



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Veronika Sirotková

Trigonometrické a Fourierovy řady a jejich aplikace

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky -
Francouzská filologie

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Ráda bych poděkovala docentu Slavíkovi za skvělé vedení. Vděčím mu za poskytnutí materiálů, cenných rad a připomínek, ale také za jeho trpělivost a podporu. Dále bych chtěla poděkovat své babičce za poskytnutí péče a zázemí během psaní práce. V neposlední řadě děkuji svému manželovi a kamarádce Šárce za všechnu podporu během mého studia.

Název práce: Trigonometrické a Fourierovy řady a jejich aplikace

Autor: Veronika Sirotková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Fourierovy řady jsou důležitým nástrojem matematické analýzy s mnoha aplikacemi. Tato diplomová práce se zaměřuje na jejich využití v několika konkrétních matematických problémech. První aplikací je důkaz izoperimetrické nerovnosti. Ta říká, že největší obsah mezi uzavřenými křivkami dané délky má kružnice. Dále je věnována pozornost posloupnosti neceločíselných částí čísel ve tvaru $n\gamma$, kde n probíhá přirozená čísla a γ je iracionální číslo. Pro tuto posloupnost platí tzv. ekvidistribuční věta, která popisuje, jakým způsobem tato posloupnost pokrývá interval $(0,1)$. Následně jsou Fourierovy řady použity k získání vzorce pro součet sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel. Poslední kapitola je věnována Gaussovu kruhovému problému, který zkoumá odhad počtu bodů s celočíselnými souřadnicemi uvnitř kruhu o daném poloměru.

Klíčová slova: Fourierovy řady, izoperimetrická nerovnost, ekvidistribuční věta, nekonečné součty sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel, Gaussův kruhový problém

Title: Trigonometric and Fourier series and their applications

Author: Veronika Sirotková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: Fourier series are an important tool of mathematical analysis with many applications. This thesis focuses on their use in several specific mathematical problems. The first application is the proof of the isoperimetric inequality, according to which the circle has the greatest area among closed curves of a given length. Next topic is the sequence of fractional parts of numbers of the form $n\gamma$, where n runs through natural numbers and γ is an irrational number. The so-called equidistribution theorem holds for this sequence describing how this sequence fills the interval $(0,1)$. Fourier series are then also used to obtain a formula for calculating the sum of even powers of the reciprocals of natural numbers. The last chapter is devoted to the Gauss circle problem, which investigates the estimation of the number of lattice points inside a circle of a given radius.

Keywords: Fourier series, isoperimetric inequality, equidistribution theorem, sums of the reciprocals of even powers of natural numbers, Gauss circle problem

Obsah

Úvod	2
1 Izoperimetrická nerovnost	3
1.1 Křivka	3
1.2 Vzorec pro výpočet obsahu plochy vymezené uzavřenou křivkou .	4
1.3 Parsevalova rovnost	5
1.4 Izoperimetrická nerovnost	7
1.5 Izodiametrická nerovnost	10
2 Ekvidistribuční věta	14
2.1 Neceločíselná část čísla	14
2.2 Ekvidistribuovanost	15
2.3 Ekvidistribuční věta	18
2.4 Benfordův zákon pro mocniny dvojky	21
3 Nekonečné součty sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel	24
3.1 Výpočet za pomoci Fourierovy řady pilovité funkce	24
3.2 Bernoulliho polynomy a Bernoulliho čísla	31
4 Odhad počtu bodů s celočíselnými souřadnicemi uvnitř kruhu	33
4.1 Gaussův odhad	33
4.2 Další odhady	35
4.3 Odhad L^2 -normy odchylky	35
Seznam použité literatury	43

Úvod

Trigonometrické a Fourierovy řady patří mezi důležité nástroje matematické analýzy, které nacházejí široké uplatnění v různých oblastech. Tato diplomová práce se zaměřuje na zajímavé aplikace těchto řad ve vybraných matematických problémech.

První oblastí, které bude věnována pozornost, je diferenciální geometrie, a to konkrétně izoperimetrická úloha. Jejím jádrem je nalezení takové uzavřené křivky, která při dané délce maximalizuje obsah. Pomocí Fourierových řad lze dokázat, že takovou křivkou je kružnice. Dokážeme ale i tzv. izodiametrickou nerovnost, která naopak stanovuje maximální délku křivky pro daný průměr. Nejdelší křivkou je také kružnice. V obou důkazech využijeme skutečnosti, že parametrizaci uzavřené křivky můžeme chápat jako periodickou funkci a zkoumat ji právě pomocí Fourierových řad.

Tématem druhé kapitoly je jistá vlastnost posloupností spadajících do intervalu $[0,1)$. Pokrývají-li členy posloupnosti tento interval velmi rovnoměrně, řekneme, že posloupnost je ekvidistribuovaná. Velmi důležitou posloupností s touto vlastností jsou neceločíselné části čísel ve tvaru $n\gamma$, kde n probíhá přirozená čísla a γ je iracionální číslo. K důkazu ekvidistribuovanosti této posloupnosti využijeme trigonometrických polynomů. Zároveň pak tento výsledek uplatníme k důkazu pozoruhodné vlastnosti přirozených mocnin dvojky. Ty totiž podléhají tzv. Benfordovu zákonu, který popisuje frekvenci výskytu jednotlivých číslic na pozici první platné číslice čísel objevujících se v nejrůznějších souborech dat.

Fourierovy řady jsou také vhodným nástrojem pro získání hodnoty nejrůznějších nekonečných součtů. My pomocí nich získáme vzorec pro součet sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel. Konkrétně k tomu využijeme Fourierovu řadu pilovité funkce. Během tohoto výpočtu dospějeme k zavedení Bernoulliho polynomů a Bernoulliho čísel.

Poslední kapitola je věnována odhadu počtu bodů s celočíselnými souřadnicemi uvnitř kruhu o poloměru r . Tato úloha se často nazývá Gaussův kruhový problém. Počet takových bodů pro kruh o poloměru r je překvapivě blízko hodnotě obsahu daného kruhu. Otázkou je pak hledání horních odhadů pro odchylku těchto dvou hodnot. Nejprve dokážeme odhad, který provedl právě Gauss, když se tímto problémem zabíral. Fourierovy řady pak ale využijeme pro odhad L^2 -normy této odchylky. K tomu bude třeba využít Fourierovy řady funkce dvou proměnných, neboť budeme pracovat v rovině.

Z výše uvedeného je patrné, že práce je určena čtenářům, kteří absolvovali základní vysokoškolské kurzy matematické analýzy se znalostí reálných a komplexních Fourierových řad. Vhodná je též znalost Parsevalovy rovnosti, ale i Fourierových řad v prostorech se skalárním součinem, speciálně v prostoru L^2 .

Výsledky prezentované v této práci byly shromážděny z cizojazyčných knižních, časopiseckých a internetových zdrojů, které jsou na patřičných místech citovány. Původní důkazy byly podrobně prostudovány a rozšířeny mimo jiné o důkazy tvrzení, která byla formulována jako cvičení. Některé z těchto zdrojů obsahovaly drobné chyby nebo nejasnosti, které byly v práci korigovány. Některé z původních důkazů byly zase zjednodušeny ve snaze zprostředkovat zajímavé aplikace Fourierových řad co nejširšímu okruhu zájemců v souladu s cílem práce.

1. Izoperimetrická nerovnost

První aplikací Fourierových řad, kterou se tato práce zabývá, je důkaz izoperimetrické nerovnosti. Tato nerovnost vymezuje maximální obsah plochy ohraničené jednoduchou uzavřenou křivkou o dané délce, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když je křivkou kružnice. Formulace této nerovnosti je řešením izoperimetrické úlohy, která hledá křivku dané délky maximalizující obsah.

Abychom dokázali izoperimetrickou nerovnost, musíme nejprve definovat některé pojmy týkající se křivek, ale zapotřebí je zmínit i vzorec pro výpočet obsahu oblasti vymezené uzavřenou křivkou, který je klíčovou součástí izoperimetrické úlohy. Nejprve tedy zavedeme a zformulujeme potřebné definice a věty, a pak s tímto aparátem dokážeme izoperimetrickou nerovnost.

V závěru kapitoly se pak budeme věnovat důkazu související úlohy, a to izodiametrické nerovnosti, kde opět figuruje délka křivky, tentokrát ovšem v souvislosti s průměrem uzavřené křivky. I pro tento důkaz využijeme teorii Fourierových řad.

1.1 Křivka

V práci se budeme zabývat jen křivkami v rovině.

Definice 1. *Spojitě diferencovatelné zobrazení $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se nazývá **parametrizovaná křivka**.*

Definice 2. *Řekneme, že parametrizovaná křivka $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ je **uzavřená**, platí-li $\gamma(a) = \gamma(b)$. Dále řekneme, že taková parametrizovaná křivka je **jednoduchá**, platí-li*

$$\forall t_1, t_2 \in (a,b], t_1 \neq t_2 : \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2).$$

Později budeme využívat periodické rozšíření funkce γ na \mathbb{R} s periodou $b - a$.

Definice 3. *Parametrizovaná křivka $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ je **regulární** pro $t_0 \in [a,b]$, pokud $\gamma'(t_0) \neq 0$.*

Tyto požadavky budeme klást na křivky, pro které budeme později dokazovat izoperimetrickou nerovnost. Dále je ale nutné ukázat, jak souvisí koncept křivky s její parametrizací.

Definice 4. *Parametrizované křivky $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $\eta : [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jsou **ekvivalentní** (značíme $\gamma \sim \eta$), pokud existuje difeomorfismus $f : [a,b] \rightarrow [c,d]$ takový, že pro každé $t \in [a,b]$ platí $\gamma(t) = \eta(f(t))$.*

Pojem křivka tedy odkazuje na třídu ekvivalence s tím, že pro každou křivku existuje nekonečně mnoho parametrizací. Někdy ale tímto pojmem myslíme přímo konkrétní parametrizaci, někdy zase obraz křivky, z kontextu by mělo být jasné, s jakým konceptem zrovna pracujeme. Specifickým typem parametrizace je parametrizace křivky obloukem.

Definice 5. *Parametrizovaná křivka $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ je **parametrizovaná obloukem**, pokud pro všechna $s \in [a,b]$ platí $\|\gamma'(s)\| = 1$.*

Následující věta se týká existence parametrizace obloukem. Zde ji uvedeme bez důkazu. Důkaz nalezneme např. v knize Tapp (2016, Proposition 1.25).

Věta 1. *Ke každé regulární křivce $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ existuje křivka $\eta : [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^2$, která je parametrizovaná obloukem, $\gamma \sim \eta$ a γ, η mají stejnou orientaci.*

Pojem orientace souvisí s difeomorfismem f , který musí existovat, jsou-li křivky γ a η ekvivalentní. Pokud $f'(s) > 0$ pro všechna s , pak γ a η mají stejnou orientaci. Opačnou orientaci mají, pokud $f'(s) < 0$ pro všechna s .

Nyní si připomeneme vzorec pro výpočet délky křivky, který je ústředním pojmem izoperimetrické nerovnosti. Důkaz viz Abate a Tovena (2012, Theorem 1.2.7).

Věta 2. *Nechť $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ je parametrizovaná křivka. Potom je délka křivky γ rovna určitému integrálu:*

$$\ell = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Má-li křivka γ parametrizaci $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, potom vzorec pro délku γ můžeme psát takto:

$$\ell = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Je-li křivka parametrizovaná obloukem, její délka se rovná délce intervalu, na kterém je tato parametrizace definována, tedy $b - a$.

1.2 Vzorec pro výpočet obsahu plochy vymezené uzavřenou křivkou

Zadáním izoperimetrické úlohy je najít jednoduchou uzavřenou křivku dané délky maximalizující obsah jí vymezený. K tomu tedy samozřejmě potřebujeme znát vzorec pro výpočet obsahu rovinné oblasti, která je vnitřkem uzavřené křivky.

Jedním ze způsobů, jak odvodit tento vzorec, je limitní přechod ze vzorce pro výpočet obsahu mnohoúhelníku. Vzorce pro výpočet obsahu mnohoúhelníku a z něj plynoucí vzorec pro výpočet obsahu plochy vymezené uzavřenou křivkou (věty 3 a 4) uvádíme bez důkazu, nalézt je ale můžeme např. v článku Braden (1986).

Věta 3. *Nechť hranice jednoduchého n -úhelníku je při kladné orientaci tvořena body $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Položme $x_{n+1} = x_1$, $y_{n+1} = y_1$. Potom je obsah n -úhelníku roven:*

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1}).$$

Pro výpočet obsahu rovinné oblasti vymezené uzavřenou křivkou můžeme tuto křivku aproximovat právě n -úhelníkem. Limitním přechodem se z jeho obsahu dostaneme právě na obsah oblasti vymezené danou křivkou.

Věta 4. *Nechť A je obsah plochy vymezené jednoduchou uzavřenou kladně orientovanou křivkou s parametrizací $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Potom platí:*

$$A = - \int_a^b x'(t)y(t) dt = \int_a^b x(t)y'(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt. \quad (1.1)$$

První rovnost plyne právě z limitního přechodu aplikovaného na vzorec pro obsah n -úhelníku. Druhý integrál dává obsah té samé křivky, jen otočené o 90° (rovnost se dá nahlédnout i integrací per partes). Poslední integrál je pouze aritmetickým průměrem dvou předchozích. Právě tento vzorec využijeme pro důkaz izoperimetrické nerovnosti.

1.3 Parsevalova rovnost

Než se budeme věnovat přímo izoperimetrické nerovnosti, musíme prezentovat několik tvrzení týkajících se Fourierových řad. V prvním případě se jedná o dobře známou Parsevalovu rovnost, jejíž důkaz se dá najít v řadě publikací, např. viz Stein (2003, kapitola 3, Theorem 1.3). Zde ji tedy dokazovat nebudeme. Dále ale budeme potřebovat tzv. bilineární variantu Parsevalovy rovnosti, která je méně známá a kterou dokážeme. Nakonec ještě dokážeme tvrzení týkající se Fourierových koeficientů funkce f' .

