1} \cdot \vec{e}_1 = u^1_{1,1} \cdot \vec{h}_1,\\
&\vec{u}_2 = u^1_{2,1} \cdot \vec{e}_1 + u^1_{2,2} \cdot \vec{e}_2 = u^1_{2,1} \cdot \vec{h}_1 + u^1_{2,2} \cdot \vec{h}_2,\\
&\cdots,\\
&\vec{u}_{n-1} = u^1_{n-1,1} \cdot \vec{e}_1 + \cdots + u^1_{n-1,n-1} \cdot \vec{e}_{n-1} = u^1_{n-1,1} \cdot \vec{h}_1 + \cdots + u^1_{n-1,n-1} \cdot \vec{h}_{n-1},\\
&\vec{u}_n = u^1_{n,1} \cdot \vec{e}_1 + \cdots + u^1_{n,n-1} \cdot \vec{e}_{n-1} + u^1_{n,n} \cdot \vec{e}_n = u^1_{n,1} \cdot \vec{h}_1 + \cdots + u^1_{n,n-1} \cdot \vec{h}_{n-1}\\
&\qquad - u^1_{n,n} \cdot \vec{h}_n.
\end{aligned}$$

Zajímá nás srovnání vektorů $\vec{e}_q$ a $\vec{h}_q$, $q \in \{1,...,n\}$. Soustřeďme se proto pouze na rovnosti příslušných lineárních kombinací a soustavu postupně shora dolů vyřešme. Díky vztahu (2.1) nám vyjde:

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1 = \vec{h}_1,\\
&\vec{e}_2 = \vec{h}_2,\\
&\cdots,\\
&\vec{e}_{n-1} = \vec{h}_{n-1},\\
&\vec{e}_n = -\vec{h}_n,
\end{aligned}$$

[49] Víme, že tato souřadnice nulová nebyla, jelikož na diagonále matice přechodu od báze E_1 k B byla dle (2.1) pouze kladná čísla.

což lze shrnout jako:

$$\forall q \in \{1, ..., n-1\} : \vec{h}_q = \vec{e}_q,$$
$$\vec{h}_n = -\vec{e}_n.$$

Báze E_1 a E_4 se tedy shodují ve všech vektorech kromě posledního; ten je v E_4 vůči příslušnému vektoru v E_1 opačný.

Otázka 2.3. *Je E_4 souhlasná s E_1?*

Pokud ano, pak je na sebe můžeme převést pouhým otočením. Pokusme se otočit $\vec{h}_n$ na místo $-\vec{h}_n$ v rovině $LO\{\vec{h}_m, \vec{h}_n\}$, kde $m \in \{1, ..., n-1\}$ zvolíme libovolně; novou bázi označme $F = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n)$. Pak by dle předchozího:

$$\forall r \in \{1, ..., n-1\}, r \neq m : \vec{x}_r = \vec{h}_r = \vec{e}_r,$$
$$\vec{x}_n = -\vec{h}_n = \vec{e}_n,$$
$$\vec{x}_m = -\vec{h}_m = -\vec{e}_m.$$

Ať tedy m zvolíme jakkoliv, vždy se bude nová báze od E_1 lišit právě v jednom vektoru, který bude opačný příslušnému vektoru v E_1, a tedy takovýmto otočením na sebe báze E_4 a E_1 převést nelze.

Mohli bychom se ještě pokusit otáčet v rovině, která je dána vektorem $\vec{h}_n$ a nějakou lineární kombinací některých vektorů z E_4, ale snaha by byla marná. Stačí si uvědomit, že nesmíme pootočit žádným z vektorů $\vec{h}_1, ..., \vec{h}_{n-1}$, protože už všechny jsou „na správném místě“.[50] Otočení (o nenulový úhel α) však m-tý vektor báze E_4 neovlivní pouze tehdy, když otáčíme v rovině, která je dána takovými dvěma vektory, které oba mají m-tou souřadnici vzhledem k E_4 rovnu nule. To znamená, že rovinu otáčení můžeme zadat pouze pomocí vektorů z $LO\{\vec{h}_n\}$ (díky ortogonalitě E_4). Ať ale vybereme kterékoliv dva, budou lineárně závislé, a tedy se nebude jednat o rovinu. Bázi E_4 tedy není možné pouhým otočením převést na bázi E_1.

Důsledek 2.3. *Báze E_1 a E_4 jsou nesouhlasné.*

Věta 2.4. *Mějme vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ konečné dimenze alespoň dva*[51] *se standardním skalárním součinem*[52] *a nějakou jeho ortonormální bázi. Pak záměnou libovolných*[53] *dvou vektorů v této bázi vytvoříme bázi, která je s původní nesouhlasná.*

Měli bychom si odnést: *Záměnou dvou vektorů v libovolné ortonormální bázi vytvoříme bázi s původní nesouhlasnou.*

2.1.3 Druhá záměna

Nyní již víme, že když zaměníme dva vektory v nějaké ortonormální bázi, vznikne báze, která je s původní bází nesouhlasná – nemohla vzniknout pouhým jejím otočením. Co když ale budeme vektory zaměňovat dál?

[50] Tj. rovnají se vektorům $\vec{e}_1$, ..., $\vec{e}_{n-1}$.
[51] Jinak nemá smysl zaměňovat vektory.
[52] Skalární součin potřebujeme kvůli otáčení a kolmosti, avšak konkrétně standardní skalární součin není obecně vyžadován.
[53] Výjimka u posledního vektoru nevadí, jak ukážeme v lémmatu 2.6.

V první kapitole jsme relaci „být souhlasná“ považovali za ekvivalenci.[54] Zkontrolujme její vlastnosti:

- je reflexivní (každá ortonormální báze je souhlasná sama se sebou – identita odpovídá otočení o 0°),
- je symetrická (pokud je B souhlasná s C, pak je C souhlasná s B – lze otočit zpět),
- je tranzitivní (pokud je B souhlasná s C a ta je zase souhlasná s D, pak je také B souhlasná s D – obě otočení složíme).

Opravdu se tedy jedná o ekvivalenci. Navíc upřesněme, že relaci zatím uvažujeme pouze na množině všech ortonormálních bází, nikoliv na množině všech bází daného prostoru – takto ji rozšířit nám bude ještě chvíli trvat.

Otázka 2.4. *Kolik má rozklad množiny všech ortonormálních bází určený touto ekvivalencí tříd?*[55]

V minulé podkapitole jsme ukázali, že jistě alespoň dvě.[56] Zkusme zaměnit další dva vektory a uvidíme, co se stane se souřadnicemi.[57] Použijeme stejnou strategii jako dříve, jenom nyní začneme s bází E_4 a zaměníme k-tý a l-tý vektor, $k, l \in \{1, ..., n-1\}$.[58]

Celou situaci můžeme popsat pomocí souřadnic podobně jako v minulé podkapitole. Začneme s bází $E_4 = (\vec{h}_1, ..., \vec{h}_n)$, poté prvním otočením vytvoříme bázi $E_5 = (\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n)$, pak druhým otočením bázi $E_6 = (\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n)$ a konečně záměnou získáme bázi $E_7 = (\vec{c}_1, ..., \vec{c}_n)$.

První otočení ($\vec{h}_k$ otáčíme[59] na místo $\vec{h}_l$ v rovině $LO\{\vec{h}_k, \vec{h}_l\}$):

$$\begin{aligned}
&\forall r \in \{1, ..., n\}, r \neq k, r \neq l : \vec{a}_r = \vec{h}_r,\\
&\vec{a}_k = \vec{h}_l,\\
&\vec{a}_l = -\vec{h}_k.
\end{aligned}$$

První otočení – v souřadnicích:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n\}, r \neq k, r \neq l : u^5_{q,r} = u^4_{q,r},\\
&\forall q \in \{1, ..., n\} : u^5_{q,k} = u^4_{q,l},\\
&\forall q \in \{1, ..., n\} : u^5_{q,l} = -u^4_{q,k}.
\end{aligned}$$

[54] Dle předpokladů 2.1 jsou ortonormální báze souhlasné právě tehdy, když je možné převést jednu na druhou pouhým otočením.

[55] Každá ekvivalence indukuje jednoznačný rozklad na nějaké třídy.

[56] Báze E_1 a E_4 jsou nesouhlasné, a tedy patří do různých tříd.

[57] Ve skutečnosti na položenou otázku odpovíme až za pár podkapitol; bude třeba prozkoumat všechny možné permutace.

[58] Stejně jako minule by nastal problém při volbě $k = n$ či $l = n$. Situaci se taktéž budeme věnovat zvlášť, viz lémma 2.6.

[59] E_4 je báze před otočením, E_5 vznikne otočením.

Druhé otočení ($\vec{a}_l$ otáčíme[60] na místo $-\vec{a}_l$[61] v rovině $LO\{\vec{a}_l, \vec{a}_n\}$):

$$\forall r \in \{1, ..., n-1\}, r \neq l : \vec{b}_r = \vec{a}_r,$$
$$\vec{b}_l = -\vec{a}_l,$$
$$\vec{b}_n = -\vec{a}_n.$$

Druhé otočení – v souřadnicích:

$$\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n-1\}, r \neq k, r \neq l : u^6_{q,r} = u^5_{q,r} = u^4_{q,r},$$
$$\forall q \in \{1, ..., n\} : u^6_{q,k} = u^5_{q,k} = u^4_{q,l},$$
$$\forall q \in \{1, ..., n\} : u^6_{q,l} = -u^5_{q,l} = u^4_{q,k},$$
$$\forall q \in \{1, ..., n\} : u^6_{q,n} = -u^5_{q,n} = -u^4_{q,n}.$$

Opět díky vztahu (2.2) platí, že poslední souřadnice téměř všech vektorů báze B (kromě posledního) vzhledem k E_1, a tedy i k E_4 jsou nulové, a tedy můžeme poslední řádek nahradit následujícími dvěma:

$$\forall q \in \{1, ..., n-1\} : u^6_{q,n} = 0 = u^4_{q,n},$$
$$u^6_{n,n} = -u^5_{n,n} = -u^4_{n,n}.$$

Záměna ($\vec{b}_k$ zaměníme[62] s $\vec{b}_l$):

$$\forall r \in \{1, ..., n\}, r \neq k, r \neq l : \vec{c}_r = \vec{b}_r,$$
$$\vec{c}_k = \vec{b}_l,$$
$$\vec{c}_l = \vec{b}_k.$$

Záměna – v souřadnicích:

$$\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n-1\}, r \neq k, r \neq l : u^7_{q,r} = u^6_{q,r} = u^5_{q,r} = u^4_{q,r},$$
$$\forall q \in \{1, ..., n\} : u^7_{q,k} = u^6_{q,l} = -u^5_{q,l} = u^4_{q,k},$$
$$\forall q \in \{1, ..., n\} : u^7_{q,l} = u^6_{q,k} = u^5_{q,k} = u^4_{q,l},$$
$$\forall q \in \{1, ..., n-1\} : u^7_{q,n} = 0 = u^4_{q,n},$$
$$u^7_{n,n} = u^6_{n,n} = -u^5_{n,n} = -u^4_{n,n}.$$

Stejně jako minule vidíme, že první čtyři řádky lze spojit do jednoho, takže dostáváme:

$$\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n\}, (q, r) \neq (n, n) : u^7_{q,r} = u^4_{q,r} = u^1_{q,r},$$
$$u^7_{n,n} = -u^4_{n,n} = -(-u^1_{q,r}) = u^1_{q,r}.$$

Dle úvah analogických těm v minulé podkapitole dostáváme, že báze E_4 a E_7 jsou nesouhlasné. Navíc jsme však objevili, že pokud se soustředíme pouze na souřadnice vektorů báze B vzhledem k bázím E_1 a E_7, je možné oba předchozí řádky spojit, protože se všechny souřadnice rovnají:

$$\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n\} : u^7_{q,r} = u^1_{q,r}. \tag{2.4}$$

[60] E_5 je báze před otočením, E_6 vznikne otočením.

[61] Protože chceme otočit na místo $\vec{h}_k$ a platí $\vec{h}_k = -\vec{a}_l$.

[62] E_6 je báze před záměnou, E_7 vznikne záměnou.

Opět využijeme vztah (2.2), tentokrát v kombinaci s novým poznatkem (2.4), a zapíšeme vektory báze B jako lineární kombinace vektorů báze E_1, resp. E_7:

$$\begin{aligned}
&\vec{u}_1 = u^1_{1,1} \cdot \vec{e}_1 = u^1_{1,1} \cdot \vec{c}_1,\\
&\vec{u}_2 = u^1_{2,1} \cdot \vec{e}_1 + u^1_{2,2} \cdot \vec{e}_2 = u^1_{2,1} \cdot \vec{c}_1 + u^1_{2,2} \cdot \vec{c}_2,\\
&\cdots,\\
&\vec{u}_n = u^1_{n,1} \cdot \vec{e}_1 + \cdots + u^1_{n,n} \cdot \vec{e}_n = u^1_{n,1} \cdot \vec{c}_1 + \cdots + u^1_{n,n} \cdot \vec{c}_n.
\end{aligned}$$

Analogicky předchozí podkapitole soustavu shora dolů vyřešíme a díky platnosti vztahu (2.1) dostaneme:

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1 = \vec{c}_1,\\
&\vec{e}_2 = \vec{c}_2,\\
&\cdots,\\
&\vec{e}_n = \vec{c}_n,
\end{aligned}$$

což lze zapsat na jeden řádek jako:

$$\forall q \in \{1, ..., n\} : \vec{c}_q = \vec{e}_q.$$

To znamená, že $E_7 = E_1$. Díky reflexivitě jsou báze E_1 a E_7 souhlasné.

Věta 2.5. *Mějme vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ konečné dimenze alespoň dva se standardním skalárním součinem a nějakou jeho ortonormální bázi. Pak provedením dvou záměn libovolných*[63] *dvojic vektorů v této bázi vytvoříme bázi, která je s původní souhlasná.*

Měli bychom si odnést: *Dvěma záměnami libovolných vektorů (klidně v každé záměně různých) v libovolné ortonormální bázi vytvoříme bázi, která je s původní bází souhlasná.*

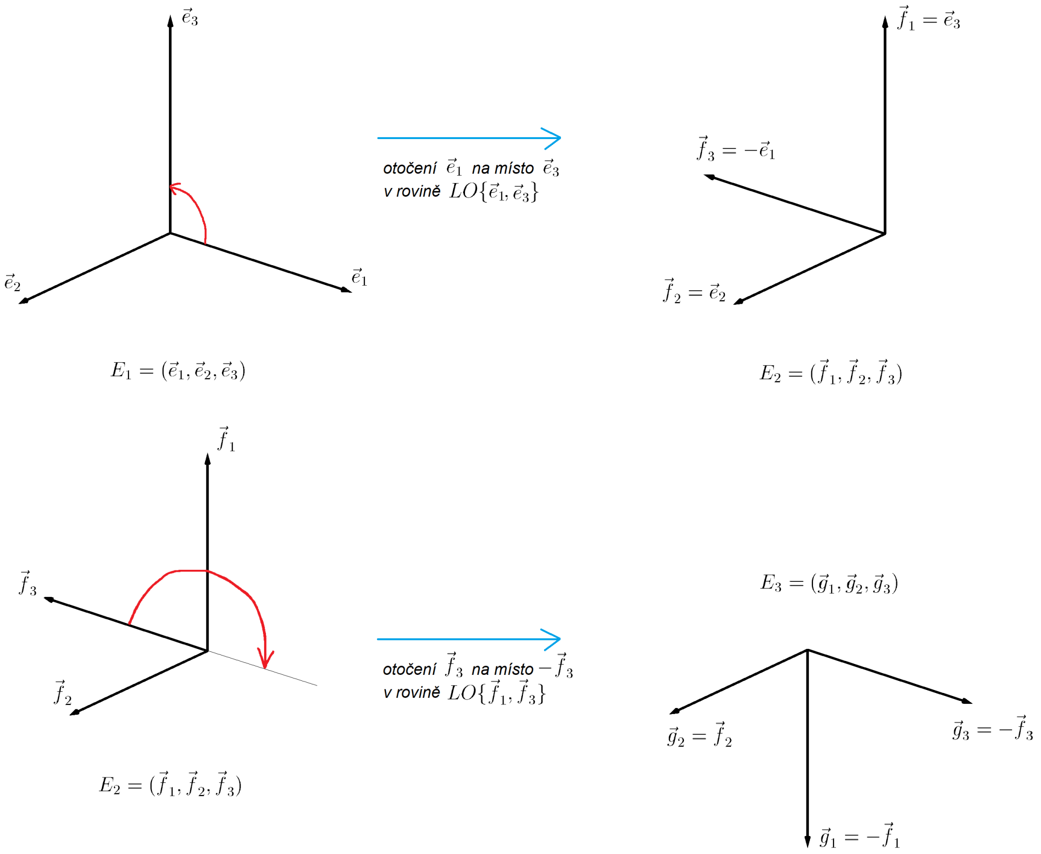
Na otázku 2.4 jsme zatím ještě neodpověděli, protože jsme neprozkoumali všechny permutace z $\mathbb{S}_n$. Tento rest vyřešíme trochu později v podkapitole 2.4.

2.1.4 Speciální případy

Při otáčení vektorů v bázích E_1, E_2, E_4 a E_5 jsme v naší představě počítali s tím, že žádný z vektorů, jejichž záměnu se snažíme simulovat, není posledním vektorem dané báze. Pak jsme mohli mluvit o tom, že otáčíme v rovině $LO\{\vec{f}_j, \vec{f}_n\}$ a podobně. Avšak všimněme si, že pokud $j = n$, naše konstrukce selže, jelikož $LO\{\vec{f}_n, \vec{f}_n\} = LO\{\vec{f}_n\}$ není rovina, a tedy nedává smysl o otáčení mluvit. Naštěstí se tato chyba dá snadno napravit, jak lze vidět na obrázku níže – budeme otáčet v rovině $LO\{\vec{f}_i, \vec{f}_n\}$, protože $j = n \implies i \neq n$. Ve svém jádru je to však nešikovné, protože kvůli $LO\{\vec{f}_i, \vec{f}_n\} = LO\{\vec{f}_i, \vec{f}_j\} = LO\{\vec{e}_i, \vec{e}_j\}$ provádíme vlastně postupně dvě otočení v téže rovině.

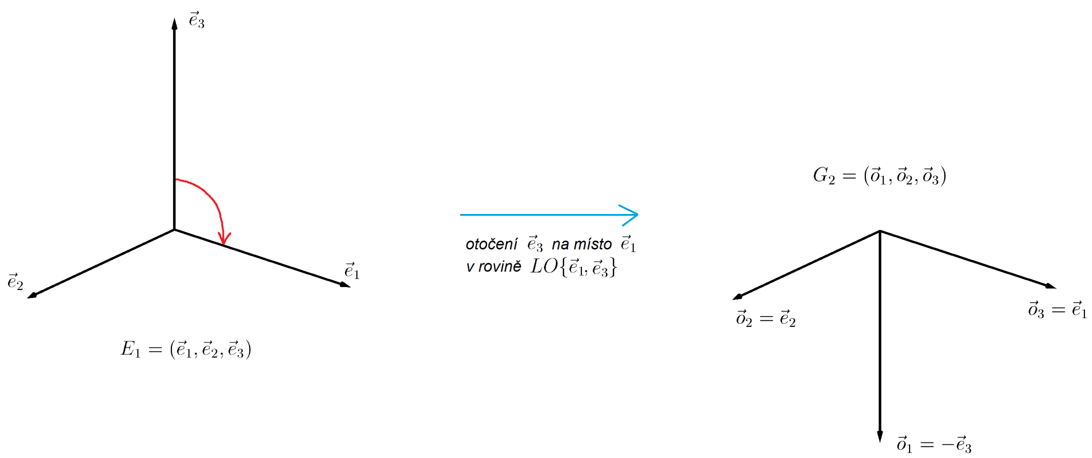
[63] Výjimka u posledních vektorů nevadí, jak ukážeme v lémmatu 2.6.

Konkrétní příklad ve 3D pro $i = 1, j = 3 = n$, kdy dochází postupně ke dvěma otáčením ve stejné rovině:



Pokusme se tuto nepříjemnost napravit. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $i < j$, a zaměřme se právě na případ, kdy $j = n$. Místo provádění dvou otočení v téže rovině je prostě složíme a provedeme je obě najednou. Bázi, která takovým otočením báze E_1 vznikne, označme $G_2 = (\vec{o}_1, ..., \vec{o}_n)$. Platí tedy, že báze E_1 a G_2 jsou souhlasné.

Situaci z předchozího obrázku vyřešíme elegantně jediným otočením:



Všimněme si, že vektor $\vec{e}_n$ otočením přesouváme na místo vektoru $\vec{e}_i$. Rozepišme si matematicky, co se děje při otáčení s vektory a jejich souřadnicemi.

Souřadnice vektoru $\vec{u}_i$ vzhledem k bázím G_k budeme značit

$$[\vec{u}_i]_{G_k} = (v^k_{i,1}, ..., v^k_{i,n})^T.$$

Otočení ($\vec{e}_n$ otáčíme[64] na místo $\vec{e}_i$ v rovině $LO\{\vec{e}_i, \vec{e}_n\}$):

$$\begin{aligned}
&\forall r \in \{1, ..., n-1\}, r \neq i : \vec{o}_r = \vec{e}_r,\\
&\vec{o}_i = -\vec{e}_n,\\
&\vec{o}_n = \vec{e}_i.
\end{aligned}$$

Otočení – v souřadnicích:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n-1\}, r \neq i : v^2_{q,r} = u^1_{q,r},\\
&\forall q \in \{1, ..., n\} : v^2_{q,i} = -u^1_{q,n},\\
&\forall q \in \{1, ..., n\} : v^2_{q,n} = u^1_{q,i}.
\end{aligned}$$

Díky tomu, že $\forall q \in \{1, ..., n-1\} : u^1_{q,n} = 0$, můžeme prostřední řádek rozdělit na dva. Celkově tak dostaneme:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n-1\}, r \neq i : v^2_{q,r} = u^1_{q,r},\\
&\forall q \in \{1, ..., n-1\} : v^2_{q,i} = -u^1_{q,n} = 0 = u^1_{q,n},\\
&v^2_{n,i} = -u^1_{n,n},\\
&\forall q \in \{1, ..., n\} : v^2_{q,n} = u^1_{q,i}.
\end{aligned}$$

Záměnou i-tého a j-tého (tj. n-tého) vektoru v bázi G_2 opět docílíme toho, že se budou všechny souřadnice vzhledem k bázi E_1 a vzhledem k nově vytvořené bázi rovnat. Bázi, která vznikne touto záměnou, označme $G_3 = (\vec{p}_1, ..., \vec{p}_n)$. Dále bychom rádi ukázali, že G_3 už je nutně nesouhlasná s E_1.

