Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vývoj geometrických pojmů u žáků 1. stupně ZŠ

Development of geometrical concepts in pupils of elementary School

Bc. Miroslav Löbel

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro základní školy (M7503)

Studijní obor: I. ST (7503T047)

2023

Odevzdáním této diplomové práce na téma Vývoj geometrických pojmů u žáků 1. stupně ZŠ potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Trmicích dne 10. 7. 2023

Rád bych na tomto místě poděkoval paní docentce Darině Jirotkové za trpělivost, cenné rady a připomínky, kterých se mi dostalo při psaní této diplomové práce. Dále děkuji manželce za nekonečnou podporu, kterou jsem od ní po celou dobu studia měl, a také zesnulé mamince, která ve mě vždy věřila.

ABSTRAKT

Diplomová práce zkoumá vývoj porozumění geometrickým pojmům u žáků při přechodu z 1. stupně základní školy na 2. stupeň. V teoretické části jsou uvedena teoretická východiska zavádění geometrických pojmů na 1. stupni, jejich ukotvení v RVP ZV a dále je sledována linie budování pojmů ve dvou řadách učebnic matematiky. V závěru první části jsou představena didaktická prostředí, která jsou vhodná pro budování pojmů obvod a obsah.

Druhá část práce obsahuje výzkum, jehož cílem bylo zjistit, v jaké fázi procesu porozumění geometrickým pojmům se nachází žáci při přechodu na 2. stupeň. Výzkum byl realizován pomocí didaktického testu ve čtyřech 6. třídách, výsledek je přeložen formou tabulek. Po skončení testu byly s vybranými žáky vedeny rozhovory s cílem zjistit, jaké dosavadní znalosti a dovednosti je k jejich řešení vedly. Na vzorku žáků byl realizován pokus o reedukaci, který bude po třech měsících výuky znovu ověřen v druhém kole testování; výsledek je opět představen formou tabulek. Závěrem je zhodnoceno naplnění cílů diplomové práce.

KLÍČOVÁ SLOVA

geometrie, mnohoúhelník, obsah, obvod, budování schémat, poznávací proces míry

ABSTRACT

The thesis examines the development of pupils' understanding of geometric concepts during the transition from primary school grade 1 to grade 2. In the theoretical part, the theoretical background of the introduction of geometric concepts at the 1st grade, their anchoring in the RVP ZV and the line of building concepts in two series of mathematics textbooks are presented. At the end of the first part, didactic environments that are suitable for building the concepts of circumference and content are presented.

The second part of the thesis contains research aimed at finding out at what stage of the process of understanding geometric concepts pupils are at when they move to Grade 2. The research was carried out by means of a didactic test in four 6th grade classes, and the results are translated in the form of tables. After the test, the selected pupils were interviewed to find out what previous knowledge and skills led them to solve the problems. A sample of pupils was used to attempt to re-teach the skills, which will be tested again in a second round of testing after three months of teaching; the result is again presented in the form of tables. Finally, the fulfilment of the aims of the thesis is evaluated.

KEYWORDS

geometry, polygon, area, circumference, schema building, cognitive process of the measurement

Translated with www.DeepL.com/Translator (free version)

Obsah

Úvod

Výpočty v geometrii, obsah a obvod rovinných objektů, objem a povrch těles patří mezi matematická témata, která mají téměř největší přesah do praktického života. Žáci se s uvedenými pojmy setkávají již od útlého dětství, naprostá většina lidí jejich znalost a schopnost aplikovat je v rozličných situacích v pracovním i běžném životě velmi často využije. Bezesporu se jedná, po používání základních početních operací a využití procent, o jednu z nejvyužívanějších matematických dovedností.

Po nástupu na pozici učitele matematiky na 2. stupni v roce 2014 mě překvapilo, kolika žákům druhého stupně činí i ty nejjednodušší úlohy na výpočet obvodu a obsahu problémy, kolik žáků vůbec není schopno uvědomit si, co vlastně počítá, kolik z nich bezmyšlenkovitě sestaví absolutně nesmyslný vzorec. Výuka žáků často již začátku 6. ročníku ukázala na velké mezery ve znalostech uvedené problematiky, včetně nepochopení významu základních geometrických pojmů. Při studiu na pedagogické fakultě jsem se seznámil s některými příčinami výše uvedených i dalších problémů, měl jsem možnost je zažít a diagnostikovat na hodinách svých kolegů a viděl jsem i řadu úloh, které k formálnímu řešení vedly.

Po třech letech výuky jsme se s kolegou rozhodli pro výuku podle učebnic společnosti H-mat. Přechod na jiný systém výuky, poznatky ze studia na pedagogické fakultě stály za rozhodnutím zevrubněji prozkoumat základy geometrie u našich žáků; další edukace se mi bez poznání výsledků předchozí výuky začínala zdát málo efektivní.

Cílem první části diplomové práce jsou:

1. zevrubné prozkoumání současné teoretické koncepce didaktiky matematiky s důrazem na její geometrickou část,
2. porovnání přístupů dvou souborů učebnic matematiky pro 1. stupeň,
3. výběr prostředí, která jsou z didaktického hlediska vhodná pro budování geometrických pojmů obsah a obvod,
4. popis strategií vhodných pro zjišťování obvodu a obsahu na čtvercové síti.

V druhé části představím úlohy, které jsem vybral z učebnic matematiky pro 4. a 5 ročník vydavatelství Fraus, do didaktického testu, který jsem realizoval se záměrem:

1. zjistit, na jaké úrovni jsou znalosti žáků v oblasti míry bezprostředně po ukončení 1. stupně na naší ZŠ,
2. provést případnou reedukaci špatně pochopených částí oblasti míry,
3. po třech měsících ověřit předpokládanou změnu úrovně.

Po realizaci svého záměru zhodnotím případný posun v žákovském porozumění oběma pojmům. Během realizace v několika rozhovorech nad vybranými úlohami nahlédnu do myšlení konkrétních žáků.

V závěru práce zhodnotím, do jaké úrovně se mi podařilo splnit představené cíle.

1 Teoretická část

V teoretické části nejdříve nahlédnu do Rámcových vzdělávacích programů pro předškolní a základní vzdělávání, konkrétně budu sledovat tematický okruh Geometrie v rovině a prostoru, zhodnotím, jak koresponduje s výstupy ve formě Standardů pro základní vzdělávání na 1. stupni a s požadavky pro přijetí na víceletá gymnázia. Dále se zaměřím na současné didaktické koncepce. Představím pojmy proces a koncept, které současné teorie prostupují, teorii generického modelu M. Hejného, model geometrického porozumění manželů van Hiele, koncept geometrické osobnosti P. Vopěnky a fáze pojmotvorného procesu pojmu míra v geometrii N. Vondrové. Poté porovnám dvě sady učebnic z hlediska jejich přístupu k budování geometrického povědomí, představím prostředí vhodná pro budování sledovaných pojmů a v závěru se zaměřím na možnosti, které nabízí čtverečkovaný papír.

S rovinnými geometrickými obrazci se každý člověk setkává již v nejútlejším dětství. Nejdříve náhodně, bez pojmenování, různé nahodilé obrazce, skvrny, obrázky v knížkách, dále jako průvodními jevy 3D objektů, kdy čtverec je stěnou krychle, při obkreslování a vybarvování. Malé dítě pojmy obvod a obsah nepotřebuje, okolí je běžně nepoužívá. Přesto, obkreslování a vybarvování, jsou zcela jistě prvním praktickým vyjádřením obou pojmů.

V mateřské školce, hlavně v posledním povinném předškolním období, se budoucí školáci seznamují se základními geometrickými obrazci – čtverec, obdélník, trojúhelník a kruh. Pojmy obsah a obvod nadále nejsou potřebné, pokud se s nimi děti setkávají, mělo by se jednat především o jejich modely. Obvod vyjadřujeme jako počet dřívek, špejlí, sirek a obsah jako počet čtverečků/obdélníčků, karet, dlaždic, apod.; obojí lze využít v oblasti numerace. Většina činností, které souvisejí s geometrickými 2D a 3D objekty, je ryze manipulačních. Děti skládají obrazce z částí, staví stavby z kostek a dalších těles, leporely, ohradami a dalšími „stavebními“ prvky vymezují plochu. D. Jirotková je toho názoru, že *výuka geometrii nevyužívá existujících zkušeností žáků přicházejících do prvních tříd a nechává ležet ladem obrovské inspirační možnosti pro mnohé jevy geometrického světa.* (Jirotková, 2012, s. 28). Pokud žáci po přechodu na základní školu např. nemohou pokračovat v manipulačních činnostech s krychlí, kdy další rozvoj jejich geometrických představ může z těchto činností vycházet, ale musí počkat až do 2. vzdělávacího období, zůstává motivační potenciál předchozí hry nevyužit.

Na základní škole se na 1. stupni v 1. vzdělávacím období v oblasti geometrie, více či méně, pokračuje v manipulačních činnostech, které žáci znají z mateřské školky. Záleží na vztahu učitele k matematice a ke geometrii zvlášť, na jeho zkušenostech a v neposlední řadě, jak si ukážeme v kapitole 1.3, i na jím používané řadě učebnic.

Ve 2. vzdělávacím období, ve 4. a 5. ročníku ZŠ, již žáci cíleně pracují s pojmy obsah a obvod jednotlivých geometrických obrazců. Záleží na pedagogickém přesvědčení, vyučovacím přístupu a didaktických znalostech obsahu konkrétního vyučujícího, jak danou látku žákům zprostředkuje, zda cíleně vytváří příležitosti pro rozvoj tvořivosti žáků nebo zda je vede cestou definic, přesných termínů, postupů a vzorečků. S rozdílem přístupů, které bychom mohli nazvat konstruktivistickým a transmisivním, stojí a padá jistota žáků při řešení úloh nejen z oblasti geometrie.

1.1 Rámcový vzdělávací program

Rámcový vzdělávací program je závazným dokumentem, na základě kterého školy vytváří vlastní Školní vzdělávací program. V této kapitole nahlédneme do rámcových programů pro předškolní a základní vzdělávání pro 1. stupeň základních škol, uvidíme tak poznávací linku zkoumaných pojmů, jak s ní pracují kurikulární dokumenty, čím se řídí většina autorů učebnic a porovnáme je se Standardy pro základní vzdělávání a specifikací didaktických testů pro přijímací zkoušky na osmiletá gymnázia, jak je veřejnosti na svých stránkách předkládá organizace Cermat. Úlohy v didaktických testech jsou obecně vnímány jako nejtěžší a nejkomplexnější; řada učitelů a soukromých vzdělávacích organizací v závěru 1. stupně na řešení těchto úloh žáky připravuje.

1.1.1 Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání

V předškolním vzdělávání by budoucí žáci a žákyně měli v oblasti geometrie získat základní poznatky o základních geometrických tvarech a tělesech, které se mohou stát základem, součástí, budování *prekonceptů*, budoucích poznatků a výsledků dalšího bádání. Program se zaměřuje i na rizika ohrožující úspěch předškolního vzdělávání, což je dle mého názoru část, která v programu pro základní vzdělávání chybí. Kurzívou zvýrazňuji všechny činnosti a očekávané výstupy, které se týkají geometrie.

Vzdělávací nabídka (co učitel dítěti nabízí)

Činnosti zaměřené na *seznamování se s elementárními číselnými a matematickými pojmy a jejich symbolikou* (číselná řada, číslice, *základní geometrické tvary*, množství apod.) a *jejich smysluplnou praktickou aplikaci* (Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání)

Očekávané výstupy (co dítě na konci předškolního období zpravidla dokáže)

chápat základní číselné a *matematické pojmy*, elementární matematické souvislosti a *podle potřeby je prakticky využívat* (porovnávat, uspořádávat a *třídit soubory předmětů podle určitého pravidla*, orientovat se v elementárním počtu cca do šesti, chápat číselnou řadu v rozsahu první desítky, poznat více, stejně, méně, první, poslední apod.) (Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání)

Rizika (co ohrožuje úspěch vzdělávacích záměrů učitele)

- nedostatek příležitostí k poznávacím činnostem založeným na vlastní zkušenosti
- převaha předávání hotových poznatků slovním poučováním a vysvětlováním
- omezený prostor pro vyjádření a uplatnění představivosti a mimoracionálního poznávání
- převažující důraz na pamětní učení a mechanickou reprodukci, málo názornosti i prostoru pro rozvoj fantazie
- zahlcování podněty a informacemi bez rozvíjení schopnosti s nimi samostatně pracovat
- málo příležitosti a prostoru k experimentaci a exploraci a samostatnému řešení konkrétních poznávacích situací
- nedostatek porozumění a ocenění úspěchu či úsilí (Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání)

Ve výčtu nabídky a výstupů vidíme důraz na seznámení s jednotlivými tvary a nacházení jejich reprezentantů v reálném životě. Vyjmenovaná rizika by se dle mého názoru mohla uvést i ve vzdělávacím programu pro další stupeň vzdělávání a to téměř bez úprav, protože jsou stejná i pro základní vzdělávání.