Věta 5 (Parsevalova rovnost). *Nechť $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce, která je prvkem prostoru $L^2([0, 2\pi])$. Budte c_n komplexní Fourierovy koeficienty funkce f . Potom platí:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Tzv. bilineární varianta Parsevalovy rovnosti je obvykle formulována pro komplexní funkce, viz Stein (2003, kapitola 3, Lemma 1.5). Nám ovšem postačí ve verzi pro reálné funkce.

Věta 6. *Nechť $f, g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce z prostoru $L^2([0, 2\pi])$, jejichž Fourierovy řady jsou po řadě $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{inx}$. Potom*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Důkaz. Nejprve musíme dokázat, že suma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}$ konverguje. Dokážeme, že suma konverguje absolutně.

Víme, že pro funkce f a g platí Parsevalova rovnost, a tedy sumy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \quad \text{a} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2$$

jsou konvergentní. Pak platí:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n \overline{b_n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| |b_n| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2,$$

přičemž nerovnost vychází z Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti pro prostor posloupností ℓ^2 . Obě sumy na pravé straně konvergují, a tedy i suma na levé straně musí konvergovat.

Pro součin funkcí f a g platí:

$$f \cdot g = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2).$$

Potom tedy díky Parsevalově rovnosti platí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot g &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n + b_n|^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + b_n)(\overline{a_n + b_n}) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\overline{a_n} b_n + a_n \overline{b_n}) \right) \end{aligned}$$

Jelikož jsou funkce f a g reálné, platí, že $a_n = \overline{a_{-n}}$ a $b_n = \overline{b_{-n}}$ (lze snadno ověřit ze vzorce pro komplexní Fourierovy koeficienty). S využitím těchto vlastností dostaneme

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

□

Ještě zbývá ukázat tvrzení týkající se Fourierových koeficientů v případě, že hledáme Fourierovu řadu derivace funkce f .

Věta 7. *Nechť \hat{f}_n je n -tý Fourierův koeficient spojitě diferencovatelné funkce f . Pro Fourierovy koeficienty funkce f' platí:*

$$\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n).$$

Důkaz. Důkaz je snadný. Vzorec pro n -tý Fourierův koeficient funkce f' je

$$\hat{f}'(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt.$$

Tento integrál můžeme vypočítat metodou per partes, přičemž $f'(t)$ budeme integrovat a e^{-int} derivovat. Dostáváme

$$\hat{f}'(n) = \frac{1}{2\pi} \left([f(t) e^{-int}]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(t) (-in) e^{-int} dt \right) = in\hat{f}(n).$$

□

Nyní máme konečně všechny nástroje potřebné k dokázání izoperimetrické nerovnosti.

1.4 Izoperimetrická nerovnost

Formulace izoperimetrické nerovnosti i její důkaz v této práci následuje způsobem, kterým je prezentuje Stein (2003, kapitola 4, Theorem 1.1).

Věta 8 (Izoperimetrická nerovnost). *Nechť C je jednoduchá uzavřená rovinná křivka délky ℓ . Označme $|A|$ obsah rovinné oblasti vymezené touto křivkou. Pak*

$$|A| \leq \frac{\ell^2}{4\pi},$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, je-li C kružnice.

Důkaz. Nejprve celou větu dokážeme pro křivky, jejichž délka je rovna 2π . V tomto případě tedy musíme dokázat tvrzení ve tvaru: $|A| \leq \pi$, přičemž rovnost nastává, je-li tato křivka kružnicí.

Vezměme tedy libovolnou jednoduchou uzavřenou křivku C s parametrizací $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, r(s) = (x(s), y(s))$, přičemž C je parametrizována obloukem, tj. $\|r'(s)\| = 1$ pro všechna $s \in [0, 2\pi]$. Pak platí:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x'(s)^2 + y'(s)^2) ds = 1. \quad (1.2)$$

Jelikož je křivka C uzavřená, můžeme funkce $x(s)$ a $y(s)$ periodicky rozšířit na celou reálnou osu s periodou 2π . Potom můžeme uvažovat Fourierovy řady funkcí $x(s)$ a $y(s)$,

$$x(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ins}, \quad y(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{ins}.$$

Díky větě 7 víme, že Fourierovy řady funkcí x' a y' vypadají následovně:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n i n e^{ins}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n i n e^{ins}.$$

Nyní aplikujeme Parsevalovu rovnost na integrál ve vztahu (1.2).

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x'(s)^2 + y'(s)^2) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x'(s)|^2 ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |y'(s)|^2 ds = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n i n|^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n i n|^2 = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^2| (|a_n|^2 + |b_n|^2) \end{aligned}$$

Pro přehlednost uvedeme výsledek zvlášť.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^2| (|a_n|^2 + |b_n|^2) = 1 \quad (1.3)$$

Nyní aplikujeme bilineární variantu Parsevalovy rovnosti na vzorec udávající obsah plochy $|A|$ vymezené křivkou C .

$$\begin{aligned}
|A| &= \frac{1}{2} \left| \int_a^b (x(s)y'(s) - y(s)x'(s)) ds \right| = \pi \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n} i n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \overline{a_n} i n \right| = \\
&= \pi \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(a_n \overline{b_n} - b_n \overline{a_n}) \right|
\end{aligned}$$

Odhadneme shora členy výsledné sumy. V prvním kroku využijeme trojúhelníkovou nerovnost.

$$|(a_n \overline{b_n} - b_n \overline{a_n})| \leq |a_n| |b_n| + |a_n| |b_n| = 2 |a_n| |b_n| \leq |a_n|^2 + |b_n|^2$$

Poslední nerovnost plyne ze skutečnosti, že $0 \leq (|a_n| - |b_n|)^2$.

Díky tomuto odhadu a faktu, že $|n| \leq |n|^2$, můžeme odhadnout shora celý obsah plochy $|A|$.

$$|A| \leq \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

Tato suma se ale podle vztahu (1.3) rovná 1. A tak tedy platí požadovaná nerovnost

$$|A| \leq \pi.$$

Zbývá dokázat, že rovnost nastává právě v případě, že křivkou je kružnice.

Má-li nastat rovnost, musí stejně tak všechny předchozí nerovnosti být rovnostmi. Jednou z nich je rovnost $|n| = |n|^2$. Ta platí jen pro $n \in \{-1, 0, 1\}$. Pro všechna ostatní n bude tedy $a_n, b_n = 0$. Máme tedy:

$$x(s) = a_{-1} e^{-is} + a_0 + a_1 e^{is},$$

$$y(s) = b_{-1} e^{-is} + b_0 + b_1 e^{is}.$$

Jelikož x a y jsou reálné funkce, platí, jak již bylo řečeno, že $a_{-1} = \overline{a_1}, b_{-1} = \overline{b_1}$, a proto tedy po aplikaci vztahu (1.3) dostaneme následující:

$$1 = |-1|(|a_1|^2 + |b_1|^2) + |0|(|a_0|^2 + |b_0|^2) + |1|(|a_1|^2 + |b_1|^2) = 2(|a_1|^2 + |b_1|^2),$$

a tedy

$$|a_1|^2 + |b_1|^2 = \frac{1}{2}.$$

Zároveň chceme, aby platily rovnosti i zde:

$$|(a_n \overline{b_n} - b_n \overline{a_n})| = 2 |a_n| |b_n| = |a_n|^2 + |b_n|^2. \quad (1.4)$$

Využijme druhou rovnost pro nalezení $|a_1|, |b_1|$. Máme pak dvě rovnice o dvou neznámých, $|a_1|, |b_1|$.

Počítejme.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= 2|a_1||b_1| \\ \frac{1}{4|a_1|} &= |b_1|\end{aligned}\tag{1.5}$$

Nyní dosadíme do rovnosti (1.5):

$$\begin{aligned}|a_1|^2 + \frac{1}{16|a_1|^2} &= \frac{1}{2} \\ \frac{16|a_1|^4 + 1 - 8|a_1|^2}{16|a_1|^2} &= 0 \\ (4|a_1|^2 - 1)^2 &= 0\end{aligned}$$

$$(2|a_1| - 1)^2(2|a_1| + 1)^2 = 0$$

Dostáváme jediné řešení $|a_1| = \frac{1}{2}$ a dosazením dostáváme také $|b_1| = \frac{1}{2}$. Když známe absolutní hodnotu koeficientů a_1 a b_1 , můžeme je psát v tomto tvaru:

$$a_1 = \frac{1}{2}e^{i\alpha}, b_1 = \frac{1}{2}e^{i\beta}.$$

Využijeme všechny vztahy dohromady, a v tomto tvaru koeficienty dosadíme konkrétně do krajního levého výrazu v (1.4).

$$\begin{aligned}1 = 2(|a_1|^2 + |b_1|^2) &= 2|(a_1\bar{b}_1 - b_1\bar{a}_1)| = 2\left|\frac{1}{2}e^{i\alpha}\frac{1}{2}e^{-i\beta} - \frac{1}{2}e^{i\beta}\frac{1}{2}e^{-i\alpha}\right| = \\ &= \left|\frac{1}{2}e^{i(\alpha-\beta)} - \frac{1}{2}e^{-i(\alpha-\beta)}\right| = \\ &= |i|\sin(\alpha - \beta)\end{aligned}$$

Dostali jsme tedy, že

$$|\sin(\alpha - \beta)| = 1.$$

Potom pro úhly platí:

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\tag{1.6}$$

Nyní už můžeme vyjádřit složky parametrizace křivky, pro kterou platí izoperimetrická rovnost.

$$\begin{aligned}x(s) = \bar{a}_1e^{-is} + a_0 + a_1e^{is} &= \frac{1}{2}e^{-i\alpha}e^{-is} + a_0 + \frac{1}{2}e^{i\alpha}e^{is} = a_0 + \frac{1}{2}e^{i(\alpha+s)} + \frac{1}{2}e^{-i(\alpha+s)} = \\ &= a_0 + \cos(\alpha + s).\end{aligned}$$

Pro $y(s)$ pak platí:

$$y(s) = \overline{b_1}e^{-is} + b_0 + b_1e^{is} = b_0 + \frac{1}{2}e^{i(\beta+s)} + \frac{1}{2}e^{-i(\beta+s)} = b_0 + \cos(\beta + s).$$

Výraz v argumentu kosinu ovšem můžeme upravit pomocí získaného vztahu pro α a β (1.6):

$$b_0 + \cos(\beta + s) = b_0 + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - k\pi + s\right) = b_0 \pm \sin(\alpha + s),$$

přičemž znaménko před sinem závisí na tom, je-li k sudé nebo liché číslo. Nicméně v obou případech se jedná o parametrizaci kružnice se středem v bodě $[a_0, b_0]$ s orientací buďto proti nebo po směru hodinových ručiček. Tím je věta dokázána pro všechny křivky délky 2π .

Teď nezbývá než ukázat, že věta platí i pro křivky libovolné délky ℓ . Stačí totiž upravit měřítko pomocí stejnoledlosti s koeficientem $\delta > 0$. Uvažujme tedy zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 , $(x, y) \mapsto (\delta x, \delta y)$. Co se týče délky křivky, oproti původní délce ℓ bude délka obrazu křivky ℓ_δ rovná $\delta\ell$, neboť

$$\ell_\delta = \int_a^b \sqrt{((\delta x)'(s))^2 + ((\delta y)'(s))^2} ds = \delta \int_a^b \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} ds = \delta\ell.$$

Pro obsah plochy vymezené křivkou platí následující:

$$\begin{aligned} |A_\delta| &= \frac{1}{2} \left| \int_a^b (\delta x(s)(\delta y)'(s) - \delta y(s)(\delta x)'(s)) ds \right| = \\ &= \delta^2 \frac{1}{2} \left| \int_a^b (x(s)y'(s) - y(s)x'(s)) ds \right| = \delta^2 |A|. \end{aligned}$$

Vezmeme-li tedy $\delta = \frac{2\pi}{\ell}$, pak v novém měřítku budou mít všechny zkoumané křivky délku 2π . Podle předchozí části důkazu platí

$$|A_\delta| \leq \frac{\ell_\delta^2}{4\pi},$$

a tudíž

$$|A| \leq \frac{\ell^2}{4\pi}.$$

□

1.5 Izodiametrická nerovnost

Další nerovností týkající se uzavřených křivek, kde můžeme využít poznatky z teorie Fourierových řad, je izodiametrická nerovnost. Maximalizovanou veličinou je zde naopak délka křivky, přičemž v její horní hranici tentokrát figuruje její průměr. Ten definujeme následovně.

Definice 6. *Průměrem* d jednoduché uzavřené křivky C s parametrizací $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ rozumíme

$$d = \sup_{P, Q \in C} |P - Q| = \sup_{t_1, t_2 \in [a, b]} |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|.$$

Izodiametrická nerovnost je v publikaci Stein (2003, kapitola 4, Problem 6.1) uváděna jako platná pro všechny jednoduché uzavřené křivky, které jsou konvexní. V této práci si uvedeme důkaz pro užší okruh křivek, a to pro křivky, jejichž úhlové zobrazení je rostoucí. Mezi pojmem úhlového zobrazení a konvexitou totiž existuje úzký vztah. Následující věta zaručuje existenci úhlového zobrazení pro každou regulární rovinnou křivku. Důkaz viz Tapp (2016, Proposition 1.39).

Věta 9. *Nechť $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ je parametrizace obloukem křivky C . Potom existuje spojitě diferencovatelné zobrazení, které nazýváme **úhlové zobrazení**, $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, přičemž pro všechna $t \in [a, b]$ platí:*

$$\gamma'(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

Zobrazení θ je určeno jednoznačně až na přičtení celočíselného násobku 2π .

Úhlové zobrazení tedy udává velikost úhlu, který svírá tečna ke křivce C v bodě t s osou x . Dále platí, že derivace úhlového zobrazení v bodě t je rovna křivosti křivky C v bodě t (Tapp, 2016, rovnost (1.12)). Zavedení pojmu křivost je poněkud zdoluhavé a nesouvisí s izodiametrickou nerovností tak, jak ji uvedeme. Můžeme však alespoň naznačit souvislost konvexity a rostoucího úhlového zobrazení. Křivost totiž úzce souvisí s konvexitou, jelikož uzavřená jednoduchá křivka je konvexní právě tehdy, nemění-li její křivost znaménko, tedy v případě, že je buď nezáporná, nebo nekladná na celém definičním oboru (Tapp, 2016, Proposition 2.12). Pro účely této práce nebudeme pro izodiametrickou nerovnost klást na křivky požadavek konvexity, ale rostoucího úhlového zobrazení. Je-li úhlové zobrazení křivky C rostoucí, jeho derivace je kladná, a tedy i křivost je kladná. To znamená, že budeme pracovat s konvexními křivkami, ale vynecháme ty konvexní křivky, jejichž části jsou úsečky, tedy křivky, jejichž křivost je někde rovna nule.