Záměna ($\vec{o}_i$ zaměníme[65] s $\vec{o}_n$):

$$\begin{aligned}
&\forall r \in \{1, ..., n-1\}, r \neq i : \vec{p}_r = \vec{o}_r,\\
&\vec{p}_i = \vec{o}_n = \vec{e}_i,\\
&\vec{p}_n = \vec{o}_i = -\vec{e}_n.
\end{aligned}$$

Záměna – v souřadnicích:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n-1\}, r \neq i : v^3_{q,r} = v^2_{q,r} = u^1_{q,r},\\
&\forall q \in \{1, ..., n\} : v^3_{q,i} = v^2_{q,n} = u^1_{q,i},\\
&\forall q \in \{1, ..., n-1\} : v^3_{q,n} = v^2_{q,i} = 0 = u^1_{q,n},\\
&v^3_{n,n} = v^2_{n,i} = -u^1_{n,n}.
\end{aligned}$$

Jelikož nás zajímají pouze souřadnice vzhledem k bázím E_1 a G_3, můžeme první tři řádky spojit v jeden. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n\}, (q, r) \neq (n, n) : v^3_{q,n} = u^1_{q,n},\\
&v^3_{n,n} = -u^1_{n,n}.
\end{aligned}$$

[64] E_1 je báze před otočením, G_2 vznikne otočením.
[65] G_2 je báze před záměnou, G_3 vznikne záměnou.

Jsme tedy v situaci, kdy se téměř všechny odpovídající souřadnice rovnají, a to až na poslední souřadnici posledního vektoru (liší se znaménkem). To už se nám stalo v minulé i předminulé podkapitole, kdy jsme ukázali, že to už nutně znamená, že jsou obě báze, tj. v našem případě E_1 a G_3, nesouhlasné.

Využijme předchozího a porovnejme G_3 s bází E_4:

$$\begin{aligned}&\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n\}, (q, r) \neq (n, n) : v^3_{q,n} = u^1_{q,n} = u^4_{q,n},\\ &v^3_{n,n} = -u^1_{n,n} = u^4_{n,n}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Jelikož se všechny odpovídající si souřadnice všech vektorů rovnají, platí díky vztahu (2.2) v kombinaci s poznatky (2.3) a (2.5), že $G_3 = E_4$.[66] To znamená, že jsme ukázali, jak sestrojit E_4 v případě, že konstrukce popsaná v předminulé podkapitole selže kvůli faktu, že $LO\{\vec{f}_i, \vec{f}_n\}$ není rovina, protože $j = n$ (prostě sestrojíme bázi G_3, která se E_4 rovná, a pokračujeme dále beze změny).[67]

Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $k < l$. Obdobně bychom postupovali i v situaci, kdy $l = n$ (problém by nastal při pokusu o otáčení v „rovině“ $LO\{\vec{a}_l, \vec{a}_n\}$): Jedním otočením v rovině $LO\{\vec{h}_k, \vec{h}_n\}$ otočíme $\vec{h}_n$ na pozici $\vec{h}_k$ a poté zaměníme k-tý a n-tý vektor takto vzniklé báze, čímž vytvoříme bázi, která, jak je možné ukázat analogicky jako v případě pro $G_3 = E_4$, se shoduje s bází E_7.

Lémma 2.6. *Všechna naše dřívější tvrzení o zaměňování vektorů (věty 2.4 a 2.5) platí pro záměnu libovolných dvou vektorů v ortonormální bázi, a to i v případě, že zaměňujeme některý vektor s vektorem, který je v bázi poslední.*

2.2 Změna vektoru na opačný

Teď využijeme předchozího a ukážeme také platnost poznámky 1.4 z kapitoly 1, alespoň pro ortonormální báze.

Vezměme si stejnou bázi $B = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n)$ jako v předchozích podkapitolách a dle výše popsaných podmínek zkonstruujme opět bázi $E_1 = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.

Zvolme $i \in \{1, ..., n\}$.

Otázka 2.5. *Bude báze H_2, která vznikne z E_1 tak, že vyměníme vektor $\vec{e}_i$ za vektor $-\vec{e}_i$ (tj. za vektor vůči němu opačný), s bází E_1 souhlasná, nebo ne?*

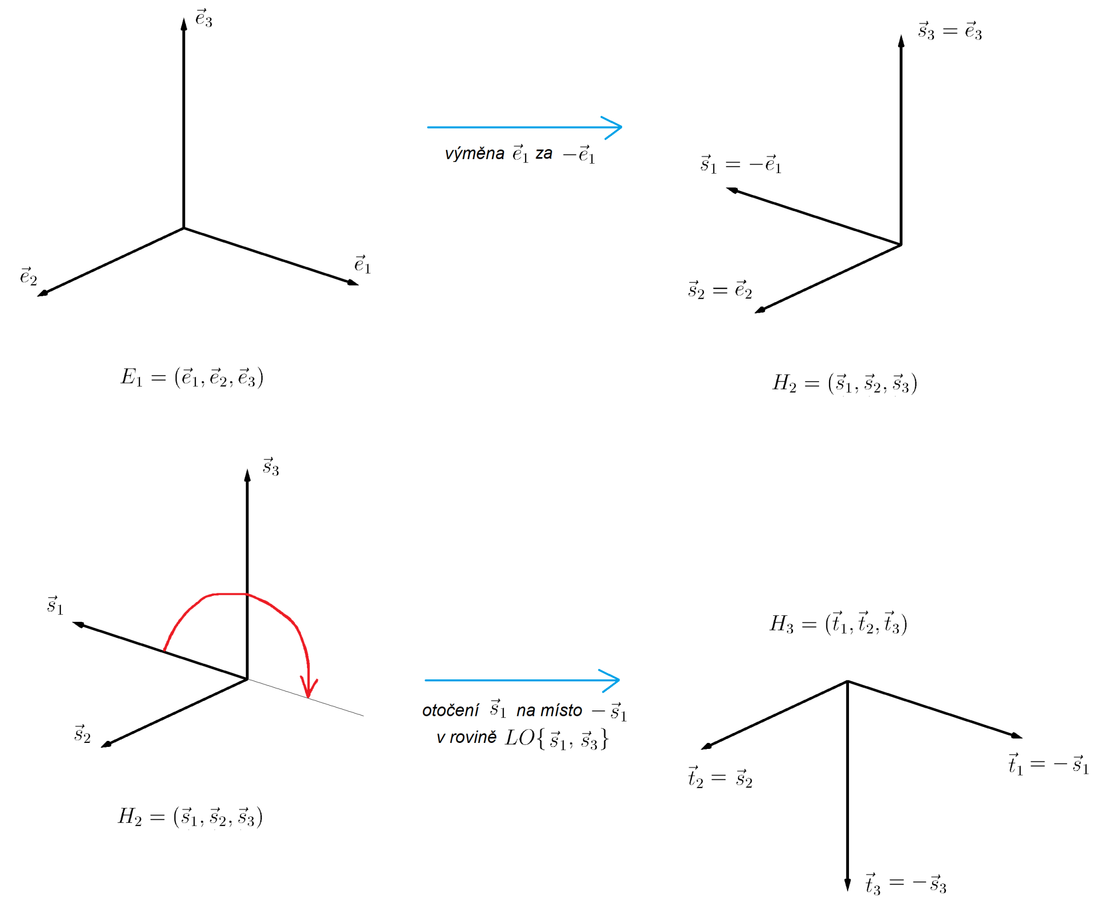
Jako v předchozích případech se pokusíme bázi H_2 převést zpět na E_1 pouhým otáčením s tím, že v případě, že si budeme moct vybrat, ve které vektorové rovině budeme otáčet, zvolíme takovou, která obsahuje poslední vektor báze, kterou otáčíme (tj. budeme respektovat dohodu z úvodu této kapitoly). Označme $H_2 = (\vec{s}_1, ..., \vec{s}_n)$.

Jako dříve budeme však muset odlišit speciální volbu, kdy $i = n$. Pro zatím tedy předpokládejme, že $i \in \{1, ..., n-1\}$. Pak stačí vektor $-\vec{e}_i$ otočit na „jeho původní místo“. Dle dohody budeme tedy otáčet v rovině $LO\{\vec{e}_i, \vec{e}_n\}$. Nechť $H_3 = (\vec{t}_1, ..., \vec{t}_n)$ je báze, která vznikne zmiňovaným otočením z báze H_2.

[66] Opět stačí vyřešit soustavu, která vznikla vyjádřením vektorů báze B jako lineární kombinace vektorů báze E_4, resp. G_3.

[67] Nemusíme rozebírat zvlášť speciální případy, kdy $j = n = l$, resp. $j \neq n = l$. V obou případech totiž zaměňujeme k-tý a l-tý vektor báze E_4.

Celou situaci znázorňuje obrázek:



Jako dříve vše sledujme z pohledu souřadnic vektorů báze B, nyní však vzhledem k bázím E_1, resp. H_2 či H_3. Označme souřadnice $[\vec{u}_q]_{H_k} = (w^k_{q,1}, ..., w^k_{q,n})^T$ pro $q \in \{1, ..., n\}$ a $k \in \{2, 3\}$.

Výměna ($\vec{e}_i$ vyměníme[68] za $-\vec{e}_i$):

$$\forall r \in \{1, ..., n\}, r \neq i : \vec{s}_r = \vec{e}_r,$$
$$\vec{s}_i = -\vec{e}_i.$$

Výměna – v souřadnicích:

$$\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n\}, r \neq i : w^2_{q,r} = u^1_{q,r},$$
$$\forall q \in \{1, ..., n\} : w^2_{q,i} = -u^1_{q,i}.$$

Otočení ($\vec{s}_i = -\vec{e}_i$ otáčíme[69] na místo $-\vec{s}_i = \vec{e}_i$ v rovině $LO\{\vec{s}_i, \vec{s}_n\}$):

$$\forall r \in \{1, ..., n-1\}, r \neq i : \vec{t}_r = \vec{s}_r = \vec{e}_r,$$
$$\vec{t}_i = -\vec{s}_i = -(-\vec{e}_i) = \vec{e}_i,$$
$$\vec{t}_n = -\vec{s}_n = -\vec{e}_n.$$

[68] E_1 je báze před výměnou, H_2 vznikne výměnou.
[69] H_2 je báze před otočením, H_3 vznikne otočením.

Otočení – v souřadnicích:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n-1\}, r \neq i : w^3_{q,r} = w^2_{q,r} = u^1_{q,r},\\
&\forall q \in \{1, ..., n\} : w^3_{q,i} = -w^2_{q,i} = -(-u^1_{q,i}) = u^1_{q,i},\\
&\forall q \in \{1, ..., n\} : w^3_{q,n} = -w^2_{q,n} = -u^1_{q,n}.
\end{aligned}$$

Navíc dle vztahu (2.2) můžeme zase nahradit poslední řádek, pokud se zajímáme pouze o srovnání souřadnic vektorů báze B vzhledem k bázím E_1 a H_3 (posuzujeme totiž jejich souhlasnost), následujícími dvěma řádky:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \{1, ..., n-1\} : w^3_{q,n} = 0 = u^1_{q,n},\\
&w^3_{n,n} = -u^1_{n,n}.
\end{aligned}$$

Dohromady můžeme pak celou situaci shrnout jako:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n\}, (q, r) \neq (n, n) : w^3_{q,r} = u^1_{q,r},\\
&w^3_{n,n} = -u^1_{n,n}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

V této situaci už jsme několikrát byli. Srovnejme ji například se vztahem (2.3). Dostaneme:[70]

$$\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n\} : w^3_{q,r} = u^4_{q,r}.$$

Stejným principem jako dříve lze dále s využitím vztahů (2.3) a nového (2.6) dokázat:[71]

$$\begin{aligned}
\vec{t}_1 &= \vec{h}_1,\\
\vec{t}_2 &= \vec{h}_2,\\
\cdots&,\\
\vec{t}_n &= \vec{h}_n.
\end{aligned}$$

To znamená, že $H_3 = E_4$.

Stačí už jenom dodat, že H_3 je souhlasná s H_2, protože vznikla jejím pouhým otočením, a také že E_4 je s E_1 nesouhlasná dle důsledku 2.3, a tedy i $H_3 = E_4$ je s E_1 nesouhlasná. Odtud:

Důsledek 2.7. *Báze E_1 a H_2 jsou nesouhlasné, pokud $i \neq n$.*

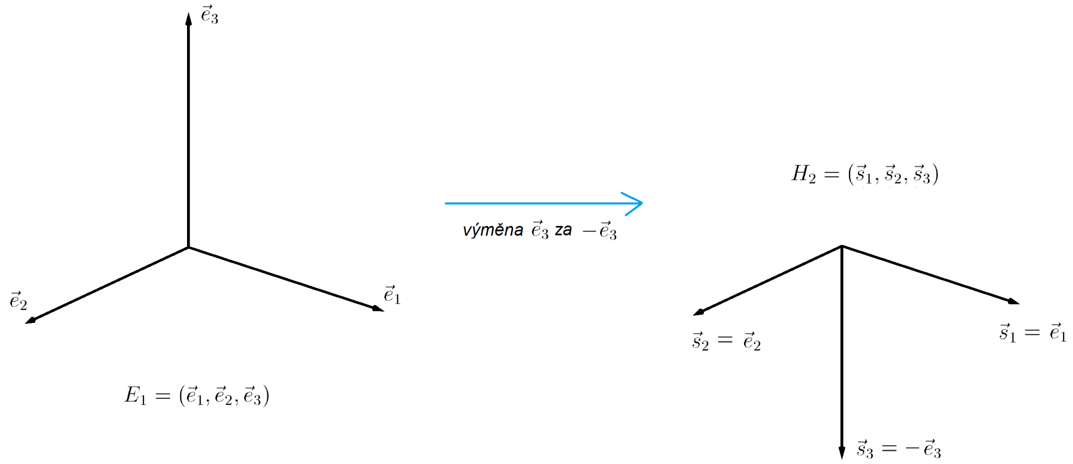
Tím jsme odpověděli na otázku v případě, že jsme za opačný nevyměnili vektor $\vec{e}_n$.

Předpokládejme nyní, že $i = n$, a zamysleme se, co by se změnilo.

[70] Číslo $u^4_{q,r}$ je r-tá souřadnice vektoru $\vec{u}_q$ vzhledem k bázi E_4 z předchozích podkapitol.

[71] Používáme značení předchozích podkapitol, tedy $E_4 = (\vec{h}_1, ..., \vec{h}_n)$.

Obrázek nám krásně naznačí, že už ani žádné otáčení nebude třeba:



Výměna ($\vec{e}_n$ vyměníme[72] za $-\vec{e}_n$):

$$\forall r \in \{1, ..., n-1\} : \vec{s}_r = \vec{e}_r,$$
$$\vec{s}_n = -\vec{e}_n.$$

Při rozepsání do souřadnic rovnou užijme vztah (2.2).

Výměna – v souřadnicích:

$$\begin{aligned} &\forall q \in \{1, ..., n\} \forall r \in \{1, ..., n-1\} : w^2_{q,r} = u^1_{q,r}, \\ &\forall q \in \{1, ..., n-1\} : w^2_{q,n} = 0 = u^1_{q,n}, \\ &w^2_{n,n} = -u^1_{n,n}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Analogicky, jako když jsme se dostali ke vztahu (2.6), bychom ukázali, že v tomto případě platí dokonce $H_2 = E_4$, a tedy i nyní jsou H_2 a E_1 nesouhlasné.

Důsledek 2.8. *Báze E_1 a H_2 jsou nesouhlasné.*

Užitím otáčení jsme tedy ukázali, že výměnou libovolného vektoru ortonormální báze za opačný vznikne báze, která je s původní nesouhlasná. Zbývá ještě prošetřit případ, kdy otáčet není možné – v 1D, tj. $n = 1$. Zde je celá situace triviální, zvlášť když jako v této kapitole pracujeme pouze s ortonormálními bázemi.

Jediné dvě různé ortonormální báze, které v 1D existují, jsou báze $B = ((1))$ a $C = ((-1))$.[73] Bázi B však nelze převést pouhým otáčením na C, ani naopak, jelikož tento prostor neobsahuje žádnou vektorovou rovinu, ve které bychom otáčet mohli.[74]

Báze B a C jsou tedy vzájemně nesouhlasné. Zároveň si všimněme, že jejich vektory jsou vůči sobě opačné.

Výměnou vektoru v ortonormální bázi 1D prostoru za opačný tedy také vytvoříme bázi, která je s původní nesouhlasná.

[72] E_1 je báze před výměnou, H_2 vznikne výměnou.

[73] Obě báze obsahují jediný vektor. Oba vektory mají jedinou souřadnici (vzhledem ke kartézské bázi). U vektoru báze B má tato souřadnice hodnotu 1, u vektoru báze C zase -1.

[74] Vektorová rovina má dimenzi 2. Množina lineárních kombinací klidně i všech vektorů 1D prostoru je však vektorovým prostorem dimenze pouze 1.

Věta 2.9. *Mějme vektorový prostor nad* $\mathbb{R}$ *konečné dimenze se standardním skalárním součinem a nějakou jeho ortonormální bázi. Pak výměnou libovolného jednoho jejího vektoru za opačný vytvoříme bázi, která je s původní nesouhlasná.*

Měli bychom si odnést: *Výměnou jednoho vektoru ortonormální báze za opačný vznikne báze, která je s původní nesouhlasná.*

2.3 Dimenze navíc

Pozorování 2.10. *Kdyby v příkladu s hodinami v podkapitole 1.2 žádná zeď nebyla, mohli bychom otočit ciferník kolem osy procházející čísly* 12 *a* 6 *o* 180°. *To by však změnilo směr šipky mezi ručičkami! Jelikož jsme ale této změny dosáhli pouhým otočením, je dle předpokladů 2.1 nová dvojice ručiček s dvojicí původní souhlasná.*

V této podkapitole zkusíme odpovědět na otázku, která se po pozorování 2.10 přímo nabízí: „Jak je to možné?“

Klíč je v tom, že jsme při otáčení ciferníku použili „dimenzi navíc“.

Označení 2.4. *Nechť* W *je vektorový podprostor dimenze* $n \in \mathbb{N}$ *vektorového prostoru* V *dimenze* $n + k$, $k \in \mathbb{N}$. *Budeme-li pracovat s bází podprostoru* W *ve vektorovém prostoru* V, *řekneme, že* máme k dispozici dimenzi navíc *nebo také že* máme (alespoň) o dimenzi víc.[75]

Mějme bázi B nějakého vektorového podprostoru W dimenze n, který je obsažen ve vektorovém prostoru V dimenze $n+1$, tedy *máme k dispozici dimenzi navíc*, a položme si otázku podobnou otázce 2.2.

Otázka 2.6. *Mějme bázi* B *vektorového podprostoru* W *a pouhým permutováním jejích vektorů vytvářejme další báze. Jsou všechny nově vzniklé báze pouhým otočením ve* V *původní báze* B, *nebo ne?*

Postupujme úplně stejně jako v předchozích případech a opět se omezíme pouze na báze ortonormální. Také dojdeme k tomu, že se souřadnice vektorů báze B vzhledem k bázím E_1 a E_4[76] všechny shodují až na poslední souřadnici posledního vektoru báze B, ve které se liší znaménkem.

V minulém případě, kdy jsme dimenzi navíc neměli, jsme si rozmysleli, že ať otočíme poslední vektor báze E_4 v jakékoliv vektorové rovině, vždy tím změníme alespoň jednu další souřadnici, takže nám to nijak nepomůže. Nyní však máme k dispozici dimenzi navíc, můžeme tedy otočit ve vektorové rovině dané posledním vektorem báze E_4 a vektorem $\vec{v} \in V$, který je takový, že doplňuje E_4 na ortonormální bázi prostoru V. To je klíčový poznatek! Bázi podprostoru W, která vznikne tímto otočením, označme $F = (\vec{y}_1, ..., \vec{y}_n)$.

[75] Toto vyjadřování je velmi neformální, jelikož ve skutečnosti máme spíš k dispozici prostor vyšší dimenze, ale názorné. Umožňuje nám zkráceně popsat důležitý předpoklad, který bude potřeba v mnoha tvrzeních. Díky této zkratce znění vět nezaniknou zdlouhavým popisování situace, a proto toto označení budeme používat i ve zbytku práce.

[76] V případě, že nastal speciální případ $j = n$, vytvořili jsme bázi G_3. V minulé podkapitole jsme ale ukázali, že $G_3 = E_4$, a proto budeme psát pouze E_4, ať už vznikla jakkoliv.

Situace před otočením:[77]

$$\forall r \in \{1, ..., n-1\} : \vec{h}_r = \vec{e}_r,$$
$$\vec{h}_n = -\vec{e}_n.$$

Situace po otočení ($\vec{h}_n$ otáčíme[78] na místo $-\vec{h}_n$ v rovině $LO\{\vec{h}_n, \vec{v}\}$):

$$\forall r \in \{1, ..., n-1\} : \vec{y}_r = \vec{h}_r = \vec{e}_r,$$
$$\vec{y}_n = -\vec{h}_n = -(-\vec{e}_n) = \vec{e}_n.$$

Všechny souřadnice vektorů báze B vzhledem k bázi E_1, resp. F se shodují, je tedy možné díky vztahu (2.2) podobně jako v minulých podkapitolách ukázat, že $E_1 = F$. To znamená, že jsme tímto otočením převedli bázi E_4 na bázi E_1, a jsou proto navzájem souhlasné.