1.1.2 Rámcový vzdělávací program základní vzdělávání, 1. stupeň ZŠ

RVP ZV odděluje v rámci 1. stupně očekávané výstupy na 1. a 2. období. Z programu vybírám pouze části týkající se geometrie.

V tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací. (Rámcový vzdělávací program základní vzdělávání)

GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU

Očekávané výstupy – 1. období

žák

M-3-3-01 **rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary** a jednoduchá tělesa; **nachází v realitě jejich reprezentaci**

M-3-3-02 **porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky**

M-3-3-03 **rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině**

Minimální doporučená úroveň pro úpravy očekávaných výstupů v rámci podpůrných opatření:

žák

M-3-3-01p **pozná a pojmenuje základní geometrické tvary a umí je graficky znázornit**

M-3-3-01p rozezná přímku a úsečku, narýsuje je a ví, jak se označují

M-3-3-02p používá pravítko (Rámcový vzdělávací program základní vzdělávání)

Žáci pokračují v poznávání tvarů, které by na konci 1. období měli být schopni vymodelovat či graficky znázornit, porovnat je a změřit, zasadit do reality. Zmíněná modelace je zjevnou pobídkou k manipulačnímu poznávání. O obvodu a obsahu zatím není zmínka.

Očekávané výstupy – 2. období

žák

M-5-3-01 narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce

M-5-3-02 sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, **obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran**

M-5-3-03 sestrojí rovnoběžky a kolmice

M-5-3-04 **určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu**

M-5-3-05 rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru

Minimální doporučená úroveň pro úpravy očekávaných výstupů v rámci podpůrných opatření:

žák

M-5-3-01p znázorní, narýsuje a označí základní rovinné útvary

M-5-3-02p měří a porovnává délku úsečky

M-5-3-02p vypočítá obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran

M-5-3-03 sestrojí rovnoběžky a kolmice

M-5-3-05p určí osu souměrnosti překládáním papíru, pozná základní tělesa

Učivo

- základní útvary v rovině – lomená čára, přímka, polopřímka, úsečka, čtverec, kružnice, obdélník, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník, mnohoúhelník
- základní útvary v prostoru – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec

- délka úsečky; jednotky délky a jejich převody
- **obvod a obsah obrazce**
- vzájemná poloha dvou přímek v rovině
- osově souměrné útvary (Rámcový vzdělávací program základní vzdělávání)

Klíčová slova této části vzdělávacího programu v oblasti geometrie jsou: modeluje, měří, porovnává a odhaduje, pojmenuje a rozezná. Všechna tato slova souvisí s první hladinou pojmotvorného procesu míry, jak uvedu v kapitole 1.2.5 a jsou nezbytným základem pro bezpečný přestup do dalších etap a jejich zvládnutí. Obvod se zjišťuje měřením délek stran a jejich sečtením, u obsahu je oporou čtvercová síť.

V RVP ZV chybí již zmíněná rizika, která vzdělávací program pro MŠ uvádí. Zároveň zde není vůbec zvýrazněný význam propedeutické etapy. Obojí by v programu být mělo; učitelé by se mohli snadněji vyvarovat chyb předčasného zobecňování a algebraizace.

Pro učitele, především pro začínající učitele, by bylo přínosné, pokud by se uvedené výstupy vzdělávacího programu zvýraznily ve schématu (na mapě), aby linka budování pojmů a dovedností byla více zřetelná. Pokud by u jednotlivých výstupů byly uvedeny zároveň gradované standardní úlohy, ukázky nebo alespoň návrhy manipulačních aktivit a zdůrazněn propedeutický význam pro další konkrétní výstupy, učitelům by se do rukou dostal jasně ohraničený manuál pro všechny typy žáků.

Pokud by takto zpracovaný program byl pro učitele vodítkem a ideálně i pomůckou pro vlastní tvorbu úloh, pro autory učebnic by měl být „zákonem", který nelze přestoupit. Výjimku by tvořily úlohy, resp. kapitoly pro nadané žáky.

1.1.3 Standardy pro základní vzdělávání, 1. stupeň, Matematika a její aplikace

Tematický okruh: 3. Geometrie v rovině a v prostoru (očekávaný výstup M-5-3-02)

Indikátory:

1. **žák rozlišuje obvod a obsah rovinného útvaru**

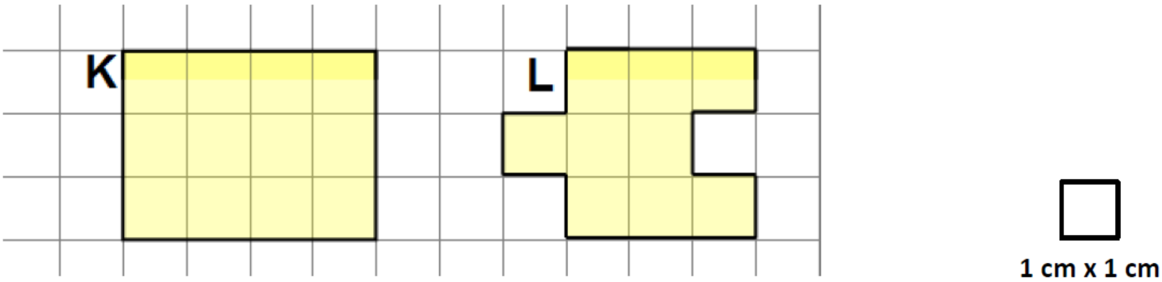
2. žák určí s **pomocí čtvercové sítě nebo měřením obvod rovinného útvaru** (trojúhelníku, čtyřúhelníku, mnohoúhelníku)

3. žák graficky sčítá, odčítá a porovnává úsečky

4. žák určí délku lomené čáry graficky i měřením

5. žák převádí jednotky: kilometry na metry, metry na centimetry, centimetry na milimetr

Ilustrativní úloha: Na obrázku jsou dva rovinné útvary K, L. Jaký je jejich obvod? Údaj zapiš v centimetrech i milimetrech.



Obrázek 1 – Standardy pro základní vzdělávání 2013

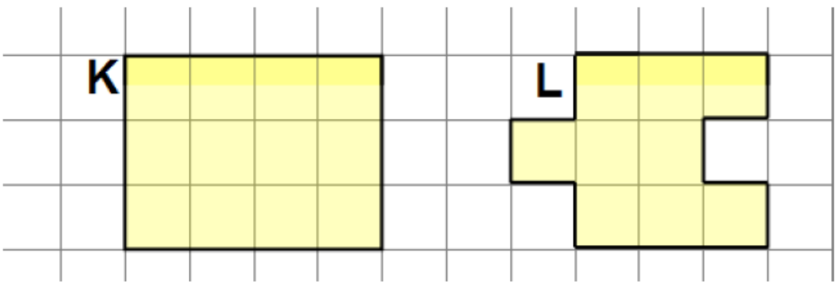
Tematický okruh: 3. Geometrie v rovině a v prostoru (očekávaný výstup M-5-3-04)

Indikátory:

1. žák určí **pomocí čtvercové sítě obsah rovinného útvaru, který lze složit ze čtverců a obdélníků**

2. žák používá základní jednotky obsahu (cm^2, m^2, km^2) bez vzájemného převádění

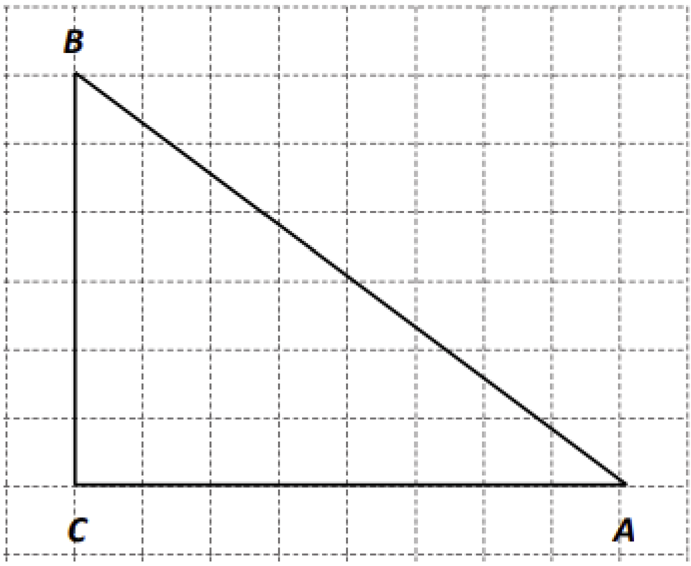
Ilustrativní úloha: Na obrázku jsou dva rovinné útvary K, L. Eliška řekla, že oba útvary mají stejný obsah. Měla pravdu?



Obrázek 2 – Standardy pro základní vzdělávání 2013

Standardy pro vzdělávání opakují požadavek Rámcového vzdělávacího programu. Obvody se měří a u obsahu se výpočty opět odehrávají na čtvercové síti, která se objevuje i v ilustrativních úlohách. Pro zajímavost uvedu ještě jednu úlohu, kterou by žáci měli být schopni vyřešit v závěru druhého stupně.

Délka strany čtverce v mřížce je jeden centimetr. Urči obvod a obsah trojúhelníku *ABC*.



Obrázek 3 – Standardy pro základní vzdělávání, 2. stupeň 2013

Pokud by se úloha týkala pouze obsahu, tak by ji, podle mého názoru, vyřešila valná většina žáků 5. ročníku, kteří se s geometrií na čtvercové síti během prvního stupně setkali. Obvod by pak určili měřením; zde se samozřejmě cílí na znalost Pythagorovy věty, resp. pythagorejských trojic, které se každoročně objevují v didaktických testech u přijímacích zkoušek na střední školu.

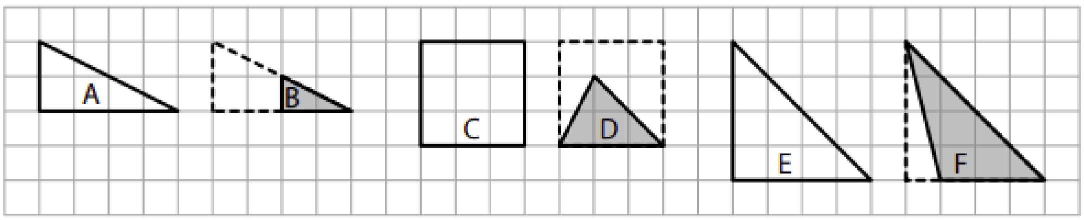
1.1.4 Specifikace požadavků pro přijetí na osmiletá gymnázia

Pro učitele Českého jazyka a matematiky na 1. stupni je, stejně jako u jejich kolegů z 2. stupně, dalším z důležitých vytyčených cílů, hlavně u nadanějších a motivovanější žáků, Didaktický test. Z tohoto důvodu uvádím obecné požadavky těchto testů. Řešení obvodu a obsahu mnohoúhelníku koresponduje s výstupy z Rámcového vzdělávacího programu; autoři testů očekávají, že obvod mnohoúhelníku žáci určí sčítáním délek jeho stran a obsah pomocí čtvercové sítě. Zdá se mi důležité tyto požadavky neustále opakovat, protože zatím nic nenasvědčuje tomu, že by žáci měli umět používat jakýkoliv vzorec. Úroveň jejich matematických schopností a dovedností by měla stát na manipulačním řešení úloh a zkušenosti s úlohami ve čtvercové síti.

Uchazeč o vzdělávání v osmiletém gymnáziu prokáže osvojení následujících vědomostí a dovedností:

- měřením určí délku úsečky, používá jednotky délky (mm, cm, m, km) a převodní vztahy mezi nimi, určí graficky délku úsečky a lomené čáry, graficky porovná délky úseček, provádí odhad délky úsečky, srovnává délky úseček s využitím pomůcek a **určí obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran**
- určí **pomocí čtvercové sítě obsah čtverce, obdélníku, trojúhelníku a obrazců tvořenými těmito rovinnými útvary, porovná a odhaduje obsahy rovinných útvarů a používá základní jednotky obsahu (cm^2, m^2, km^2), porovnává rovinné útvary stejného typu podle velikosti** (cermat.cz)

Ve čtvercové síti jsou zakresleny bílé obrazce A, C, E a tmavé obrazce B, D, F.
Vrcholy všech obrazců leží v mřížových bodech čtvercové sítě. Obsah obrazce C je 9 cm^2.



(CZVV)

max. 4 body

8 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (8.1–8.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

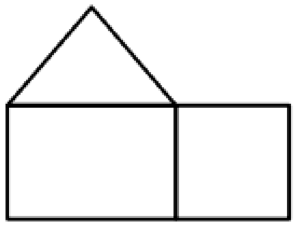
		A	N
8.1	Obsah obrazce B tvoří čtvrtinu obsahu obrazce A.	☐	☐
8.2	Obsah obrazce C je třikrát větší než obsah obrazce D.	☐	☐
8.3	Obsah obrazce E je o třetinu větší než obsah obrazce F.	☐	☐

Obrázek 4 – Didaktický test 2023

Šestiúhelník na obrázku se skládá z rovnoramenného trojúhelníku, obdélníku a čtverce.