Věta 10 (Izodiametrická nerovnost). *Nechť C je jednoduchá uzavřená křivka s parametrizací*

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [-\pi, \pi],$$

jejíž úhlové zobrazení $\theta : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ je rostoucí. Označme délku křivky ℓ a její průměr d . Potom platí:

$$\ell \leq \pi d.$$

Důkaz. Důkaz je inspirován postupem uživatele internetového fóra Mathematics Stack Exchange (mboratko). V tomto důkazu budeme s křivkou pracovat v komplexní rovině namísto \mathbb{R}^2 . Parametrizací křivky C pak bude komplexní funkce $\gamma(t) = x(t) + iy(t), t \in [-\pi, \pi]$. Dále budeme uvažovat komplexní Fourierovu řadu této funkce. Nejprve dokážeme, že pro n -tý koeficient této Fourierovy řady a_n platí

$$2|a_n| \leq d, n \neq 0.$$

Vzorec pro a_n je následovný:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(t) e^{-int} dt.$$

Nyní provedme substituci $t = u + \frac{\pi}{n}$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi - \frac{\pi}{n}}^{\pi - \frac{\pi}{n}} \gamma\left(u + \frac{\pi}{n}\right) e^{-in\left(u + \frac{\pi}{n}\right)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi - \frac{\pi}{n}}^{\pi - \frac{\pi}{n}} \gamma\left(u + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inu} e^{-i\pi} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi - \frac{\pi}{n}}^{\pi - \frac{\pi}{n}} \gamma\left(u + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inu} (-1) dx \end{aligned}$$

Vzhledem k periodicitě integrandu lze ale posunout integrační meze o $\frac{\pi}{n}$, což dává:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(t) e^{-int} dt = a_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma\left(t + \frac{\pi}{n}\right) e^{-int} dt,$$

a tedy

$$2a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\gamma(t) - \gamma\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right) e^{-int} dt.$$

Tuto rovnost už ale můžeme použitím absolutní hodnoty vztáhnout právě k průměru křivky C . Dostáváme

$$\begin{aligned} 2|a_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(\gamma(t) - \gamma\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right) e^{-int} \right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \gamma(t) - \gamma\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d dt = d, \end{aligned}$$

jelikož d je supremem předposledního integrandu.

Dále budeme pracovat s derivací parametrizace křivky C . Podmínka kladená na křivky, se kterými pracujeme, je, že mají rostoucí úhlové zobrazení. Úhlové zobrazení θ udává úhel, který tečna ke křivce svírá s osou x . Ten musí díky kladné derivaci neustále růst a křivku tedy lze parametrizovat pomocí proměnné $t \in [-\pi, \pi]$, kde t je právě úhel, který svírá tečna s kladnou poloosou x . Funkce γ' pak může být zadána v následujícím tvaru:

$$\gamma'(t) = e^{it} z(t),$$

kde $z(t)$ je nezáporné reálné číslo. Uvažujme o derivaci jako o vektoru tečny (ztotožňujeme komplexní čísla a vektory v rovině). Tento zápis nám dává goniometrický tvar komplexního čísla, kde $z(t)$ reprezentuje délku vektoru, tedy vzdálenost komplexního čísla od počátku, a člen e^{it} odpovídá tomu, že úhel, který svírá vektor derivace s kladnou poloosou x , je roven t .

Máme tedy vyjádření derivace parametrizace křivky C , tj. funkci γ' . I z něj ale dokážeme získat informace o Fourierových koeficientech samotné γ . Pro Fourierovy koeficienty derivace funkce f , $\hat{f}'(n)$, platí díky větě 7:

$$\widehat{f}'(n) = in\widehat{f}(n).$$

Nyní počítejme první Fourierův koeficient funkce γ' , $\widehat{\gamma}'(1)$.

$$\widehat{\gamma}'(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} z(t) e^{-it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(t) dt$$

Jelikož ale díky předchozímu tvrzení můžeme $\widehat{\gamma}'(1)$ vyjádřit pomocí a_1 (první Fourierův koeficient funkce γ), platí, že

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(t) dt = ia_1,$$

přičemž ia_1 získáváme jako určitý integrál nezáporné reálné funkce, což znamená, že ia_1 je nezáporné reálné číslo. Pomocí zmíněného integrálu už ale dokážeme spočítat délku křivky C , čímž se dostáváme k samému závěru důkazu izodiametrické nerovnosti.

$$\ell = \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{it} z(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} z(t) dt = 2\pi ia_1 = 2\pi |ia_1| = 2\pi |a_1| \leq \pi d.$$

□

Je zřejmé, že izodiametrická nerovnost přechází v rovnost, je-li křivkou kružnice. Ta ale není jedinou křivkou s touto vlastností. Např. z Barbierovy věty plyne, že rovnost nastává pro každou křivku s konstantní křivostí. Nejjednodušší takovou křivkou, která není kružnicí, je Reuleauxův trojúhelník.

2. Ekvidistribuční věta

Další úlohou, kde můžeme využít poznatky teorie Fourierových řad, je studium neceločíselných částí čísel $n\gamma$, kde n probíhá přirozená čísla a γ je pevně zvolené reálné číslo. Dokazovaným výsledkem této kapitoly bude věta popisující rozdělení neceločíselných částí čísel $n\gamma$ v rámci intervalu $[0,1)$, neboli tzv. ekvidistribuční věta. Vedle toho se budeme zabývat některými konkrétními příklady. Nejprve ale zdefinujeme potřebné pojmy.

2.1 Neceločíselná část čísla

Definice 7. *Nechť $x \in \mathbb{R}$. Celou částí x značenou $[x]$ budeme rozumět celé číslo $n \in \mathbb{Z}$, pro které platí:*

$$n \leq x < n + 1.$$

Pomocí celé části čísla už můžeme definovat právě neceločíselnou část čísla, se kterou budeme dále pracovat.

Definice 8. *Nechť $x \in \mathbb{R}$. Neceločíselnou část x značenou $\langle x \rangle$ definujeme jako*

$$\langle x \rangle = x - [x].$$

Nyní vezměme reálné číslo $\gamma \neq 0$. Předmětem našeho zájmu bude posloupnost neceločíselných částí $n\gamma$, tedy

$$\{\langle n\gamma \rangle\}_{n=1}^{\infty}.$$

V případě, že $\gamma \in \mathbb{Z}$, je tato posloupnost konstantně nulová. Platí-li $\gamma = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pak má posloupnost členy

$$\left\{ \left\langle \frac{np}{q} \right\rangle \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\langle \frac{p}{q} \right\rangle, \left\langle \frac{2p}{q} \right\rangle, \dots, \left\langle \frac{(q-1)p}{q} \right\rangle, \left\langle \frac{qp}{q} \right\rangle, \dots \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

z čehož je zřejmé, že od jistého momentu se členy posloupnosti začnou opakovat, neboť platí, že

$$\left\langle \frac{(q+k)p}{q} \right\rangle = \left\langle p + k\frac{p}{q} \right\rangle = \left\langle k\frac{p}{q} \right\rangle,$$

a posloupnost je tedy periodická s periodou q .

Nejzajímavější je tedy případ, kdy za γ bereme iracionální číslo. Potom je posloupnost prostá. Kdybychom totiž předpokládali, že existují nějaká $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že $\langle n_1\gamma \rangle = \langle n_2\gamma \rangle$, pak by muselo platit, že $(n_1\gamma - n_2\gamma) \in \mathbb{Z}$, a tedy že $\gamma \in \mathbb{Q}$, což je spor.

Víme tedy, že je-li γ iracionální, $\langle n\gamma \rangle$ dává pro každé n jiné číslo z intervalu $[0,1)$. Otázka, jak bude vypadat rozdělení hodnot této posloupnosti na intervalu $[0,1)$, je ústředním tématem této kapitoly. Budeme totiž dokazovat, že tyto hodnoty jsou v intervalu $[0,1)$ rozděleny naprosto rovnoměrně, konkrétně, že v něm jsou ekvidistribuovány (Stein, 2003, kapitola 4).

2.2 Ekvidistribuívanost

Definice 9. Řekneme, že posloupnost $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$, jejíž členy jsou reálná čísla z intervalu $[0,1)$, je **ekvidistribuívaná**, pokud pro každý interval $(a,b) \subset [0,1)$ platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a,b)\}}{N} = b - a,$$

kde $\#A$ označuje počet prvků konečné množiny A .

Můžeme také říct, že posloupnost $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ je ekvidistribuívaná na $[0,1)$ právě tehdy, pokud pro velká N platí, že se poměr počtu členů ξ_n nacházejících se v intervalu (a,b) ku celkovému počtu členů N rovná poměru délky intervalu (a,b) ku délce intervalu $[0,1)$. Posloupnost $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ tedy obsáhne celý interval $[0,1)$, přičemž každý jeho podinterval je rovnoměrně zastoupen.

Příklad. Ekvidistribuívanou posloupností je například posloupnost obsahující zlomky ve tvaru $\frac{i}{j}$, kde $i = 0,1,2, \dots, j-1$ a $j = 2,3,4, \dots$, přičemž prvními členy jsou zlomky s jmenovatelem $j = 2$, které jdou za sebou s rostoucím čitatelem $i = 0,1$. Dále následují zlomky se jmenovatelem $j = 3$ seřazené podle rostoucího čitatele $i = 0,1,2$. Posloupnost pokračuje analogicky pro všechna další j , a vpadá tedy následovně:

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots$$

Tato posloupnost rovnoměrně pokrývá celý interval $[0,1)$. S rostoucím n dostáváme jeho čím dál tím hustější rovnoměrné dělení. Přesto musíme tvrzení, že tato posloupnost je ekvidistribuívaná na $[0,1)$, důsledně dokázat. Důkaz je inspirován postupem uživatele internetového fóra Mathematics Stack Exchange (Scott, 2016).

Nejprve označíme F_j skupiny zlomků tvořící naši posloupnost $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$.

$$F_j = \left\{ \frac{i}{j} : i = 0, 1, \dots, j-1 \right\}, j \geq 2.$$

Tedy $F_2 = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$, $F_3 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$, atd.

F_j rozděluje interval $[0,1)$ na j intervalů délky $\frac{1}{j}$. Pro každé $a, b \in [0,1)$, $a < b$, můžeme najít čísla $k_1, l_1 \in \{0, 1, \dots, j-1\}$, pro které platí:

$$\frac{k_1}{j} \leq a < \frac{k_1 + 1}{j}; \quad \frac{l_1}{j} < b \leq \frac{l_1 + 1}{j}.$$

$\frac{k_1+1}{j}$ a $\frac{l_1}{j}$ jsou tedy prvky množiny F_j uvnitř intervalu (a,b) , které mají od jeho krajních bodů nejmenší vzdálenost. Vně intervalu (a,b) leží čísla $\frac{k_1}{j}$ a $\frac{l_1+1}{j}$, přičemž $\frac{l_1+1}{j}$ nemusí být prvek množiny F_j , neboť nejbližší zlomek se jmenovatelem j vpravo od b může být roven $\frac{j}{j} = 1$, který už nepatří do množiny F_j . Pro počet prvků množiny F_j uvnitř intervalu (a,b) pak platí:

$$\#\{(a,b) \cap F_j\} = l_1 + 1 - k_1 - 1 \geq jb - ja - 1 = j(b - a) - 1,$$

přičemž nerovnost vyplývá z vlastností k_1 a l_1 uvedených výše.

Co se týče posloupnosti ξ_n , pro niž dokazujeme ekvidistribuovanost, její první dva členy jsou prvky F_2 , následující tři členy jsou prvky F_3 atd. Množiny F_2, F_3 až F_j tedy v tomto pořadí dávají prvních $\frac{1}{2}j(j+1) - 1$ členů posloupnosti ξ_n , neboť

$$\sum_{i=2}^j i = \frac{1}{2}j(j+1) - 1.$$

Označme $T_j = \frac{1}{2}j(j+1) - 1$, $j \geq 2$. Pro každé $N \in \mathbb{N}$ existuje $m_1 \geq 2$ takové, že $T_{m_1} \leq N < T_{m_1+1}$, neboli pro N -tý člen posloupnosti $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ je nejbližší ukončená skupina F_{m_1} . Potom platí:

$$\begin{aligned} \#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a,b)\} &\geq \sum_{j=2}^{m_1} \#\{(a,b) \cap F_j\} \geq \sum_{j=2}^{m_1} (j(b-a) - 1) = \\ &= \sum_{j=2}^{m_1} j(b-a) - m_1 + 1 = T_{m_1}(b-a) - m_1 + 1. \end{aligned}$$

Tedy:

$$\frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a,b)\}}{N} \geq (b-a) \frac{T_{m_1}}{N} - \frac{m_1 - 1}{N}. \quad (2.1)$$

Co se děje s pravou stranou nerovnosti pro N jdoucí k nekonečnu? První člen se blíží k $b - a$, neboť

$$\begin{aligned} \frac{T_{m_1}}{T_{m_1+1}} &< \frac{T_{m_1}}{N} \leq \frac{T_{m_1}}{T_{m_1}}, \\ \frac{\frac{1}{2}m_1(m_1+1) - 1}{\frac{1}{2}(m_1+1)(m_1+2) - 1} &< \frac{T_{m_1}}{N} \leq 1. \end{aligned}$$

Pro $m_1 \rightarrow \infty$, a tedy $N \rightarrow \infty$ se levá a pravá strana blíží jedné, a tedy i $\frac{T_{m_1}}{N}$ jde k jedné.