Věta 2.11. *Nechť V je vektorový prostor dimenze $n+1$, $n \in \mathbb{N}$, nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem a W je jeho podprostor dimenze $k \in \{1, ..., n\}$. Pak záměnou dvou vektorů v libovolné ortonormální bázi podprostoru W vytvoříme bázi, která je s původní bází souhlasná, a to ve smyslu, že vznikla pouze jejím otočením ve V.*

Důsledek 2.12. *Věty 2.4, 2.5 a 2.9 jsou platné pouze v situaci, kdy nemáme k dispozici dimenzi navíc. Kdyby tomu tak nebylo, žádná ze zmiňovaných záměn či výměn by bázi nesouhlasnou s původní vytvořit nemohla, jelikož jsou dle věty 2.11 všechny takto vytvořené báze s původní bází souhlasné.*

Měli bychom si odnést: *Pokud máme k dispozici byť jen jednu dimenzi navíc, nemá smysl orientaci vektorového prostoru uvažovat, protože permutováním vektorů v libovolné ortonormální bázi získáme pouze báze s původní souhlasné, a tedy by všechny ortonormální báze byly navzájem souhlasné.*[79]

Zajímavý důsledek: *Pokud by se naší pravé boty zmocnila nějaká 4D bytost, mohla by ji s využitím bonusové čtvrté dimenze přeměnit pouhým otočením*[80] *na botu levou.*

Ukažme si na obrázku, jak lze na sebe převést pouhým otáčením původně nesouhlasné báze dvojrozměrného vektorového prostoru, pokud přidáme třetí dimenzi. Využijeme příklad s hodinami z úvodní kapitoly. Tam jsme tvrdili, že volbou pořadí ručiček (například první minutová, druhá hodinová) už je jednoznačně určen směr šipky (po směru/proti směru hodinových ručiček) mezi nimi, pokud hodiny nesundáme ze stěny a čas se nepohne. Nyní si dovolíme hodiny ze stěny sundat a využít třetí dimenzi k otočení, které před tím kvůli stěně možné nebylo. Všimněme si, že ihned po něm se změní směr šipky na opačný.[81]

[77] Zachováváme značení, kdy $E_1 = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n), E_4 = (\vec{h}_1, ..., \vec{h}_n)$.

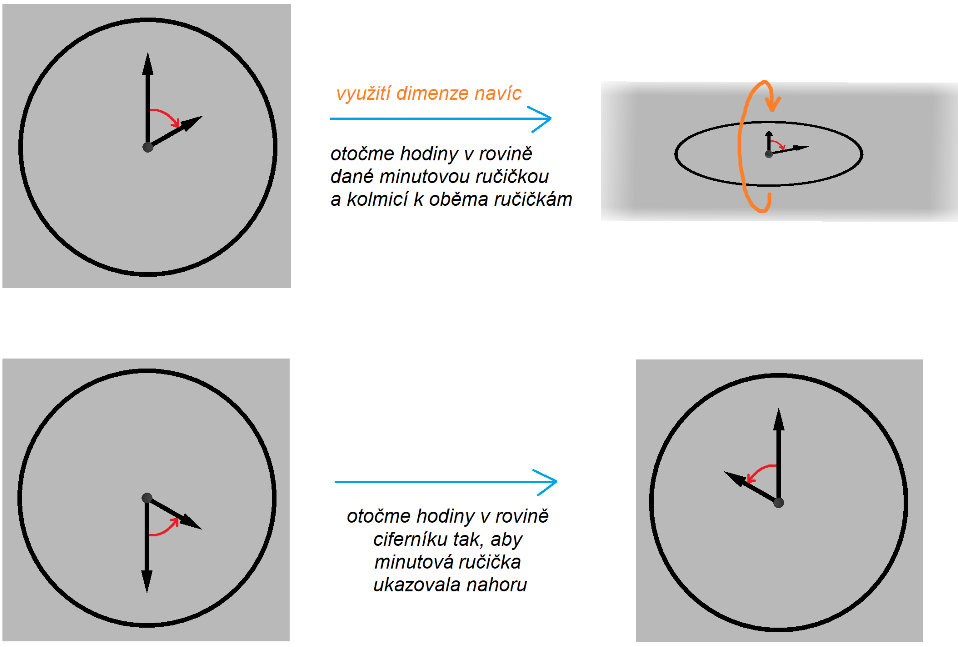
[78] E_4 je báze před otočením, F vznikne otočením.

[79] Toto tvrzení lze rozšířit i na báze, které ortonormální nejsou – viz věta 3.29.

[80] Je také zajímavé si uvědomit, že podobně jako ve 2D otáčíme kolem bodu (střed otáčení) a ve 3D kolem přímky (osa otáčení), tak ve 4D otáčíme kolem celé roviny – dle poznámky 2.1 otáčíme totiž vždy v konkrétní rovině (dimenze 2), a proto nám ještě do 4 rozměrů zbývá podprostor dimenze 2. V 5D by bylo možné otáčet kolem 3D prostoru a podobně.

[81] Hodiny jsme chápali jako 2D model – zajímala nás pouze rovina ciferníku s ručičkami,

Pouhým otočením můžeme s využitím třetí dimenze směr šipky mezi ručičkami změnit na opačný:



šipka na začátku ukazuje ve směru hodinových ručiček, na konci proti němu

2.4 Libovolná permutace vektorů

Zatím jsme zkoumali pouze záměnu dvou libovolných vektorů, což odpovídá aplikaci transpozice.[82] Chceme však prozkoumat všechny permutace z $\mathbb{S}_n$ – využijeme teorii permutací.

Každou permutaci lze složit z transpozic – viz [Be], kapitola 6, strana 58, věta 6.18. Nás nezajímá konkrétní počet záměn dvou vektorů (tj. transpozic v rozkladu permutace), jde nám pouze o paritu – lichý počet záměn vytvoří bázi s původní nesouhlasnou, sudý zase bázi s původní souhlasnou.

Nejprve si uvědomme, že parita počtu transpozic je v libovolném rozkladu permutace invariantní. Každá permutace je složením jednoznačně určených nezávislých cyklů (až na pořadí) – [Be], kapitola 6, strana 57, věta 6.15. Každý cyklus lze zapsat jako složení transpozic[83] – viz [Be], kapitola 6, strana 58, začátek důkazu věty 6.18. Kdybychom chtěli v tomto složení počet transpozic změnit (ale permutaci zachovat), museli bychom původní rozklad složit s identitou;[84] tu však dál můžeme rozložit na transpozice – například $id = (i, j)(i, j) = (i, j)(i, j)(k, l)(k, l)$

tj. jako by se jednalo o kresbu na papír. Pokud hodiny otočíme tak, jak ukazuje oranžová šipka na obrázku, ciferník bychom neviděli, protože by mířil od nás. Ve 2D by to nevadilo (můžeme si představit, že papír s kresbou prosvítá), a proto si představujme, že to ani v našem příkladu vadit nebude – například se jedná o průhledné hodiny ze skla či ještě lépe pouze o dvojici pevných ručiček.

[82]Výměny vektoru za opačný lze docílit jednou záměnou a následným otočením.

[83]U cyklů délky větší než 2 budou již tyto transpozice vzájemně závislé.

[84]Složení s identitou permutaci nezmění.

a podobně. Počet transpozic, které takto do rozkladu přidáme, bude vždy sudý, a tedy paritu nezmění.

Pozorování 2.13. *Pro každou permutaci platí, že parita počtu transpozic je ve všech jejích rozkladech na transpozice stejná.*

Protože lichý počet záměn vektorů v B vytvoří bázi nesouhlasnou s B, zatímco sudý počet záměn vytvoří bázi souhlasnou s B, dává smysl rozdělit permutace do dvou skupin podle parity počtu transpozic v libovolném jejich rozkladu: liché a sudé permutace.

Označení 2.5. *Permutace rozdělíme do dvou skupin:*
Liché permutace = permutace, které jsou složením lichého počtu transpozic.
Sudé permutace = permutace, které jsou složením sudého počtu transpozic.

Rozkládat permutace na transpozice není úplně praktické – lépe se nám rozkládá na nezávislé cykly. Uvažujme proto dál – každý cyklus je sám o sobě permutací, tj. lze složit buď z lichého, nebo ze sudého počtu transpozic (ne obojí).

Cyklus liché délky $2k-1,\ k \in \mathbb{N}$,[85] je složením $2k-2 = 2(k-1)$ (sudého počtu) transpozic:

$$(a_1, a_2, ..., a_{2k-1}) = (a_1, a_{2k-1})(a_1, a_{2k-2}) \cdots (a_1, a_2).$$

Například $(1,2,3) = (1,3)(1,2)$ nebo $id = (1,2)(1,2)$.

Cyklus sudé délky $2k,\ k \in \mathbb{N}$,[86] je složením $2k-1$ (lichého počtu) transpozic:

$$(a_1, a_2, ..., a_{2k}) = (a_1, a_{2k})(a_1, a_{2k-1}) \cdots (a_1, a_2).$$

Například $(1,2,3,4) = (1,4)(1,3)(1,2)$ nebo $(1,2) = (1,2)$.

Rozložíme-li tedy libovolnou permutaci na nezávislé cykly, každý cyklus sudé délky se v tomto rozkladu skládá z lichého počtu transpozic, zatímco každý cyklus liché délky se skládá ze sudého počtu transpozic. To znamená, že parita počtu transpozic, ze kterých se tato permutace skládá, odpovídá paritě počtu cyklů sudé délky, které se vyskytují v jejím rozkladu na nezávislé cykly.

Důsledek 2.14. *Platí:*
Lichá permutace má v rozkladu na nezávislé cykly lichý počet cyklů sudé délky.
Sudá permutace má v rozkladu na nezávislé cykly sudý počet cyklů sudé délky.

Nyní už dokážeme docela dobře určit, která permutace vytvoří bázi s původní bází nesouhlasnou a která souhlasnou, a máme je i pojmenované. Chybí už jenom zavést symbolické značení (pro liché a sudé permutace) – to by mohlo odrážet, co se děje při skládání permutací.

Abychom si situaci usnadnili, představujme si, že skládání permutací probíhá následujícím způsobem:

1. Obě permutace zapíšeme jako složení nezávislých cyklů,

[85] Cyklus délky 1 vyjadřuje identitu.
[86] Transpozice jsou právě cykly délky 2.

2. cykly zapíšeme za sebe (skládáme-li $P \circ Q$, zapíšeme nejprve všechny cykly permutace P, napravo od nich pak všechny cykly permutace Q),

3. všechny cykly rozepíšeme jako složení transpozic.

Můžeme pozorovat, že pokud je permutace sudá, přispěje do složení sudým počtem transpozic, a pokud je lichá, přispěje počtem lichým.

Důsledek 2.15. *Platí:*
Složení dvou sudých permutací je sudá permutace.
Složení dvou lichých permutací je sudá permutace.
Složení liché a sudé permutace (v libovolném pořadí) je lichá permutace.[87]

Nazírejme chvilku na problematiku očima grup. Pozorování, jak mění lichá, resp. sudá permutace paritu lichých, resp. sudých permutací, lze vyjádřit faktorizací[88] grupy $\mathbb{S}_n$ podle její podgrupy všech sudých permutací $\mathbb{A}_n$ – [Be], kapitola 6, strana 52, věta 6.2 a definice 6.3; strana 55, věta 6.9 a definice 6.10.

$$\mathbb{S}_n/\mathbb{A}_n = \{P \circ \mathbb{A}_n \mid P \in \mathbb{S}_n\} = \{\{P \circ Q \mid Q \in \mathbb{A}_n\} \mid P \in \mathbb{S}_n\} = \{\mathbb{A}_n, (1,2)\mathbb{A}_n\},$$

což je izomorfní s cyklickou grupou $C(2) = \{id, (1,2)\}$. Skládání permutací (z pohledu parity) se tedy chová stejně jako další cyklické grupy řádu 2.

Nabízejí se aditivní grupa $(\mathbb{Z}_2, +)$ a multiplikativní grupa $(\{1, -1\}, \cdot)$. Jelikož nám skládání permutací připomíná spíše násobení než sčítání (cykly zapisujeme za sebe, jako by se násobily), jeví se jako lepší volba uvedená grupa multiplikativní.

Objevili jsme tak analogii mezi skládáním permutací (z pohledu parity) a násobením čísly 1 a -1. Sudé permutace ve faktorové grupě odpovídají identitě v $C(2) = \{id, (1,2)\}$, která je zde neutrálním prvkem. Jelikož v grupě $(\{1, -1\}, \cdot)$ je neutrálním prvkem 1, odpovídá v jistém smyslu[89] složení se sudou permutací vynásobení číslem 1. Podobně složení s lichou permutací odpovídá ve stejném smyslu vynásobení číslem -1. Nalezli jsme užitečný způsob, jak paritu permutací popsat pomocí čísel 1 a -1. Pomocí tohoto izomorfismu definujeme znaménko permutace.

Definice 2.6. Znaménko *permutace $P \in \mathbb{S}_n$ definujeme jako sgn $P = (-1)^k$,*[90] *kde k je počet cyklů sudé délky v rozkladu P na nezávislé cykly.*

Poznámka 2.3. *Je třeba si uvědomit, že aplikací liché permutace vytvoříme bázi, která je s původní bází nesouhlasná, pouze v případě, že nemáme žádnou dimenzi k dispozici navíc. Již dříve jsme ukázali, že pokud bychom nějaký rozměr*

[87]Totožné tvrzení se nachází i v knize [Be], kapitola 6, strana 54, důsledek 6.7, avšak to naše se od něho odlišuje cestou odvození. Obvyklé je začít definicí inverze, znaménkem permutace jako počtu inverzí a teprve z toho vyvozovat důsledky. V této práci postupuji záměrně „v protisměru“, protože to považuji za intuitivnější.

[88]Tato faktorizace je možná díky tomu, že $\mathbb{A}_n$ je normální podgrupou grupy $\mathbb{S}_n$ – [Be], kapitola 6, strana 55, poznámka pod větou 6.9.

[89]Ve světě permutací odpovídá skládání permutací z pohledu parity násobení, které je uskutečňováno ve světě obsahujícím pouze čísla 1 a -1, a to z pohledu znaménka činitelů, resp. součinu.

[90]Podle anglického *sign*, což česky znamená *znaménko*.

navíc měli, aplikací libovolné permutace vznikne báze, která je s původní bází souhlasná.[91]

Důsledek 2.16. *Z předchozích úvah plyne:*
Sudé permutace mají znaménko rovno 1.
Liché permutace mají znaménko rovno -1.
$\forall P, Q \in \mathbb{S}_n : sgn\ PQ = sgn\ P \cdot sgn\ Q.$[92]

Ve většině učebnic se však uvádí definice pomocí inverzí permutace jako například v [Be], kapitola 6, strana 52, definice 6.4. V následující části ukážeme, jak jsou obě definice propojené.

2.4.1 Souvislost s inverzemi

Definice 2.7. *Nechť* P *je permutace množiny* $\{1, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$. *Každou množinu* $\{i, j\}$, *pro kterou platí*

$$i, j \in \{1, ..., n\}, i < j \wedge P(i) > P(j),$$

nazveme inverzí *permutace* P. *Počet inverzí permutace* P *značíme* $in\ P$.

Pozorování 2.17. *Pro identickou permutaci id platí*

$$\forall k \in \{1, ..., n\} : id(k) = k.$$

To však znamená, že $in\ id = 0$, *protože*

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\} : i < j \iff id(i) < id(j) \implies \neg \left(P(i) > P(j)\right).$$

Pozorování 2.18. *Největší počet inverzí, který může permutace* $P \in \mathbb{S}_n$ *mít, je* $\binom{n}{2}$, *což je počet způsobů, jak vybrat dvojici* $\{i, j\}$ *z množiny* $\{1, ..., n\}$.[93] *Pro takovou permutaci platí*[94]

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\} : i < j \implies P(i) > P(j).$$

Otázka 2.7. *Jak musí vypadat* P, *aby platilo* $in\ P = 1$? *Tj. které permutace mají právě jednu inverzi?*

Předpokládejme, že se jedná o inverzi $\{i, j\}$, kde bez újmy na obecnosti $i < j$. Protože se jedná o jedinou inverzi permutace P, musí platit

$$P(i) > P(j), \tag{2.8}$$
$$\forall k, l \in \{1, ..., n\}, k < l, (k, l) \neq (i, j) : P(k) < P(l). \tag{2.9}$$

[91] To ale neznamená, že jsou všechny permutace z příslušného $\mathbb{S}_n$ sudé. Parita permutace je určená paritou počtu sudých cyklů v jejím rozkladu na nezávislé cykly s tím, že tento rozklad bude vždy stejný, ať máme dimenzí navíc, kolik chceme.

[92] Skládání permutací z pohledu parity odpovídá násobení znamének těchto permutací – to plyne z popsaného izomorfismu mezi $(\mathbb{S}_n, \circ)$ a $(\{1, -1\}, \cdot)$.

[93] Jedná se o permutaci, jejíž redukovaný cyklický zápis je tvaru $(1, n)(2, n-1) \cdots \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right)$, pokud je n sudé, resp. tvaru $(1, n)(2, n-1) \cdots \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2} + 2\right)$, pokud je n liché.

[94] Na druhém řádku je nerovnost také ostrá, jelikož případ $P(k) = P(l)$ pro $k \neq l$ nikdy nenastane, neboť P je permutace, a tedy je prostá.

Označme si rozdíl mezi prvky naší jediné inverze: $m = j - i \in \{1, ..., n-1\}$. Pak

$$i < i+1 < \cdots < i+m-1 < i+m = j,$$

a tedy dle nerovností (2.8) a (2.9) musí zároveň platit

$$P(i) < P(i+1) < \cdots < P(i+m-1) \wedge P(i) > P(i+m) = P(j),$$
$$P(i+1) < \cdots < P(i+m-1) < P(i+m) = P(j) \wedge P(i) > P(j).$$

To se dá dále přepsat jako:

$$\forall k \in \{1, ..., m-1\} : P(i) < P(i+k),$$
$$\forall k \in \{1, ..., m-1\} : P(i+k) < P(j),$$
$$P(i) > P(j).$$

Spojením prvních dvou řádků však dostaneme

$$\forall k \in \{1, ..., m-1\} : P(i) < P(i+k) < P(j),$$

což kvůli (2.8) musí znamenat, že množina $\{1, ..., m-1\}$ je prázdná, a tedy $m = 1$.

Permutace P tedy zaměňuje sousedící prvky i a $i+1$ a kvůli (2.9) jsou ostatní prvky jejími pevnými body. Chování permutace P lze zapsat jako:

$$\forall k \in \{1, ..., n\} \setminus \{i, i+1\} : P(k) = k,$$
$$P(i) = P(i+1),$$
$$P(i+1) = P(i).$$

Redukovaný cyklický zápis permutace P je

$$P = (i, i+1).$$

Jedná se tak o speciální případ transpozice, která zaměňuje pouze dva vedlejší prvky.

Důsledek 2.19. *Permutace s jedinou inverzí jsou právě ty, které mají redukovaný cyklický zápis tvaru $(i, i+1), i \in \{1, ..., n-1\}$.*
Takové permutace obsahují pouze inverzi $\{i, i+1\}$.

Definice 2.8. *Permutace, které mají jedinou inverzi, budeme nazývat* elementární permutace.

Poznámka 2.4. *Jednotlivé pojmy z teorie permutací si můžeme představovat následujícím způsobem:*
Permutace = záměna libovolného počtu libovolných prvků.
Transpozice = záměna právě dvou libovolných prvků.
Elementární permutace = záměna právě dvou sousedních prvků.

Věta 2.20. *Nechť $P, Q \in \mathbb{S}_n$ a Q je elementární permutace. Pak*[95]

$$|in\ P - in\ (P \circ Q)| = 1$$

neboli složení elementární permutace s obecnou permutací P změní počet inverzí permutace P o 1 (buď jednu přidá, nebo jednu odebere).

Důkaz: Jelikož je Q elementární, má právě jednu inverzi. Označme tuto inverzi $\{a, a+1\}$, $a \in \{1, ..., n-1\}$.[96]

[95] Permutace skládáme zprava doleva. Tedy na prvky nejprve aplikujeme permutaci Q a teprve až poté permutaci P.

[96] Obecněji $\{a, b\}$, kde bez újmy na obecnosti $a < b$, ale díky důsledku 2.19 víme, že $b = a+1$.

Z definice inverze platí:

$$Q(a+1) < Q(a).$$

Nejprve předpokládejme, že navíc platí $P(Q(a+1)) < P(Q(a))$. To znamená, že $\{Q(a), Q(a+1)\}$ není inverzí permutace P. Situaci můžeme však zapsat ještě jako

$$(P \circ Q)(a+1) < (P \circ Q)(a),$$

což znamená, že $\{a, a+1\}$ je inverzí permutace $P \circ Q$.

Nyní předpokládejme, že $P(Q(a+1)) > P(Q(a+1))$, a tedy $\{Q(a), Q(a+1)\}$ je inverzí permutace P. Pak ale platí

$$(P \circ Q)(a+1) > (P \circ Q)(a),$$

což znamená, že $\{a, a+1\}$ není inverzí permutace P.

Pro všechny ostatní dvojice $\{i, j\}, i, j \in \{1, ..., n\}, i < j, (i, j) \neq (a, a+1)$ platí:

$$Q(i) < Q(j),$$

protože $\{a, a+1\}$ je jedinou inverzí Q. Pak ale:

$$\{i, j\} \text{ je inverzí } P \circ Q \iff P(Q(i)) > P(Q(j)) \iff \{Q(i), Q(j)\} \text{ je inverzí } P.$$

Celkem:

$$\begin{gathered}\forall i, j \in \{1, ..., n\}, i < j, (i, j) \neq (a, a+1)\colon \\ \{i, j\} \text{ je inverzí } P \circ Q \iff \{Q(i), Q(j)\} \text{ je inverzí } P, \\ \{a, a+1\} \text{ je inverzí } P \circ Q \iff \{Q(a), Q(a+1)\} \text{ není inverzí } P.\end{gathered}$$

To znamená, že rozdíl *in* $(P \circ Q)$ a *in* P je v absolutní hodnotě roven 1.