Základna rovnoramenného trojúhelníku splývá s delší stranou obdélníku a rameno tohoto trojúhelníku je o 1 cm delší než strana čtverce.

Obvod čtverce je stejný jako obvod trojúhelníku, ale o 8 cm menší než obvod obdélníku.



(CZVV)

max. 3 body

5 Vypočtěte,

5.1 o kolik cm se liší délka a šířka obdélníku,

5.2 kolik cm měří rameno rovnoramenného trojúhelníku.

Obrázek 5 - Didaktický test 2023

Z uvedených úloh je patrné, že jejich řešení v použití vzorce nespočívá. Z požadavku na vědomosti a dovednosti vyplývá, že žáci musí mít zkušenost s celou škálou činností – určování obsahu na síti, porovnávání, odhadování, měření a používání jednotek a také by měli mít dobré představy o zmíněných mnohoúhelnících a jejich průvodních jevech.

1.2 Teorie ve výuce matematiky

Z řady teorií, které se zaměřují na mechanismus poznávacího procesu v matematice, v této kapitole představím teorii generického modelu prof. Milana Hejného, model geometrického porozumění podle manželů van Hiele, koncept geometrické osobnosti podle Petra Vopěnky a zmíním též fáze pojmotvorného procesu pojmu míra v geometrii. V úvodu teoretické části také vymezím pojmy proces a koncept.

Teoretický rámec práce mi bude východiskem při charakteristice způsobu zavedení pojmů v učebnicích a při hodnocení výsledků žáků v didaktických testech.

1.2.1 Proces a koncept

Teorie poznávacího procesu prostupují dva důležité pojmy, proces a koncept. Slovo proces vnímáme jako činnost, tušíme za ním tedy nějakou dynamiku, slovo koncept si spojujeme s něčím ustáleným, statickým, ať už tím je soubor myšlenek nebo dokončený stav. V matematice se během procesu - počítání, manipulování, hledání, postupně dostáváme ke konceptu – výsledku, objevu. Není to tak, že bychom na základě jednotlivých procesů (činností) okamžitě získávali ucelené koncepty (objekty). Spojení proces – koncept se spíše neustále opakuje, vytváří řetězec.

Metaforicky lze matematické poznání žáka vnímat jako stále se měnící mentální strukturu, která prochází mnoha změnami. K tomu, abychom mohli tento proces účinně usměrňovat, potřebujeme znát to, co uvedené změny řídí. Potřebujeme vědět, jaké procesy vedou k jakým konceptům a jak tyto koncepty iniciují nové procesy. (Hejný, 2014, s. 31)

Podle M. Hejného se *mentální pohyby proces – koncept a koncept – proces spojily do řetězce koncept – proces – koncept. Vstupní koncept tohoto řetězce je jiný než koncept výstupní. Výstupní koncept je bohatší o poznání, které přinesl předchozí proces. Převážná většina matematických úloh vede žáka k tomuto myšlenkovému pohybu, který má v řešitelských procesech žáků dominantní postavení. Většina úloh, které žáci řeší, začíná konceptem, který žáka vyzývá: „Řeš mne!" Z didaktického hlediska je v uvedeném řetězci klíčová část dynamická – proces. Je klíčová pro pochopení toho, jak se ve vědomí žáka tvoří nové pojmy, jak žák objevuje nové vztahy i jak žák organizuje svoje matematické poznání do účinného nástroje na řešení různých matematicky uchopitelných problémů.* (Hejný, 2014, s. 33)

U dětí předškolního věku a u začínajících školáků je s uvedeným řetězcem většinou výrazně ukotvená zkušenost s 3D objekty. Ví, co chtějí postavit (koncept) – staví objekt (proces) – porovnávají, zkoumají, ověřují výsledek (koncept). Navzájem mezi sebou nebo sami se sebou se svými předchozími objekty.

Je zajímavé, že u 2D geometrie je rozhodující transfer koncept – proces. Základní koncepty tvarů (čtverec, kruh, trojúhelník, měsíček, hvězdička, ...) přichází do vědomí žáka z jeho životních zkušeností. Když si dítě chce některý z těchto tvarů vytvořit ať již stříháním či překládáním papíru, modelováním pomocí sirek nebo provázku, musí mít samotný tvar, tj. koncept, ve vědomí již uložen. Tvorba tohoto objektu je pak procesem. Tedy představu o objektu dítě má již v paměti uloženu a během modelování daného objektu o něm získává *další zkušenosti a poznání. Zatím se jedná o* ***poznání v činnosti*** *nikoliv o* ***poznání ve slovech***. (Jirotková, 2012, s. 18)

Procedurální a konceptuální znalosti neexistují vedle sebe, ale jsou neoddělitelně spojeny. D. Tall a E. Gray představili teorii, jejímž klíčovým slovem je amalgám slov proces a koncept – **procept**: *„Dvojznačnost zápisu 3 + 2, kterou vnímáme jako proces (sčítání 3 + 2) i jako koncept (součet 3 + 2), umožňuje myslícímu člověku pružně v myšlenkách přecházet od procesu, jímž nějakou úlohu řeší, ke konceptu, s nímž pracuje jako s částí širšího tématu." Tedy k tomu, aby měl žák vytvořen procept spojů typu a ± b = c, nestačí, aby uměl bezchybně a rychle počítat. Musí s těmito spoji zacházet jako s prvky schémat.* (M. Hejný, Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně, 2014 [s. 35])

Stejně tak u vytvoření proceptu „obsah obdélníku" žákovi nestačí bezchybný a rychlý výpočet podle vzorce ($S = a \,.\, b$), který má uložený v paměti, ale musí mít vybudovaný nejen koncept plochy obdélníku, ale i koncept obdélníku jako geometrického objektu, jako osobnosti. Aby se oba koncepty spojily, je zapotřebí dlouhého sledu procedurálních aktivit, které izolované koncepty na konci vývoje doplní v procept. Ten se skládá z řady elementárních proceptů, které se týkají jednoho objektu. Procept „obsah obdélníku" bychom mohli nazvat proceptem vyššího řádu.

1.2.2 Teorie generického modelu

Teorie navazuje na práci Víta Hejného, který hledal metodu zlepšující matematické porozumění u žáků majících tendenci učit se matematiku nazpaměť, bez hlubšího porozumění a zaujetí.

Po letech bádání a experimentace vznikla výše uvedená teorie (TGM) a kolektiv autorů kolem prof. Hejného vydal v nakladatelství Fraus první řadu učebnic, ve které jsou veškeré matematické pojmy zaváděny v souladu s danou teorií.

Mechanismus poznávacího procesu, který představuje teorie generického modelu, lze vyjádřit schématem:

<table>
<tr><td rowspan="2">motivace</td><td>→</td><td>izolované modely</td><td>→ 1</td><td>generický model procesuální → konceptuální</td><td>→ 2</td><td>abstraktní poznatek</td></tr>
<tr><td colspan="6">krystalizace</td></tr>
</table>

Obrázek 6 - Pět etap poznávacího procesu (M. Hejný, 2014)

Motivace

Většina žáků přichází do 1. třídy s přirozenou, vrozenou, zvídavostí a touhou se něčemu novému naučit. Tato zvídavost a touha jsou jejich první motivací a pro poznávací proces jsou klíčové. Úkolem učitelů je udržet dětskou zvídavost co nejdéle a žákům, které ji z nějakého vnějšího důvodu nemají, kteří ji ztratili, ji pomoci v sobě znovu nalézt.

Pokud jsou žáci brzy po vstupu do vyučovacího procesu nuceni řešit úlohy, na které nestačí, třeba jen proto, že k nim ještě nedozráli a zároveň dostávají špatné známky, motivaci ztrácejí.

Motivace žáků je dvojího druhu. Motivace vnější, která závisí na přijímání okolním světem, například radost rodičů z pěkné známky a s tím spojené benefity či naopak trest za známku špatnou, nebývá trvalá. Motivace vnitřní vychází z žákova pocitu úspěchu, z radosti, že se něčemu novému naučil a z hlubokého pocitu intelektuálního růstu.

Pokud žákům umožníme, aby hned od počátku zažívali úspěch a s tím spojenou radost z objevování, pokládáme tím základní kámen pro jejich vnitřní motivaci. V matematice je takovým základním kamenem vnitřní motivace pocit z dobře vyřešené přiměřeně obtížné úlohy. Tato obtížnost má však ryze subjektivní charakter. Co je pro jednoho žáka náročné může být pro jeho spolužáka obtížné a naopak. Stojí za to, připomenout psychologický termín flow (plynutí), kterým se označuje psychický stav, kdy nejlépe vnitřně přijímáme nějakou činnost a je nám při tom dobře. Pokud děláme činnost, která je pro nás moc obtížná, jsme frustrováni, pokud by byla moc lehká, nudíme se.

Učitelům ve stanovení obtížnosti, kromě vlastního pedagogického citu i vlastní didaktické znalosti obsahu, pomáhají především gradované úlohy, kdy si každý žák vybírá úlohy různé úrovně obtížnosti podle toho, na co stačí a zároveň to pro něj není nudné; proces poznávání světa matematiky tak vlastně řídí on sám. Pokud se lze vyhnout vnějšímu zhodnocení nabytých znalostí a dovedností souhrnnou známkou, pokud lze spolu s žákem zhodnotit slovně pouze jeho posun, nemělo by se stát, že žák motivaci k poznávání a radost z objevování ztratí.

Ve výše uvedené tabulce se motivace nachází na počátku celého procesu, měla by však být aktivní v celém jeho průběhu.

Izolované modely

Žáci se v hodině matematiky ideálně setkají s velkým počtem různých zástupců geometrických objektů. Řadu z nich znají z předškolního období, kdy si s nimi hráli. V Hejného teorii jsou tito zástupci nazývány izolovanými modely, jsou označovány jako konkrétní případy příští znalosti.

Ve fázi izolovaných modelů nejde jen o jejich pojmenování. Při setkávání s nimi, žáci mohou objevovat jejich vlastnosti, jednotlivé zástupce vidí v různých polohách. Setkávají se nejen s modely, které zcela zřetelně poukazují na poznávaný geometrický objekt, ale také s modely překvapivými (úhlopříčka nekonvexního čtyřúhelníku), zdánlivými (čtverec, který žáci mylně identifikují jako kosočtverec) a ne-modely (nekonvexní útvar, kterým vymezíme pojem konvexnosti).

Etapu izolovaných modelů je důležité nevynechat ani nezkracovat, přestože může být dlouhá. Pokud žáky necháme přijít do styku s velkým množstvím izolovaných modelů, přichází na jejím konci kognitivní posun ve vnímání žáka - *zobecnění*, které je v úvodní tabulce vyznačeno $\boxed{\rightarrow 1}$.

Tuto dlouhou dobu rozložíme do pěti podetap:

(1) *První informace, první konkrétní zkušenosti, první model, který je zárodkem (germem) příštího poznání*

(2) *Postupný příchod dalších a dalších izolovaných modelů, které jsou uloženy ve vědomí zatím odděleně.*

Během prvních dvou podetap je důležité, aby učitel ponechal žákům dostatek prostoru na spontánní vytváření izolovaných modelů, aby je zbytečně neupozorňoval na jevy, které si ještě sami neuvědomují. Snaha žákům pomoci, ačkoliv je učitelova motivace jistě ušlechtilá, by mohla být kontraproduktivní a mohla by odvádět jejich pozornost. Pokud pomoc přichází z prostředí řešitelské skupiny, tak toto nebezpečí nehrozí. Spolužáci si navzájem nejsou autoritou, nabízenou pomoc mohou odmítnout. Učitel žákům může pomoci vhodnou úlohou, nabídkou evidence výsledků.
Pokud se v etapě izolovaných modelů zavede pojem bez náležité propedeutické přípravy, hrozí nebezpečí, že poznání žáků bude formální.

(3) Některé modely začnou na sebe navzájem poukazovat, shlukovat se do skupin a oddělovat od jiných. Vzniká předtucha, že tyto modely jsou v jistém smyslu „stejné“.

Třetí podetapa je klíčová. První dvě podetapy nevyžadují objevitelský krok. Žák standardním postupem a pílí získává sérii výsledků. K objevu dochází u třetí podetapy.

(4) Hledá se podstata oné „stejnosti“ a objevuje se korespondence (morfizmus) mezi některými modely. Soubor izolovaných modelů vytváří komunitu.
(5) *Soubor izolovaných modelů je dále obohacován, i když ve vědomí člověka již vzniká model generický nebo dokonce obecný poznatek.* (Jirotková, 2012, s. 19)

Pro celou etapu izolovaných modelů je charakteristické velké množství úloh, které žákům nabízí poznání co možná největšího počtu izolovaných modelů. Nejde však pouze o kvantitu úloh, ale především o jejich kvalitu a různorodost.