Druhý člen pravé strany nerovnosti (2.1) se pro $m_1 \rightarrow \infty$, a tedy $N \rightarrow \infty$ blíží k nule, jelikož platí

$$\begin{aligned} \frac{m_1 - 1}{T_{m_1+1}} &< \frac{m_1 - 1}{N} \leq \frac{m_1 - 1}{T_{m_1}}, \\ \frac{m_1 - 1}{\frac{1}{2}(m_1+1)(m_1+2) - 1} &< \frac{m_1 - 1}{N} \leq \frac{m_1 - 1}{\frac{1}{2}m_1(m_1+1) - 1}, \end{aligned}$$

přičemž levá a pravá strana se blíží nule.

Víme tedy, že limita výrazu na pravé straně nerovnosti (2.1) je rovna $b - a$.

Nyní se ale zaměříme na uzavřený interval $[a,b] \subset [0,1)$. Pro $[a,b]$ nalezneme čísla $k_2, l_2 \in \{0, 1, \dots, j-1\}$, pro která platí:

$$\frac{k_2}{j} < a \leq \frac{k_2 + 1}{j}; \quad \frac{l_2}{j} \leq b < \frac{l_2 + 1}{j},$$

a tedy

$$\#\{[a,b] \cap F_j\} = l_2 - (k_2 + 1) + 1 \leq jb - ja + 1 = j(b - a) + 1.$$

Znovu označme $T_j = \frac{1}{2}j(j + 1) - 1$, $j \geq 2$ a předpokládejme, že $T_{m_2-1} < N \leq T_{m_2}$, pro $m_2 \geq 2$, neboli, že pro N -tý člen posloupnosti ξ_n je nejbližší ukončená skupina, jejíž poslední člen je ostře menší než ξ_N , právě T_{m_2-1} . Potom platí:

$$\begin{aligned} \#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in [a,b]\} &\leq \sum_{j=2}^{m_2} \#\{[a,b] \cap F_j\} \leq \sum_{j=2}^{m_2} (j(b - a) + 1) = \\ &= \sum_{j=2}^{m_2} j(b - a) + m_2 - 1 = T_{m_2}(b - a) + m_2 - 1. \end{aligned}$$

Tedy:

$$(b - a) \frac{T_{m_2}}{N} + \frac{m_2 - 1}{N} \geq \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in [a,b]\}}{N}, \quad (2.2)$$

přičemž pro $N \rightarrow \infty$ se levá strana také blíží hodnotě $b - a$. Pro člen $\frac{T_{m_2}}{N}$ totiž platí následující:

$$\frac{T_{m_2}}{T_{m_2}} \leq \frac{T_{m_2}}{N} < \frac{T_{m_2}}{T_{m_2-1}},$$

neboli

$$1 \leq \frac{T_{m_2}}{N} < \frac{\frac{1}{2}m_2(m_2 + 1) - 1}{\frac{1}{2}(m_2 - 1)m_2 - 1},$$

a tedy pro $N \rightarrow \infty$ se $\frac{T_{m_2}}{N}$ blíží k jedné. Druhý člen v levé straně nerovnosti (2.2) se zase blíží k nule, neboť se liší pouze znaménkem oproti členu nacházejícímu se v nerovnosti (2.1), jehož limitu jsme již našli.

Nyní můžeme nerovnosti (2.1) a (2.2) spojit, neboť platí, že

$$\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in [a,b]\} \geq \#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a,b)\},$$

a tedy

$$\begin{aligned} (b - a) \frac{T_{m_2}}{N} + \frac{m_2 - 1}{N} &\geq \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in [a,b]\}}{N} \geq \\ &\geq \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a,b)\}}{N} \geq (b - a) \frac{T_{m_1}}{N} - \frac{m_1 - 1}{N}. \end{aligned}$$

Jelikož se limity krajních výrazů v nerovnosti rovnají, podle věty o dvou strážnících tak existují i limity výrazů uprostřed a pro $a, b \in [0,1)$ platí:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in [a,b]\}}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a,b)\}}{N} = b - a,$$

čímž je dokázáno, že posloupnost $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ekvidistribuovaná na $[0,1)$.

Příklad. Necht $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je jakákoliv posloupnost všech racionálních čísel na $[0,1)$. Definujme posloupnost ξ_n následovně:

$$\xi_n = \begin{cases} r_{n/2} & \text{pro sudá } n, \\ 0 & \text{pro lichá } n. \end{cases}$$

Zajímá nás, jestli je tato posloupnost ekvidistribuovaná na $[0,1)$. Vezměme například nějaký interval $(a,b) \subset (0,1)$ jehož délka je větší nebo rovna $\frac{1}{2}$. Celá půlka členů posloupnosti ξ_n je ale rovna 0, a tak pro

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a,b)\}}{N}$$

platí, že je ostře menší než délka intervalu (a,b) , a posloupnost tak není ekvidistribuovaná. Ve srovnání s předchozím příkladem je zkoumaná posloupnost také posloupností racionálních čísel z intervalu $[0,1)$, kde výskyt 0 je nekonečný, ale její uspořádání je odlišné, což má tedy zásadní vliv na to, zdali je, nebo není posloupnost ekvidistribuovaná.

2.3 Ekvidistribuční věta

Klíčové tvrzení této kapitoly se ale týká posloupnosti, kterou jsme definovali na začátku, tedy posloupnosti neceločíselných částí čísla $n\gamma$, kde γ je iracionální číslo. Formulace tzv. ekvidistribuční věty i její důkaz opět následují Stein (2003, kapitola 4, Theorem 2.1).

Věta 11. *Necht γ je iracionální číslo. Potom posloupnost $\{\langle n\gamma \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ je ekvidistribuovaná na $[0,1)$.*

Důkaz. Zvolme $(a,b) \subset [0,1)$. Necht $\chi_{(a,b)}$ označuje charakteristickou funkci intervalu (a,b) , konkrétně

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (a,b), \\ 0 & \text{pro } x \in [0,1) \setminus (a,b). \end{cases}$$

Tuto funkci můžeme periodicky rozšířit na celou reálnou osu (s periodou 1), přičemž ji nadále budeme označovat $\chi_{(a,b)}$. Potom ale platí

$$\#\{1 \leq n \leq N : \langle n\gamma \rangle \in (a,b)\} = \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma),$$

a tak můžeme dokazovanou větu přeformulovat následujícím způsobem:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma) \rightarrow \int_0^1 \chi_{(a,b)}(x) dx = b - a \quad \text{pro } N \rightarrow \infty.$$

Periodickým rozšířením funkce $\chi_{(a,b)}$ jsme se zbavili nutnosti pracovat s neceločíselnou částí čísla a problém z oblasti teorie čísel můžeme řešit pomocí reálné analýzy.

Abychom mohli větu v této podobě dokázat, dokážeme tvrzení nejprve v obecné podobě pro spojitě funkce.

Lemma 12. *Je-li f spojitá a periodická s periodou 1 a γ je iracionální, pak*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx \quad \text{pro } N \rightarrow \infty.$$

Důkaz. Tento důkaz rozdělíme do tří kroků.

1. V prvním kroku důkazu tvrzení dokážeme pro funkce ve tvaru

$$f_k(x) = e^{2\pi i k x}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ty jsou spojitě a periodické s periodou 1.

Pro $f_0 = 1$ rovnost zřejmě platí. Pro $k \neq 0$ platí

$$\int_0^1 e^{2\pi i k x} dx = \left[\frac{1}{2\pi i k} e^{2\pi i k x} \right]_0^1 = 0.$$

Co se týče levé strany, tedy sumy, vzhledem k tomu, že γ je iracionální, platí, že $e^{2\pi i k \gamma} \neq 1$, a uvažovaná suma tedy představuje součet konečné geometrické řady s kvocientem $e^{2\pi i k \gamma}$, přičemž dostáváme:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_k(n\gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{2\pi i k \gamma}}{N} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i k N \gamma}}{1 - e^{2\pi i k \gamma}}.$$

Limita na pravé straně je rovna 0, neboť jde o součin dvou funkcí, z nichž první jde k 0 a druhá je omezená. Tím je lemma dokázáno pro funkce f_k .

2. Je zřejmé, že pokud funkce f a g splňují lemma, potom ho splňují i $Af + Bg$ pro $A, B \in \mathbb{C}$. Krok 1 tedy implikuje, že lemma platí pro všechny trigonometrické polynomy.
3. V posledním kroku budeme pomocí faktu, že lemma platí pro všechny trigonometrické polynomy, dokazovat jeho platnost pro libovolnou spojitou periodickou funkci f .

Nechť $\epsilon > 0$. Jestliže f je libovolná spojitá funkce s periodou 1, existuje trigonometrický polynom P takový, že

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Pro polynom P je již lemma dokázáno, a tak pro dostatečně velká N platí

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(n\gamma) - \int_0^1 P(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

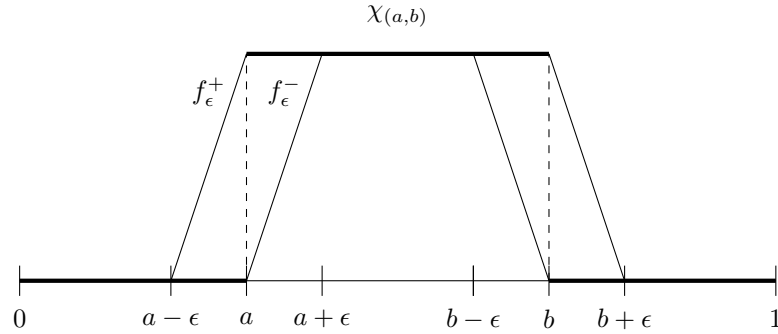
Pak už můžeme lemma dokázat pro funkci f :

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) - \int_0^1 f(x) dx \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (f(n\gamma) - P(n\gamma) + P(n\gamma)) + \int_0^1 (-f(x) - P(x) + P(x)) dx \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(n\gamma) - P(n\gamma)| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(n\gamma) - \int_0^1 P(x) dx \right| + \\
&\quad + \int_0^1 |P(x) - f(x)| dx < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Nyní můžeme pokračovat v důkazu věty 11. Předpokládejme, že $0 < a < b < 1$. Bez újmy na obecnosti zvolme libovolné kladné $\epsilon < \min(a, 1 - b, (b - a)/2)$. Pro funkci $\chi_{(a,b)}$ můžeme nalézt dvě spojitě periodické funkce f_ϵ^+ a f_ϵ^- , které ji aproximují shora a zdola. $\chi_{(a,b)}$ se s f_ϵ^+ a f_ϵ^- shoduje všude na $[0,1)$ kromě intervalů délky 2ϵ , kde f_ϵ^+ a f_ϵ^- spojitě probíhají hodnotami mezi 0 a 1. Funkce f_ϵ^+ a f_ϵ^- jsou zobrazeny na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Aproximace funkce $\chi_{(a,b)}$ pro $0 < a < b < 1$

Pro tyto funkce tedy platí:

$$f_\epsilon^-(x) \leq \chi_{(a,b)}(x) \leq f_\epsilon^+(x),$$

a zároveň

$$b - a - 2\epsilon \leq \int_0^1 f_\epsilon^-(x) dx,$$

$$\int_0^1 f_\epsilon^+(x) dx \leq b - a + 2\epsilon.$$

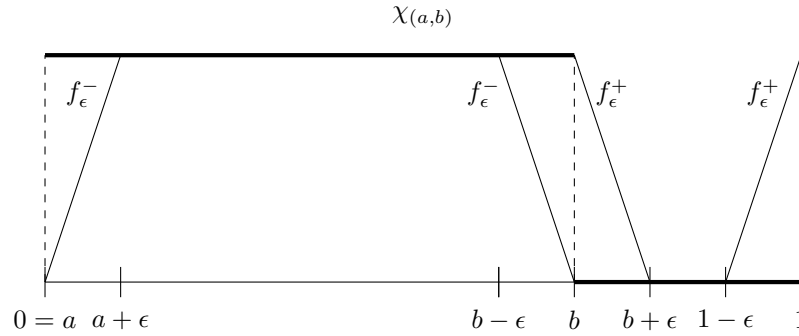
Označme $S_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma)$. Z předchozího pak dostáváme:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\epsilon^-(n\gamma) \leq S_N \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\epsilon^+(n\gamma),$$

$$b - a - 2\epsilon \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} S_N \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} S_N \leq b - a + 2\epsilon.$$

Jelikož toto platí pro každé $\epsilon > 0$, existuje $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ a je rovna $b - a$, čímž je věta dokázána čímž je věta dokázána pro případ $0 < a < b < 1$.

Pokud $a = 0$ nebo $b = 1$, lze postupovat podobně, jen je potřeba mírně pozměnit definici funkce f_ϵ^+ . Abychom mohli uplatnit lemma 12, je třeba, aby funkce f_ϵ^+ a f_ϵ^- byly periodické. Obrázek 2.2 ilustruje situaci, kdy $a = 0$ a $b < 1$.



Obrázek 2.2: Aproximace funkce $\chi_{(a,b)}$ pro $a = 0, b < 1$

V případě, že $a > 0$ a $b = 1$ budeme postupovat symetricky. V případě, že $a = 0, b = 1$ bude funkce f_ϵ^+ na $[a, b]$ konstantně rovna 1. Ve všech těchto případech ale můžeme uplatnit odhady, které jsme použili pro případ $0 < a < b < 1$, a věta je tak dokázána. \square

2.4 Benfordův zákon pro mocniny dvojky

Nyní, když je ekvidistribuční věta dokázána, se můžeme věnovat příkladu jejího využití. Tématem bude tzv. Benfordův zákon. Podle něj se v mnoha souborech čísel objevují nižší číslice na pozici první platné číslice s větší pravděpodobností než vyšší číslice. Konkrétně platí, že pravděpodobnost výskytu číslice $d \in \{1, 2, \dots, 9\}$ jako první platné číslice je rovna $\log_{10} \left(1 + \frac{1}{d}\right)$ (dále budeme pro označení dekadického logaritmu psát $\log x$).