□

Lémma 2.21. *Každá transpozice má lichý počet inverzí.*

Důkaz: Nechť $P = (a, b), a, b \in \{1, ..., n\}, a < b$, je transpozice. To znamená, že:

$$\begin{aligned}&\forall i \in \{1, ..., n\}, i \neq a, i \neq b : P(i) = i, \\ &P(a) = b, \\ &P(b) = a.\end{aligned}$$

Pak ale platí:

$$\begin{aligned}&\forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq a, j \neq b : i < j \implies P(i) < P(j), \\ &\forall j \in \{a+1, ..., b\} : a < j \wedge b = P(a) > P(j) \in \{a, ..., b-1\}, \\ &\forall i \in \{a, ..., b-1\} : i < b \wedge \{a+1, ..., b\} \ni P(i) > P(b) = a.\end{aligned}$$

To však znamená, že právě všechny dvojice tvaru $\{a, j\}, j \in \{a+1, ..., b\}$, nebo $\{i, b\}$, $i \in \{a, ..., b-1\}$, jsou inverzemi P a žádné jiné. Když je spočítáme, zjistíme, že je jich $2(b-a)-1$.[97] To je ale liché číslo pro libovolnou volbu a, b.

□

Věta 2.22. *Každá transpozice je složením lichého počtu elementárních permutací.*

Důkaz: Nechť $P = (a, b), a, b \in \{1, ..., n\}, a < b$ je transpozice. Pak je ji možno zapsat jako složení elementárních permutací následujícím způsobem:

$$(a, b) = (a, a+1)(a+1, a+2)\cdots(b-2, b-1)(b-1, b)(b-2, b-1)\cdots(a, a+1).$$

Jelikož se v zápisu každá z elementárních permutací vyskytuje dvakrát, tedy kromě $(b-1, b)$, která je zde pouze jednou, ukázali jsme, že transpozice (a, b) je složením lichého počtu elementárních permutací. Protože jsme a, b volili libovolně, platí toto tvrzení pro každou transpozici.

□

Poznámka 2.5. *Samotný počet elementárních permutací, jejichž složením P je, nemusí být určen jednoznačně, ale jeho parita ano. Musí totiž platit, že znaménko P je součinem znamének všech elementárních permutací, ze kterých se P skládá. Jelikož jsou to všechno, stejně jako P, transpozice, mají všechny znaménka lichá. Pokud tedy máme takový rozklad, že P je složením $k \in \mathbb{N}$ elementárních permutací, musí platit $-1 = (-1)^k$. Proto musí být k liché číslo.*

Všimněme si, co se děje s počtem inverzí, když skládáme transpozice. Vezměme si například transpozice $T_1, ..., T_k, k \in \mathbb{N}$, takové že:[98]

$$\forall i \in \{1, ..., k\} : T_i \text{ je složením } 2l_i - 1, \text{ kde } l_i \in \mathbb{N}, \text{ elementárních permutací } e^i_1, ..., e^i_{2l_i-1}.$$

Rozepišme při skládání všechny transpozice $T_1, ..., T_k$ pomocí těchto rozkladů a výslednou permutaci označme P_0:

$$P_0 = T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_k = e^1_1 \circ \cdots \circ e^1_{2l_1-1} \circ e^2_1 \circ \cdots \circ e^2_{2l_2-1} \circ \cdots \circ e^k_1 \circ \cdots \circ e^k_{2l_k-1}.$$

Označme $m = \sum_{j=1}^{k}(2l_j - 1)$ a dále $\forall i \in \{1, ..., m\}$:

- Q_i = i-tá elementární permutace v rozepsaném zápisu skládání zprava,
- $P_i = Q_m \circ \cdots \circ Q_{i+1}$, tj. permutace, které vznikne vynecháním i elementárních permutací zprava.

[97] Nikoliv $2(b-a)$, protože oběma tvarům vyhovuje tatáž inverze $\{a, b\}$, kterou bychom tak počítali dvakrát.
[98] To, že to jde, nám zaručuje věta 2.22.

Pak lze nahlédnout, že:

$$\begin{aligned}
&\forall i \in \{0, ..., m-1\} : P_i = P_{i+1} \circ Q_{i+1}, \\
&P_m = id.
\end{aligned}$$

Díky větě 2.20 a pozorování 2.17 platí:

$$\begin{aligned}
&\forall i \in \{0, ..., m-1\} : |in\ P_i - in\ P_{i+1}| = 1, \\
&in\ P_m = 0.
\end{aligned}$$

Proto $in\ P_{m-1} = 1, in\ P_{m-2} \in \{0, 2\}$ a tak dále. Celkem m-krát měníme počet inverzí o 1 s tím, že na začátku začínáme na 0. Nechť celkově l-krát tento počet o 1 snížíme, tj. $l \in \left\{0, ..., \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor\right\}$. To znamená, že jsme ho celkem $(m-l)$-krát o 1 zvýšili, a tedy výsledný počet inverzí je $in\ P_0 = m - 2l$. Protože $2l$ je sudé číslo, má $in\ P_0$ stejnou paritu jako číslo m, což je celkový počet elementárních permutací, ze kterých se P_0 skládá.

Jelikož je navíc dle věty 2.22 každá transpozice složením lichého počtu elementárních permutací, je parita m rovna paritě počtu transpozic v tomto rozkladu, tj. paritě čísla k.

Celkem tak dostáváme, že se parita počtu transpozic v libovolném rozkladu permutace jako složení transpozic rovná paritě počtu inverzí dané permutace. Dle označení 2.5 tak dostáváme zajímavý důsledek:

Důsledek 2.23. *Platí:*
Liché permutace mají lichý počet inverzí.
Sudé permutace mají sudý počet inverzí.

Důsledek 2.24. *Spojením důsledků 2.16 a 2.23 dostáváme*

$$sgn\ P = (-1)^{in\ P}.$$

Ukázali jsme tedy ekvivalenci naší definice znaménka permutace se zmiňovanou obvyklou definicí použitou například v [Be], kapitola 6, strana 52, definice 6.4.

2.5 Závěr

Permutováním vektorů ortonormální báze lze vytvořit pouze dva typy bází: souhlasné s bází původní (vzniknou aplikací sudé permutace) a nesouhlasné s původní bází (vzniknou aplikací liché permutace), přičemž všechny báze jednoho typu jsou navzájem souhlasné (jedna je pouhým otočením druhé). Dle věty 2.11 nesmíme však mít k dispozici dimenzi navíc, protože pak by každá ortonormální báze byla pouhým otočením jakékoliv jiné ortonormální báze.

Věta 2.25. *Za předpokladu, že nemáme k dispozici dimenzi navíc, platí:*
Aplikace sudé permutace na vektory ortonormální báze vytvoří bázi souhlasnou s původní.
Aplikace liché permutace na vektory ortonormální báze vytvoří bázi nesouhlasnou s původní.

Shrňme nejdůležitější pozorování této kapitoly ve dvou důsledcích, které naznačí, jakým způsobem budeme pokračovat dál.

Důsledek 2.26. *Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{R}$, W je jeho podprostor dimenze ostře nižší a B, C jsou ortonormální báze podprostoru W. Pak lze B a C na sebe ve V převést pouhým otočením. To znamená, že pokud máme k dispozici dimenzi navíc, existuje v daném podprostoru jediný „typ“ ortonormálních bází.*[99]

Zvolme si v prostoru V z důsledku2.26 nějaké jeho dvě ortonormální báze a označme je $R = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n), S = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$. Všimněme si, že pokud si v každé z nich vybereme k vektorů, $k \in \{1, ..., n-1\}$, bude každá tato k-tice generovat podprostor dimenze $k < n$, a tedy je možné obě báze R a S otočit tak, aby se všechny příslušné vektory z k zvolených rovnaly. Dle prvního odstavce této podkapitoly to však již nemusí být možné pro $k = n$, protože se může stát, že báze R a S jsou nesouhlasné, a tedy je na sebe pouhým otočením převést nelze.

Důsledek 2.27. *Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{R}$ a R, S jsou jeho ortonormální báze. Pak lze R a S pouhým otočením změnit tak, že se bude jejich prvních $n-1$ příslušných vektorů rovnat. Pokud nemáme k dispozici dimenzi navíc, bude dokonce poloha posledního vektoru obou bází určena jednoznačně a bude platit:*

- *Oba poslední vektory se budou rovnat*[100] *právě tehdy, když jsou báze R a S navzájem souhlasné,*

- *oba poslední vektory budou navzájem opačné*[101] *právě tehdy, když jsou báze R a S navzájem nesouhlasné.*

To znamená, že ve V existují právě dva „typy“ ortonormálních bází a jeden není možné pouhým otočením převést na druhý.[102]

Poznamenejme ještě, že tvrzení je obecnější, než se na první pohled může zdát:

Poznámka 2.6. *Prvními $n-1$ vektory nemyslíme nutně vektory $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_{n-1}$. Pořadí je zvolit libovolně a určuje ho nějaká permutace z $\mathbb{S}_n$.*[103] *Navíc můžeme pro každou bázi použít jinou permutaci, avšak v případě, že jsou znaménka těchto permutací různá, změní se dle věty 2.25 souhlasnost na nesouhlasnost a naopak, protože složením těchto permutací je permutace lichá.*

[99] Přesněji máme na mysli, že ekvivalence „být souhlasná“ indukuje na množině všech ortonormálních bází takového podprostoru W „rozklad“ na jedinou třídu. Představit si to můžeme tak, že pokud bychom teoreticky vytvořili ze dřeva kostru vektorů nějaké ortonormální báze 2D prostoru, byla by po otočením kostrou libovolné jiné báze 2D prostoru, protože žijeme ve 3D světě.

[100] To znamená, že leží ve stejném poloprostoru, jehož hranicí je nadrovina generována prvními $n-1$ vektory (definice 3.1).

[101] To znamená, že leží v poloprostorech navzájem opačných, které odděluje nadrovina generována prvními $n-1$ vektory (definice 3.1).

[102] Přesněji bychom řekli, že ekvivalence „být souhlasná“ indukuje na množině všech ortonormálních bází prostoru V rozklad na právě dvě třídy. Můžeme si to představit tak, že ve 3D ještě jediná dřevěná kostra vektorů ortonormální báze, kde jednotlivé vektory jsou modelovány špejlemi, není modelem všech ortonormálních bází tohoto prostoru. Uvažme lidskou ruku a ortonormální bázi 3D prostoru s vektory určenými po řadě palcem, ukazovákem a prostředníkem. Pak máme dvě různé možnosti: pravou a levou ruku; jednu není možné otočením převést na druhou a naopak. Zajímavé je, že toto tvrzení platí nejen ve 3D prostoru, ale ve V, což je obecně n-rozměrný prostor.

[103] Trochu později tuto myšlenku podrobněji rozebíráme v poznámce 3.1.

Tím jsme odpověděli na otázku 2.4. Tento poznatek je natolik významný, že si zaslouží vlastní větu.

Věta 2.28. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ konečné dimenze. Potom relace „být souhlasná“ indukuje rozklad množiny všech ortonormálních bází prostoru V na právě dvě třídy.*[104]

To znamená, že ve V můžeme mít nejvýše dvě ortonormální báze takové, že jednu není možné na druhou převést pouhým otočením. Takové báze však na sebe můžeme dle vět 2.25 a 2.28 převést například záměnou dvou vektorů, obecněji aplikací liché permutace na vektory jedné z bází.

[104] Odtud také plyne, že kdybychom navštívili hypotetický obchod s botami pro pětirozměrné bytosti, našli bychom zde také pouze levé a pravé boty jako u nás ve 3D.

3. Souhlasnost libovolných bází

Dosud jsme porovnávali pouze ortonormální báze, kdy jedna vznikne z druhé aplikací nějaké permutace. Nyní začneme ale porovnávat i báze — jak jsme to nazvali v první kapitole — různého „tvaru“.[105] Souhlasnost tedy už nemůžeme vnímat pouze tak, že je báze možné na sebe otočit, protože se mohou lišit ve „tvaru“ nebo ve velikostech vektorů, tj. například báze

$$\big((1,0,0)^T,(0,1,0)^T,(0,0,1)^T\big) \text{ a } \big((3,1,0)^T,(1,7,-5)^T,(-6,1,2)^T\big)\,.$$

Připomeňme představu na botách z první kapitoly: Dosud jsme měli všechny boty stejného druhu, značky i velikosti – zda jsou obě pravé, nebo obě levé jsme poznali tak, že jsme se pokusili je na sebe otočit.

Nyní však budeme mezi sebou porovnávat boty různých parametrů (například levý zelený gumák velikosti 43 s levou bílou teniskou velikosti 38) – zajímá nás totéž, avšak pouhým otáčením nikdy z gumáku tenisku neudělám. Musíme použít sofistikovanější metodu.

Otázka 3.1. *Jak rozšířit relaci „být souhlasná“ na množinu všech bází daného prostoru?*

Budeme se držet intuitivní představy, kterou jsme vybudovali v kapitole 1 a završili poznámkou 1.7, kde jsme shrnuli podmínky souhlasnosti dvou bází ve vektorovém prostoru dimenze $n \in \mathbb{N}$.

Hlavní myšlenka: *Obě báze pootočíme tak, aby zároveň:*

1. *oba první vektory ležely na stejné vektorové polopřímce,*

2. *oba druhé vektory ležely ve stejné vektorové polorovině, kde hraniční přímkou je lineární obal prvního vektoru,*

3. *oba třetí vektory ležely ve stejném vektorovém 3D poloprostoru, kde hraniční rovinou je lineární obal prvních dvou vektorů,*

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$(n-1)$. *oba předposlední vektory ležely ve stejném $(n-1)$-rozměrném poloprostoru, kde hranicí je lineární obal prvních $n-2$ vektorů.*

Pak jsou obě báze souhlasné právě tehdy, když jejich n-té (poslední) vektory leží ve stejném vektorovém n-rozměrném poloprostoru, kde hranicí je lineární obal prvních $n-1$ vektorů.

Nyní ujasníme v následující definici, co přesně myslíme výrazy vektorová polopřímka, polorovina a poloprostor.

[105] Různým tvarem mám na mysli, že pokud máme k dispozici skalární součin, můžeme říct, že alespoň v jednom případě příslušné dvojice vektorů svírají úhly různých velikostí.

Definice 3.1. *Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ dimenze $n \in \mathbb{N}$, W je jeho podprostor dimenze $k-1$, $k \in \{1, ..., n\}$,*[106] *takový, že $W = LO\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_{k-1}\}$, kde $\forall i \in \{1, ..., k-1\} : \vec{u}_i \in V$, a $\vec{v} \in V \setminus W$.*[107] *Pak* vektorovým k-rozměrným poloprostorem[108] *P,* který je určený podprostorem *W* a vektorem *$\vec{v}$, nazveme množinu*

$$P = \{\vec{u} \in V \mid \exists a_1, ..., a_{k-1}, a_k \in \mathbb{R}, a_k > 0 : \vec{u} = a_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + a_{k-1} \cdot \vec{u}_{k-1} + a_k \cdot \vec{v}\}.$$

O poloprostoru P' řekneme, že je vůči P opačný *právě tehdy, když zároveň*

$$P' = \{\vec{u} \in V \mid \exists a_1, ..., a_{k-1}, a_k \in \mathbb{R}, a_k > 0 : \vec{u} = a_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + a_{k-1} \cdot \vec{u}_{k-1} - a_k \cdot \vec{v}\}.$$

Dále speciálně:
Pro $k = 1$ poloprostor P nazveme vektorová polopřímka.[109]
Pro $k = 2$ poloprostor P nazveme vektorová polorovina.

Pozorování 3.1. *V definici 3.1 navíc platí:*

- *$P \cap P' = \emptyset$,*
- hranicí *opačných poloprostorů P, P' je právě vektorový podprostor W,*
- *$P \cap W = \emptyset$, $P' \cap W = \emptyset$,*[110]
- *P (ani P') není vektorový prostor (např. $\vec{o} \notin P$).*

Poznámka 3.1. *Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $B = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n)$, $C = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ jsou jeho báze. Prvními, druhými, ..., posledními vektory bází B, C, jak o nich mluvíme v textu před definicí 3.1, nemíníme nutně jenom dvojice vektorů $\vec{u}_1$ a $\vec{v}_1$, $\vec{u}_2$ a $\vec{v}_2$,..., $\vec{u}_n$ a $\vec{v}_n$.*

Vybereme $i \in \{1, ..., n\}$. Pak spojením první vektory *odkazujeme na vektory $\vec{u}_i, \vec{v}_i$.*
Dále zvolíme $j \in \{1, ..., n\}$, $j \neq i$, druhými vektory *poté míníme vektory $\vec{u}_j, \vec{v}_j$.*
Vektory $\vec{u}_k, \vec{v}_k$ bychom označili za třetí, *pokud bychom dál vybrali k tak, aby $k \in \{1, ..., n\}$, $k \notin \{i, j\}$, a tak dále.*

*Konkrétní výběr prvních, druhých, ..., posledních vektorů popisuje nějaká permutace $Q \in \mathbb{S}_n$. Pak můžeme jednoduše říct, že $\forall i \in \{1, ..., n\}$ míníme i-*tými vektory *vektory $\vec{u}_{Q(i)}, \vec{v}_{Q(i)}$; speciálně pro $i = n$ na ně odkazujeme jako na* poslední.

[106] Tedy pro $k = n$ je W nadrovinou ve V.
[107] Protože W je vektorovým podprostorem, je také vektorovým prostorem, a tedy $\vec{o} \in W$. Odtud $\vec{v} \neq \vec{o}$.
[108] Naše definice se mírně liší od obvyklé geometrické definice poloprostoru, kde bývá hraniční nadrovina považována za jeho součást. My však poloprostor definujeme záměrně jako množinu otevřenou, protože podle toho, ve kterém z poloprostorů leží poslední vektor báze, budeme posuzovat souhlasnost, resp. nesouhlasnost. Proto se nám hodí, že jsou vzájemně opačné poloprostory disjunktní.
[109] W je podprostor V dimenze 0, tedy $W = LO\,\{\} = \{\vec{o}\}$. P je tedy množinou všech kladných násobků vektoru $\vec{v}$.
[110] To znamená, že P i P' jsou otevřené množiny, protože jsou rovny svému vnitřku.

Nechť $Q \in \mathbb{S}_n$ je permutace určující náš postupný výběr vektorů. Pak věta, že *i-té vektory,* $i \in \{1, ..., n\}$*, leží ve stejném poloprostoru, jehož hranicí je* W, znamená, že vektor $\vec{u}_{Q(i)} \in P$, kde P je poloprostor, který je určený podprostorem W a vektorem $\vec{v}_{Q(i)}$.[111]

Dohoda: *Pro jednoduchost budeme ve všech příkladech uvažovat výběr daný* identickou permutací. *Tedy prvními vektory budeme mínit vektory* $\vec{u}_1, \vec{v}_1$ *a podobně.*

Všimněme si, že pokud bychom relaci „být souhlasná“ definovali tak, jak píšeme nad definicí 3.1, jednalo by se opravdu o *rozšíření* definice z kapitoly 2:

- Pokud je možné jednu bázi na druhou převést pouhým otočením, jsou souhlasné, protože po takovém otočení se budou dokonce příslušné vektory rovnat, a tedy jistě budou poslední z nich ležet ve stejném příslušném poloprostoru.
- Při posuzování souhlasnosti používáme všech n vektorů (žádný nevynecháváme) – otočením docílíme toho, že příslušné dvojice prvních $n-1$ vektorů[112] budou ležet ve stejných daných poloprostorech, a až poté podle posledních vektorů poznáme, zda jsou báze souhlasné, či nikoliv.[113]
- Jedná se tedy opět o ekvivalenci,[114] která však indukuje rozklad na množině všech bází daného prostoru, nikoliv pouze ortonormálních. Jelikož vzájemně opačné poloprostory jsou dva,[115] má tento rozklad právě dvě třídy.[116] Jinými slovy máme znovu právě dva „typy“ bází, které jsou vzájemně nesouhlasné.

Například ve 2D prostoru uvažujme báze

$$B = \left(\vec{u}_1 = (2,0)^T, \vec{u}_2 = (0,1)^T\right), C = \left(\vec{v}_1 = (1,0)^T, \vec{v}_2 = (1,1)^T\right).$$

Dle našeho postupu bychom měli báze nejprve otočit tak, aby jejich první vektory ležely na stejné vektorové polopřímce. Všimněme si ale, že $\vec{u}_1 = 2 \cdot \vec{v}_1$, tj. jeden první vektor je kladným násobkem druhého, a tedy je tato podmínka již splněna a otáčení není třeba.

Dále vyjádříme $\vec{u}_2$ jako lineární kombinaci vektorů báze C[117] s tím, že B a C jsou souhlasné právě tehdy, když je koeficient u vektoru $\vec{v}_2$ kladný:

$$\vec{u}_2 = (-1) \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2.$$

[111] Vektory $\vec{u}_{Q(i)}$ a $\vec{v}_{Q(i)}$ je možné zaměnit.

[112] Ve smyslu poznámky 3.1.

[113] V kapitole 2 jsme ukázali, že pokud bychom měli byť dimenzi k dispozici navíc, nemá smysl se o orientaci bavit. To by se stalo, kdybychom při posuzování souhlasnosti dvou bází mohli nějaký z n vektorů vynechat.

[114] Reflexivita: poslední vektor dané báze leží ve stejném poloprostoru jako on sám; symetrie: pokud poslední vektor jedné báze leží ve stejném poloprostoru jako poslední vektor báze druhé, platí to i naopak; tranzitivita: pokud poslední vektor první báze leží ve stejném poloprostoru jako poslední vektor báze druhé a ten zase zase tentýž poloprostor sdílí s poledním vektorem třetí báze, pak oba poslední vektory bází první a třetí leží ve stejném poloprostoru.

[115] Navíc pokud se jedná o bázi, nemůže ležet její poslední vektor na hranici těchto poloprostorů.

[116] Viz důsledek 3.2, ke kterému se dopracujeme později.

[117] Obecně báze C', která vznikne zmiňovaným otočením. V našem příkladu platí $C = C'$.

Zmiňovaný koeficient je roven 1, je tedy kladný. Dle našeho kritéria jsou báze B a C souhlasné – oba poslední vektory leží ve stejném 2D poloprostoru s hraniční přímkou $LO\{\vec{u}_1\} = LO\{\vec{v}_1\}$.