Zobecnění lze vnímat jako přechod na vyšší hladinu, jako výsledek prohloubení vhledu do stávajícího poznání. Objevuje se model generický.

Generický model

Jedná se o klíčovou etapu, ve které dochází k objevu konkrétního modelu, zástupce všech předchozích izolovaných modelů nebo skupiny těchto modelů. Žáci k poznání generického modelu přichází buď plynule, během čtvrté a páté podetapy izolovaných modelů, nebo je jeho objevení náhlé, často uvozeno AHA efektem.

Může zastupovat kterýkoli z izolovaných modelů této skupiny a působí ve skupině jako její organizační agent. Generický model, který zastupuje izolované modely, z nichž byl vytvořen, je jejich vzorem. Roli vzoru může však zastávat i poznatek, který se do žákova vědomí dostal osvojením a nebyl konstruován jako výsledek hledání morfizmu mezi izolovanými modely. Takový poznatek ale není generickým modelem, je jen vzorem. (Jirotková, 2012, s. 21)

V některých případech být může proces poznávání lemován větším počtem generických modelů. Ty M. Hejný označuje termínem *procesuální generické modely*. Proces uzavírá *konceptuální generický model*.

Abstraktní poznatek

Je vyústěním předchozích etap a následuje po druhém kognitivním posunu ve vnímání žáků, *abstrakčním zdvihu*, který je v tabulce označen $\boxed{\rightarrow 2}$.

Jestliže je generický model zobecněním předchozích izolovaných modelů, abstraktní poznatek zobecňuje jeho zápis. Pokud bychom jej zavedli přímo, jako pouhou informaci, bude poznatkem formálním. Jeho pochopení bude pro žáky nesmírně náročné, abstraktní poznatek přináší změnu v podobě náhrady čísel za písmena. Jedním z cílů teorie generického modelu je, aby se jednalo o skutečnou znalost.

Krystalizace

Krystalizace je dlouhodobý proces, který vytváří vazby mezi jednotlivými poznatky a spojuje nové vědomosti s předchozími. Jedná se o permanentní proces.

1.2.3 Model geometrického porozumění podle manželů van Hiele

Holandští pedagogové Pierre van Hiele a Dina van Hiele-Geldof navrhli lineárně uspořádaný model geometrického porozumění. Tento model popisuje pět hierarchických úrovní geometrického myšlení, kterými každý úspěšný student postupuje od rozpoznání geometrických obrazců až ke konstruování důkazů tak, jak se jeho chápání geometrie vyvíjí. Při popisu úrovní volně vycházím ze dvou zdrojů - konferenčních příspěvků M. Mason (1995) a I. Vojkůvkové (2012).

Jednotlivé úrovně, které popsali Clements a Battista (1992), by se pro naši potřebu daly popsat následovně:

Úroveň 1 (Vizualizace):

Geometrické objekty žák poznává pouze podle vzhledu. Útvar vnímá jako celek, rozpoznává jej podle jeho viditelné formy, vnímá jeho vlastnosti, aniž by je dokázal popsat. Prototypy útvarů často používá při identifikaci ostatních. Žák může například identifikovat obdélník tak, že jej přirovná ke dveřím, o kterých ví, že jsou obdélník.

Na této úrovni by žák měl rozpoznat a pojmenovat útvar a odlišit jej od ostatních, které vypadají poněkud stejně. Rozhodnutí, která žák činí, jsou založena na vnímání, nikoli na uvažování.

Úroveň 2 (Analýza):

Žák rozpoznává jednotlivé vlastnosti útvarů, ty jsou však izolované. Vzhledem k tomu, že každou vlastnost nazírá samostatně, nezaznamená žák žádný vztah mezi těmito vlastnostmi ani nevnímá vztahy mezi různými útvary. Žák na této úrovni je kupříkladu schopen určit, že trojúhelník má tři strany a tři úhly, ale neuvědomí si, že jak se úhel zvětšuje, zvětšuje se i protilehlá strana.

Žák na této úrovni pojmenuje vlastnosti geometrického útvaru, ale není schopen určit jejich důležitost, všechny jsou důležité stejně. S útvary dokáže jednat manipulačně; může je rozdělovat a skládat, měřit, rýsovat.

Úroveň 3 (Abstrakce):

Na této úrovni jsou žákovské definice smysluplné, přičemž vztahy vnímá mezi vlastnostmi a mezi útvary. Žák na této úrovni vyslovuje neformální argumenty k odůvodnění svých úvah, rozumí závěrům, které z nich vyplývají, rozpozná kritéria pro třídění do skupin. Roli a významu formální dedukce však nerozumí.

Na této úrovni je žák například schopen odlišit rovnoběžník od lichoběžníku na základě vlastností dvojic protilehlých stran, ke zdůvodnění může použít vlastní neformální jazyk.

Úroveň 4 (Dedukce):

Student umí konstruovat důkazy, chápe roli axiomů a definic, uvědomuje si význam nutných a postačujících podmínek. Na této úrovni by žáci (studenti) měli být schopni formálně uvažovat pomocí axiomů, teorémů a definic. Mohou konstruovat důkazy, jaké se běžně objevují v hodinách geometrie na střední škole.

Úroveň 5 (Nekompromisnost):

Student na této úrovni rozumí formálním aspektům dedukce, vytváření a porovnávání matematických systémů. Student na této úrovni by měl chápat roli a nutnost nepřímého důkazu a důkazu sporem a být schopen uvažovat v neeuklidovských systémech. Může konstruovat důkazy, jaké se běžně objevují v hodině geometrie na střední škole.

Přechod mezi jednotlivými úrovněmi je lineární, žádnou úroveň nelze přeskočit. Na každé úrovni žák používá jiný jazyk a jinou symboliku, zaměřuje svoji pozornost na jiné vztahy, vychází z rozdílné (nabývající) zkušenosti.

Je třeba, aby učitel tyto úrovně odlišoval a respektoval odlišnosti ve vyjadřování žáků a v jejich vnímání geometrického světa obecně, aby měl individuální a respektující přístup. Učitel vyzývá k manipulačním aktivitám, pokládá smysluplné otázky, předkládá přiměřeně obtížné výzvy, vše za účelem dalšího objevování a hlubšího poznávání geometrických jevů. Učitel také pomáhá se zpřesněním a shrnutím objeveného.

Pro výuku geometrie na základní škole nám postačí sledovat první tři úrovně.

1.2.4 Koncept geometrické osobnosti podle Petra Vopěnky

Podle Petra Vopěnky spočívá první porozumění geometrickému světu v rozlišení jevů a v uznání, že jsou. Toto porozumění nevychází z nás, nýbrž z jevů samotných; první porozumění není činné, ale trpné. To jevy samotné se nám ukazují z prázdnoty, od nás se pouze vyžaduje, abychom do jejich světa vstoupili. Ovšem náš vstup do tohoto světa je již činem.

Takto se žákům vynořují první geometrické objekty, jejich myšlení je jimi upoutáno např. při skládání, pokládání, vytváření z různých předmětů, při hře. Bez této zkušenosti nemohou dosáhnout prvního porozumění. V první třídě se žáci s touto zkušeností velmi zřetelně oddělují od žáků, kteří ji nemají.

Některé jevy si vykládáme jako samostatné jedince. To, co z nějakého jevu činí samostatného jedince, označuje Petr Vopěnka *osobností* tohoto jevu, kterou můžeme jevu pouze přiznat. (Vopěnka, 2000, s. 25)

Geometrický objekt je pro daného žáka osobností, když si jej daný žák dovede vyvolat v představě bez opory modelů nebo obrázků (Hejný, 2014, s. 37), když je ve svém myšlení dokáže osamostatnit.

Osobnost je takový geometrický jev, který si umíme vybavit, zkonstruovat, vymodelovat na základě jeho slovního popisu, jména. Umíme ho vyčlenit ze souboru jiných jevů, jiných geometrických objektů a umíme též k němu přiřadit soubor objektů s ním příbuzných. (Jirotková, 2012, s. 39)

Vopěnka rozděluje objekty na jednoduché, které se z ničeho neskládají a z prázdnoty se vynořují samostatně a na jejich složeniny. *Nutnou podmínkou vnímání takovéto složeniny je nalezení něčeho, co svědčí pro jeho osobnost* (Vopěnka, 2000, s. 27). Tuto myšlenku nám přibližuje čtvercem, složeným ze čtyř úseček, které tvoří jeho hranici.

Jevům osobnost přiznáváme, a složeninám z jednoduchých geometrických objektů ji přiznáme, když cítíme účelnost takového počínání. (Vopěnka, 2000, s. 27)

Geometrické objekty při jejich vynořování mohou doprovázet další jevy, které se jinak samostatně neobjeví. Tyto jevy označuje Vopěnka jako jevy průvodní. Některé lze spatřit na jediném jevu, nazýváme je vlastnostmi. Některé se vynoří s celým společenstvím objektů, jedná se o vztahy.

Uvedené rozlišení Vopěnka nazývá porozuměním prvního okamžiku, jde o nahlédnutí do geometrického světa.

Učitel by měl být žákům průvodcem při tomto prvním nahlédnutím. Měl by jim dát možnost poznat co nejvíce zástupců jednotlivých geometrických objektů; nejlépe tak, že je nechá tyto zástupce modelovat a stane se moderátorem žákovské diskuse o vzniklých modelech.

Druhé porozumění geometrickému světu spočívá ve vykládání jevů jako objektů, jako něčeho, co má osobnost. Nelze tak činit svévolně a bez porozumění pro to, co před nás výklad klade a jak nám to předkládá.

Druhé porozumění je porozumění pro třídění, slučování, totožnost, vzájemné provázení a podobně (Vopěnka, 2000, s. 30); výklad je prací s těmito možnostmi, činně se jím obracíme k jevům, kterým jsme již porozuměli.

Vopěnkův pohled na porozumění světu geometrie nám umožňuje další diagnostiku žáků. Diagnostiku jejich porozumění objektům, se kterými pracujeme a jejich porozumění vlastnostem a vztahům mezi jednotlivými objekty.

Jen na základě dokonaného prvního porozumění (linie osobnost – vlastnost – vztahy) můžeme přistoupit k druhé fázi, kterou je třídění, slučování, nahrazení a podobně.

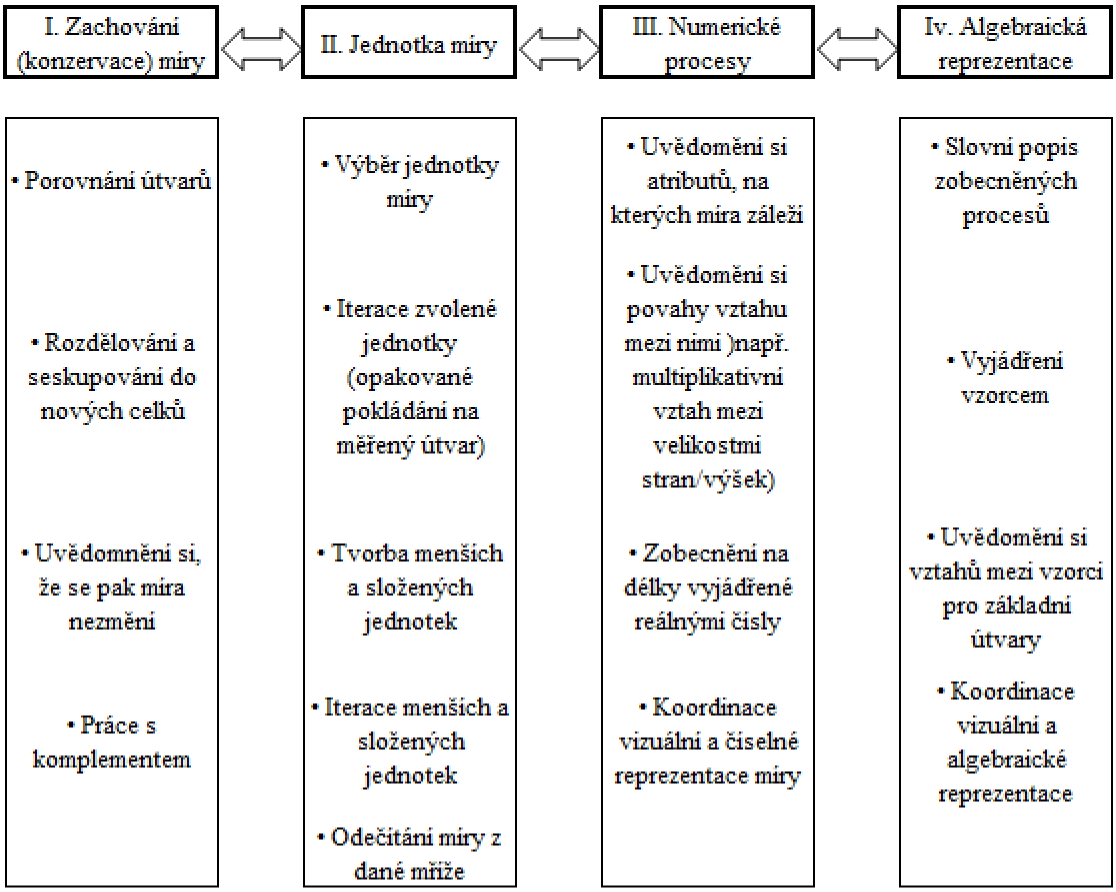
Rozdíly v osobnostech, inteligenci a zaměření našich žáků vylučuje, aby na cestě za poznáním geometrického světa kráčeli vždy na stejné úrovni. Pro další výuku postačí, pokud je pro vstup do druhé fáze připravena alespoň skupina žáků. Ti se mohou stát „spoluprůvodci“, kdy v diskusi s učitelem a v diskusi mezi sebou mohou být oporou v poznání pro ostatní.