Poprvé byla tato hypotéza zformulována v roce 1881 astronomem a matematikem Simonem Newcombem. Myšlenka dala vzniknout pozorování, že první stránky logaritmických tabulek, tedy ty obsahující logaritmy čísel začínajících jedničkou, dvojkou, \dots , nesou výrazně větší známky užívání než stránky v druhé polovině tabulek. Newcombův článek ve své době nezbudil mnoho pozornosti. Až o téměř 60 let později vydal svou publikaci týkající se tohoto jevu americký fyzik Frank Benford. Ten tvrzení podpořil analýzou 20 velkých souborů dat obsahujících až 20 000 čísel, mezi nimiž byly např. počty obyvatel, ceny, ale i náhodné číselné údaje objevující se v novinách. (Kossovsky, 2014)

Předmětem našeho zájmu bude ověření Benfordova zákona pro posloupnost přirozených mocnin dvojky. Vezmeme-li nekonečnou posloupnost přirozených mocnin dvojky, navzdory intuitivnímu očekávání opravdu neplatí, že by se na první pozici mohly se stejnou pravděpodobností objevit číslice 1 až 9. Platnost Benfordova zákona pro posloupnost přirozených mocnin dvojky můžeme dokázat právě pomocí ekvidistribuční věty 11.

Konkrétně nás bude zajímat rozložení výskytu jednotlivých číslic na první pozici v posloupnosti $\{2^n\}_{n=1}^\infty$ a její zaokrouhlené variantě, tedy v číslech tvaru $d \cdot 10^k$ nejbližše přirozeným mocninám dvojky, kde d je jedno z čísel od 1 do 9. Příklad a jeho řešení pochází ze sbírky Velleman (2020).

Pracovat tedy budeme s posloupností $\{2^n\}_{n=1}^\infty$. Ekvidistribuční větu budeme aplikovat na iracionální číslo $\log 2$. Pokud by $\log 2$ nebylo iracionální, mohli bychom ho vyjádřit jako podíl dvou přirozených čísel p, q . Potom by muselo platit

$10^{\frac{p}{q}} = 2$, a tedy $10^p = 2^q$. Jenže levá strana by byla dělitelná 5, zatímco pravá ne. Dostáváme spor, a $\log 2$ je tak iracionální.

Dále vezměme $n \in \mathbb{N}$ a označme $k = [\log 2^n]$. Potom

$$\log 2^n = [\log 2^n] + \langle \log 2^n \rangle = k + \langle n \log 2 \rangle,$$

a tedy

$$2^n = 10^{\langle n \log 2 \rangle} \cdot 10^k.$$

Platí, že $0 \leq \langle n \log 2 \rangle < 1$, a tedy $1 \leq 10^{\langle n \log 2 \rangle} < 10$. Z toho vyplývá, že pro $d \in \{1, 2, \dots, 9\}$ bude 2^n začínat číslicí d právě tehdy, když platí $d \leq 10^{\langle n \log 2 \rangle} < d + 1$, ekvivalentně $\log d \leq \langle n \log 2 \rangle < \log(d + 1)$. A proto je podíl členů posloupnosti $2^1, \dots, 2^N$, které začínají číslicí d , dán zlomkem

$$\frac{\#\{1 \leq n \leq N : \langle n \log 2 \rangle \in [\log d, \log(d + 1))\}}{N}.$$

Podle ekvidistribuční věty platí, že pro N jdoucí do nekonečna je tento podíl roven délce intervalu $[\log d, \log(d + 1))$, tedy

$$\log(d + 1) - \log d = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right),$$

čímž je Benfordův zákon pro čísla ve tvaru 2^n dokázán. Tabulka 2.1 udává číselnou hodnotu pravděpodobnosti pro každou číslici.

Číslice	Pravděpodobnost
1	0,3010
2	0,1761
3	0,1249
4	0,09691
5	0,07918
6	0,06695
7	0,05799
8	0,05115
9	0,04576

Tabulka 2.1: První číslice mocnin dvojky

Nyní se ale zaměříme na posloupnost, kde každé číslo 2^n zaokrouhlíme na nejbližší číslo ve tvaru $d \cdot 10^k$, $d \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $k \in \mathbb{N}$. Budeme muset upravit tvar intervalů, na které budeme aplikovat ekvidistribuční větu, tak, aby odpovídaly zaokrouhlení. Stále platí, že

$$2^n = 10^{\langle n \log 2 \rangle} \cdot 10^k,$$

kde $k = [\log 2^n]$. Abychom 2^n zaokrouhlili na jednu platnou číslici, stačí zaokrouhlit $10^{\langle n \log 2 \rangle}$ na nejbližší celé číslo. Z toho dostáváme, že pro $d \in \{2, 3, \dots, 9\}$ bude po zaokrouhlení první číslicí d právě tehdy, když $d - \frac{1}{2} \leq 10^{\langle n \log 2 \rangle} < d + \frac{1}{2}$, neboli $\log\left(d - \frac{1}{2}\right) \leq \langle n \log 2 \rangle < \log\left(d + \frac{1}{2}\right)$. Z toho vyplývá, že pro libovolné přirozené N je podíl zaokrouhlených přirozených mocnin dvojky, které začínají číslicí d , v prvních N členech určen jako:

$$\frac{\#\left\{1 \leq n \leq N : \langle n \log 2 \rangle \in \left[\log\left(d - \frac{1}{2}\right), \log\left(d + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{N},$$

což se podle ekvidistribuční věty pro $N \rightarrow \infty$ blíží hodnotě

$$\log\left(d + \frac{1}{2}\right) - \log\left(d - \frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{2d+1}{2d-1}\right).$$

Tím jsou určeny pravděpodobnosti pro $d \in \{2, 3, \dots, 9\}$. Pro $d = 1$ je ale situace jiná, jelikož po zaokrouhlení bude na první pozici jednička v případě, že se $10^{\langle n \log 2 \rangle}$ zaokrouhlí na 1, ale i na 10. To nastane v případě, že se $\langle n \log 2 \rangle$ nachází v intervalu $\left[0, \log \frac{3}{2}\right)$, nebo $\left[\log \frac{19}{2}, 1\right)$. Po aplikaci ekvidistribuční věty na tyto intervaly dostáváme, že pravděpodobnost, že číslo 2^n zaokrouhlíme na tvar $1 \cdot 10^k$, je rovna

$$\log\left(\frac{3}{2}\right) + 1 - \log\left(\frac{19}{2}\right) = 1 - \log\left(\frac{19}{3}\right).$$

Zaokrouhlené pravděpodobnosti pro jednotlivé číslice uvádíme v tabulce 2.2.

Číslice	Pravděpodobnost
1	0,1984
2	0,2218
3	0,1461
4	0,1091
5	0,08715
6	0,07255
7	0,06215
8	0,05436
9	0,04830

Tabulka 2.2: První číslice zaokrouhlených mocnin dvojky

3. Nekonečné součty sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel

Fourierovy řady slouží také jako užitečný nástroj pro výpočet součtů mnohých číselných řad. Zvolením vhodné funkční hodnoty Fourierovy řady jisté funkce jsme často schopni vyjádřit zajímavé nekonečné součty. Tímto způsobem je možné vypočítat i nekonečné součty sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel.

Nejprve ale zmiňme konkrétnější problém, a to výpočet sumy čtverců převrácených hodnot přirozených čísel. Toto zadání je známé jako basilejský problém, k jehož vyřešení vyzval právě basilejský matematik Jakob Bernoulli. Byl to ale jiný rodák z Basileje, který jako první prezentoval své řešení, a tím byl Leonhard Euler. Stejně tak přišel později s obecným vzorcem pro výpočet součtů sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel (viz Lord (2014)). Obojí se ovšem dá (různými způsoby) vyřešit pomocí Fourierových řad.

3.1 Výpočet za pomoci Fourierovy řady pilovité funkce

Jedním ze způsobů nalezení vzorce pro součty sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel je práce s poměrně jednoduchou funkcí, jak navrhuje ve svých cvičeních k Fourierovým řadám Körner (1993).

Vezměme funkci

$$h(x) = x, \quad 0 \leq x < 1,$$

kteřou periodicky rozšíříme na celou reálnou osu s periodou délky 1. Dostaneme tak typ tzv. pilovité funkce. V tomto případě jde o nespojitou periodickou funkci, která je ale po částech diferencovatelná, a tedy nebude problém pracovat s její reálnou Fourierovou řadou.

V této kapitole nepracujeme s 2π -periodickou funkcí, a je tedy zapotřebí připomenout tvar reálné Fourierovy řady a koeficientů pro l -periodické funkce $f \in L^1([a,b])$, $l = b - a$:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{l}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{l}nx\right) \right).$$

Pro reálné Fourierovy koeficienty na obecném intervalu $[a,b]$ délky $l = b - a$ platí:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{l}nx\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{l}nx\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pro Fourierovy koeficienty naší pilovité funkce $h(x)$ tedy platí:

$$a_0 = 2 \int_0^1 x \, dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1,$$

a pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 x \cos(2\pi n x) \, dx = 2 \left(\left[\frac{x \sin 2\pi n x}{2\pi n} \right]_0^1 - \int_0^1 \cos(\pi n x) \, dx \right) = \\ &= -2 \left[\frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} \right]_0^1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 x \sin(2\pi n x) \, dx = 2 \left(\left[\frac{-x \cos(2\pi n x)}{2\pi n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n} \, dx \right) = \\ &= 2 \left(\frac{-1}{2\pi n} + \left[\frac{\sin(2\pi n x)}{4\pi^2 n^2} \right]_0^1 \right) = 2 \left(\frac{-1}{2\pi n} \right) = \frac{-1}{\pi n}. \end{aligned}$$

Fourierova řada $F(x)$ funkce $h(x)$ bude mít tvar

$$F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin(2\pi n x)}{\pi n}.$$

Jelikož $h(x)$ je diferencovatelná na intervalu $(0,1)$, platí pro $x \in (0,1)$, že $h(x) = F(x)$, a tedy

$$x = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin(2\pi n x)}{\pi n}.$$

Klíčem k získání vzorce pro výpočet sumy sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel bude opakovaná integrace této rovnosti upravené do následujícího tvaru:

$$x - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin(2\pi n x)}{\pi n}, \quad x \in (0,1). \quad (3.1)$$

Při opakované integraci budeme na levé straně dostávat polynomy vyšších a vyšších stupňů, na pravé straně budeme integrovat řadu člen po členu, přičemž se v čitateli bude střídát $\sin(2\pi n x)$ a $\cos(2\pi n x)$. Ve jmenovateli uvnitř řady se bude zvyšovat mocnina u n . Růst bude mocnina i u výrazu $\frac{1}{2\pi}$ s měnícím se znaménkem.

Klíčové bude zjištění, že v čitateli uvnitř řady se bude vyskytovat $\cos(2\pi n x)$ právě tehdy, když mocnina u n ve jmenovateli bude sudá. Potom při dosazení $x = 0$ do $\cos(2\pi n x)$ dostaneme v čitateli hodnotu jedna, a tak získáme hodnotu součtu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}, \quad m \in \mathbb{N},$$

což je řešením našeho zadání.

První integraci je ale zapotřebí provést jiným způsobem než ty, které budou následovat. Řada na pravé straně rovnosti (3.1) totiž nekonverguje stejnoměrně, což můžeme nahlédnout například ze skutečnosti, že tato Fourierova řada (řada spojitých funkcí) není spojitá v bodech $x = 0$ a $x = 1$, neboť v těchto bodech má hodnotu 0, zatímco na intervalu $(0,1)$ konverguje k funkci $x - \frac{1}{2}$. Proto ji zatím nemůžeme jednoduše integrovat člen po členu. Vezmeme tedy nejprve primitivní funkci levé strany, načež budeme hledat její Fourierovu řadu. Až poté budeme opakovaně integrovat obě strany.

Integrujme polynom na levé straně rovnosti (3.1).

$$\int \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + c_0.$$

Jelikož koeficienty u kvadratického a lineárního členu jsou oba rovny $\frac{1}{2}$, bude jednodušší psát integrační konstantu v tomto tvaru:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{c}{2} = \frac{1}{2} (x^2 - x + c).$$

Nyní hledejme Fourierovu řadu tohoto polynomu.

$$a_0 = 2 \int_0^1 \frac{1}{2} (x^2 - x + c) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + cx \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c = -\frac{1}{6} + c.$$

Dále pro $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} (x^2 - x + c) \cos(2\pi nx) dx = \\ &= \int_0^1 x^2 \cos(2\pi nx) dx - \int_0^1 x \cos(2\pi nx) dx + c \int_0^1 \cos(2\pi nx) dx = \\ &= \left[\frac{x^2 \sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x \sin(2\pi nx)}{2\pi n} dx - \left[\frac{x \sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_0^1 + \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} dx + c \left[\frac{-\sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_0^1 = \\ &= 0 + \left[\frac{2x \cos(2\pi nx)}{4\pi^2 n^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos(2\pi nx)}{4\pi^2 n^2} dx - 0 + \left[\frac{-\cos(2\pi nx)}{4\pi^2 n^2} \right]_0^1 + 0 = \\ &= \frac{2}{4\pi^2 n^2} - \left[\frac{\sin(2\pi nx)}{8\pi^3 n^3} \right]_0^1 + 0 = \frac{1}{2\pi^2 n^2}. \end{aligned}$$

Koeficienty b_n získáme takto:

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} (x^2 - x + c) \sin(2\pi nx) dx = \\ &= \int_0^1 x^2 \sin(2\pi nx) dx - \int_0^1 x \sin(2\pi nx) dx + c \int_0^1 \sin(2\pi nx) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{-x^2 \cos(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x \cos(2\pi nx)}{2\pi n} dx + \left[\frac{x \cos(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_0^1 - \\
&- \int_0^1 \frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n} dx + c \left[\frac{-\cos(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_0^1 = -\frac{1}{2\pi n} + \left[\frac{2x \sin(2\pi nx)}{4\pi^2 n^2} \right]_0^1 - \\
&- \int_0^1 \frac{\sin(2\pi nx)}{4\pi^2 n^2} dx + \frac{1}{2\pi n} - \left[\frac{\sin(2\pi nx)}{4\pi^2 n^2} \right]_0^1 + 0 = 0 + \left[\frac{\cos(2\pi nx)}{8\pi^3 n^3} \right]_0^1 = 0.
\end{aligned}$$

Známe tedy tvar Fourierovy řady primitivní funkce polynomu na levé straně rovnosti (3.1). Jelikož tato funkce je spojitá a diferencovatelná na intervalu (0,1), platí, že se tato funkce na tomto intervalu rovná své Fourierově řadě:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{c}{2} = \frac{c}{2} - \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi^2 n^2}.$$

Znovu přesuneme nultý Fourierův koeficient na levou stranu, aby na pravé straně zbyla jen nekonečná řada:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2}. \quad (3.2)$$

V dalších krocích budeme moci jednoduše integrovat i řadu na pravé straně, tedy člen po členu. K tomu stačí dokázat, že tato řada konverguje stejnoměrně, k čemuž použijeme Weierstrassovo kritérium.