Otázka 3.2. *Proč uvažujeme u souhlasnosti zrovna poloprostory, a ne třeba „čtvrtprostory“*[118] *dané všemi lineárními kombinacemi vektorů s tím, že bychom mezi nimi rozlišovali dle znamének posledních* dvou *koeficientů?*[119]

Uvažujme ve 2D prostoru tytéž báze B a C (jako v předchozím příkladě) a upravme naše kritérium – po otočení řekneme, že jsou souhlasné pouze tehdy, pokud jsou oba koeficienty (u předposledního i posledního vektoru) kladné.

V našem případě je první koeficient roven -1 a druhý 1. Protože je alespoň jeden z nich záporný, jsou báze B a C dle tohoto kritéria nesouhlasné.

Zároveň můžeme rozlišit 3 typy nesouhlasnosti:

1. první koeficient je záporný, druhý kladný,
2. první koeficient je kladný, druhý záporný,
3. oba koeficienty jsou záporné.

Pokud bychom měli bázi B a báze C_1, C_2, C_3 a C_4 takové, že B je souhlasná s C_1, nesouhlasná s C_2 (ve smyslu prvního typu), dále nesouhlasná s C_3 (ve smyslu druhého typu) a konečně nesouhlasná s C_4 (ve smyslu třetího typu), patřily by báze B a C_1 do stejné třídy rozkladu indukovaného ekvivalencí „být souhlasná“, báze C_1, C_2, C_3 a C_4 každá do jiné.

Uvědomme si však, že jsme tímto změnili definici relace „být souhlasná“. Je tedy poněkud odvážné prohlašovat, že se jedná o ekvivalenci. Ověřme její vlastnosti – například reflexivitu.

Otázka 3.3. *Je relace „být souhlasná“ (ve smyslu otázky 3.2) reflexivní?*

Vezměme si ve 2D prostoru například bázi $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ a prošetřeme, zda je E souhlasná sama se sebou. Otáčení není třeba, protože $\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1$, $1 > 0$ (triviálně platí, že $\vec{e}_1$ leží na stejné vektorové polopřímce jako $\vec{e}_1$).

Vyjádřeme tedy $\vec{e}_2$ jako lineární kombinaci vektorů báze E. Triviálně:

$$\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2.$$

Koeficient u $\vec{e}_1$ ale není ani kladný, ani záporný, protože je roven nule! To znamená, že se $\vec{e}_2$ nachází na hranici mezi dvěma částmi našeho 2D prostoru, a tedy do žádné z nich však nepatří.[120] Dle našeho kritéria báze E není sama se sebou

[118] Ve skutečnosti tato charakterizace nerozděluje vždy 2D prostor na „stejně velké“ čtvrtiny, ale na čtyři části, které jsou oddělené vektorovými přímkami prvního a druhého vektoru. Ve 3D prostoru se prostor rozdělí na osm částí, ve 4D na šestnáct. V n-rozměrném prostoru by to bylo 2^n, ne nutně „stejně velkých“ částí oddělených vektorovými přímkami jednotlivých vektorů dané báze.

[119] Báze by byly souhlasné právě tehdy, když by oba tyto koeficienty byly kladné – poslední vektory by patřily do stejné dané části prostoru (ze čtyř možných).

[120] Ani přiřadit tuto hranici jedné z částí nepomůže. Zkoumejme souhlasnost báze $\big((0,1)^T, (1,0)^T\big)$ se sebou sama. Ta 2D prostor rozdělí přesně na čtvrtiny (pravou horní, levou horní, pravou dolní a levou dolní). Aby byla sama se sebou souhlasná, museli bychom říct, že hranice mezi oběma horními částmi patří do pravé horní části. Dále si vezměme bázi $\big((0,1)^T, (-1,0)^T\big)$, která 2D prostor rozdělí na tytéž čtvrtiny, a posuzujme její souhlasnost se sebou sama. Stejnou úvahou dospějeme k tomu, že tatáž hranice musí patřit jiné, konkrétní levé horní části. Tedy tato relace opravdu není reflexivní.

souhlasná, a tedy takto definovaná relace „být souhlasná“ není reflexivní. Objevili jsme problém:

Problém: *Relace „být souhlasná“ ve smyslu otázky 3.2 není reflexivní, takže není ekvivalencí. Nejedná se tedy o rozšíření relace, kterou známe z kapitoly 2.*

Poznámka 3.2. *Tento problém nastane, jakmile budeme mezi částmi prostoru rozlišovat na základě znamének alespoň dvou koeficientů lineární kombinace posledního vektoru v předchozím smyslu.*
Naopak tomuto problému se vyhneme, pokud budeme rozlišovat na základě znaménka jediného koeficientu, tj. když prostor rozdělíme na dva poloprostory, protože dle definice 3.1 a prvního bodu pozorování 3.1 nebude poslední vektor (v definici je to vektor $\vec{v}$) nikdy ležet na hranici.

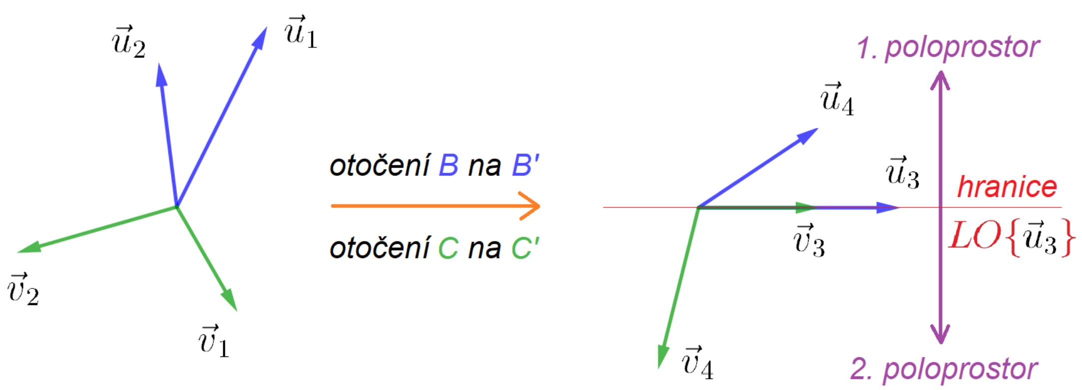
Budeme tedy používat stejný postup a kritérium jako dříve – před definicí 3.1. Zatím se nám však při posuzování nestalo, že by zmiňované otočení bylo třeba.

Důsledek 3.2. *Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$. Pokud nemáme žádnou dimenzi k dispozici navíc, indukuje ekvivalence „být souhlasná“ na množině všech bází tohoto prostoru rozklad na právě dvě třídy.*

Máme-li tedy tři báze prostoru V, pak alespoň dvě z nich jsou navzájem souhlasné.

Vezměme si ve 2D prostoru báze $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ a $C = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, u kterých otočení třeba bude. Obě báze otočme,[121] čímž vzniknou báze $B' = (\vec{u}_3, \vec{u}_4)$ a $C' = (\vec{v}_3, \vec{v}_4)$, kde B' je souhlasná s B a C' je souhlasná s C.

Situaci znázorňuje obrázek:



Dle obrázku vidíme, že vektory $\vec{u}_4$ a $\vec{v}_4$ leží v opačných poloprostorech s hraniční přímkou $LO\{\vec{u}_3\} = LO\{\vec{v}_3\}$, a tedy jsou báze B a C nesouhlasné.

Máme-li k dispozici obrázek, problém s posouzením souhlasnosti ve 2D prostoru mít nebudeme. Ještě horší je situace v prostorech dimenze $n \geq 4$, neboť ji obrázkem dostatečně znázornit nelze.

[121] Ve skutečnosti stačí otáčet pouze jednou bází, neboť nám jde o jejich vzájemnou polohu.

Otázka 3.4. *Jak můžeme souhlasnost dvou bází posuzovat v praxi?*[122] *Jaký matematický nástroj bychom při tom mohli využít?*

Představme si, že máme dvě souhlasné báze, které již jsou otočené tak, že splňují všech n podmínek z poznámky 1.7. Vezměme poslední[123] vektor jedné z bází a libovolně jím hýbejme s tím, že ostatní vektory zůstanou na místě.[124] Kdy se stane, že se souhlasnost změní na nesouhlasnost?

Pozorování 3.3. *Dojde k tomu přesně v momentě, kdy se poslední vektor „přehoupne" přes hranici danou lineární kombinací předchozích $n-1$ vektorů, která odděluje oba poloprostory. Tím se totiž změní znaménko posledního koeficientu lineární kombinace vyjadřující poslední vektor.*[125]

Jestliže jsme v prostoru dimenze $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, určují vektory každé jeho báze nějaký n-rozměrný rovnoběžnostěn.[126] Sledujme, jak se pohybem posledního vektoru mění objem tohoto n-rozměrného rovnoběžnostěnu.

Pozorování 3.4. *Pokud posledním vektorem pohybujeme spojitě, mění se objem příslušného rovnoběžnostěnu také spojitě. Navíc při přechodu z jednoho poloprostoru do druhého*[127] *přejde hodnota objemu přes nulu: v momentě, kdy poslední vektor leží v lineárním obalu zbývajících $n-1$ vektorů, se totiž nejedná o bázi.*[128] *Tudíž má útvar, který tato množina vektorů určuje, dimenzi o 1 menší.*[129]

Nápad: *Z objemu nějak uděláme* znaménkový objem, *který kromě samotné hodnoty objemu daného rovnoběžnostěnu bude navíc znaménkem vyjadřovat, ve kterém ze dvou možných poloprostorů se poslední vektor nachází.*

Pozorování 3.5. *K něčemu velmi podobnému slouží determinant.*

Poznámka 3.3. *Determinant je na rozdíl od objemu* obecnější *pojem (nevyžaduje vektorový prostor, natož skalární součin).*[130] *Pro dvě báze určuje absolutní hodnota determinantu jejich matice přechodu,*[131] *kolikrát se rovnoběžnostěn daný vektory druhé z bází „vejde" do rovnoběžnostěnu určeného vektory první z bází s tím, že znaménkem determinant vyjadřuje vzájemnou souhlasnost, resp. nesouhlasnost těchto bází.*

---

[122] Praxí mám na mysli situaci, kdy nám jsou zadány dvě báze nějakého prostoru dimenze $n \in \mathbb{N}$ tak, že známe souřadnice jejich vektorů vzhledem ke kanonické bázi, a našim úkolem je určit, zda jsou tyto báze souhlasné, nebo ne. Pro $n > 3$ už si totiž obrázek nenakreslíme.

[123] Poslední ve smyslu poznámky 3.1, tj. vlastně se může jednat o libovolný z vektorů.

[124] Tím potenciálně změníme „tvar" dané báze, ale přesně o tom nám momentálně jde.

[125] V definici 3.1 by to bylo znaménko koeficientu a_k, čímž se z poloprostoru P stane poloprostor P', který je vůči P opačný.

[126] V 1D by se jednalo o úsečku a ve 2D o rovnoběžník.

[127] Myšleno do toho, který je vůči prvnímu opačný.

[128] Množina vektorů je z definice lineárně závislá, jelikož poslední vektor je lineární kombinací zbývajících vektorů.

[129] Ve 3D by to znamenalo, že hypotetický rovnoběžnostěn má výšku délky 0, a tedy má nulový objem. Ve skutečnosti se tak jedná pouze o rovnoběžník – jeho objem je opravdu roven nule.

[130] Pokud bychom na sloupce determinantu nahlíželi jako na vektory, zjistíme, že pro definici determinantu skalární součin vůbec nepotřebujeme.

[131] Viz definice 3.9 (matice přechodu).

Nám však nejde o samotný objem, ale především o zmiňované znaménko! Rozdíl mezi determinantem a objemem nám tedy vůbec nevadí, naopak nás těší, že determinant můžeme oproti objemu používat ve všech vektorových prostorech konečné dimenze.[132]

Poznámka 3.4. *Determinanty už známe. V příští podkapitole budeme však* determinant *chápat jako matematický objekt splňující podmínky z poznámky 3.3 a postupně ukážeme, že se opravdu jedná o ten determinant, jak ho známe.*[133]

3.1 Determinant a souhlasnost

Poznámka 3.5. *V poznámce 3.3 mluvíme o tom, že se rovnoběžnostěn R_1 několikrát* vejde *do rovnoběžnostěnu R_2. Kvůli intuitivnosti tohoto vyjádření ho budeme používat i nadále.*

Označení 3.2. *Nechť je dán prostor se skalárním součinem a v něm n-rozměrné rovnoběžnostěny R_1, R_2 mají po řadě objemy V_1, V_2. Pak řekneme, že se R_1 do R_2* vejde *c-krát právě tehdy, když $c = \frac{V_2}{V_1}$, kde $c \in \mathbb{R},\ c > 0$.*[134]

Pozorování 3.6. *Mějme reálný vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ se skalárním součinem,*[135] *nějakou jeho bázi B a ortonormální bázi E.*[136] *Dle poznámky 3.3 je absolutní hodnota determinantu matice přechodu od báze B k bázi E rovna objemu rovnoběžnostěnu, který je určený vektory báze B.*[137]

Pokud v poznámce 3.6 absolutní hodnotu u determinantu odstraníme, získáme navíc informaci o souhlasnosti bázi B a E. V situaci popsané ve zmiňované poznámce má smysl této hodnotě říkat *orientovaný objem.*[138]

Poznámka 3.6. *Na začátku této podkapitoly budeme často mluvit o objemu, resp. o* orientovaném objemu. *Kdykoliv se tak stane, předpokládáme, že pracujeme v prostoru se skalárním součinem.*

Označení 3.3. *Mějme reálný vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ se skalárním součinem a jeho báze B a E, kde E je navíc ortonormální.*[139] Orientovaným

[132] Jak zmiňuji v poznámce 3.3, objem vyžaduje skalární součin. Ne každý vektorový prostor však skalární součin má.

[133] Dospějeme až k jeho definici – viz definice 3.8.

[134] Hodnota c může tedy být i necelá, či dokonce iracionální. Je dobré dodat, že tuto formulaci budeme užívat pouze v případě, že žádný z rovnoběžnostěnů není degenerovaný tak, že by měl nulový objem.

[135] Má tedy smysl mluvit o objemu.

[136] Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory báze E je 1, protože se jedná o n-rozměrnou krychli s jednotkovými délkami hran.

[137] Označme si hodnotu tohoto objemu V. To znamená, že se do daného rovnoběžnostěnu vejde právě V n-rozměrných krychlí s jednotkovou délkou hrany. Takovou krychli ale určují právě vektory báze E.

[138] Vyjde kladný právě tehdy, když báze B a E jsou souhlasné, a záporný právě tehdy, když jsou nesouhlasné. Kdyby B nebyla bází, vyšel by nulový.

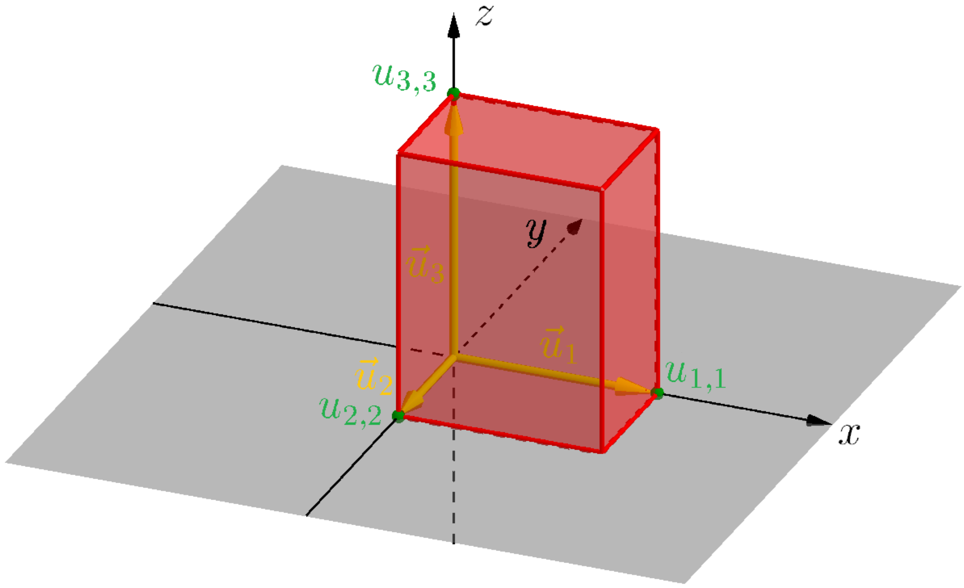
[139] Podmínka ortonormality je tady klíčová, protože to znamená, že vektory báze E určují n-rozměrnou jednotkovou krychli. Objemem tělesa vlastně rozumíme, kolikrát se do něj jednotková krychle vejde.

objemem *n-rozměrného rovnoběžnostěnu, který je určený vektory báze B, míníme hodnotu determinantu matice přechodu od báze B k ortonormální bázi E.*[140]

Nyní zkusme z obrázků odvodit, jak tento orientovaný objem spočítat. Za ortonormální bázi E budeme uvažovat standardní kartézskou bázi. Bázi B zadáme pomocí souřadnic jejich vektorů vzhledem k bázi E.

Začneme jednoduššími situacemi a postupně se dostaneme až k samotnému obecnému n-rozměrnému rovnoběžnostěnu. Nejprve se zaměřme na obyčejný trojrozměrný kvádr.

Situaci znázorněme na obrázku:



Objem kvádru je roven součinu délek jeho hran. Tyto délky jsou absolutními hodnotami souřadnic $u_{1,1}$, $u_{2,2}$, $u_{3,3}$, kde

$$\vec{u}_1 = (u_{1,1}, 0, 0)^T \, , \; \vec{u}_2 = (0, u_{2,2}, 0)^T \, , \; \vec{u}_3 = (0, 0, u_{3,3})^T \, .$$

Podobně pro n-rozměrný kvádr určený bází B takovou, že matice přechodu od B k E je diagonální, by byla hodnota determinantu rovna součinu prvků na diagonále této matice, tedy $u_{1,1} \cdot \ldots \cdot u_{n,n}$.

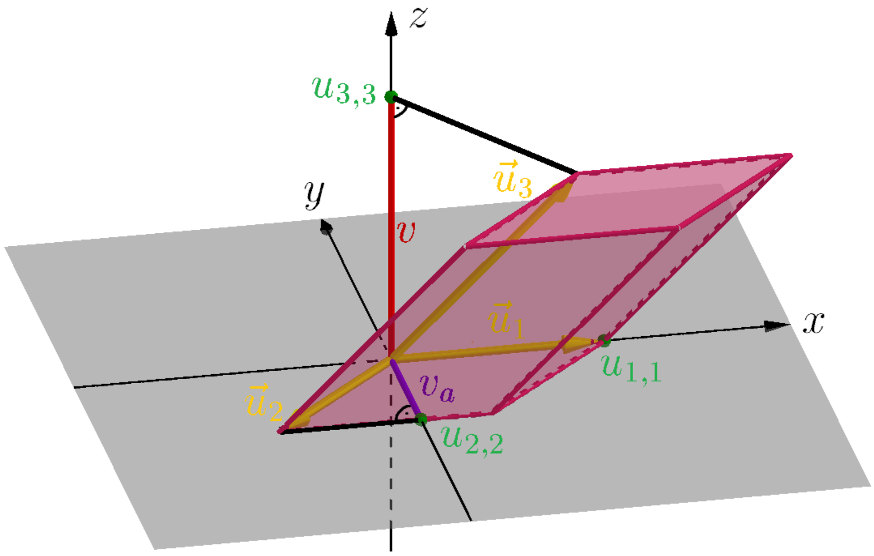
Nyní si vezměme speciální trojrozměrný rovnoběžnostěn, a to takový, že matice přechodu od B k E bude horní trojúhelníková matice:

$$P_{BE} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & u_{3,1} \\ 0 & u_{2,2} & u_{3,2} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix} .$$

[140] Mezi orientovaným objemem a determinantem je však rozdíl. O determinantu můžeme mluvit i v případě, že báze E ortonormální není nebo pokud nemáme skalární součin. Orientovaný objem je tedy speciálním případem determinantu, a to pouze v prostorech se skalárním součinem. Důvod, proč se o něm vůbec bavíme, spočívá v tom, že vychází přímo z objemu, pod kterým si už dokážeme něco představit.

Rovnoběžnostěn je hranol,[141] takže se jeho objem rovná součinu obsahu jeho podstavy a délky jeho výšky: $V = S_p \cdot v$. Jeho podstavou je rovnoběžník (vyberme si ten určený vektory $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$), obsah rovnoběžníku můžeme spočítat jako součin délky strany tohoto rovnoběžníku a příslušné výšky: $S_p = a \cdot v_a$.

Situaci ilustrujme na obrázku, a to včetně zmiňovaných výšek:



Délka strany a rovnoběžníku je rovna absolutní hodnotě souřadnice $u_{1,1}$.

Délka výšky v_a je rovna délce ortogonální projekce vektoru $\vec{u}_2$ na osu y,[142] ta je však rovna přesně absolutní hodnotě souřadnice $u_{2,2}$.

Konečně délka výšky rovnoběžnostěnu v je rovna délce ortogonální projekce vektoru $\vec{u}_3$ na osu z, protože zmiňovaná podstava leží v rovině xy. Tato délka je rovna absolutní hodnotě souřadnice $u_{3,3}$.

Tedy celkem dostáváme:

$$V = |u_{1,1} \cdot u_{2,2} \cdot u_{3,3}|.$$

Důsledek 3.7. *Absolutní hodnota determinantu horní trojúhelníkové čtvercové matice je rovna absolutní hodnotě součinu prvků na diagonále.*

Dosud jsme absolutní hodnotu tolerovali. Zbavme se jí a sledujme, co se se součinem děje.

Otázka 3.5. *Odstraňme absolutní hodnotu. Kdy vyjde determinant kladný a kdy záporný?*

Pokud jsou všichni činitelé[143] kladní, triviálně vyjde součin kladně. Berme tuto situaci jako výchozí bod.

[141] Avšak obecně kosý.

[142] Přesněji je tato výška ortogonální projekcí zmiňovaného vektoru na vektorovou přímku vektoru $\vec{e}_2$, kde $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je naše kanonická báze.