1.2.5 Fáze pojmotvorného procesu pojmu míra v geometrii podle N. Vondrové

V kapitole 1.2 jsem zatím stručně popsal teorii generického modelu M. Hejného, koncept geometrické osobnosti P. Vopěnky a model geometrického porozumění podle manželů van Hiele, které se týkají z hlediska geometrie její podstatné části – poznávání geometrických objektů jako osobností, odhalování jejich vlastností a vzájemných vztahů. Další podstatnou část geometrie představují jevy míry, které jsou pojítkem mezi geometrií a aritmetikou.

Na základní škole pod pojem míra zahrnujeme měření délek, úhlů, plošných a prostorových útvarů. Zaměřím svoji pozornost na dvě míry ve 2D, které se na 1. stupni vyskytují nejčastěji, délku a obsah.

Délku měříme přímo, obsah většinou musíme vypočítat, což představuje značný rozdíl v jejich vnímání. Přestože se oba pojmy týkají jiné prostorové dimenze, lze při sledování pojmotvorného procesu u obou vycházet z následujícího schéma.



Obrázek 7 - Schéma pojmotvorného procesu míry v geometrii (N. Vondrová, M. Rendl)

Pro oba pojmy je důležitý pojem konzervace, který se týká rozpoznání útvarů a manipulace jimi vedoucí k porovnávání, rozdělování a seskupování do nových celků. Právě rozklad útvaru a jeho opětovné složení, myšlenka komplementu, kdy například žáci reagují na výzvy typu „Jedním střihem vytvoř z trojúhelníku obdélník.“ vede k uvědomění neměnnosti míry.

Při výběru míry je důležité, aby žáci nepracovali pouze s jednou jednotkou míry, kdy často v úlohách dostávají pouze zadání odkazující na použití běžných jednotek, ale aby měli určitou volnost ve výběru jednotek „nižšího“ řádu (čtverce, kachlíky, dlaždice, dřívka, apod.), u kterých mohou výsledky nacházet pouze nenumerickým způsobem, např. jejich iterací.

Tento způsob měření se nazývá dynamický, není při něm nutno používat čísla jako u statického způsobu, který se zaměřuje na zjišťování číselných hodnot. Při využití dynamického způsobu žák získává zkušenosti s komplementem. K evidenci zde dobře poslouží čtvercová síť, na kterou žáci postupně individuálně přecházejí a která pomáhá při přechodu do multiplikativní struktury. Tento přechod není nepodobný zdvihům (kognitivním posunům zobecnění a abstrakce), tak jak je používá M. Hejný v TGM.

Pro měření je důležitý výběr jednotky a její iterace (opakování), přičemž tato jednotka má stejnou dimenzi jako daná míra. Pomocí pokrývání měřeného útvaru jednotkami vytváříme strukturaci prostoru- pro délku opakujeme jednotku v jednom směru, pro obsah opakujeme jednotku ve dvou směrech a vytváříme tak obdélníkovou mřížku. (N. Vondrová, M. Rendl a kol., 2015, s. 254)

Předpokládá se, že toky numerické a nenumerické budou nejlépe fungovat v kombinaci. Ukázala to například intervenční studie Huanga a Witze (2011), kde optimální kurikulum pro učební oblast bylo „kombinováno". (Vondrová, Tůmová, 2017)

Na tuto kombinaci uvedené schéma poukazuje obousměrností šipek mezi jednotlivými procesy. Žáci mohou používat všechny způsoby, které potřebují ke svému řešení úlohy. Provázanost procesů pomáhá i v individualizaci výuky. Pokud učitel nenařídí jednotný způsob řešení, mohou se, v méně obtížných gradacích, výsledku dobrat i méně zkušení žáci, což vede ke zvýšení (udržení) jejich motivace.

Pokud jsou žáci pevně ukotveni ve III. etapě (Numerické procesy) mohou individuálně přecházet k algebraickému vyjádření, tedy k počítání pomocí vzorců. Žáci, kteří dospěli do poslední fáze, již nepotřebují k řešení úloh oporu předchozích struktur, ale mohou se k nim vracet při kontrole výsledku těžších úloh.

Podle M. Hejného a kol. (1990) jsou vzorce symbolikou zestručněné věty; tato stručnost je však současně výhodou a nevýhodou. Na jedné straně vzorce vystihují jádro poznatku, dají se zapamatovat a dobře se s nimi pracuje (pokud žák pochopí podstatu práce s algebraickými výrazy). Na druhou stranu mají vzorce tendenci stát v poznatkové *struktuře osamoceně a často jsou pouhou náhradou skutečného poznání. Umožňují totiž žákovi počítat i to, čemu sám nerozumí – kryjí formálnost poznání.* (Vondrová, Rendl a kol., 2015, s. 258)

V praktické části budu sledovat, v jaké etapě vývoje se žáci nachází a jestli vnímají geometrické objekty jako osobnost. Předpokládám, že nejvíce využiji teorii generického modelu, schéma pojmotvorného procesu míry a Vopěnkův koncept geometrické osobnosti.

1.3 Porovnání přístupů k budování geometrického povědomí ve dvou řadách učebnic

1.3.1 Přístup kolektivu autorů řady učebnic nakladatelství Alter

V první třídě se žáci setkávají s mírou - měří třídu, odhadují vzdálenost, určují materiály a předměty, které lze koupit na metry a řeší slovní úlohy, ve kterých vystupuje jednotka délky metr (prkna, provázek, látka a koberec). Vybarvují geometrické tvary, rýsují je a pojmenovávají. Měří úsečky, porovnávají délku lomených čar, na zemi porovnávají metry a kroky.

Ve druhé třídě rýsují úsečky daných délek, měří strany geometrických útvarů, násobí na čtvercové síti (*2n, 3n, 4n, 5n, 6n, 7n, 8n*), násobí a dělí pomocí množin, porovnávají délky stran v pravoúhelnících, rýsují mnohoúhelníky ve čtvercové síti.

Ve třetím ročníku se v učebnici 3/1 objevuje tato úloha na obvod čtverce: *„Kolik metrů pletiva potřebujeme na oplocení dvorku, který má tvar čtverce o straně délky 9 metrů? Nakresli obrázek.“* a dvě úlohy, které se dají znázornit jako obsah obdélníku; jednou se jedná o inverzní úlohu, kde je znám obsah a počet prvků v řadě (Kolik řad?), podruhé jde o sázení rostlin a zvýšení jedné řady ($(a+b)\ .\ c$), kdy je úloha znázorněna graficky, třetí úloha se týká porovnání počtu buchet na pekáči (4.6 a 3.6)

Ve druhém dílu je výzva k modelaci stran obdélníku pomocí provázku a k pozorování různé jejich délky, úlohy na odhad objemu, úloha na vystřihování čtverců a trojúhelníků s následným skládáním do dalších obrazců (rovnoběžníky a lichoběžníky). V jedné úloze žáci skládají list papíru (zlomky) a druhé přemisťují tyčinky na čtvercové síti. Ve třetím dílu žáci pomocí kružítka či proužku papíru porovnávají strany a úhlopříčky čtyřúhelníků, v další pomocí pravítka porovnávají strany čtverce, několik úloh na násobení s využitím asociace plochy.

Ve čtvrtém ročníku se kromě opakování výše uvedených typů úloh, především slovních, objevuje jedna krychlová stavba, modelace rovnoběžníku ze špejlí, jsou narýsovány rovnostranný a rovnoramenný trojúhelník, vysvětlena trojúhelníková nerovnost, žáci se dozvídají, že pravoúhelníky se skládají z pravoúhlých trojúhelníků. Zavádí se pojem obvodu trojúhelníku (2. díl); v jedné úloze je vysvětlen postup pomocí měření a v následující je zaveden vzorec $o = a + b + c$. O pár stránek dál je takto vysvětlen obvod obdélníku a čtverce, včetně všech variant příslušných vzorců. Následují úlohy typu *„Vypočítej obvod ... o straně ...“.*

Rendl, Vondrová k tomu uvádí, že *úskalí příliš rychlé algebraizace jsou si někteří učitelé vědomi a algebraické vyjádření vzorců odsouvají na konec 5. ročníku a přidávají vyjádření učitelů:*

„A možná dokonce se mi zdá, že z geometrie je tam toho hodně, že se po nich chce hodně brzy dost. Že geometrie je tak abstraktní, že oni na to abstraktní myšlení dozrajou až na tom druhém stupni. Já vím, že mají velký trable ve čtvrtý třídě s obsahem a odvodem obdélníka, čtverce, a tak jsem i po konzultaci s nějakými staršími kolegyněmi dospěla k tomu, že to nemá cenu to lámat před koleno, že je lepší si počkat do pátý třídy a tam už se to naučí opravdu všichni. Ale možná zase tím, že se s tím ve čtvrté třídě začne, takže oni už o tom něco vědí a pak už jim to jde v pětce snáz.“

„Z geometrie jsou to obsahy. Ale obsahy oni počítají přes čtvercovou síť. To znamená, my teda se do toho pouštíme tak trošku, že to zkoušíme i bez čtvercové sítě, seznamujeme se s jednotkami obsahu, ale to je pro ně tedy opravdu španělská vesnice, takže tam do toho opravdu jenom ťukneme a jdeme od toho pryč.“ (Rendl, Vondrová a kol., 2013, s. 49 - 50)

Z uvedeného vyjádření kolegů je patrné, že naštěstí pro velkou část žáků, někteří učitelé s předčasnou algebraizaci nesouhlasí.

Ve třetím díle sady učebnic pro čtvrtý ročník se objevuje obsah obdélníku, pomůcka k vyvození je vystřihovánka sady cm^2 a jednoho dm^2. V jedné úloze se plocha pokrývá, v další již počítá podle vzorce. Na další straně je inverzní úloha s uvedením vzorce pro výpočet délky strany obdélníku, známe-li jeho obsah ($a = S : b$). O několik stran dále je vysvětlen obsah čtverce, o kousek dál je inverzní úloha na čtvercové síti (obsahy čtverců a obdélníků) a úloha na porovnání obsahu obdélníku a čtverce, včetně porovnání jejich obvodů. Následuje kapitola, která uvádí čtvereční jednotky a sadu učebnic pro čtvrtý ročník uzavírá povrch krychle a kvádru.

V pátém ročníku se vše procvičuje, zavádí se další jednotky obsahu (*a, ha*), plocha se objevuje pomocí čtvercové síti (obsah i povrch), zařazena je i jedna úloha na práci s krychlovými stavbami, žáci sestavují vzorce pro další pravidelné útvary, počítají obsahy složených útvarů.

1.3.2 Přístup kolektivu autorů řady učebnic H – mat, o. p. s.

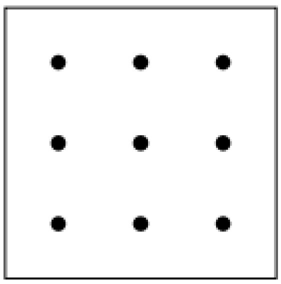
V první třídě se žáci postupně seznamují s jednotlivými prostředími. V prostředí Krychlových staveb žáci manipulativně objevují svět prostorové geometrie, u Dřívek získávají, opět v doprovodu manipulace, zkušenosti z rovinné geometrie – skládají různé tvary, většinou obdélníky, čtverce a trojúhelníky, které různě zvětšují, počítáním dřívek se připravují na pojem obvod. V prostředích Vláčků a Výstaviště manipulují různými tvary a propojují aritmetiku s geometrií. U Krokování propojují číslo a míru za přispění dramatizace. Překládají a stříhají, často pomocí obou technik vytváří *dečky*, v jejichž vzorech se objevují geometrické obrazce. Rozličné geometrické tvary též modelují pomocí provázků. S pojmem míra též pracují při zjišťování rozměrů vlastního těla – délky a obvody různých částí. Všechno je propojeno neustálou modelací a dramatizací, některá prostředí vlastně volně navazují na předchozí výuku v mateřské škole – dřívka, krychle, skládačky a vystřihovánky. Sešit obsahuje řadu volných stránek, často se čtvercovou sítí, kde mohou žáci zaznamenávat své řešení, ke kterým došli manipulativně. Získávají tak další cennou zkušenost s portrétováním jednotlivých obrazců různých obvodů a obsahů.