Musíme nalézt konvergentní majorantu pro řadu na pravé straně (3.2) s členy v absolutní hodnotě:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi^2 n^2} \right|.$$

K tomu stačí vzít řadu Fourierových koeficientů a_n v absolutní hodnotě, neboť $|\cos(2\pi nx)|$ (ale i $|\sin(2\pi nx)|$) je menší nebo rovna jedné.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

přičemž poslední řada konverguje, a tedy podle Weierstrassova kritéria platí, že je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi^2 n^2}$$

stejnoměrně konvergentní.

Díky stejnoměrné konvergenci řady na pravé straně (3.2) víme i to, že řada, jakožto řada spojitých funkcí, musí být spojitá v bodech 0 a 1, a proto platí vztah (3.2) právě i v krajních bodech, tedy na celém intervalu [0,1]. Právě dosazením krajních bodů do rovnosti (3.2) dostaneme řešení basilejského problému (hodnoty pro $x = 0$ a $x = 1$ se rovnají):

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nyní už ale můžeme přejít k opakované integraci obou stran vztahu (3.2). Abychom mohli nalézt primitivní funkci řady na pravé straně, využijeme určitý integrál, který je funkcí své horní meze. Pro určité integrály totiž můžeme využít větu o záměně integrálu a řady, a tedy integrovat řadu člen po členu, což je možné díky stejnoměrné konvergenci, kterou jsme dokázali. Opakovaně budeme brát určitý integrál levé a pravé strany od 0 do x . Ukážeme si dvě následující integrace. Hledáme tedy primitivní funkci levé a pravé strany, kterou spočteme pomocí určitého integrálu:

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{12} \right) dt &= \int_0^x \left(\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{n^2} \right) dt, \\ \left[\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12} \right]_0^x &= \frac{1}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(2\pi nt)}{n^3} \right]_0^x, \\ \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} &= \frac{1}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n^3}. \end{aligned}$$

Explicitně uvedeme ještě jeden krok integrace obou stran, kde bude situace o něco složitější.

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12} \right) dt &= \int_0^x \left(\frac{1}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{n^3} \right) dt, \\ \left[\frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{24} \right]_0^x &= \frac{1}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-\cos(2\pi nt)}{2\pi n^4} \right]_0^x, \\ \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} &= -\frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx) - 1}{n^4}, \\ \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} &= -\frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^4} + \frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}. \end{aligned}$$

Primitivní funkce na pravé straně je v o něco komplikovanějším tvaru než v předchozím kroku, ale druhá suma na pravé straně je vzhledem k proměnné x jen konstantou. Její hodnota je právě hledaným součtem čtvrtých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel. My ji můžeme označit jako c a převést ji na levou stranu.

$$\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - c = -\frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^4}.$$

Hodnotu konstanty c můžeme nalézt pomocí určitého integrálu od 0 do 1, neboť je zřejmé, že integrál pravé strany od 0 do 1 je nulový. Zde opět není problém s integrací řady na pravé straně člen po členu, jelikož v řadě se oproti předchozímu kroku ještě zvýšila mocnina u n ve jmenovateli, a řada tedy stejnoměrně konverguje.

$$\int_0^1 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - c \right) dx = -\frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos(2\pi nx)}{n^4} dx,$$

$$\left[\frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} - cx \right]_0^1 = -\frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n^5} \right]_0^1,$$

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72} - c = 0,$$

$$c = \frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72},$$

$$c = \frac{1}{720},$$

$$\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720} = -\frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^4}.$$

Dosazením $x = 0$ (nebo $x = 1$) do této rovnosti dostáváme hodnotu součtu čtvrtých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel:

$$-\frac{1}{720} = -\frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Nyní shrňme poznatky ohledně toho, co se bude dít při opakované integraci. Dále budeme hledat primitivní funkce levé a pravé strany pomocí určitého integrálu, jehož horní mezí bude proměnná x a dolní mezí 0. Je zřejmé, že na levé straně získáme vždy polynom stupně o 1 vyšší. Na pravé straně budeme už nadále moci integrovat řadu člen po členu, jelikož se mocnina u n ve jmenovateli bude dále zvyšovat, předpoklady Weierstrassova kritéria budou vždy splněny, a řada tak bude stejnoměrně konvergentní. V ní se bude střídát funkce $\sin(2\pi nx)$ a $\cos(2\pi nx)$ s měnícím se znaménkem a rostoucími mocninami výrazu $2\pi n$ ve jmenovateli.

Konkrétně bude platit, že v případě sudé mocniny u n ve jmenovateli bude v čitateli funkce $\cos(2\pi nx)$ a v případě liché mocniny bude v čitateli $\sin(2\pi nx)$. V případě integrace řady s lichou mocninou n ve jmenovateli, a tedy funkcí $\sin(2\pi nx)$ v čitateli, získáme nenulovou hodnotu primitivní funkce v dolní mezí, konkrétně řadu sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel. Ta je ale nezávislá na proměnné x , jde tedy o konstantu, kterou přesuneme na levou stranu.

Tuto konstantu můžeme vždy vypočíst pomocí určitého integrálu od 0 do 1 na obou stranách, jelikož pravá strana tvořená funkcemi $\sin(2\pi nx)$ nebo $\cos(2\pi nx)$ má vždy nulový integrál od 0 do 1. Tímto máme zároveň zajištěno, že při následující integraci získáme na levé straně polynom, jehož hodnoty v 0 a 1 se rovnají, což platí vždy i pro pravou stranu. Výsledky opakované integrace jde tedy shrnout následujícími rovnostmi:

Pro $m \geq 1$ a $x \in [0,1]$ platí

$$P_{2m}(x) = (-1)^{m-1} \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^{2m}}, \quad (3.3)$$

$$P_{2m+1}(x) = (-1)^{m-1} \frac{2}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n^{2m+1}}, \quad (3.4)$$

kde P_0, P_1, P_2, \dots jsou polynomy určené těmito vlastnostmi:

- (i) $P_0 = 1$,
- (ii) $P'_k = P_{k-1}$ pro $k \geq 1$,
- (iii) $\int_0^1 P_k(x) dx = 0$ pro $k \geq 1$.

Tyto vlastnosti určují posloupnost polynomů jednoznačně, což můžeme dokázat jednoduchou matematickou indukcí.

Polynom P_0 je již určený, vezměme tedy polynom P_1 , který musí být primitivní funkcí polynomu P_0 .

$$\int P_0(x) dx = \int 1 dx = x + c. \quad (3.5)$$

Integrační konstantu dopočítáme pomocí třetí zadané vlastnosti:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x + c) dx &= 0, \\ \left[\frac{x^2}{2} + cx \right]_0^1 &= 0, \\ \frac{1}{2} + c &= 0, \\ c &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

čímž získáváme jednoznačně určený polynom $P_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

Nyní přejděme k indukčnímu kroku. Předpokládejme, že prvních k polynomů je zadáno jednoznačně, a tedy polynom P_k vypadá následovně:

$$P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Polynom P_{k+1} pak získáme integrací polynomu P_k a výpočtem integrační konstanty:

$$\int P_k(x) dx = \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \frac{a_{k-1}}{k} x^k + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c, \quad (3.6)$$

$$\int_0^1 P_{k+1}(x) dx = 0,$$

$$\left[a_k(k+1)(k+2)x^{k+2} + \frac{a_{k-1}}{k(k+1)} x^{k+1} + \dots + \frac{a_1}{6} x^3 + \frac{a_0}{2} x^2 + cx \right]_0^1 = 0,$$

$$a_k(k+1)(k+2) + \frac{a_{k-1}}{k(k+1)} + \dots + \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{2} + c = 0,$$

$$c = -a_k(k+1)(k+2) - \frac{a_{k-1}}{k(k+1)} - \dots - \frac{a_1}{6} - \frac{a_0}{2}.$$

Je tedy dokázáno, že polynomy P_k jsou jednoznačně určeny vlastnostmi (i),(ii) a (iii).

Pro nalezení vzorce pro výpočet nekonečného součtu sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel již stačí vzít hodnotu rovnosti (3.3) v bodě $x = 0$ nebo $x = 1$, jelikož se rovnají. Dosadme tedy za x nulu:

$$P_{2m}(0) = (-1)^{m-1} \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}.$$

Nyní už můžeme vyjádřit sumu sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{(-1)^{m-1} (2\pi)^{2m} P_{2m}(0)}{2}, \quad (3.7)$$

kde hodnotu $P_{2m}(0)$ lze vypočítat rekurzivně hledáním polynomů $P_k, k \in \mathbb{N}_0$.

3.2 Bernoulliho polynomy a Bernoulliho čísla

Pokud bychom polynomy P_k , které jsme zavedli v předchozím výpočtu, vynásobili vhodnými konstantami tak, abychom z nich získali polynomy monické, dostaneme tzv. Bernoulliho polynomy. Někdy se sice definují právě jako polynomy P_k , například Körner (1993) je tak pojmenovává, ale většinou jde právě o monické polynomy.

Potřebujeme se tedy zbavit koeficientu u vedoucího členu polynomu P_k . Tím je člen x^k , což lze nahlédnout z předchozí matematické indukce. V rovnosti (3.5) je vidět, že P_1 je polynomem stupně 1. V indukčním kroku (3.6) při přechodu od polynomu P_k , o kterém předpokládáme, že je stupně k , k polynomu P_{k+1} získáváme právě polynom stupně $k + 1$.

Co se týče koeficientu u x^k v polynomu P_k , ten je roven $\frac{1}{k!}$, což lze opět snadno vyvodit matematickou indukcí: v (3.5) je u lineárního členu koeficient roven 1, čímž je indukční předpoklad splněn. Předpokládáme-li dále, že koeficient a_k u vedoucího členu polynomu P_k je roven $\frac{1}{k!}$, pak v (3.6) je koeficient u vedoucího členu x^{k+1} roven $\frac{1}{(k+1)k!}$, tedy $\frac{1}{(k+1)!}$, což jsme potřebovali dokázat.

Nyní už tedy můžeme sepsat definici Bernoulliho polynomů.

Definice 10. *Pojmem **Bernoulliho polynomy** budeme rozumět polynomy B_k , $k \in \mathbb{N}_0$, takové, že*

$$B_k(x) = k!P_k(x),$$

kde P_0, P_1, P_2, \dots jsou polynomy splňující:

- (i) $P_0 = 1$,
- (ii) $P'_k = P_{k-1}$ pro $k \geq 1$,
- (iii) $\int_0^1 P_k(x) dx = 0$ pro $k \geq 1$.

Ve výpočtu sumy sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel (3.7) jsme využili polynomy P_k v bodě $x = 0$. Stejně tak důležité jsou hodnoty Bernoulliho polynomů v bodě $x = 0$. Ty budeme označovat jako Bernoulliho čísla.

Definice 11. Hodnoty Bernoulliho polynomů B_k pro $k \in \mathbb{N}_0$ v bodě 0 budeme označovat jako **Bernoulliho čísla**. Značíme je B_k , a platí:

$$B_k = B_k(0) = k!P_k(0).$$

Z této definice je zřejmé, že pokud chceme, aby ve výpočtu (3.7) figurovala Bernoulliho čísla, dostaneme tuto variantu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m} B_{2m}}{2(2k!)}. \quad (3.8)$$

4. Odhad počtu bodů s celočíselnými souřadnicemi uvnitř kruhu

Poslední aplikací Fourierových řad, kterou v této práci představíme, je odhad počtu mřížových bodů uvnitř kruhu. Nejprve budeme pracovat s kruhy, jejichž střed se nachází v počátku. Zajímá nás tedy počet bodů $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ splňujících

$$x^2 + y^2 \leq r^2,$$

kde r je poloměr kruhu.

Základní myšlenkou je, že počet bodů s celočíselnými souřadnicemi uvnitř kruhu se dá odhadnout pomocí obsahu daného kruhu. Toto tvrzení se dá intuitivně nahlédnout ze skutečnosti, že jeden jednotkový čtverec obsahuje v průměru jeden mřížový bod. Mezi obsahem kruhu a počtem mřížových bodů by tedy měl být nějaký vztah. Ústřední otázkou našeho problému je ale získat odhad pro to, jak se tyto dvě hodnoty liší.

Označíme-li jako $N(r)$ počet bodů s celočíselnými souřadnicemi uvnitř kruhu s poloměrem r , platí pro něj:

$$N(r) = \pi r^2 + E(r),$$

kde $E(r)$ je nějaká odchylka. Naším úkolem bude nalézt co možná nejmenší horní odhad pro tuto odchylku.

4.1 Gaussův odhad

První odhad, který provedeme, bude stejný, který na konci 19. století provedl Carl Friedrich Gauss (Berndt a kol., 2018). I proto se úloha, která je předmětem této kapitoly, často nazývá jako Gaussův kruhový problém.