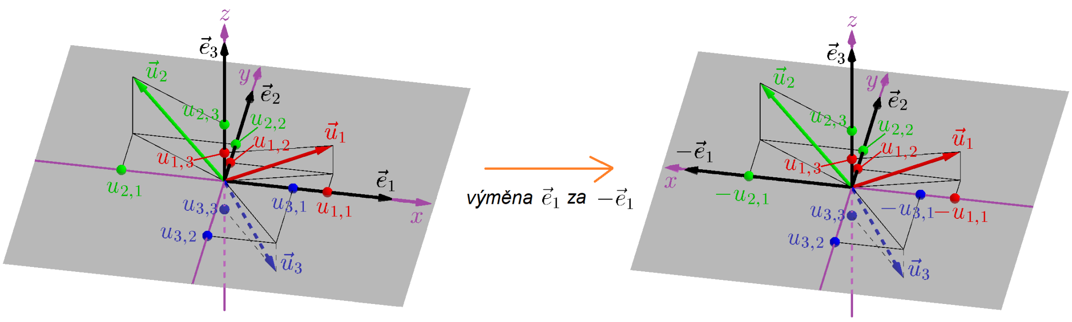
[143] Stále pracujeme s takovou bází B, že matice přechodu od B k E je horní trojúhelníková. Činiteli jsou tedy právě její diagonální prvky.

Pokud u jednoho z činitelů změníme znaménko, změní se také znaménko determinantu. Co se musí stát s bází B, resp. E, aby k tomu došlo?

Stane se to například v situaci, kdy jeden z vektorů báze B, řekněme i-tý, $i \in \{1, ..., n\}$, změníme na opačný. Pak se všechny souřadnice tohoto vektoru změní na opačné, a tedy také souřadnice $u_{i,i}$, která jako jediná z nich figuruje v našem součinu. My jsme však v kapitole 2 zkoumali výměnu vektoru za opačný pouze v ortonormální bázi, podívejme se proto na věc z jiného pohledu:

Místo toho, abychom vyměnili vektor $\vec{u}_i$ za vektor k němu opačný, vyměníme v bázi $E = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ vektor $\vec{e}_i$ za opačný. Tím se změní všechny i-té souřadnice vektorů báze B vzhledem k E na opačné, a tedy i souřadnice $u_{i,i}$. Zároveň ze všech, které jsme takto změnili, je však pouze $u_{i,i}$ diagonálním prvkem matice přechodu od B k E.

Výměna $\vec{e}_1$ za vektor vůči němu opačný ve 3D prostoru je naznačena na obrázku:



O výměně vektoru v ortonormální bázi za opačný jsme již hovořili. Dle věty 2.9 víme, že tato operace vytvoří bázi, která je s původní bází nesouhlasná. Pokud byly báze B a E souhlasné,[144] budou po výměně vektoru v E za opačný nesouhlasné, a naopak. Celkový objem, tedy absolutní hodnota determinantu, se tím však nezmění.

Důsledek 3.8. *Nechť B je báze a E je ortonormální báze téhož vektorového prostoru konečné dimenze. Je-li matice přechodu od B k E horní trojúhelníková, pak součin prvků na diagonále bude roven hodnotě orientovaného objemu, a to v následujícím smyslu: Tento součin bude kladný právě tehdy, když B a E jsou souhlasné, a záporný právě tehdy, když jsou nesouhlasné. Determinant zmiňované matice přechodu je tedy roven hodnotě tohoto orientovaného objemu.*[145]

Nyní jsme konečně připraveni rozebrat obecný n-rozměrný rovnoběžnostěn. Matice přechodu od B k E tedy vypadá následovně:

$$P_{BE} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & \cdots & u_{n,1} \\ u_{1,2} & u_{2,2} & \cdots & u_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,n} & u_{2,n} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Řešit tento případ graficky je prakticky nemožné v prostorech dimenze $n \geq 4$. Dál se proto na problém dívejme z pohledu lineární algebry.

[144] V našem případě tomu tak bylo, jelikož determinant byl kladný.

[145] Oba pojmy znamenají totéž, dokud je báze E ortonormální a máme k dipozici skalární součin. Rozdíl je v tom, že determinant je pojem obecnější a relativní.

Otázka 3.6. *Umíme nějakou metodou spolehlivě upravit regulární čtvercovou matici na tvar horní trojúhelníkové matice tak, aby se hodnota determinantu v jednotlivých krocích nezměnila? Je možné tuto metodu využít při výpočtu determinantu takové obecné čtvercové matice?*

Vzpomeňme si na Gaussovu eliminační metodu, která se využívá například k řešení soustav lineárních rovnic.[146] Její aplikací bychom skutečně docílili toho, že bychom z obecné regulární čtvercové matice vytvořili horní trojúhelníkovou matici. Musíme však trochu pozměnit úpravy, které při ní budeme využívat, abychom při aplikaci těchto úprav nezměnili hodnotu determinantu.

Otázka 3.7. *Jaké úpravy můžeme při pozměněné Gaussově eliminaci používat, aby se v jednotlivých krocích nezměnila hodnota determinantu?*

Poznámka 3.7. *Od teď už nebudeme mluvit o orientovaném objemu, ale o determinantu.*

Skalární součin již obecně nepotřebujeme, ale my jej dál budeme uvažovat.[147]

Dle poznámky 3.3 je determinant pojem relativní, a to v následujícím smyslu: Absolutní hodnota determinantu matice přechodu od báze B k E říká, kolikrát se n-rozměrný rovnoběžnostěn určený vektory báze E „vejde“ do n-rozměrného rovnoběžnostěnu určeného vektory báze B.[148] *Znaménko tohoto determinantu je kladné právě tehdy, když jsou báze B a E navzájem souhlasné, a záporné právě tehdy, když jsou nesouhlasné.*

Označení 3.4. *Determinant matice P_{BE} značíme*

$$det\ P_{BE} = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & \cdots & u_{n,1} \\ u_{1,2} & u_{2,2} & \cdots & u_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,n} & u_{2,n} & \cdots & u_{n,n} \end{vmatrix}.$$

3.1.1 Vynásobení libovolného řádku kladným číslem

Zvolme $i \in \{1, ..., n\}$ a číslo $c \in \mathbb{R},\ c > 0$. Nechť A_1 je matice, ke které jsme se dostali z P_{BE} aplikací upravených elementárních úprav[149] a A_2 je matice, která vznikne z A_1 vynásobením jejího i-tého řádku číslem c.

Poznámka 3.8. *Každá regulární matice je maticí přechodu od nějaké báze k bázi kanonické.*

Matice P_{BE} je regulární, takže také A_1 je regulární. Dle předchozí poznámky je tedy maticí přechodu od nějaké báze, označme ji $C = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$, k bázi E, tj. $A_1 = P_{CE}$.

Otázka 3.8. *Jak se od sebe liší determinanty matic A_1 a A_2?*

[146] Regulární čtvercové matice jsou v odstupňovaném tvaru právě tehdy, když jsou horní trojúhelníkovou maticí.

[147] To nám umožní používat pojmy jako délka, objem a kolmost, které přispívají naší intuitivní představě.

[148] Předpokládejme, že determinant matice přechodu od B k E je roven číslu $c \in \mathbb{R}$. Označme objemy příslušných rovnoběžnostěnů V_B, V_E. Pak dle označení 3.2 platí, že $V_B = |c| \cdot V_E$.

[149] Tyto úpravy právě zkoumáme. Shrnuje je později definice 3.6.

Změny i-tých souřadnic u všech vektorů na jejich c-násobek lze docílit dvěma způsoby:

1. změníme všechny vektory báze C tak, že je ve směru $\vec{e}_i$ c-krát natáhneme ($c > 1$), resp. zkrátíme ($c < 1$),

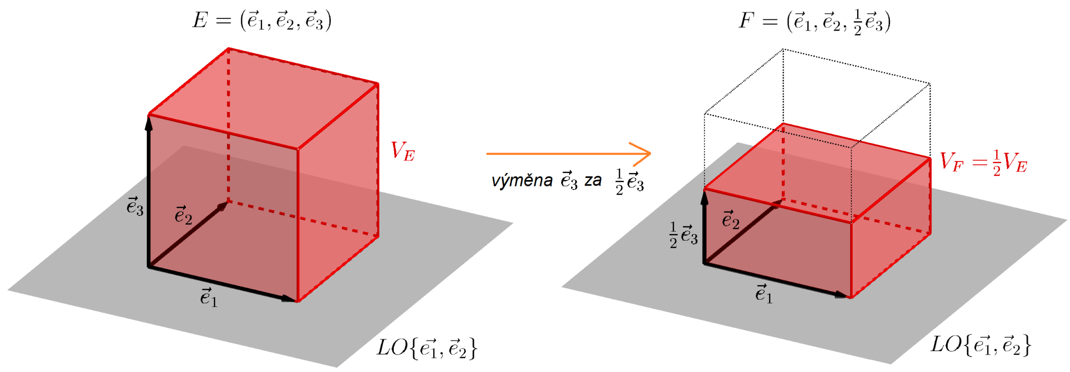
2. změníme vektor $\vec{e}_i$ na jeho $\frac{1}{c}$-násobek.

Měnit jeden vektor je zde jednodušší než měnit n vektorů. Zvolme tedy druhý způsob[150] a vektor $\vec{e}_i$ vyměňme za vektor $\frac{1}{c} \cdot \vec{e}_i$, čímž z E vytvoříme bázi F.[151]

Všimněme si, že E a F jsou díky definici 3.1 navzájem souhlasné, protože $c > 0$: Za hranici poloprostoru P vezmeme nadrovinu určenou vektory báze E kromě $\vec{e}_i$, chápeme $\vec{e}_i = \vec{v} \in P$. Pak $\frac{1}{c} \cdot \vec{e}_i \in P$, protože koeficienty lineární kombinace vynásobením číslem $\frac{1}{c} > 0$ nezměnily znaménka. Znaménko determinantu se tedy nezmění.

Lémma 3.9. *Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{R}$, $E = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ je jeho báze a $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Zvolme $i \in \{1, ..., n\}$. Vytvořme z E bázi F tak, že $\vec{e}_i$ vynásobíme číslem $\frac{1}{c}$, tedy $F = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{i-1}, \frac{1}{c} \cdot \vec{e}_i, \vec{e}_{i+1}, ..., \vec{e}_n)$. Pak jsou E a F navzájem souhlasné.*

Situaci pro $n = 3$, kde zkrátíme $\vec{e}_3$ na polovinu, můžeme pozorovat na obrázku:[152]



Dále jelikož E i F jsou ortogonální, určují jejich vektory nějaké kvádry. Jelikož se délky všech jejich hran, kromě těch rovnoběžných s $\vec{e}_i$, shodují a délky hran rovnoběžných s $\vec{e}_i$ se liší $\frac{1}{c}$-krát, liší se jejich objemy v následujícím smyslu:

$$V_F = \frac{1}{c} \cdot V_E.$$

[150] Ve skutečnosti se spíš jedná o naši interpretaci situace. Je jedno, zda měníme bázi C nebo bázi E a vlastně tyto situace od sebe na základě souřadnic ani neumíme odlišit. Přestože změnu determinantu budeme zkoumat s využitím druhého pohledu, samotnou změnu na vektorech uvažujeme dle prvního popsaného způsobu. Díky tomu můžeme u matice A_1 stále uvažovat ortonormální bázi E, protože jednotlivými upravenými elementárními úpravami měníme pouze báze B, C atd.

[151] Přestože F je dál ortogonální, není již (pro $c \neq 1$) ortonormální. Z těchto důvodů je již třeba mluvit o determinantu (relativní pojem vzhledem k F), a ne o objemu.

[152] Konkrétně tedy máme $n = 3$, $i = 3$ a $c = 2$.

Dle poznámky 3.7 a lémmatu 3.9 se tedy determinant změnil na svůj c-násobek.[153] Vyjádříme $det\ A_1$:

$$det\ A_1 = \frac{1}{c} \cdot det\ A_2.$$

Označení 3.5. *Označme j-tou souřadnici k-tého vektoru báze C vzhledem k E jako $a_{k,j}$, $j,k \in \{1,...,n\}$. Pak:*

$$A_1 = P_{CE} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Lémma 3.10. *Vynásobením i-tého řádku čtvercové matice, $i \in \{1,...,n\}$, číslem $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, se její determinant změní na svůj c-násobek, tj.:*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,i} & a_{2,i} & \cdots & a_{n,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \frac{1}{c} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c \cdot a_{1,i} & c \cdot a_{2,i} & \cdots & c \cdot a_{n,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

3.1.2 Vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem

V předchozí podkapitole jsme prozkoumali, co se stane s determinantem, když libovolný řádek vynásobíme číslem $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Abychom naše pozorování rozšířili na všechna nenulová reálná čísla, musíme ještě určit, co se s determinantem stane, když libovolný řádek vynásobíme číslem -1.

Zvolme $i \in \{1,...,n\}$. Nechť P_{CE} je matice, ke které jsme se dostali z P_{BE} aplikací upravených elementárních úprav.[154]

Změny i-tých souřadnic u všech vektorů na jejich (-1)-násobek lze docílit dvěma způsoby:

1. všechny vektory báze C zobrazíme v souměrnosti dle nadroviny $LO\{\vec{e}_1,..., \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1},..., \vec{e}_n\}$,
2. změníme vektor $\vec{e}_i$ na vektor vůči němu opačný.

O změně vektoru na vektor vůči němu opačný v ortonormální bázi již leccos víme, protože jsme se tomuto tématu věnovali v předchozích kapitolách.

Dle věty 2.9 vznikne z E touto výměnou taková báze, označme ji F, která je s E nesouhlasná.

[153] Vycházíme z nepřímé úměrnosti. Kolikrát má větší objem kvádr, který určují vektory báze E, resp. F, tolikrát menší bude poměr objemů útvarů, které určují vektory bází C a E, resp. bází C a F. Pokud označíme $D = \frac{V_C}{V_E} = |det\ A_1|$, pak je $|det\ A_2| = \frac{V_C}{V_F} = \frac{V_C}{\frac{1}{c} \cdot V_E} = c \cdot D = c \cdot |det\ A_1|$. Díky lémmatu 3.9 můžeme absolutní hodnoty při porovnávání hodnot determinantů odstranit, protože se znaménko nezmění.

[154] Shrnuje je později definice 3.6.

Díky důsledku 3.2 platí:

- Báze C a E jsou souhlasné právě tehdy, když jsou báze C a F nesouhlasné.
- Báze C a E jsou nesouhlasné právě tehdy, když jsou báze C a F souhlasné.

Jelikož $|-1| = 1$, absolutní hodnota determinantu se dle lémmatu 3.10 touto úpravou nezmění.

Důsledek 3.11. *Vynásobením libovolného řádku matice číslem -1 vznikne matice, jejíž determinant se bude oproti determinantu matice původní lišit pouze znaménkem.*

Zvolme $c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$. Pak vynásobit i-tý řádek matice číslem c je totéž jako nejprve tento řádek vynásobit číslem $|c|$ a následovně číslem -1 právě tehdy, když $c < 0$.[155] Spojením lémmatu 3.10 a důsledku 3.11 získáme důležitou větu:

Věta 3.12. *Vynásobením i-tého řádku čtvercové matice, $i \in \{1, ..., n\}$, číslem $c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$,[156] se její determinant změní na svůj c-násobek, tj.:*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,i} & a_{2,i} & \cdots & a_{n,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \frac{1}{c} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c \cdot a_{1,i} & c \cdot a_{2,i} & \cdots & c \cdot a_{n,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

3.1.3 Záměna dvou řádků

Zvolme $i, j \in \{1, ..., n\},\ i \neq j$. Nechť P_{CE} je matice, ke které jsme se dostali z P_{BE} aplikací upravených elementárních úprav.[157] Zaměňme v matici P_{CE} i-tý a j-tý řádek.

Záměny i-tých a j-tých souřadnic u všech vektorů lze docílit dvěma způsoby:

1. všechny vektory báze C zobrazíme v souměrnosti dle nadroviny určené $n-2$ vektory $\vec{e}_k,\ k \in \{1, ..., n\},\ k \neq i,\ k \neq j$ a vektorem $\vec{e}_i + \vec{e}_j$,
2. zaměníme vektory $\vec{e}_i$ a $\vec{e}_j$ v bázi E.

Opět si zvolíme druhý z uvedených pohledů.[158] Dle poznámky 3.7 se záměnou vektorů v E absolutní hodnota determinantu nezmění, jelikož vektory E i vektory nově vzniklé báze, označme ji F, určují jednotkovou krychli.[159]

Zároveň však dle věty 2.4 patří báze E a F do různých tříd rozkladu indukovaného ekvivalencí „být souhlasná“ s tím, že tyto třídy jsou dle důsledku 3.2 právě dvě. Důsledkem je následující věta.

[155] Pro $c > 0$ jsme po prvním násobení hotovi.

[156] Vynásobení číslem 0 by vytvořilo nulový řádek, a tedy singulární matici. Determinant singulární matice je roven 0, a tedy se také změnil na svůj c-násobek. Tato úprava však pro nás není zajímavá, protože již nikdy nezjistíme determinant matice původní, jelikož nemůžeme nulou vydělit tak, jako dělíme u nenulových c.

[157] Shrnuje je později definice 3.6.

[158] S touto technikou jsme se již setkali v kapitole 2, když jsme z báze E_3 vytvářeli bázi E_4, resp. z báze E_6 bázi E_7.

[159] Záměnou vektorů se ortonormalita zachová, a tedy i F je ortonormální.

Věta 3.13. *Záměnou i-tého a j-tého řádku čtvercové matice, $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, se znaménko jejího determinantu změní na opačné. Platí:*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,i} & a_{2,i} & \cdots & a_{n,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,j} & a_{2,j} & \cdots & a_{n,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,j} & a_{2,j} & \cdots & a_{n,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,i} & a_{2,i} & \cdots & a_{n,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

3.1.4 Přičtení lineární kombinace ostatních řádků

Zvolme $i \in \mathbb{N}$. Nechť P_{CE} je matice, ke které jsme se dostali z P_{BE} aplikací upravených elementárních úprav.[160] Přičtěme k i-tému řádku matice P_{BE} nějakou lineární kombinaci ostatních řádků.

Tím vlastně měníme všechny i-té souřadnice vektorů báze C vzhledem k bázi E. Podobně jako v předchozích případech si můžeme vybrat mezi dvěma pohledy:

1. každý z vektorů báze C „natahujeme/zkracujeme“ ve směru $\vec{e}_i$ na základě předem zvolené lineární kombinace ostatních souřadnic daného vektoru,

2. v bázi E přičteme k vektoru $\vec{e}_i$ předem zvolenou lineární kombinaci ostatních vektorů této báze.

Znovu si vybereme druhý pohled. Označme nadrovinu

$$W_i = LO\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, ..., \vec{e}_n\}$$

a zvolme $\vec{v} \in W_i$.[161]

Lineární množinu $\vec{e}_i + W_i$ můžeme geometricky interpretovat jako nadrovinu, která je pouhým posunutím nadroviny W_i, a tedy jsou navzájem rovnoběžné. Navíc $\vec{e}_i \notin W_i$, jelikož E je báze,[162] jejich průnik je tedy prázdný.

Změnou vektoru $\vec{e}_i$ na vektor $\vec{e}_i + \vec{v}$[163] se z jednotkové krychle, kterou určovaly vektory báze E, stane speciální rovnoběžnostěn určený vektory nové báze, kterou označíme F.

Otázka 3.9. *Jaký je objem n-dimenzionálního rovnoběžnostěnu určeného vektory báze F?*

Objem kvádru je součinem délek jeho hran, totéž platí u krychle. Změnou $\vec{e}_i$ na vektor $\vec{e}_i + \vec{v}$ jsme jednu z těchto hran potenciálně prodloužili.[164] Navíc jsme ale porušili kolmost, a proto nás nezajímá samotná délka této nové hrany, ale délka výšky celého rovnoběžnostěnu (W_i je rovina jeho podstavy).

[160] Shrnuje je později definice 3.6.

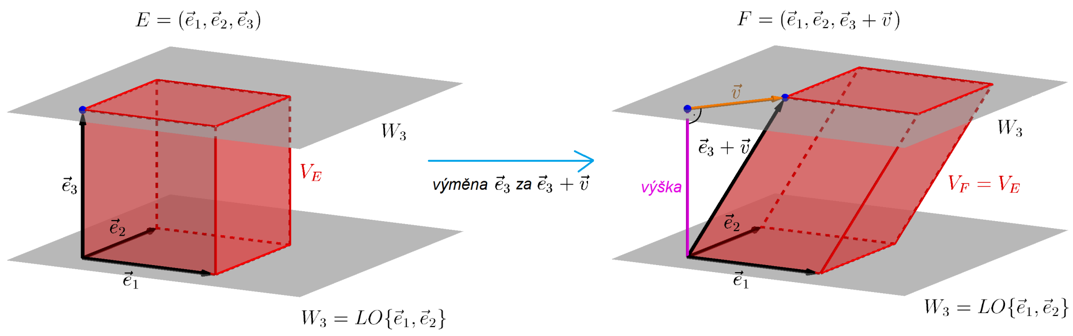
[161] Vektor $\vec{v}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, ..., \vec{e}_n$.

[162] Množina jejích vektorů je lineárně nezávislá.

[163] Přičítáme lineární kombinaci ostatních vektorů báze E.

[164] Pro $\vec{v} = \vec{o}$ se tato délka nezmění. Jistě jsme hranu nezkrátili, jelikož ze všech vektorů nadroviny $\vec{e}_i + W_i$ má vektor $\vec{e}_i$ nejmenší normu, protože je báze E ortonormální (po kolmici je to nejkratší – [Be], kapitola 26, strana 374, věta 26.23).

Situaci ve 3D prostoru pro $i = 3$ znázorňuje obrázek:



Výška je k podstavě kolmá, a tedy, jak vidíme na obrázku, je její délka rovna normě vektoru $\vec{e}_i$. Objem tohoto rovnoběžnostěnu je tedy stejný jako objem původní jednotkové krychle. Absolutní hodnota determinantu se tak touto úpravou nezmění.