Ve druhé třídě pokračují s manipulativním seznamováním obou geometrických světů – prostoru a plochy. Tyto světy se leckdy vzájemně prolínají, nově k tomu přispívají další zaváděná prostředí. Žáci začínají s výrobou Šatů pro krychli; formou hry objevují sítě krychle a seznamují se tak s další geometrickou veličinou, povrchem; poznávají vazby mezi průvodními jevy krychle a jejího 2D obrazu - sítě, např. polohu čtverců, které představují rovnoběžné stěny krychle atp. Zkoumání těchto vazeb je připraveno tzv. Jevištěm a Pokojíkem. Jeviště má podlahu a pouze tři stěny; žáci vyrábí různá jeviště, která vybarvují. V Pokojíku přibývá strop, tedy horní podstava.

Znalost charakteristických znaků jednotlivých geometrických tvarů žáci prohlubují pomocí hry Sova, kdy hráči pomocí postupně kladených otázek odhalují, na který z předložených tvarů jeden z hráčů myslí. Zde se pojmy obvod a obsah mohou objevit, většinou v zástupných jednotkách - *počtu dřívek a počtu dlaždic (čtverců, kachlíků)*.

U Dřívek přichází složitější úlohy na řešení různě velikých čtverců a obdélníků, často s výzvou hledání více řešení. Jsou zde úlohy, ve kterých je třeba odhalit nebo vytvořit více geometrických tvarů, typicky několik obdélníků nebo čtverců v jiném, větším. Toto se opět odehrává za přispění manipulace – přesouvání, odebírání, doplňování – s dřívky.

Dalším z manipulativních prostředí je Geoboard, kdy žáci pomocí gumiček vytváří různé geometrické útvary, které mohou evidovat na připravených obrazcích, diskutovat o jejich vlastnostech.



Obrázek 8 - Geoboard (obrázek pro záznam)

Na straně 108 třetího (posledního) dílu řady pracovních sešitů pro 2. ročník se žáci setkávají s úlohou na obsah a obvod, kde pomocí tabulky evidují počty kachlíků na pokrytí podlahy (obsah) a počty dřívek na její ohraničení (obvod). Získávají tak cennou zkušenost se vztahem mezi obvodem a obsahem čtyřúhelníku. Pojmy obvod a obsah se začínají postupně objevovat jako alternativa dosud používaným pojmům počet kachlíků a počet dřívek.

V jedné z úloh začínají pro rozměry čtverce používat popis ve tvaru *č x č*, který již znají z prostředí parket.

V učebnici pro třetí ročník se spousta úloh na obvod a obsah předkládá v prostředí čtvercové síti, v učebnici se nazývá Mříž. Obsah se určuje počtem čtverců, obvod se měří v milimetrech. Pokud se měří úsečky, jejichž délka je iracionální číslo, jsou žáci vyzváni k diskusi o jejich délce. Do mříže se „překlápí" téměř většina úloh na použití geoboardu. Na čtvercové síti se také zachycuje půdorys a nárys krychlových staveb, zde se nazývají pohled shora a pohled zepředu; postupně se stavby otáčí a zachycuje se jejich nárys i z ostatních stran. Mnohost těchto pohledů zpevňuje žákovu jistotu při přenášení 3D objektů do 2D prostředí. Tomu napomáhají také inverzní úlohy, tj. stavba podle konkrétních pohledů. Stejně jako v učebnicích nakladatelství Alter i zde se čtvercovou sítí autoři podporují násobení, což je další podpora vztahu délek stran a obsahu čtyřúhelníku. Důležité jsou úlohy na porovnávání obsahů trojúhelníků, které jsou v mříži zasazeny do obdélníku.

Objevuje se úloha, ve které se na ciferníku předkládá rovnostranný trojúhelník a čtverec v různých pozicích, které byly vytvořeny pootočením.

Z krychlí žáci také staví nový útvar – kvádr. Podle portrétů zakreslují nárysy a půdorysy vzniklých kvádrů, určují jejich rozměry a objem v počtu krychlí.

Ve čtvrtém ročníku se objevují složitější úlohy v prostředí Krychlových staveb – více kostek, složitější tvary, sítě staveb. Autoři žákům představují další pravidelná tělesa – čtyřstěn, šestistěn, osmistěn; žáci pracují s jejich sítěmi, modelují je. Žáci začínají pracovat s Tangramem, který je „překlopen i do čtvercové sítě. Z jednotlivých útvarů skládají jiné, měří a porovnávají jejich strany. Na geoboardu žáci modelují podobné útvary; hledají ty s největším (nejmenším) obsahem, porovnávají délky stran, atd.

Hodně úloh se odehrává na čtvercové síti. Pomocí šipkových zápisů, které jsou propedeutikou souřadnicového systému a navíc přináší procesuální reprezentaci útvarů, vytváří na Mříži geometrické útvary. Při porovnávání délek stran těchto útvarů žáci pro kontrolu využívají i šipkové zápisy.

Některé úlohy používající v zadání Krychlové stavby nebo Mříž jsou využívány i v úlohách na objevování zákoutí aritmetiky; mřížový trojúhelník jako pomůcka pro zjištění zlomku – polovina a třetina, kdy se zároveň ukazuje, že dva trojúhelníky o stejné straně a stejné příslušné výšce mají stejný obsah. Stavby se manipulativně (odebíráním, přidáváním) upravují, aby vyhovovaly zadání zlomků.

Konečně čtvercová síť je také využívána u úloh na téma dělitelnosti (podlaha a stěny z kachlíků).

V pátém ročníku se pracuje ve všech uvedených prostředích, dále se hodně manipuluje. Geometrické útvary na čtvercové síti se stříhají a přemisťují tak, aby z nich byl jiný útvar, porovnávají se trojúhelníky se stejným obsahem (stejná strana a příslušná výška), pracuje se s novými tělesy (válec, kužel, koule). V učebnici se objevuje nová metoda zjišťování obsahu útvarů na čtvercové síti – „rámování". Žáci jsou též vedeni k odhalení vztahu mezi délkou strany čtverce a jeho obsahem.

1.3.3 Výsledek srovnání přístupů uvedených nakladatelství

Řada učebnic nakladatelství Alter geometrické úlohy více odděluje od aritmetických, manipulativní úlohy se zde objevují mnohem méně často než v učebnicích druhé společnosti, poměrně brzy zavádí vzorce, což žákům může činit problémy.

Teprve po zavedení vzorců pracuje se čtvercovou sítí, tento přístup vnímám jako opačný a nepřirozený, jako úlitbu Rámcovému vzdělávacímu programu a jako přípravu na úlohy z Didaktických testů.

Podle D. Jirotkové budování geometrie z abstraktních pojmů bod, přímka, úsečka, orientace výuky na poučky a vzorce, které jsou uchopené pamětí, a zanedbávání spekulativních aktivit neumožní žákům si vytvořit správné představy o základních geometrických objektech, procesech a vztazích. (D. Jirotková, 2012, s. 8)

Z popisů učebnicových řad obou vybraných společností je patrné, že svým přístupem, kdy žáci budují své geometrické vědomí prostřednictvím velkého množství úloh, jejichž vyřešení často stojí na manipulaci, zkoušení a žákovské diskusi, je pro učitele, který chce nechat žáky vybudovat vlastním tempem a vlastním způsobem myšlenková schémata a jednotlivé pojmy míry v geometrii ve 2D a 3D prostředí, kdy je toto budování pevně propojeno s aparátem aritmetiky, vhodnější řada učebnic od H – matu.

Sami autoři v úvodu učebnice pro 4. ročník uvádí: *„V našich učebnicích se snažíme nepředkládat žákům hotová moudra, ale pomocí úloh je dovést k tomu, aby tato moudra sami odhalovali... Žák vidí čtyři obdélníky vytvořené z kamínků. První má rozměry 2 x 1, druhý 3 x 2, třetí 4 x 3 a čtvrtý 5 x 4. V přiložené tabulce je zapsáno, kolik je v každém z těchto obdélníků kamínků. Žák doplní pod 4. číslo 20, pak si sám vymodeluje nebo nakreslí obdélník pátý o rozměrech 6 x 5, zjistí, že je tam 30 kamínků, a v této chvíli již některý žák zjistí, že pod 7. bude 42, protože je to 7 . 6. Spolužáci tento objev ověří a ti, kteří jsou podezíraví, vymodelují ještě i obdélník 8. a zjistí, že skutečně je zde 8 . 7 = 56 kamínků. Umí to i pro 11. obdélník (11 . 10 = 110). Objev ve třídě udělá několik žáků, ostatní tento objev převezmou. Ale převezmou jej s porozuměním, protože se sami na objevování podíleli.*


Pokračuj a eviduj počet kamínků.

pořadí	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	11.	50.
počet kamínků	2	6	12						

Obrázek 9 - Matematika pro 4. ročník, úloha 14/10, prof. Hejný a kol. H-mat, o. p. s.

V hlavách nejen objevitelů, ale všech žáků dochází k abstrakci. Z několika menších konkrétních případů (jednotlivé obdélníky) zjistí zákonitost, tu ověří např. na obdélníku číslo 11 a řeknou že: „Tak je to vždycky.“ Staří latiníci měli rčení: „Pars pro toto.“ V překladu zní: Část pro všechno.“ Tím je vyjádřeno, že poznání o obdélníku číslo 11 je vlastně poznáním o všech obdélnících.

Podobný charakter objevu, kde z několika konkrétních případů třída objeví případ obecný, má mnoho úloh v učebnici. Tento proces se nevztahuje pouze na matematiku. Chodit i mluvit se dítě učí stejným způsobem. Stejným způsobem se z učně stává mistr. Kdyby za učně jeho práci udělal někdo jiný, nikdy se mistrem nestane.

Popsaný objevitelský proces je silný intelektuální výkon žáka. Ten nelze urychlit, stejně jako nelze urychlit např. těhotenství. Snaha o urychlení celý proces zdeformuje.“ (H – mat, o. p. s., učebnice Matematiky pro 4. ročník ZŠ, 2021, s. 4)

1.4 Didaktická prostředí vhodná na budování pojmů obvod a obsah

V předchozí kapitole jsem porovnal dva zcela odlišné přístupy dvou sad učebnic pro 1. stupeň. Učebnicemi nakladatelství Alter není třeba se dále zabývat, nyní nahlédnu do jednotlivých prostředí „Hejného“ matematiky, které mají potenciál vybudovat základy pojmů obvod a obsah. Učebnice obsahují velké množství úloh, při jejich řešení žáci objevují různé strategie, které mezi sebou porovnávají, a kterými dlouhodobě po malých krůčcích připravují nástup algebraizace. Jak je vidět ze stručného popisu učebnic, numerický a nenumerický svět je v nich velmi silně provázán, přechody mezi oběma světy jsou nenásilné, obousměrné, často za přispění manipulace. Pokud učitel žáky nechá řešení hledat, nechá je manipulovat a diskutovat, je velmi reálné, že se další učitelé nebudou tolik potkávat s negativními jevy, které jsou následkem urychlení pojmotvorného procesu.

1.4.1 Obvod

Dřívka

Manipulační prostředí, ve kterém žáci poznávají zákonitosti nejen rovinné geometrie, ale i zlomků a posloupností. U obvodu žákům usnadňuje porovnávání jednotlivých útvarů, pomocí vnitřních dřívek lze pracovat i s obsahem. Dřívko je jednotkou míry, stejně tak i čtverec jimi vytvořený. Přesouvání stejného počtu dřívek může vést k důležitému objevu, že obvod a obsah útvarů neroste lineárně. Máme-li k dispozici 9 dřívek, můžeme vymodelovat obdélníky 1 x 8, 2 x 7, 3x 6, 4 x 5 s obsahy 8, 14, 18 a 20. Parametry vzniklých objektů je vhodné evidovat pomocí jednoduché tabulky. Žáci se tak mohou naučit pracovat s tabulkou a využít tento nástroj evidence v době, kdy ji ještě nejsou schopni řádně docenit.

Mříž (čtvercová síť)

Prostředí, které zpočátku slouží jako podklad pro záznam „dřívkových útvarů“, aby je posléze žáci, kteří již tolik nepotřebují oporu manipulace, využívali samostatně. Více v kap. 1.5.

Geoboard

Další manipulační prostředí, ve kterém mohou žáci modelovat a rozpoznávat různé geometrické objekty, jejich vlastnosti a vazby mezi nimi. Lze snadno „překlopit“ do prostředí čtvercové sítě. Pomocí gumiček zde vznikají útvary, u kterých nelze oddělit jednotlivé konstrukční části (strany) od útvaru samotného; tím se podporuje vnímání objektu jako osobnosti.