Tvrzení 13. *Nechť $N(r) = \#\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$, kde r je poloměr kruhu, $r \geq 1$. Potom platí*

$$N(r) = \pi r^2 + E(r),$$

kde

$$|E(r)| \leq 2\sqrt{2}\pi r.$$

Důkaz. K důkazu tohoto odhadu pro velikost chyby $E(r)$ stačí vyplnit rovinu jednotkovými čtverci takovými, že mřížové body, tedy body s celočíselnými souřadnicemi, budou vždy ve středu každého čtverce. Každý takový čtverec označíme jako S_{nm} , $n, m \in \mathbb{N}$, a tedy platí

$$S_{nm} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2n-1}{2} \leq x \leq \frac{2n+1}{2}; \frac{2m-1}{2} \leq y \leq \frac{2m+1}{2} \right\}.$$

Kruh s poloměrem r a středem v počátku označíme jako D_r ,

$$D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

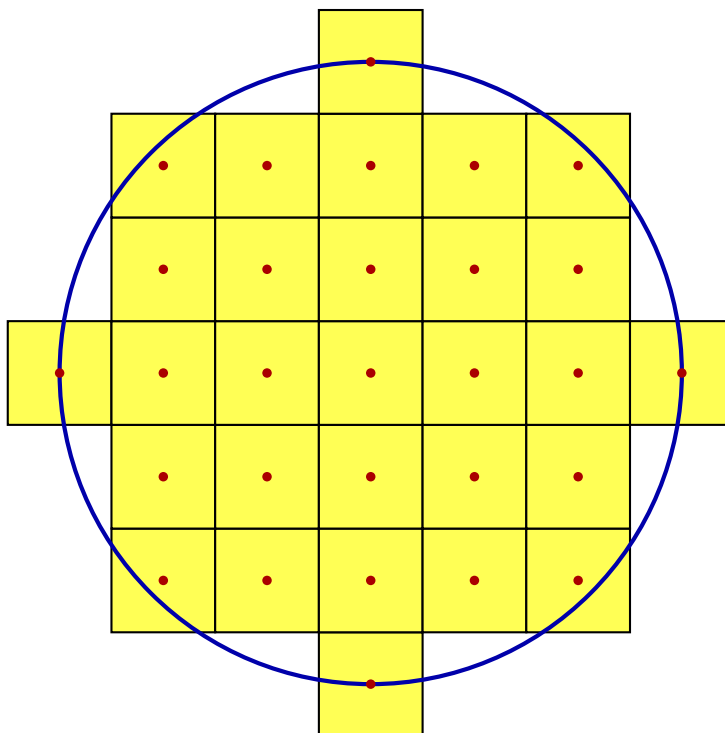
Označme S množinu takových čtverců, jejichž středy, tedy mřížové body, leží uvnitř kruhu D_r :

$$S = \{S_{mn}, n, m \in \mathbb{N} : m^2 + n^2 \leq r^2\}.$$

Jelikož obsah jednoho čtverce S_{mn} je roven 1, platí, že

$$N(r) = \#S.$$

Tuto skutečnost ilustruje obrázek 4.1.



Obrázek 4.1: Mřížové body uvnitř kruhu

Z obrázku je dobře patrné, že obsah plochy tvořené žlutými čtverci, neboli počet prvků množiny S , je menší nebo rovna obsahu kruhu, jehož poloměr je delší o polovinu úhlopříčky jednoho čtverce:

$$\#S \leq \pi \left(r + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2.$$

Obdobně platí

$$\#S \geq \pi \left(r - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2.$$

Vzmemme-li rozdíl horní meze $\pi \left(r + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$ a dolní meze $\pi \left(r - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$ dostáváme výraz $2\sqrt{2}\pi r$, jehož hodnota je obsahem mezikruží. Tento výraz je právě hledaným horním odhadem $|E(r)|$, což lze nahlédnout z obrázku 4.1.

Hodnota $|E(r)| = |N(r) - \pi r^2|$ udává, o kolik se liší obsah kruhu od součtu obsahů žlutých čtverečků. Tento rozdíl lze shora odhadnout tak, že sečteme obsahy částí žlutých čtverečků, které leží vně kruhu, a dále obsahy bílých ploch uvnitř kruhu (těch, které nejsou pokryty žlutým čtverečkem). Všechny tyto uvažované plochy ale leží právě v onom mezikruží, jehož obsah je $2\sqrt{2}\pi r$.

□

4.2 Další odhady

Otázka odhadu odchylky rozdílu mezi počtem mřížových bodů uvnitř kruhu a jeho obsahem zůstává aktuálním matematickým problémem. V první polovině 20. století vyslovil britský matematik G. H. Hardy domněnku, podle které pro každé $\epsilon > 0$ existuje konstanta C_ϵ taková, že

$$|E(r)| \leq C_\epsilon r^{\frac{1}{2} + \epsilon}.$$

Zatím ale tato hypotéza nebyla dokázána, ačkoliv postupně přibývají další a další horní odhady, ve kterých exponent u r klesá směrem k $\frac{1}{2}$. Historii těchto odhadů a jejich důkazů sleduje článek autorů Berndt a kol. (2018). Posledním zpřesněním je tak odhad Huxleyho z roku 2003, ve kterém figuruje exponent $\frac{131}{208}$. V publikaci od Ioseviche 2007, ze které tato kapitola vychází, nalezneme dále i elementární důkaz odhadu $|E(r)| \leq Cr^{\frac{2}{3}}$. Tento odhad byl prezentován na počátku 20. století.

4.3 Odhad L^2 -normy odchylky

Hlavní tvrzení této kapitoly se bude týkat kruhu o poloměru r se středem v bodě $x = (x_1, x_2)$, $x \in [0, 1]^2$. Počet mřížových bodů uvnitř takového kruhu označíme jako $N_x(r)$. Podíváme se na „průměrnou odchylku“ $N_x(r)$ od πr^2 ve smyslu L^2 -normy. To nám umožní zlepšit odhad na pravé straně nerovnosti. Díky zprůměrování se dostaneme k odhadu, ve kterém bude figurovat právě $r^{\frac{1}{2}}$. K důkazu tohoto odhadu ale budeme potřebovat ještě několik pojmů a tvrzení.

Zavést musíme Fourierovy řady pro funkce dvou proměnných. Nejprve vezměme funkce $\varphi_n(x) = e^{2\pi i n x}$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{Z}$. Potom víme, že množina $\{\varphi_n; n \in \mathbb{Z}\}$ je úplná ortonormální množina v prostoru $L^2([0, 1])$.

Naším prostorem funkcí dvou proměnných bude prostor $V = L^2([0, 1] \times [0, 1])$. Na ten budeme aplikovat poznatky ohledně Fourierových řad v prostorech se skalárním součinem. Položme

$$\psi_{mn}(x_1, x_2) = \varphi_m(x_1)\varphi_n(x_2) = e^{2\pi i(m x_1 + n x_2)}, \quad x_1, x_2 \in [0, 1].$$

Potom lze ukázat, že množina $M = \{\psi_{mn}, m, n \in \mathbb{Z}\}$ je úplnou ortonormální množinou v prostoru $V = L^2([0, 1] \times [0, 1])$.

Pro libovolnou funkci $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, kde $f \in V$, jsou Fourierovy koeficienty rovny skalárnímu součinu funkce f s prvky množiny M :

$$c_{mn} = \langle f, \psi_{mn} \rangle = \int_{[0, 1]^2} f(x_1, x_2) e^{-2\pi i(m x_1 + n x_2)} dx_1 dx_2,$$

a Fourierova řada má tvar

$$F(x_1, x_2) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} c_{mn} e^{2\pi i(mx_1 + nx_2)}.$$

Potřebovat budeme i Parsevalovu rovnost pro Fourierovy řady funkcí dvou proměnných. Ta plyne z úplnosti množiny M :

$$\|f\|^2 = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |c_{mn}|^2.$$

Více k teorii vícerozměrných Fourierových řad viz Zygmund (1988, kapitola 17).

Dále budeme potřebovat následující lemma, jehož důkaz vychází z (Iosevich, 2007, kapitola 11). Díky tomuto lemmatu budeme moci odhadnout absolutní hodnoty Fourierových koeficientů pro charakteristickou funkci jednotkového kruhu.

Lemma 14. *Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je jednotkový kruh se středem v počátku. Označme*

$$\hat{\chi}_D(\xi) = \int_D e^{-2\pi i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} dx_1 dx_2, \quad \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Potom existuje $C > 0$ takové, že pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|\hat{\chi}_D(\xi)| \leq C|\xi|^{-\frac{3}{2}}.$$

Důkaz. Jako první dokážeme platnost lemmatu pro taková ξ , pro něž platí $|\xi| < 1$. Pro tyto účely můžeme učinit následující odhad:

$$|\hat{\chi}_D(\xi)| \leq \int_D 1 dx_1 dx_2 = \pi.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme volit konstantu $C \geq \pi$. Pak tedy platí

$$|\hat{\chi}_D(\xi)| \leq C \leq C|\xi|^{-\frac{3}{2}},$$

pro $|\xi| < 1$.

Nyní už budeme pracovat s takovými ξ , jejichž absolutní hodnota bude větší nebo rovna 1. V prvním kroku dokážeme, že funkce $\hat{\chi}_D(\xi)$ má stejnou hodnotu ve všech bodech ležících na téže kružnici se středem v počátku, neboli

$$\hat{\chi}_D(\xi) = \hat{\chi}_D(\mu),$$

kdykoliv $|\xi| = |\mu|$.

Budeme pracovat v polárních souřadnicích. Označme

$$x = r(\cos \theta, \sin \theta),$$

$$\xi = R(\cos \alpha, \sin \alpha),$$

$$\mu = R(\cos \beta, \sin \beta).$$

Platí, že

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 = rR \cos \theta \cos \alpha + rR \sin \theta \sin \alpha = rR \cos(\theta - \alpha),$$

přičemž poslední rovnost vychází ze součtových vzorců goniometrických funkcí.

Nyní vezměme $\hat{\chi}_D(\xi)$ v polárních souřadnicích:

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} r e^{-2\pi i r R \cos(\theta-\alpha)} d\theta dr.$$

Je zřejmé, že při změně úhlu α zůstane hodnota integrálu stejná, a tedy platí

$$\hat{\chi}_D(\xi) = \hat{\chi}_D(\mu).$$

V druhém kroku už najdeme horní odhad funkce $\hat{\chi}_D(\xi)$, přičemž využijeme předchozí zjištění, a to tak, že bod ξ nahradíme bodem $(0, R)$, kde $R = |\xi|$.

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_D(\xi) &= \int_D e^{-2\pi i R x_2} dx_1 dx_2 = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} e^{-2\pi i R x_2} dx_2 \right) dx_1 = \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{e^{-2\pi i R x_2}}{-2\pi i R} \right]_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1 = \frac{1}{-2\pi i R} \int_{-1}^1 \left(e^{-2\pi i R \sqrt{1-x_1^2}} - e^{2\pi i R \sqrt{1-x_1^2}} \right) dx_1. \end{aligned}$$

Nyní provedeme substituci $x_1 = \cos \theta$, $dx_1 = -\sin \theta d\theta$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{-2\pi i R} \int_{\pi}^0 \left(e^{-2\pi i R \sin \theta} - e^{2\pi i R \sin \theta} \right) (-\sin \theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{-2\pi i R} \left(\int_0^{\pi} e^{-2\pi i R \sin \theta} \sin \theta d\theta - \int_0^{\pi} e^{2\pi i R \sin \theta} \sin \theta d\theta \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Nyní provedeme u druhého integrálu v (4.1) substituci $\theta = \tau - \pi$, $d\theta = d\tau$:

$$\int_0^{\pi} e^{2\pi i R \sin \theta} \sin \theta d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} e^{2\pi i R \sin(\tau-\pi)} \sin(\tau-\pi) d\tau = - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-2\pi i R \sin \tau} \sin \tau d\tau.$$

Tímto integrálem tedy můžeme nahradit druhý integrál v (4.1):

$$\hat{\chi}_D(\xi) = \frac{1}{-2\pi i R} \int_0^{\pi} e^{-2\pi i R \sin \theta} \sin \theta d\theta + \frac{1}{-2\pi i R} \int_{\pi}^{2\pi} e^{-2\pi i R \sin \theta} \sin \theta d\theta.$$

Zajímá nás absolutní hodnota tohoto výrazu, kterou se pokusíme odhadnout shora pomocí proměnné R .

$$|\hat{\chi}_D(\xi)| \leq \frac{1}{2\pi R} \left| \int_0^{\pi} e^{-2\pi i R \sin \theta} d\theta \right| + \frac{1}{2\pi R} \left| \int_{\pi}^{2\pi} e^{-2\pi i R \sin \theta} d\theta \right|.$$

Důkaz provedeme pro integrál přes interval $[0, \pi]$, který ještě rozdělíme na další intervaly. Odhad pro druhý integrál by se prováděl obdobně.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} e^{-2\pi i R \sin \theta} d\theta \right| &\leq \left| \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-2\pi i R \sin \theta} d\theta \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} e^{-2\pi i R \sin \theta} d\theta \right| + \left| \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} e^{-2\pi i R \sin \theta} d\theta \right| = \\ &= |I_1| + |I_2| + |I_3|. \end{aligned}$$

Nejprve provedeme odhad pro integrál $|I_1|$ a poté $|I_3|$. Funkce uvnitř těchto integrálů můžeme rozšířit a integrovat je pomocí metody *per partes*.

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-2\pi i R \cos \theta}{-2\pi i R \cos \theta} (e^{-2\pi i R \sin \theta}) d\theta \right| = \\
&= \left| \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{-2\pi i R \cos \theta} \frac{d}{d\theta} (e^{-2\pi i R \sin \theta}) d\theta \right| \leq \\
&\leq \left| \left[\frac{e^{-2\pi i R \sin \theta}}{-2\pi i R \cos \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \right| + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left| e^{-2\pi i R \sin \theta} \frac{-\sin \theta}{2\pi i R \cos^2 \theta} \right| d\theta \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{3}\pi R} + \frac{1}{2\pi R} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin \theta}{2\pi R \cos^2 \theta} d\theta \leq \frac{2}{\pi R} + \left[\frac{1}{2\pi R \cos \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \leq \frac{4}{\pi R}.
\end{aligned}$$

Odhad pro integrál I_3 bude probíhat analogicky, jedinou změnou budou meze integrálu, pro něž bude $\cos \theta$ vycházet záporný. V absolutní hodnotě ale nebude žádný rozdíl a též tedy dostáváme odhad

$$|I_3| \leq \frac{4}{\pi R}.$$

O něco složitější bude situace u integrálu I_2 . Ten prochází kritickým bodem $\frac{\pi}{2}$, ve kterém je funkce $\cos \theta$, pomocí které jsme v předchozích výpočtech rozšířili integrály I_1 a I_3 , nulová. To vyřešíme tím, že integrál I_2 znovu rozdělíme na tři integrály, jejichž meze budou funkcí proměnné R .