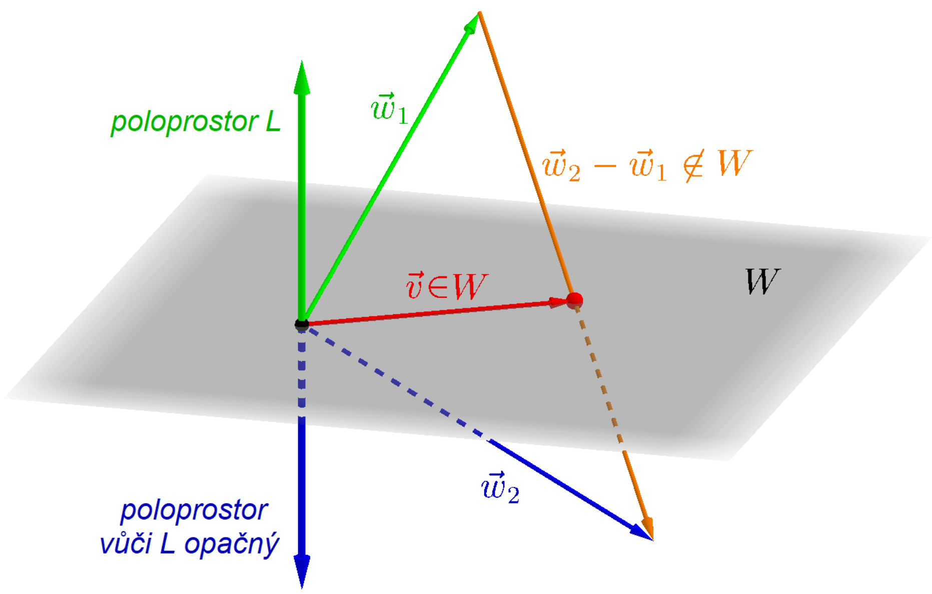
Otázka 3.10. *Změní se touto úpravou znaménko determinantu?*

Uvažme pozorování 3.3. Zmiňovanou hranicí je nadrovina W_i, posledním[165] vektorem je vektor $\vec{e}_i$.

Lémma 3.14. *Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{R}$ a L je jeho poloprostor určený hranicí W a vektorem $\vec{w}_1 \in V$. Jestliže $\vec{w}_2 \in V \setminus (W \cup L)$, tedy $\vec{w}_2$ spolu s W určuje poloprostor, který je vůči L opačný, pak*

$$\vec{w}_2 - \vec{w}_1 \notin W.$$

Tvrzení lémmatu 3.14 je zřejmé z obrázku:



V naší situaci je rozdíl $\vec{w}_2 - \vec{w}_1$ z lémmatu 3.14 roven $(\vec{e}_i + \vec{v}) - \vec{e}_i = \vec{v} \in W_i$,[166] a tedy oba vektory $\vec{e}_i + \vec{v}$ a $\vec{e}_i$ leží ve stejném poloprostoru, což znamená, že jsou báze E a F souhlasné. Znaménko determinantu se tedy touto úpravou nezmění.

[165] Ve smyslu poznámky 3.1.

[166] Triviálně $\vec{e}_i + \vec{v} \notin W_i$, $\vec{e}_i \notin W_i$

Důsledek 3.15. *Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{R}$ a dále $E = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ je jeho báze.*[167] *Nechť $i \in \{1, ..., n\}$ a vektor*

$$\vec{v} \in LO\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, ..., \vec{e}_n\}$$

je lineární kombinací všech vektorů báze E kromě vektoru $\vec{e}_i$. Pak

$$F = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_i + \vec{v}, \vec{e}_{i+1}, ..., \vec{e}_n)$$

je také bází prostoru V a navíc jsou E a F navzájem souhlasné.

Věta 3.16. *Přičtením lineární kombinace ostatních řádků k i-tému řádku čtvercové matice, $i \in \{1, ..., n\}$, se její determinant nezmění.*

Důsledek 3.17. *Přičtením c-násobku, $c \in \mathbb{R}$, j-tého řádku čtvercové matice k i-tému, $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$,*[168] *se její determinant nezmění. Platí:*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,i} & a_{2,i} & \cdots & a_{n,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,i} + c \cdot a_{1,j} & a_{2,i} + c \cdot a_{2,j} & \cdots & a_{n,i} + c \cdot a_{n,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

3.1.5 Výpočet determinantu

Determinant čtvercové matice A vypočítáme tak, že pomocí „upravené Gaussovy eliminační metody“[169] převedeme matici A na horní trojúhelníkovou matici H, jejíž determinant je roven determinantu matice A. Dle důsledku 3.8 je pak *det* A roven součinu prvků na diagonále matice H.[170]

Definice 3.6. *Nechť A, H jsou čtvercové matice řádu $n \in \mathbb{N}$ a H je navíc horní trojúhelníková. Za elementární úpravy, které při výpočtu det A převodem A na H můžeme použít, považujeme:*[171]

1. *záměnu libovolných dvou řádků matice – determinant změní znaménko (věta 3.13),*

2. *vynásobení libovolného řádku nenulovým reálným číslem c – determinant se změní na svůj c-násobek (věta 3.12),*

3. *přičtení libovolné lineární kombinace ostatních řádků k jednomu řádku – determinant se nezmění (věta 3.16).*

[167] Předpoklad ortonormality zde není třeba.

[168] Pro $i = j$ je tato úprava pro $c \neq -1$ ekvivalentní vynásobení i-tého dané matice číslem $c + 1$. V takovém případě by se ale determinant změnil podle věty 3.12.

[169] Používáme jakoby úpravy Gaussovy eliminační metody, ale poupravené tak, aby se hodnota determinantu nezměnila.

[170] Determinant jednotkové matice je roven 1, protože tato matice je horní trojúhelníková, dokonce diagonální, a na diagonále má samé 1.

[171] Zatím se omezujeme na řádkové úpravy. Ke sloupcovým úpravám se vrátíme časem, viz věta 3.31.

Poznámka 3.9. *Speciálně přičtení libovolného reálného násobku jednoho řádku ke druhému je elementární úpravou – determinant se nezmění (důsledek 3.17).*

Definice 3.7. *Nechť $H = (h_{i,j})_{n,n}$ je horní trojúhelníková čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ řádu $n \in \mathbb{N}$.* Determinantem horní trojúhelníkové matice *H míníme reálnou hodnotu součinu:*

$$\mathit{det}\ H = \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,n} \\ 0 & h_{2,2} & \cdots & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} h_{i,i}.$$

Pozorování 3.18. *Používáním pouze elementárních úprav z definice 3.6 upravíme matici na horní trojúhelníkovou matici, jejíž determinant spočítáme dle definice 3.7. Tímto způsobem je každé čtvercové matici jednoznačně přiřazena nějaká reálná hodnota.*

Definice 3.8. *Nechť $A = (a_{i,j})_{n,n}$ je čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ řádu $n \in \mathbb{N}$. Hodnotu, o které mluvíme v pozorování 3.18, nazýváme* determinant *matice A. Značíme jej*

$$\mathit{det}\ A = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Důsledek 3.19. *Mějme čtvercovou matici A. Pak platí:*

$$\mathit{det}\ A = 0 \iff A \text{ je singulární} \iff A \text{ není maticí přechodu mezi dvěma bázemi.}$$

Vzpomeňme si nyní, k čemu jsme vlastně determinanty chtěli. Zajímalo nás, jak v praxi poznat, zda dvě zadané báze jsou souhlasné, či nikoliv. Avšak zatím jsme se zabývali pouze případy, kdy jsme porovnávali bázi obecnou s bází ortonormální. Extrahujme z poznámky 3.7 to nejdůležitější:

Poznámka 3.10. *Nechť B, E jsou bázemi téhož reálného vektorového prostoru dimenze $n \in \mathbb{N}$ se standardním skalárním součinem s tím, že E je ještě navíc ortonormální. Pak:*

$$\mathit{det}\ P_{BE} > 0 \iff \text{báze } B \text{ a } E \text{ jsou souhlasné,}$$
$$\mathit{det}\ P_{BE} < 0 \iff \text{báze } B \text{ a } E \text{ jsou nesouhlasné.}$$

Příklad. *Vypočítejte determinant matice A, je-li*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Nejprve zaměníme první a druhý řádek (přidáme mínus). Dále přičteme (-3)-násobek prvního řádku ke druhému. Pak například vynásobíme třetí řádek číslem 4

(vše vynásobíme $\frac{1}{4}$-krát). Přičtením (-1)-násobku druhého řádku ke třetímu získáváme horní trojúhelníkovou matici, a tedy stačí získané číslo $-\frac{1}{4}$ vynásobit jejími diagonální prvky:

$$\begin{aligned} det\ A &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & -9 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & -9 \\ 0 & -20 & 8 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot (-20) \cdot 17 = 5 \cdot 17 = 85. \end{aligned}$$

Nechť E je kanonická báze a B je taková báze, že $A = P_{BE}$. Pak:

$$B = \left((3,1,0)^T, (1,7,-5)^T, (-6,1,2)^T\right), E = \left((1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\right).$$

Jelikož $det\ A = 85 > 0$, jsou dle poznámky 3.10 báze B a E navzájem souhlasné.

$\square$

Poznámka 3.11. *V předchozím příkladu je horní trojúhelníkovou maticí H z pozorování 3.18 matice*

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

a $det\ A$ je dle definice 3.8 roven $(-\frac{1}{4})$-násobku jejího determinantu.

Rádi bychom pozorování z poznámky 3.10 ještě rozšířili, a to na dvojice obecných bází.

3.2 Determinant obecné matice přechodu

Definice 3.9. *Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$. Mějme dvě jeho báze $B = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n)$ a $C = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$.* Maticí přechodu od báze B k bázi C *rozumíme čtvercovou matici, jejíž sloupce obsahují souřadnice vektorů báze B vzhledem k bázi C:*

$$P_{BC} = \left(\ [\vec{u}_1]_C \mid [\vec{u}_2]_C \mid \cdots \mid [\vec{u}_n]_C \ \right).$$

Souřadnice vektoru $\vec{u}_i$ vzhledem k bázi C, $i \in \{1, ..., n\}$, značíme

$$[\vec{u}_i]_C = (u_{i,1}, ..., u_{i,n})^T.$$

Poznámka 3.12. *Souřadnice vektoru $\vec{u}_i$ vzhledem k bázi C, $i \in \{1, ..., n\}$, jsou koeficienty lineární kombinace:*

$$\vec{u}_i = \sum_{j=1}^{n} u_{i,j} \cdot \vec{v}_j.$$

Poznámka 3.13. *Nechť B, C jsou báze vektorového prostoru V, P_{BC} je matice přechodu od B k C. Pak*[172]

$$\forall \vec{u} \in V : [\vec{u}]_C = P_{BC} \cdot [\vec{u}]_B.$$

Vynásobme zleva obě strany rovnosti z poznámky maticí P_{BC}^{-1} a strany zaměňme. Objevíme matici přechodu od C k B.

Důsledek 3.20. *Nechť B, C jsou báze vektorového prostoru V, P_{BC} je matice přechodu od B k C. Pak je tato matice regulární a matice k ní inverzní je maticí přechodu od C k B, tedy*

$$P_{CB} = P_{BC}^{-1}.$$

Skládáním[173] dospějeme k dalšímu důsledku:

Důsledek 3.21. *Nechť B, C jsou báze vektorového prostoru V, P_{BC} je matice přechodu od B k C a K je kanonická báze prostoru V. Pak:*

$$P_{BC} = P_{KC} \cdot P_{BK} = P_{CK}^{-1} \cdot P_{BK}.$$

Poznámka 3.14. *Nechť $B = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n)$ je báze vektorového prostoru V a K je jeho kanonická báze. Nechť $\vec{u}_i = (u_{i,1}, ..., u_{i,n})^T, i \in \{1, ..., n\}$, jsou souřadnice vektorů báze B.*[174] *Pak*

$$P_{BK} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & \cdots & u_{n,1} \\ u_{1,2} & u_{2,2} & \cdots & u_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,n} & u_{2,n} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix},$$

tedy matice přechodu od báze B ke kanonické bázi K je maticí, jež obsahuje ve sloupcích souřadnice odpovídajících vektorů báze B.

Téma matice přechodu najdeme také v knize [Be], kapitola 11 – začíná na straně 127 definicí 11.6.

O determinantech matic P_{BK}, resp. P_{CK} již víme, že jejich znaménka rozhodují o souhlasnosti, či nesouhlasnosti bází B, resp. C a K, jelikož K je ortonormální. Nemáme však P_{CK}, ale P_{CK}^{-1}.

Otázka 3.11. *Jak závisí znaménko determinantu matice P_{BC} na znaménkách determinantů matic P_{BK} a P_{KC}?*

Využijeme větu o násobení determinantů[175]:

Věta 3.22. *Nechť A, B jsou čtvercové matice n-tého řádu, $n \in \mathbb{N}$, nad $\mathbb{R}$. Pak*

$$det\ (A \cdot B) = det\ A \cdot det\ B.$$

[172] [Be], kapitola 11, strana 127, tvrzení 11.7.

[173] Nejprve přejdeme od báze B k bázi kanonické K a od ní teprve přejdeme k bázi C. Skládáme zprava doleva.

[174] Pokud není uvedeno, vzhledem ke které bázi souřadnice míníme, jedná se o souřadnice vzhledem ke kanonické bázi K.

[175] [Be], kapitola 14, strana 175, věta 14.14.

Jelikož determinant jednotkové matice, označme ji I_n, kde $n \in \mathbb{N}$ je její řád, je roven 1 a složení každé regulární matice A s maticí A^{-1} k ní inverzní je matice jednotková, dostáváme aplikací věty 3.22:

$$1 = det\ I_n = det\ (A \cdot A^{-1}) = det\ A \cdot det\ A^{-1}.$$

Důsledek 3.23. *Nechť A je čtvercové matice n-tého řádu, $n \in \mathbb{N}$, nad $\mathbb{R}$, která je navíc regulární. Pak*

$$det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A}.$$

Nyní jsme připraveni odpovědět na otázku 3.11:

$$\begin{aligned} det\ P_{BC} &= det\ (P_{CK}^{-1} \cdot P_{BK}) \\ &= det\ P_{CK}^{-1} \cdot det\ P_{BK} \\ &= \frac{det\ P_{BK}}{det\ P_{CK}}. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že B a C jsou nesouhlasné. Pak nastane jeden z těchto případů:

1. B a K jsou souhlasné, C a K jsou nesouhlasné,
2. B a K jsou nesouhlasné, C a K jsou souhlasné.

V obou případech však platí, že právě jeden z determinantů matic přechodu P_{BK}, P_{CK} je záporný, a tedy je podíl těchto determinantů taktéž záporný.[176]

Nyní předpokládejme, že B a C jsou souhlasné. Pak nastane jeden z případů:

1. B a K jsou souhlasné, C a K jsou také souhlasné,
2. B a K jsou nesouhlasné, C a K jsou také nesouhlasné.

Tentokrát jsou oba determinanty buď kladné, nebo oba záporné. To ale znamená, že jejich podíl je v obou případech kladný.

Vše funguje tak, jak jsme si přáli. Determinant matice přechodu od B k C je skutečně kladný právě tehdy, když jsou báze B, C souhlasné, a záporný právě tehdy, když jsou nesouhlasné. Tento poznatek je natolik důležitý, že si zaslouží vlastní větu.

Věta 3.24. *Nechť B, C jsou báze reálného vektorového prostoru dimenze $n \in \mathbb{N}$. Pak platí:*

- *Báze B, C jsou souhlasné $\iff$ $det\ P_{BC} > 0$.*
- *Báze B, C jsou nesouhlasné $\iff$ $det\ P_{BC} < 0$.*

Všimněme si, že věta 3.24 relaci souhlasnosti na množině všech bází daného prostoru zcela charakterizuje.[177] Zároveň se jedná o ekvivalenci, která indukuje rozklad na právě dvě třídy. To znamená, že tato formulace souhlasnosti nám nejen zajistí všechny vlastnosti, které od této relace očekáváme, ale zároveň se jedná o pěkný a stručný způsob, jak vyjádřit souhlasnost dvou bází pomocí prostředků lineární algebry.

[176] Obě matice jsou maticemi přechodu, a tedy jsou regulární. Dle důsledku 3.19 jsou oba determinanty nenulové.

[177] Pro žádné dvě báze není determinant matice přechodu od jedné ke druhé roven 0, viz důsledek 3.19.

Vzpomeňme si, jak jsme na relaci souhlasnosti v této práci nahlíželi:

1. Začali jsme konkrétními příklady v 1D, 2D a 3D prostoru (síra na jednu vs. na druhou stranu, směr šipky mezi ručičkami, pravá vs. levá bota), na kterých jsme provedli různá pozorování.

2. Poté jsme se omezili na báze ortonormální (stejná velikost vektorů, stejné velikosti úhlů mezi nimi) a souhlasnost dvou bází jsme vnímali jako možnost otočení jedné báze tak, aby se shodovala s druhou.

3. Dále jsme se začali soustředit na poloprostory[178] s tím, že souhlasnost dvou bází jsme posuzovali podle n podmínek, viz poznámka 1.7, které jsme odvodili intuitivním rozšířením naší předchozí představy o souhlasnosti do prostorů dimenze 4 a vyšší.[179]

4. Pak jsme si všimli souvislosti předchozího kritéria o poloprostorech s objemy n-rozměrných rovnoběžnostěnů s tím, že jsme odstranili u jistého součinu absolutní hodnotu, protože nás zajímalo především znaménko určující jeden, nebo druhý poloprostor, a přidali relativitu a obecnost – místo objemu jsme se začali soustředit na determinant, kde jsme prozkoumali závislosti změn jeho hodnoty na změnách vektorů jedné z bází.

5. Konečně jsme díky těmto zkoumáním mohli determinant na základě metody jeho výpočtu definovat, a tedy celý koncept souhlasnosti dvou bází vyjádřit prostředky lineární algebry. Stačilo jej už jenom trochu zobecnit[180] a získali jsme krásnou charakterizaci souhlasnosti z věty 3.24.

Tento postup je velmi zdlouhavý a poměrně myšlenkově náročný. Proto bychom si mohli situaci zjednodušit a rozhodnout se větu 3.24 od začátku považovat za definici relace souhlasnosti na množině všech bází daného vektorového prostoru, čímž bychom ihned odpověděli na otázku 1.1:

Definice 3.10. *Nechť B, C jsou báze reálného vektorového prostoru dimenze $n \in \mathbb{N}$. Potom říkáme, že*

- *báze B, C jsou souhlasné $\iff$ det $P_{BC} > 0$,*
- *báze B, C jsou nesouhlasné $\iff$ det $P_{BC} < 0$.*

Zřejmé výhody takového rozhodnutí jsou stručnost a jednoduchost výkladu, ale také vyhnutí se komplikacím, které nastaly, když jsme využívali naši intuici: Často jsme potřebovali mluvit o kolmosti či objemech; na to jsme ovšem

[178] Otočení jedné báze na druhou již nestačilo, protože vektory mohly mít různé velikosti a svírat úhly různých velikostí.

[179] Každá báze po volbě pořadí vektorů, ve kterém je chceme chápat jako první, druhý, atd., viz poznámka 3.1, jednoznačně určuje poloprostor tak, že jeho hranice je generována prvními $n-1$ zvolenými vektory a spolu s touto hranicí ho navíc určuje poslední vektor této báze.

[180] Nejprve jsme se věnovali výhradně determinantu matic P_{BE}, kde E byla ortonormální báze. To mělo dva důvody: prvním byla souvislost s objemem, a tedy snazší představitelnost a opora v intuici, druhým byla naše pozorování z kapitoly 2, které se nám při odvozování elementárních úprav pro výpočet determinantu náramně hodila. Jakmile jsme však determinant definovali, podmínka ortonormality byla zbytečným omezením, a proto jsme se místo E začali soustředit na obecnou bázi C.

potřebovali skalární součin, který obecně ve vektorovém prostoru nemusí být definován, a tedy jsme nepostupovali z matematického hlediska úplně korektně.

Začít výklad takovou definicí má však i jednu velmi významnou nevýhodu: Samotná pointa této definice nebude pravděpodobně zřejmá, tudíž se nám o relaci souhlasnosti dvou bází, natož o orientaci vektorového prostoru nemusí vytvořit žádná názorná představa. Tím můžeme spadnout do situace, kdy celému konceptu budeme rozumět pouze formálně bez jakýchkoliv souvislostí.

V matematické literatuře se postup, kdy téma orientace prostoru začneme definicí 3.10, hojně využívá.[181] Někdy je navíc doplněn několika odstavci, které popisují, co si vlastně pod tím vším máme představit, ale z principu se i tak ztratí velké množství důležitých myšlenek, které za touto definicí stojí. Jako příklad uveďme například knihu [Se], podkapitola 1.13, strana 101, definice 1.13.2. – celé orientaci afinního prostoru jsou věnovány necelé 3 strany formátu B5.

Jelikož se nám konečně podařilo relaci souhlasnosti na množině všech bázích vektorového prostoru matematicky formalizovat, dospěli jsme téměř do námi vytyčeného cíle – už zbývá jenom definovat samotnou orientaci vektorového prostoru. Udělejme ale ještě jeden krok navíc a zobecněme nejprve všechna pozorování z kapitoly 2 (výměna vektoru za opačný, záměna vektorů, permutace vektorů), která se vztahovala jenom na ortonormální báze, pro báze obecné.

3.3 Ortonormalizace

Cíl: *Ukázat, že všechna pozorování z kapitoly 2 platí i pro obecnou bázi, ne pouze pro bázi ortonormální.*[182]

Myšlenka: *Z obecné báze B vytvoříme pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace*[183] *ortonormální bázi E takovou, že B a E budou navzájem souhlasné.*[184]

Věta 3.25. *Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem*[185] *a $B = (\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n)$ je jeho báze. Nechť*

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_1 = \vec{w}_1,\\
&\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - (\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1,\\
&\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - (\vec{w}_3 \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 - (\vec{w}_3 \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2,\\
&\cdots,\\
&\vec{v}_n = \vec{w}_n - (\vec{w}_n \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 - \cdots - (\vec{w}_n \cdot \vec{u}_{n-1})\vec{u}_{n-1},
\end{aligned}$$

[181] Dle mého názoru se tak děje proto, že téma orientace je považováno za okrajové. Jelikož je samotné odvození myšlenkově velmi bohaté, ale kvůli tomu také dlouhé a bohužel matematicky špatně uchopitelné, je přeskakováno s tím, že se autoři raději soustředí podrobněji na jiná témata.