Šipkový zápis, konstrukce mnohoúhelníků na čtverečkovaném papíře

Prostředí, které je přípravou na souřadnicový systém. Šipkový zápis může být oporou při porovnávání délek, resp. obvodů. Další ze způsobů jak upevnit pojem obvodu; žák vrcholy útvaru vyznačí pomocí pohybu na čtvercové síti. Šipkový zápis úseček lze využít i při zkoumání jejich vzájemné polohy (rovnoběžnosti, různoběžnosti a kolmosti).

1.4.2 Obsah

Mříž (čtvercová síť)

Pro zjišťování obsahu lze využít všechna z již uvedených prostředí. Použití čtvercové sítě rozvedu v kapitole 1.5.

Množiny pro kartézský součin jako propedeutika měření obsahu na čtvercové síti

Dalším prostředím, kterého lze využít na budování pojmu obsah je prostředí množin, které primárně slouží pro procvičování malé násobilky. V učebnicích je většinou předkládáno formou čtvercové sítě, na které žáci dobarvují součin nebo jednoho z činitelů, ale nebylo by složité převést je na více manipulativní prostředí, např. pomocí barevných kartiček. Čtvercová síť by mohla sloužit jako záznam vyřešených úloh. Tak jako v ostatních prostředích i zde by manipulativní uchopování plochy mohlo problematickou část geometrické míry žákům přiblížit v počátcích výuky a méně zdatným žákům i později.

1.4.3 Propedeutika obsahu a obvodu v manipulačním 3D prostředí Krychlových staveb

Prostředí Krychlových staveb je v učebnicích H-matu zavedeno již v první třídě a provází žáky až do 6. ročníku. Jedná se o prostředí, které přímo navazuje na dětskou hru s kostkami. Kromě vytváření staveb se žáci také od 2. ročníku věnují povrchu krychle, kdy vytvářejí střihy na šaty pro paní Krychli, v dalších ročnících již oblékají celou stavbu. V obou činnostech, stavbách i vytváření sítí, se nenásilným způsobem propojuje rovinná a prostorová geometrie. Krychle a stavby z ní jsou v úlohách znázorněny jak ve volném rovnoběžném promítání, tak i formou půdorysu a postupně i nárysu a bokorysu.

V některých úlohách jsou krychle využívány i v kontextu aritmetiky; modelování přirozených čísel a zlomků, početní operace, rytmus číselné řady. Při evidenci staveb se používají symboly, které plynule přechází na čísla, pro organizaci se žáci učí využívat tabulku.

U staveb žáci počítají počet kostek stavby u sítí počet čtverců. Setkávají se s objemem, obsahem, což vede k multiplikativnímu vztahu mezi délkami mnohoúhelníků a hranatých těles, a také pracují i s jejich prvními jednotkami.

Vondrová a Tůmová ve svém článku uvádí, že některé výzkumy (volně cituji)

- *ukazují na korelaci mezi prostorovými dovednostmi a úspěchem v matematice obecně (Friedman, 1995)*
- *tvrdí, že prostorové dovednosti přímo podporují učení dětí konkrétním tématům, včetně pojmu míry a počítání plochy a objemu a zdůrazňují konzistentní zjištění, že prostorové dovednosti a výsledky v matematice jsou u starších žáků propojeny (Sarama a Clements, 2009)*
- *naznačují, že rok výuky měření a výpočtů navíc nezlepší úspěšnost žáků v úlohách tak, jako kvalita jejich figurálního uvažování, které, zdá se, souvisí s prostorovými dovednostmi (Hannighofer a kol., 2011)*
- *zjistily, že figurální uvažování má, ve srovnání s vlivem třídy a pohlaví, největší vliv na celkovou kompetenci v oblasti míry a geometrických výpočtů (Hannighofer a kol., 2011)*

a tvrdí, že lepší prostorové dovednosti zlepšují dovednosti žáků ve výpočtech. Navrhují, že zlepšení uvažování žáků bez měření a geometrických výpočtů může ovlivnit jejich výkon ve výpočetních úlohách. (Tůmová, Vondrová, 2017).

1.5 Obsah a obvod na čtvercové síti

V úvodu kapitoly nelze nezmínit důležitou publikaci Čtverečkovaný papír jako MOST mezi geometrií a aritmetikou (Hejný, Jirotková, 1999), ve které autoři jako jedny z důvodů volby tohoto prostředí uvádí jednoduchost a názornost experimentování, kdy žákům stačí v mnohých případech pouze tužka nebo tužka a pravítko, a přirozenost způsobu propojení geometrie s aritmetikou.

1.5.1 Obvod

Obvod útvarů, které mají pouze horizontálně a vertikálně orientované strany, žáci mohou na čtvercové síti počítat stejně, jako když objekt postaví ze dřívek. Počítání na čtvercové síti je, stejně jako počítání dřívek, proces, jen vyššího řádu. Oba procesy vedou k poznání pojmu (konceptu) obvod. U obrazců, ve kterých strany neleží na vertikálách a horizontálách čtvercové sítě, je pojmotvorný proces (procedurálně konceptuální řetězec) podobný, jen počítání stran čtverců žák nahrazuje měřením. Pokud žák dostává velké množství úloh přiměřené obtížnosti, mechanismus obou řetězců zvnitřní; žákovi je jedno, který má právě použít.

Při měření úseček (v mm), které leží na diagonálách, žáci často dochází k rozdílným výsledkům, což je dáno iracionální hodnotou výsledku. Lze je nahradit symbolikou, např. 32^{-} nebo 22^{+}, přesný výsledek pak $5^{!}$. Toto značení je vlastně přípravou na poznání iracionálních čísel, v tomto případě odmocnin.

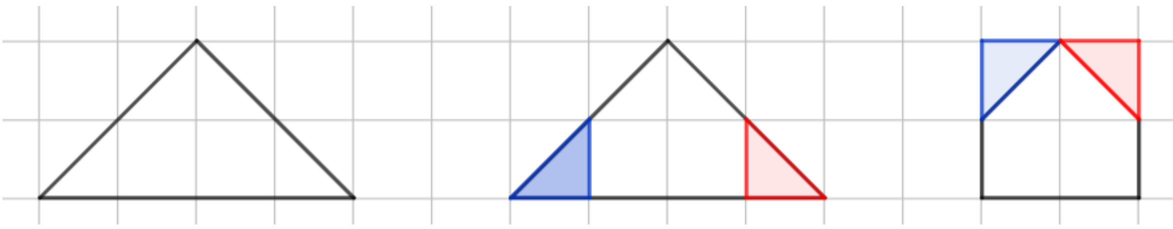
K porovnání délky úseček také slouží jejich šipkový zápis, který je vlastně dalším z izolovaných modelů a opět propedeutikou k iracionálním číslům a k Pythagorově větě.

1.5.2 Obsah

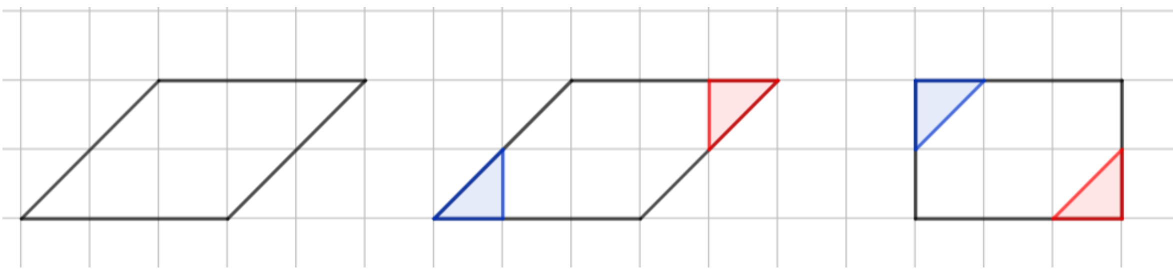
Pro zjištění obsahu máme na čtvercové síti k dispozici celkem tři základní metody – *rozklad* útvaru na jednotkové čtverce, *rozstříhání* útvaru a následným přesunem a spojením ustřižených částí do pravoúhelníku a *doplnění* na pravoúhelník, resp. *orámování* pravoúhelníkem. Použití prvních dvou metod se objeví dříve, třetí metoda nejdříve ve čtvrtém, častěji až v pátém ročníku; počítá se zde již s desetinnými čísly. První dvě metody se vynoří z manipulativních činností, třetí ve chvíli, kdy manipulace selhává. Všechny metody, kromě zjištění obsahu, vedou i k lepšímu vhledu do plošných útvarů.

Metoda rozkladu

Při použití metody rozkladu žáci odhalují možnosti přemístění částí mřížového útvaru tak, aby získali plochu složenou pouze z jednotkových čtverců. Na obrázku a) je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, který naznačeným způsobem převedeme na čtverec o délce strany 2. Na obrázku b) podobným způsobem měníme kosodélník na obdélník 3 x 2. Pokud použití této metody předchází manipulace s papírovými objekty je její použití u velkého počtu žáků intuitivní (lze v úvodu připomenout, přesouvané části lze odstřihnout). Ostatní žáci podobu činností po odhalení rychle přijmou.



Obrázek 10 - rozklad

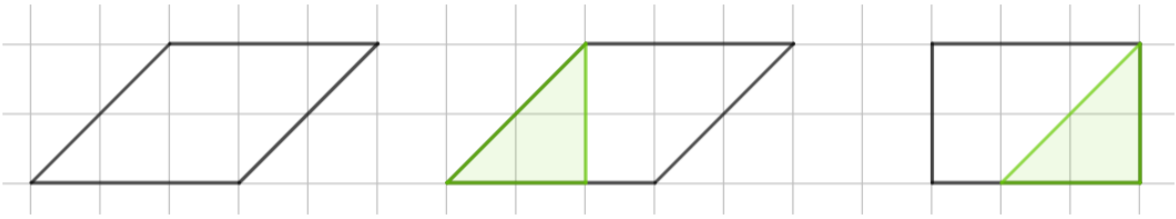


Obrázek 11 - rozklad

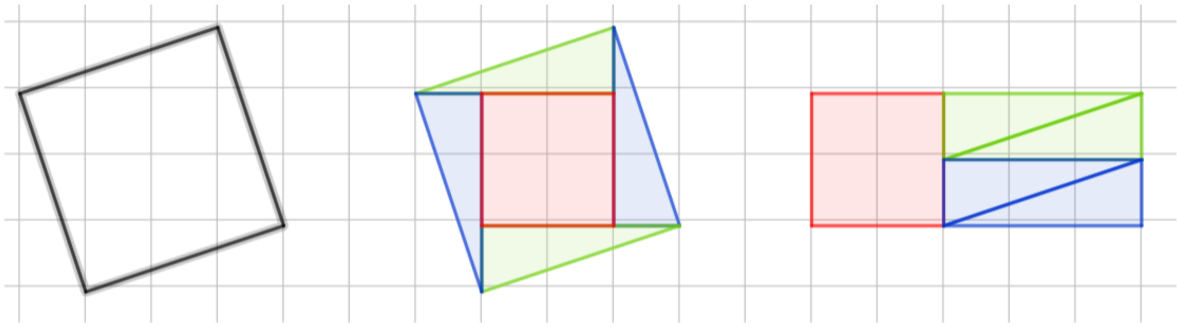
Metoda stříhání

Velmi podobná metodě předchozí; odhalené části se odstřihnou a přesunou tak, aby ve výsledku vznikl obdélník. Přípravné úlohy většinou začínají pokynem: "Jedním (dvěma) střihem, …". Pokud žáci pracují ve skupinách, resp. svá řešení sdílí v diskusi, smysl a přínos metody pochopí téměř všichni žáci. Na obrázku 12 roztřižením rovnoramenného trojúhelníku a posunem jedné z částí vznikne obdélník 1 x 3, na obrázku 13 se stejným způsobem pracuje s kosodélníkem, výsledkem je obdélník 3 x 2. Správný způsob rozstříhání čtverce na obrázku 14 lze podpořit výzvou: "Rozstřihni útvar na obrázku tak, aby vznikl jeden čtverec a právě dva shodné (stejné) obdélníky." Během řešení lze pro usnadnění doplnit i velikost požadovaných útvarů. Pokud znají způsob řešení metodou rozkladu, můžeme je pobídnout k dalšímu řešení, např. stanovit podmínku pouze jednoho střihu. Výsledkem je obdélník 5 x 2.