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \left| \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{R}}} e^{-2\pi i R \sin \theta} d\theta \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{R}}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{R}}} e^{-2\pi i R \sin \theta} d\theta \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{R}}}^{\frac{5\pi}{6}} e^{-2\pi i R \sin \theta} d\theta \right| = \\
&= |I_A| + |I_B| + |I_C|.
\end{aligned}$$

Tentokrát začneme prostředním integrálem I_B . Ten stačí odhadnout délkou intervalu:

$$|I_B| \leq \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{R}}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{R}}} |e^{-2\pi i R \sin \theta}| d\theta = \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{R}}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{R}}} 1 d\theta = \frac{2}{\sqrt{R}}.$$

Co se týče integrálů I_A a I_C , odhad bude probíhat stejně jako u integrálů I_1 a I_3 , jelikož integrály neprobíhají bodem nespojitosti $\frac{\pi}{2}$. Ale vzhledem k tomu, že mezemi jsou funkce proměnné R , bude potřeba provést další odhady.

Pokud následujeme postup odhadů pro I_1 a I_3 , dostaneme se k tomuto kroku:

$$\begin{aligned}
|I_A| &\leq \left| \left[\frac{e^{-2\pi i R \sin \theta}}{-2\pi i R \cos \theta} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{R}}} \right| + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{R}}} \frac{\sin \theta}{2\pi R \cos^2 \theta} d\theta \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi R \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{R}})} + \frac{1}{\sqrt{3}\pi R} + \left[\frac{1}{2\pi R \cos \theta} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{R}}} \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi R \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{R}})} + \frac{2}{\sqrt{3}\pi R}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Pro integrál I_C bude znovu platit úplně stejný odhad, a tak nezbyvá než odhadnout hodnotu výrazu $\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{R}})$.

Označme $a = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{R}}$, $a \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $c \in (a, \frac{\pi}{2})$ takové, že

$$\cos a = \cos a - \cos \frac{\pi}{2} = (a - \frac{\pi}{2})(-\sin c).$$

Dosadíme-li na pravé straně hodnotu a , dostáváme

$$\cos a = \frac{\sin c}{\sqrt{R}} > \frac{1}{2\sqrt{R}}.$$

Navážeme-li tedy na (4.2), dostáváme:

$$\frac{1}{\pi R \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{R}})} + \frac{2}{\sqrt{3}\pi R} < \frac{1}{\frac{\pi R}{2\sqrt{R}}} + \frac{2}{\sqrt{3}\pi R} < \frac{2}{\pi\sqrt{R}} + \frac{2}{\pi R}.$$

Nyní už můžeme dát vše dohromady. Připomeňme, že platí:

$$|\hat{\chi}_D(\xi)| \leq \frac{1}{2\pi R} \left| \int_0^\pi e^{-2\pi i R \sin \theta} d\theta \right| + \frac{1}{2\pi R} \left| \int_\pi^{2\pi} e^{-2\pi i R \sin \theta} d\theta \right|.$$

Jak už bylo řečeno, pro druhý z těchto integrálů proběhne odhad analogicky, přičemž absolutní hodnoty smažou veškeré rozdíly a odhad je tedy identický tomu, který jsme obdrželi pro první integrál. Platí tedy:

$$|\hat{\chi}_D(\xi)| \leq \frac{2}{2\pi R} \left(\frac{4}{\pi R} + \frac{2}{\pi\sqrt{R}} + \frac{2}{\pi R} + \frac{2}{\sqrt{R}} + \frac{2}{\pi\sqrt{R}} + \frac{2}{\pi R} + \frac{4}{\pi R} \right) \leq CR^{-\frac{3}{2}},$$

kde C je jistá kladná konstanta a $R = |\xi|$, $R \geq 1$, čímž je lemma dokázáno. \square

Nyní už máme vše potřebné k důkazu následující věty (Iosevich, 2007, kapitola 12).

Věta 15. *Nechť $rD + x$ je kruh se středem v bodě $x = (x_1, x_2)$ o poloměru r . Označme*

$$N_x(r) = \#\{(rD + x) \cap \mathbb{Z}^2\},$$

přičemž

$$N_x(r) = \pi r^2 + E_x(r).$$

Pak funkce $N_x(r)$ je 1-periodická vzhledem k proměnným x_1, x_2 a existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro všechna $r > 0$ a všechna $x \in [0, 1]^2$ platí

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 |E_x(r)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Cr^{\frac{1}{2}}.$$

Důkaz. Počet mřížových bodů uvnitř kruhu se středem v bodě x a poloměrem r můžeme získat i jako součet hodnot charakteristické funkce kruhu přes prvky \mathbb{Z}^2 :

$$N_x(r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{(rD+x)}(n).$$

Počet mřížových bodů ve tvaru (n_1, n_2) uvnitř $rD + x$ se rovná počtu bodů ve tvaru $(n_1 - x_1, n_2 - x_2)$ uvnitř kruhu se středem v počátku a poloměrem r :

$$N_x(r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{(rD+x)}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{(rD)}(n - x).$$

Klíčovou vlastností funkce $N_x(r)$ je periodicitu. Označíme-li $x = (x_1, x_2)$, pak $N_x(r)$ je 1-periodická v proměnných x_1 a x_2 :

$$N_{x+(1,0)}(r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{rD}(n_1 - x_1 - 1; n_2 - x_2),$$

přičemž můžeme definovat nový index $k = (n_1 - 1; n_2)$, $k \in \mathbb{Z}^2$ a dostáváme tak

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \chi_{rD}(k - x) = N_x(r).$$

Analogicky můžeme dokázat periodicitu v proměnné x_2 .

Obecně tedy platí, že posuneme-li střed kruhu x o celočíselný vektor $k \in \mathbb{Z}^2$, dostaneme stejný počet mřížových bodů uvnitř kruhu:

$$N_{x+k}(r) = N_x(r).$$

Právě díky periodicitě můžeme uvažovat Fourierovu řadu funkce $N_x(r)$ podle proměnné $x = (x_1, x_2)$ na intervalu $[0, 1]^2$.

Nejprve spočteme Fourierovy koeficienty c_m , $m \in \mathbb{Z}^2$, $m = (m_1, m_2)$.

$$\begin{aligned} c_m(r) &= \int_{[0,1]^2} e^{-2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} N_x(r) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{[0,1]^2} e^{-2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{rD}(n - x) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{[0,1]^2} e^{-2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{rD}(x - n) dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost vychází ze symetrie kruhu rD vzhledem k bodu $(0, 0)$.

Vzhledem k tomu, že součet řady $\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{rD}(x - n)$ je konečný, můžeme zaměnit pořadí řady a integrálu:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \int_{[0,1]^2} e^{-2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} \chi_{rD}(x - n) dx_1 dx_2.$$

Dále provedeme substituaci $x = y + n$, $|\det J| = 1$.

$$\begin{aligned} &\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \int_{[0,1]^2 - n} e^{-2\pi i(m_1 y_1 + m_2 y_2)} e^{-2\pi i(m_1 n_1 + m_2 n_2)} \chi_{rD}(y) dy_1 dy_2 = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \int_{[0,1]^2 - n} e^{-2\pi i(m_1 y_1 + m_2 y_2)} \chi_{rD}(y) dy_1 dy_2, \end{aligned}$$

přičemž sčítáme-li integrály přes intervaly $[0, 1]^2 - n$, $n \in \mathbb{Z}^2$, můžeme se zbavit řady integrací přes celé \mathbb{R}^2 :

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(m_1 y_1 + m_2 y_2)} \chi_{rD}(y) dy_1 dy_2.$$

Dále můžeme vzít místo charakteristické funkce kruhu o poloměru r charakteristickou funkci jednotkového kruhu s přeškálovanou proměnnou:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(m_1 y_1 + m_2 y_2)} \chi_D(y/r) dy_1 dy_2.$$

Nyní provedeme další substituci, a to $y = rz$, $|\det J| = r^2$.

$$r^2 \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i r(m_1 z_1 + m_2 z_2)} \chi_D(z) dz_1 dz_2 = r^2 \int_D e^{-2\pi i r(m_1 z_1 + m_2 z_2)} dz_1 dz_2.$$

Použijeme-li nyní značení z lemmatu 14, získáváme výsledek:

$$c_m(r) = r^2 \hat{\chi}_D(rm).$$

Vezměme tedy Fourierovu řadu funkce $N_x(r)$, označme ji jako $N_x^*(r)$:

$$N_x^*(r) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} r^2 \hat{\chi}_D(rm).$$

Předmětem našeho zájmu je integrál druhé mocniny odchyly $E(r)$, neboli

$$\int_0^1 \int_0^1 |N_x(r) - \pi r^2|^2 dx_1 dx_2.$$

Podíváme-li se konstantní člen řady $N_x^*(r)$, tedy člen, kdy $m = (0,0)$, jeho hodnota je rovna

$$r^2 \hat{\chi}_D(0,0) = r^2 \int_D 1 dx = \pi r^2.$$

Potom tedy platí, že Fourierova řada funkce $N_x(r) - \pi r^2$ je rovna

$$\sum_{m \neq (0,0)} r^2 \hat{\chi}_D(rm) e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)}.$$

Nyní už stačí pohlížet na hledaný integrál jako na normu v prostoru V a uplatnit Parsevalovu rovnost:

$$\int_{[0,1]^2} |N_x(r) - \pi r^2|^2 dx = \|N_x(r) - \pi r^2\|^2 = \sum_{m \neq (0,0)} r^4 |\hat{\chi}_D(rm)|^2,$$

což díky lemmatu 14 můžeme shora odhadnout součtem

$$Cr^4 \sum_{m \neq (0,0)} r^{-3} |m|^{-3} = Cr \sum_{m \neq (0,0)} |m|^{-3}.$$

Abychom dokončili důkaz věty, nezbyvá než dokázat, že tato řada konverguje. Napišme ji v tomto tvaru:

$$S_{m_1, m_2} = \sum_{(m_1, m_2) \neq (0,0)} \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nejprve se zaměříme na ty členy řady, pro které platí, že $|m_1| \leq 1$ nebo $|m_2| \leq 1$. Součet těchto členů je konečný, což můžeme dokázat například limitním srovnáním s posloupností $\frac{1}{n^3}$.

Pro důkaz konvergence řady S_{m_1, m_2} je tedy ještě zapotřebí dokázat konvergenci řady

$$\sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z}, |m_1| \geq 2 \\ m_2 \in \mathbb{Z}, |m_2| \geq 2}} \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2)^{\frac{3}{2}}} = 4 \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}, m_1 \geq 2 \\ m_2 \in \mathbb{N}, m_2 \geq 2}} \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2)^{\frac{3}{2}}},$$

přičemž tato rovnost vychází ze symetrie členů řady.

Pokud tedy $m_1 \geq 2$ a $m_2 \geq 2$, pak pro všechna $x_1 \in [m_1 - 1, m_1]$ a pro všechna $x_2 \in [m_2 - 1, m_2]$ platí

$$\frac{1}{(m_1^2 + m_2^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}},$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2)^{\frac{3}{2}}} &= \iint_{[m_1-1, m_1] \times [m_2-1, m_2]} \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 dx_2 \leq \\ &\leq \iint_{[m_1-1, m_1] \times [m_2-1, m_2]} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Proto lze řadu S_{m_1, m_2} odhadnout takto:

$$S_{m_1, m_2} \leq 4 \iint_{[1, \infty) \times [1, \infty)} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 dx_2 \leq 4 \iint_{((0, \infty) \times [0, \infty)) \setminus D} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 dx_2.$$

Poslední integrál můžeme vypočítat pomocí substituce do polárních souřadnic:

$$\int_1^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{1}{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}} d\alpha d\rho = \int_1^\infty \left[\frac{1}{\rho^2} \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho = \int_1^\infty \frac{\pi}{2\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{\rho} \right]_1^\infty = \frac{\pi}{2},$$

čímž je věta dokázána. □

Seznam použité literatury

- ABATE, M. a TOVENA, F. (2012). *Curves and Surfaces*. UNITEXT. Springer Milano. ISBN 978-88-470-1940-9.
- BERNDT, B. C., KIM, S. a ZAHARESCU, A. (2018). The Circle Problem of Gauss and the Divisor Problem of Dirichlet-Still Unsolved. *The American Mathematical Monthly*, **125**(2), 99–114.
- BRADEN, B. (1986). The Surveyor's Area Formula. *The College Mathematics Journal*, **17**(4), 326–337. URL <http://www.jstor.org/stable/2686282>.
- HUXLEY, M. N. (2003). Exponential Sums and Lattice Points III. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **87**(3), 591–609.
- IOSEVICH, A. (2007). *A View from the Top: Analysis, Combinatorics and Number Theory*. Student Mathematical Library, v. 39. American Mathematical Society, Providence, R.I. ISBN 978-0-8218-4397-0.
- KOSSOVSKY, A. E. (2014). Benford's law. In *Benford's Law: Theory, the General Law of Relative Quantities, and Forensic Fraud Detection Applications*, pages 1–76. ISBN 9789814583695.
- KÖRNER, T. W. T. W. (1993). *Exercises for Fourier Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 0-521-43849-7.
- LORD, N. (2014). Beyond the Basel problem: Euler's derivation of the general formula for $\zeta(2n)$. *Mathematical Gazette*, **98**(543), 459–474.
- MBORATKO. Length-Diameter Inequality for Convex Curves using Fourier Analysis. Mathematics Stack Exchange. URL <https://math.stackexchange.com/q/846509>.
- SCOTT, B. M. (2016). Prove $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \dots$ equidistributed in $[0, 1)$. Mathematics Stack Exchange. URL <https://math.stackexchange.com/q/202081>.
- STEIN, E. M. (2003). *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton Lectures in Analysis ; 1. Princeton University Press, Princeton. ISBN 0-691-11384-X.
- TAPP, K. (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Undergraduate Text in Mathematics. Springer, Switzerland. ISBN 978-3-319-39798-6.
- VELLEMAN, D. J. (2020). *Bicycle or Unicycle?: A Collection of Intriguing Mathematical Puzzles*. Problem Books ; Volume 36. MAA Press, an imprint of the American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. ISBN 1-4704-5702-4.
- ZYGMUND, A. (1988). *Trigonometric series. Volumes I & II combined*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition. ISBN 0-521-35885-X.