[182] Relaci „být souhlasná“ uvažujeme však na množině všech bází, tedy v rozšířeném smyslu z kapitoly 3, který shrnuje věta 3.24.

[183] Najdeme ji například v knize [Be], kapitola 26, strany 376 a 377, věta 26.27, avšak my ji ještě trochu upravíme, aby výsledná báze nebyla jenom ortogonální, ale ortonormální.

[184] Báze E bude splňovat vzhledem k B podmínky souhlasnosti, které jsme uvedli jak v poznámce 1.7, tak na samém začátku podkapitoly 2 s názvem Matematický pohled. V kapitole 2 tuto bázi označujeme E_1.

[185] Bez něho nemůžeme o kolmosti vůbec mluvit. Budeme ho značit $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

s tím, že

$$\forall i \in \{1, ..., n\} : \vec{u}_i = \frac{\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|}.$$

To znamená, že vektory $\vec{u}_i$ vzniknou znormováním[186] *vektorů $\vec{v}_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Pak je $E = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n)$ ortonormální bází prostoru V.*

Otázka 3.12. *Jsou báze B a E z věty 3.25 vždy souhlasné?*

Nejprve poznamenejme, že dle lémmatu 3.9 vznikne znormováním libovolného množství vektorů jakékoliv báze taková báze, která je s bází původní souhlasná, jelikož norma nenulového vektoru, a tedy i její převrácená hodnota, je kladné číslo.

Použijeme důsledek 3.15 na bázi $B = (\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n)$ z věty 3.25. Označme

$$\forall i \in \{1, ..., n\} : B_i = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_i, \vec{w}_{i+1}, ..., \vec{w}_n),$$

a tedy $B_n = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ je ortogonální báze prostoru V, která je souhlasná s bází E.[187]

Pozorování 3.26. *$\forall i \in \{1, ..., n-1\}$ vznikne báze B_{i+1} z báze B_i přičtením lineární kombinace vektorů $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_i$*[188] *k vektoru $\vec{w}_{i+1}$. Navíc $B_1 = B$, protože $\vec{v}_1 = \vec{w}_1$.*

Triviálně jsou B a B_1 souhlasné. Jelikož pro $\forall i \in \{1, ..., n-1\}$ jsou vektory $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_i, \vec{w}_{i+1}$ vektory báze B_i, dle důsledku 3.15 a předchozí poznámky platí:

$$\forall i \in \{1, ..., n-1\} : \text{báze } B_i \text{ a } B_{i+1} \text{ jsou navzájem souhlasné.}$$

Indukcí tak dostáváme, že báze $B = B_1, B_2, ..., B_n$ jsou navzájem souhlasné. Protože je navíc B_n souhlasná s E, ukázali jsme, že báze B a E patří do stejné třídy rozkladu množiny všech bází prostoru V indukovaného ekvivalencí „být souhlasná“.

Věta 3.27. *Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem a B je nějaká jeho báze. Ať E je ortonormální báze, která vznikne z B Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem popsaným ve větě 3.25. Pak jsou B a E navzájem souhlasné.*

Poznámka 3.15. *Báze E a B z věty 3.27 splňují všechny podmínky z poznámky 1.7.*

Na základě těchto podmínek jsme v kapitole 2 definovali k bázi B „pěknou“ ortonormální bázi E_1. Nyní vyšlo najevo, že v praxi bychom E_1 z B vytvořili výše

[186] Pro každý nenulový vektor $\vec{v} \in V$ platí, že vydělíme-li ho jeho normou $\|\vec{v}\|$, získáme vektor jednotkový.

[187] Normovali jsme sice postupně, ale klidně jsme mohli postupem popsaným v [Be], kapitola 26, strany 376 a 377, věta 26.27, vytvořit nejprve bázi B_n a teprve tu znormovat. Získali bychom tutéž bázi E.

[188] Skalární součiny ve větě 3.25 jsou reálná čísla, každý vektor $\vec{v}_i$ je kladným násobkem vektoru $\vec{u}_i$.

popsaným Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem (včetně normování).[189]

Díky tomu je možné zobecnit věty 2.4, 2.5, 2.9, 2.11 a 2.25 z kapitoly 2 na množinu všech bází (není třeba se omezovat na báze ortonormální).[190]

Poznámka 3.16. *V kapitole 2 jsme sice všechny zmiňované věty odvodili ve vektorovém prostoru se skalárním součinem, ale díky determinantu skalární součin vlastně nepotřebujeme. Vynecháme ho proto z předpokladů následujících vět.*

Věta 3.28. *Mějme vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ dimenze $n \in \mathbb{N}$, a nějakou jeho bázi. Pak*

- *záměnou libovolných dvou vektorů v této bázi vytvoříme bázi, která je s původní nesouhlasná (pro $n \geq 2$),*
- *provedením dvou záměn libovolných dvojic vektorů v této bázi vytvoříme takovou bázi, která je s původní souhlasná (pro $n \geq 2$),*
- *výměnou libovolného jednoho vektoru této báze za opačný vytvoříme bázi, která je s původní nesouhlasná.*

Věta 3.29. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{1, ..., n\}$. Mějme vektorový prostor dimenze $n+1$ nad $\mathbb{R}$ a jeho podprostor W dimenze k. Pak záměnou dvou vektorů v libovolné bázi podprostoru W vytvoříme bázi, která je s původní bází souhlasná.*

Věta 3.30. *Mějme vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ dimenze $n \in \mathbb{N}$ a nějakou jeho bázi B. Pak*

- *aplikací sudé permutace na vektory báze B vytvoříme bázi souhlasnou s B,*
- *aplikací liché permutace na vektory báze B vytvoříme bázi nesouhlasnou s B.*

Vzpomeňme na to, že při výpočtu determinantu matice přechodu $A = P_{BK}$, kde K je kanonická báze, jsme dříve povolili pouze řádkové úpravy (definice 3.6).

Otázka 3.13. *Jak interpretovat při výpočtu determinantu matice A sloupcové úpravy?*

Jelikož jsou ve sloupcích přímo souřadnice vektorů báze B (vzhledem ke kanonické bázi), odpovídá aplikace nějaké sloupcové úpravy téže úpravě, ale aplikované na vektory báze B. Podobně jako pro úpravy řádkové (věty 3.12, 3.13, 3.16 a 3.17), kde jsme však využívali věty pro ortonormální báze ze druhé kapitoly, bychom s využitím zobecněných verzí těchto vět, které uvádíme výše, odvodili následující větu 3.31.

[189] Ve větě 3.25 akorát místo E_1 říkáme E.

[190] Z obecné báze B vytvoříme pomocí věty 3.25 ortonormální bázi E. Danou úpravu, například záměnu i-tého a j-tého vektoru, pak provedeme zvlášť v B (získáme bázi C) a zvlášť v E (získáme ortonormální bázi F). Aplikací věty 3.25 na bázi C nezískáme nutně bázi F. Je však možné ukázat, že determinant matice přechodu P_{CF} je kladný, a tedy jsou C a F navzájem souhlasné. Provedení dané úpravy v B je tedy z pohledu souhlasnosti ekvivalentní s provedením této úpravy v E.

Věta 3.31. *Nechť A je reálná čtvercová matice řádu $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$. Pak:*

- *Vynásobením i-tého sloupce matice A číslem $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, se její determinant změní na svůj c-násobek.*
- *Záměnou i-tého a j-tého sloupce matice A se znaménko jejího determinantu změní na opačné.*
- *Přičtením lineární kombinace ostatních sloupců k i-tému sloupci matice A se její determinant nezmění.*
- *Speciálně přičtením c-násobku, $c \in \mathbb{R}$, j-tého sloupce matice A ke sloupci i-tému, $i \neq j$, se její determinant nezmění.*

Tyto úpravy spolu s úpravami z definice 3.6 považujeme při výpočtu determinantu za elementární.[191] Jelikož se aplikací pouze řádkových, resp. pouze sloupcových úprav dostaneme vždy ke stejnému výsledku, nic se nestane, pokud v matici zaměníme řádky a sloupce.[192]

Důsledek 3.32. *Nechť A je reálná čtvercová matice řádu $n \in \mathbb{N}$ a A^T je matice k ní transponovaná. Pak*

$$det\ A^T = det\ A.$$

O ekvivalenci „být souhlasná“ a její souvislosti s determinanty jsme se již mnoho dozvěděli. Dosud jsme však neodpověděli na otázku, co vlastně máme na mysli orientací vektorového prostoru. Té jsme se od začátku kapitoly 2, kde jsme tuto otázku položili, úmyslně vyhýbali.

Důvod: *Klíč k pochopení orientace vektorového prostoru je porozumění relaci „být souhlasná“ na množině všech bází tohoto prostoru.*

Postupnými poznatky jsme si tak vydláždili cestu až k samotné orientaci, kterou definujeme v příští kapitole.

[191] Mohli bychom tedy napsat novou definici, ale dělat to už nebudeme.

[192] Záměně řádků a sloupců matice se říká transpozice. Kromě názvu nemá však nic společného s transpozicí ze světa permutací.

4. Orientace vektorového prostoru a souvislosti

Provedeme důležitý krok: místo pouhého posuzování souhlasnosti, resp. nesouhlasnosti dvou bází, začneme nyní odlišovat báze *kladné* a báze *záporné*. Všechny báze souhlasné s nějakou kladnou bází budou také kladné, všechny báze souhlasné s nějakou zápornou bází budou zase záporné.

Otázka 4.1. *Co už víme o ekvivalenci „být souhlasná" na množině všech bází daného prostoru?*

Víme, že tato ekvivalence indukuje rozklad na právě 2 třídy.[193] Také umíme o libovolných dvou bázích B a C rozhodnout, zda jsou souhlasné, nebo nesouhlasné, na základě znaménka determinantu jejich matice přechodu (věta 3.24).

Otázka 4.2. *Známe nějakou kladnou bázi? Známe nějakou zápornou bázi?*

Dosud jsme nezvolili, která ze zmiňovaných dvou tříd rozkladu bude obsahovat báze kladné, a která záporné. Právě volbou nějaké báze za kladnou, resp. za zápornou rozumíme orientaci daného prostoru.

Vzpomeňme si, jakým způsobem zadáváme souřadnice vektorů: Buď přímo řekneme, o souřadnice vzhledem ke které bázi se jedná, anebo se o žádné bázi nezmíníme, čímž mlčky míníme, že se jedná o souřadnice vzhledem k bázi kanonické.

Definice 4.1. *Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{R}$. Pak* orientací vektorového prostoru V *rozumíme volbu jedné konkrétní báze prostoru V za* kladnou. *Prostor, ve kterém již tato volba byla provedena, nazýváme* orientovaný vektorový prostor.[194]

Volbou této jedné báze jednoznačně určíme, která ze dvou tříd rozkladu množiny všech bází tohoto prostoru, jenž je indukován ekvivalencí „být souhlasná" ve smyslu věty 3.24, obsahuje báze *kladné* a která *záporné*.

Poznámka 4.1. *Fakt, že dvě báze jsou souhlasné, resp. nesouhlasné, se často nepřesně vyjadřuje spojením, že obě báze mají stejnou, resp. různou „orientaci". Tato formulace je však zavádějící, protože naznačuje, že orientace je vlastnost báze, a nikoliv celého prostoru, což není pravda.*

Pozor: *Mezi orientací prostoru a relací „být souhlasná" na množině všech jeho bází je potřeba rozlišovat.*[195]

Poznámka 4.2. *Často volíme tak, že si vybereme kanonickou bázi, a tu pak prohlásíme za kladnou. Má to jistý důvod, jak ukážeme níže, avšak není to povinné (klidně můžeme kanonickou bázi zvolit za zápornou).*

[193] Pokud máme k dispozici dimenzi navíc, pak je třída pouze jedna, a tedy orientaci takového prostoru nemá smysl uvažovat.

[194] Jinými slovy můžeme říct, že *orientovaný vektorový prostor* je takový vektorový prostor, ve kterém je dána *orientace*. Tuto formulaci můžeme najít například v [Se], podkapitola 1.13, strana 102, definice 1.13.3.

[195] Dvě báze mohou být souhlasné i v neorientovaném vektorovém prostoru. Nemůžeme tam však o nich říct, zda jsou kladné, či záporné, jelikož jsme zatím žádnou bázi za kladnou nezvolili.

Otázka 4.3. *V čem je kanonická báze „speciální“?*

Dokud si ji nezvolíme, tak vlastně vůbec v ničem.[196] Každá báze může být zvolena za kanonickou.[197] Jakmile si však kanonickou bázi zvolíme a začneme zapisovat souřadnice vektorů vzhledem k ní, ihned jednu výjimečnost objevíme; mluvili jsme o ní již dříve v poznámce 3.14: Pokud po řadě zapíšeme souřadnice vektorů nějaké báze B do sloupců čtvercové matice, získáme matici přechodu od báze B k bázi kanonické.

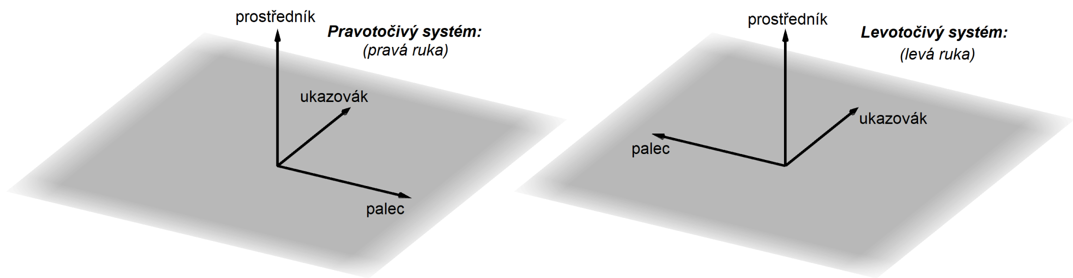
Taková matice vypadá pro danou bázi velmi výjimečně – jakoby se jednalo o nějaký „maticový zápis“ samotné báze B.[198] Pokud jsme zatím žádnou bázi za kladnou nezvolili, nemůžeme říct, zda je B kladná, či záporná. Avšak determinant popisované matice je dle věty 3.24 kladný právě tehdy, když je báze B s bází kanonickou souhlasná, jinak je záporný.

Dává proto dobrý smysl zvolit právě kanonickou bázi za kladnou. Pro všechny kladné báze pak platí, že jejich čtvercové matice, které vzniknou vypsáním souřadnic jejich jednotlivých vektorů do sloupců, mají kladný determinant.[199]

Všimněme si však, že báze kanonická není nějak pevně určena – musíme si ji nejprve zvolit. Její volba je tedy „zcela otevřená“ stejně tak jako samotná orientace vektorového prostoru, pro kterou máme, jak jsme v této práci ukázali, dvě různé možnosti.

Například ve 3D prostoru odlišujeme tzv. pravotočivý a levotočivý systém dle volby kanonické báze. Představíme-li si, že na naší ruce odpovídá palec vektoru $\vec{e}_1$, ukazovák vektoru $\vec{e}_2$ a prostředník vektoru $\vec{e}_3$, pak můžeme pravotočivý systém modelovat prsty pravé ruky a levotočivý systém zase prsty ruky levé. V praxi se setkáváme s oběma možnostmi, konkrétně například v grafických softwarech specializovaných na 3D grafiku.[200]

Na obrázku vidíme často používané kanonické báze obou zmiňovaných systémů:



[196]Zvlášť, pokud nemáme v prostoru skalární součin, neexistuje žádná „přirozená volba“.

[197]Pokud jsme v prostoru se skalárním součinem, často si pod ní představujeme nějakou bázi ortonormální. Důležité je říct, že to není podmínkou a za kanonickou si klidně můžeme například ve dvojrozměrném prostoru zvolit bázi, jejíž vektory svírají úhel o velikosti 15° s tím, že navíc jeden má třikrát větší normu než druhý. Vektory takové báze budou mít vzhledem k této bázi stále souřadnice $(1,0)^T, (0,1)^T$.

[198]Souřadnice vektorů báze B vlastně jenom přepíšeme do sloupců.

[199]Všechny kladné báze jsou navzájem souhlasné, a tedy jsou souhlasné také s bází kanonickou, kterou jsme za kladnou zvolili.

[200]Pravotočivý systém užívá například OpenGL, levotočivý například Direct3D. Pokud v obou případech zvolíme za kladnou bázi kanonickou, budou mít oba systémy přesně opačnou orientaci, tj. kladná báze v pravotočivém systému by byla záporná v systému levotočivém a naopak.

Uveďme alespoň výčtem různé zajímavé souvislosti s orientací vektorového prostoru:

- *Permutace*, konkrétně jejich *znaménko*: viděli jsme v kapitole 2.
- *Determinant*: viděli jsme v kapitole 3.
- *Orientace afinního prostoru*: definujeme ji jako orientaci jeho zaměření.[201]
- *Shodnosti přímé* (otočení, posunutí) *a nepřímé* (souměrnost podle nadroviny): stačí udělat úkrok z lineární algebry do geometrie.[202]
- *Konformní* (inverze[203]) *a antikonformní*[204] (kruhová inverze) *zobrazení*: jedná se o zobrazení, která zachovávají velikosti úhlů; konformní navíc vytváří objekty s původními v našem smyslu souhlasné, antikonformní zase nesouhlasné.[205]
- *Směr otáčení kladný* (proti směru hodinových ručiček) a *záporný* (po směru hodinových ručiček): rovinu orientujeme tak, že za kladnou zvolíme kartézskou bázi – používá se na střední škole.
- *Möbiova páska*: jedná se o plochu, která má pouze jednu stranu a je navíc neorientovatelná (pozorujeme-li 2D objekt, jak prochází po pásce, viděli bychom, že se po každé jedné obchůzce celé pásky vrací na jeho počáteční pozici, avšak jako zrcadlový obraz sám sebe oproti minulé obchůzce).[206]
- *Chiralita*: například u molekul kyseliny askorbové rozlišujeme dle jejich prostorového uspořádání mezi čtyřmi stereoizomery (L-askorbovou, D-askorbovou, L-isoaskorbovou a D-isoaskorovou), z nich však pouze kyselina L-askorbová vykazuje aktivitu vitamínu C.[207]

[201] Zaměření každého afinního prostoru je vektorový prostor.

[202] Aplikací nepřímé shodnosti ve 3D prostoru vytvoříme z boty pravé botu levou, avšak samotným otočením ani posunutím ji na levou botu nezměníme.

[203] Ve smyslu Möbiových transformací například v inverzivní geometrii, anglicky inversive geometry, přiřazuje inverze libovolnému nenulovému komplexnímu číslu $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, číslo $\frac{1}{z}$, nule nekonečno a nekonečnu nulu.

[204] Někdy se nazývá konformní zobrazení druhého druhu.

[205] Opět se můžeme vrátit k příkladu hodin z podkapitoly 1.2. Předpokládejme, že daná inverze, resp. kruhová inverze nám z ciferníku vytvoří opět ciferník (ne přímku), pak se směr šipky mezi ručičkami po zobrazení inverzí nezmění, ale po zobrazení kruhovou inverzí se změní na opačný.

[206] Pozorujeme přímý důsledek toho, co se stane, když máme o dimenzi víc.

[207] Písmena D, L vychází z latinského dexter (pravý), laevus (levý) a u chemických látek se využívají k vyjádření směru optické otáčivosti. Odlišujeme látky pravotočivé (písmeno D či znaménko +) a levotočivé (písmeno L či znaménko −).

Závěr

Ukázali jsme, jak si souhlasnost dvou bází či orientaci vektorového prostoru představit, a následně jsme tuto představu propojili s obvyklou matematickou definicí. Tím jsme vysvětlili, proč je tato definice rozumná a odkud se vzala.

Naznačili jsme spojitost mezi permutacemi a změnou orientace. V daném kontextu jsme navíc u znaménka permutace vysvětlili souvislost jeho definice přes inverze s názornou definicí přes počty sudých cyklů, která vychází ze základní představy, že aplikace transpozice znamená záměnu dvou prvků.

Při zkoumání souvislostí mezi determinanty matic přechodu a souhlasností dvou bází jsme přirozeně odvodili nemalé množství vlastností determinantů.

Vypracování této práce pro mě byl zajímavý zážitek. Nejprve jsem se pokoušel pro souhlasnost dvou bází najít nový matematický postup, ale bylo to těžké. Pak jsem postupně různými pozorováními zpřesňoval své znalosti ohledně tématu orientace, ale bylo těžké je správně utřídit. Odborná literatura nepomáhala, jelikož i texty, které toto téma řešily podrobněji, postrádaly intuitivní propojení názorné představy souhlasnosti dvou bází s onou matematickou definicí. Jakmile jsme však spolu s vedoucím sestavili nějakou osnovu, kterou jsem od té doby ještě asi třikrát změnil, práce se začala najednou rýsovat. Nejprve jsem se divil, že bude mít přes 30 stran, poté jsem nevěřil, že přesáhne stran 50... Osobně se mi těžko věří, že jsem celou práci vypracoval sám, pouze za pomoci trefných, avšak záludných otázek ze strany vedoucího. Věřím, že alespoň jednomu studentovi text této práce usnadní pochopení témat v něm probíraných.

Seznam použité literatury

[Be] BEČVÁŘ J.: *Lineární Algebra.* Matfyzpress, Praha, 2005.

[By] BYDŽOVSKÝ B.: *Úvod do analytické geometrie.* ČSAV, Praha, 1956.

[Ha] HARVEY M.: *Geometry Illuminated: An Illustrated Introduction to Euclidean and Hyperbolic Plane Geometry.* MAA Press, 2015.

[Ma] MASTNÝ E.: *Úvod do analytické geometrie lineárních útvarů a kuželoseček.* ČSAV, Praha, 1953.

[Se] SEKANINA M. A KOL.: *Geometrie I.* SPN, Praha, 1986.