Obrázek 12 - stříhání



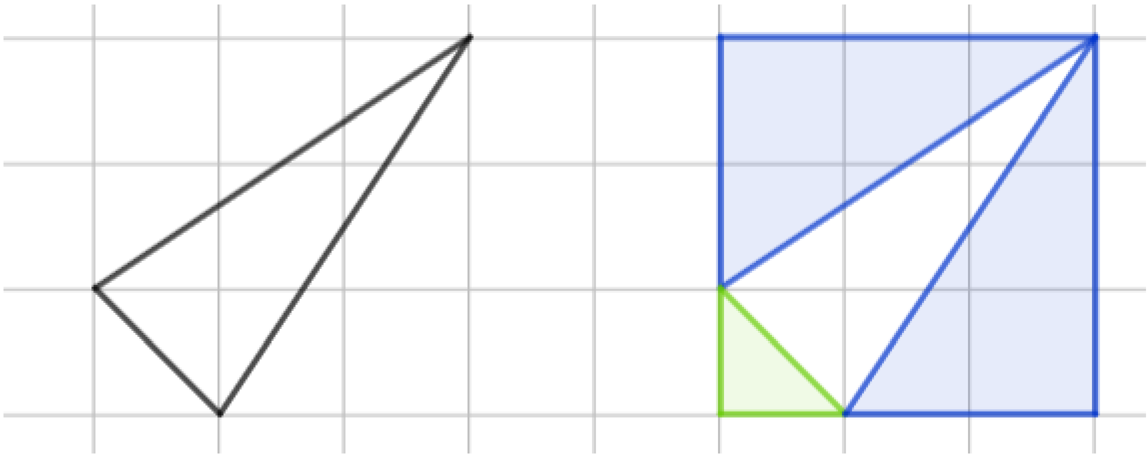
Obrázek 13 - stříhání



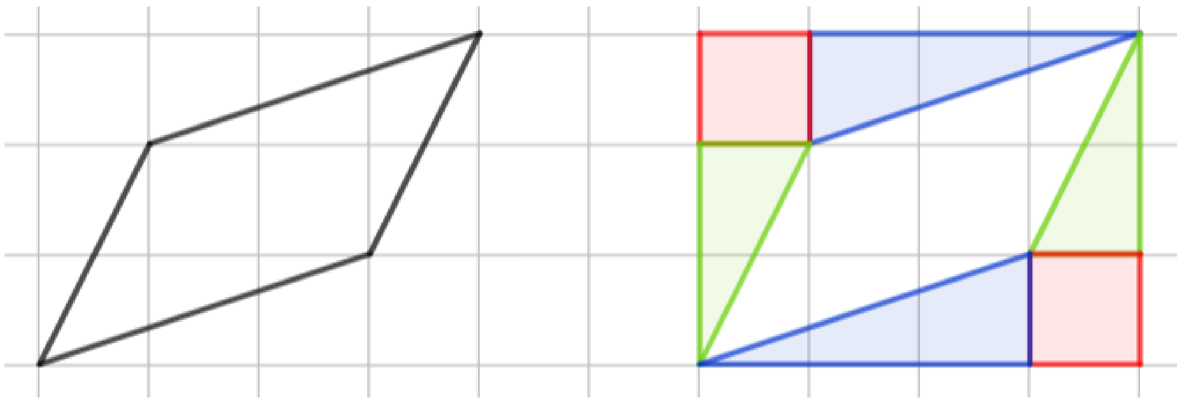
Obrázek 14 - stříhání

Metoda doplňování (obecně rámování)

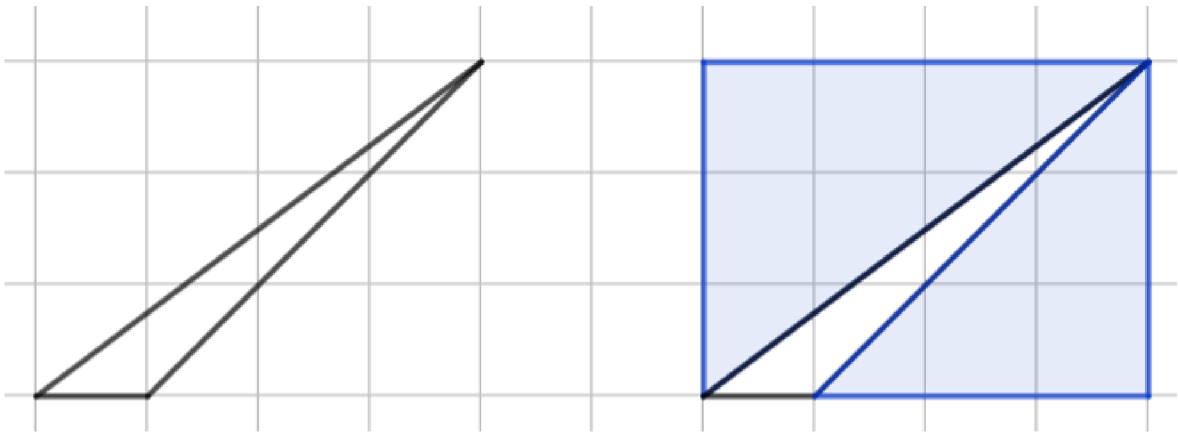
Nejsofistikovanější a nejuniverzálnější metoda, která předpokládá dobrou znalost předchozích metod. Začínáme doplněním pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků, jejichž ramena leží na přímkách čtvercové sítě výzvou: "Doplňte na čtverec." a pokračujeme ke složitějším úlohám. Na obrázku 15 doplníme na čtverec a provedeme výpočet, ve kterém od celkového obsahu čtverce odečítáme barevné části (trojúhelníky): 9 - 3 - 3 - 0,5 = 2,5. Na obrázku 16 doplníme na obdélník; výpočet je podobný: 12 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1,5 - 1,5 = 5. Na obrázku h) doplníme na obdélník a výpočtem 12 - 6 - 4,5 zjistíme, že obsah je 1,5. Metoda rámování je u poslední úlohy propedeutikou vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku.



Obrázek 15 - doplnění



Obrázek 16 - rámování



Obrázek 17 – rámování

2 Praktická část

V praktické části nejdříve představím úlohy, které jsem žákům formou didaktického testu předložil, popíši průběh 1. kola testování, které vyhodnotím a okomentuji, připojím rozhovory s některými žáky s následným komentářem. Popíši hodinu ve 4. ročníku, ve které matematiku učila paní učitelka dvou testovaných tříd. Po třech měsících od prvního testování, jsem v jedné ze tříd, ve které jsem učil matematiku, zadal test opakovaně; výsledky druhého kola okomentuji také. V závěru praktické části předložím výsledky testu, který se týkal porozumění pojmům slov obvod, obsah a plocha, tak jak je vnímají naši žáci.

Jako cíl praktické části jsem si stanovil prostřednictvím písemných testů zmapovat u žáků, kteří přechází na 2. stupeň základní školy, porozumění pojmům obsah a obvod, dovednost hodnoty těchto veličin určit na čtvercové síti, znalost jednotlivých základních geometrických útvarů. Testování nemělo ambice činit jakékoliv závěry ve smyslu kvality vzdělávání žáků na 1. stupni; mělo posloužit hlavně jako podklad pro jejich další vzdělávání, pro doplnění znalostí a dovedností, pro případnou reedukaci špatně nabytých znalostí a dovedností, pro odhalení formalismů.

Testování se zúčastnilo celkem 65 žáků čtyř 6. tříd, vždy v na začátku září, kdy jsou žáci po prázdninách odpočatí, jejich ochota se předvést v nejlepším světle je poměrně velká, ještě nebývá problém s větší absencí a neprobírá se nová látka. Třídy se nachází na jedné malé spádové základní škole sídlící v sociálně vyloučené lokalitě; vztah k výuce je na této škole obecně problematický, největším problémem je velká absence. Průměrná absence tříd bývá 100 - 150 hodin za pololetí, výjimkou nejsou žáci s absencí nad 250 hodin za pololetí. Poměrně velká skupina žáků má pro své studium malou oporu v rodině, což se promítá do jejich domácí přípravy, nikoliv nejen ve smyslu intelektuální přípravy na výuku, ale i pouhé přípravy pomůcek.

Délka trvání práce na didaktickém testu byla 90 minut; na škole byly zavedeny „dvouhodinovky“. Žáci předem věděli, že práce nebude známkována, byli seznámeni s tím, že cílem testu je zmapování jejich dosavadních znalostí z oblasti 2D geometrie, byli vyzváni k řešení alespoň těch úloh, resp. jejich částí, na které stačí.

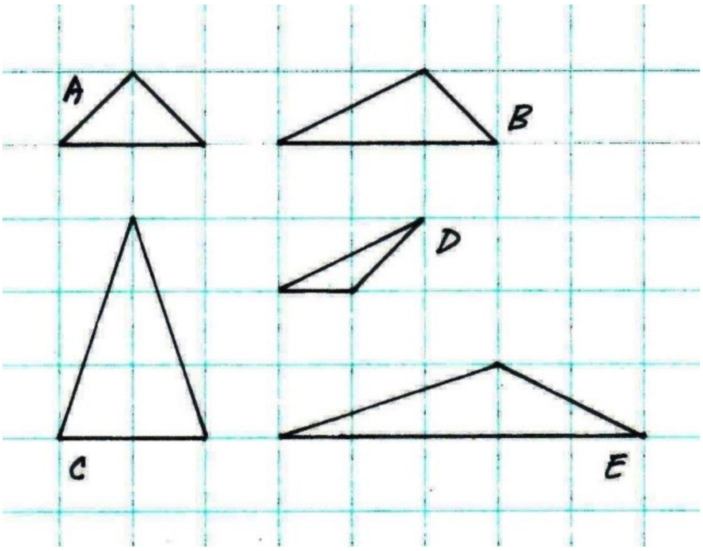
Před zahájením práce bylo žákům připomenuto, že obsah jednoho čtverce na centimetrové čtvercové síti je jeden centimetr čtvereční, že mohou používat i jednotku „počet čtverců“, pokud jsou na ni zvyklí. Pro určení obvodu mohli použít pravítko, a pokud cítili potřebu, mohli použít čtvercovou síť a nůžky.

2.1 Výběr úloh

Do didaktického testu jsem vybral úlohy zaměřené na určování obvodu a obsahu mnohoúhelníků a poznání základních mnohoúhelníků. Od žáků očekávám znalost metod určování obsahu na čtvercové síti, zkušenost s komplementem útvaru, dovednosti při měření obvodu pomocí pravítka, rozpoznání rovnoběžníků a lichoběžníků, alespoň základní zkušenost s určováním obsahu trojúhelníku v návaznosti na obsah obdélníku. U pojmů obsah a obvod předpokládám vzhledem k již probrané látce na prvním stupni a podle výstupů 5. ročníku podle RVP ZV, že se žáci budou v poznávacím procesu nacházet mezi hladinami *Jednotka míry* a *Numerické procesy*, tj. že někteří budou určovat obsah postupným načítáním čtverečků, ve kterých obsah i vyjádří, a někteří již objevili souvislost mezi délkou stran a obsahem (u pravoúhelníků) a použijí výpočet s násobením.

Úlohy jsem vybíral z učebnic matematiky pro 4. a 5. ročník základní školy nakladatelství Fraus (Hejný a kol.). Žáci se podle těchto učebnic vzdělávali, typy úloh by pro ně neměly být něčím novým. Předpokládal jsem, že je v minulosti již řešili a že sledované vědomosti a dovednosti mají. Poslední, sedmou úlohu, jsem připravil sám. S výjimkou jedné úlohy se všechny ostatní odehrávají na čtvercové centimetrové síti. V učebnici je navíc u většiny úloh výzva k přerýsování do cm mříže, z časových důvodů jsem obrázky připravil sám. To se ukázalo, jak uvedu v komentáři k výsledkům, jako chyba. Neuvědomil jsem si význam přerýsování, kdy se žák s útvarem lépe seznamuje.

Úloha č. 1: Zařaď mřížové trojúhelníky do tabulky a najdi ty, které schází. (Fraus, 4. ročník, 55/14)



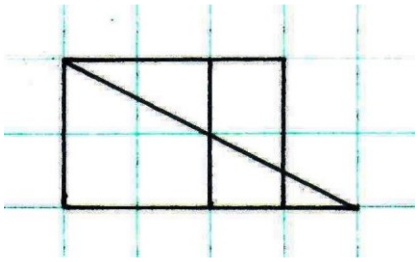
Obrázek 18 – DT, Fraus, 4. ročník, 55/14

	Obsah trojúhelníku je					
	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
rovnoramenný						
nerovnoramenný						

Obrázek 19 – DT, Fraus, 4. ročník, 55/14

Ke správnému vyřešení úlohy je důležitá znalost strategií pro hledání obsahu mnohoúhelníků na čtvercové síti - stříhání a rámování, a zkušenost s prací na čtvercové síti. Předpokládá se i povědomí o vazbě obdélník - trojúhelník. Všechny trojúhelníky mají jednu stranu ve vodorovné lince a všechny trojúhelníky kromě D lze snadno rozdělit na dva pravoúhlé trojúhelníky, které jsou polovinou jistého obdélníku. K určení obsahu trojúhelníku D je vhodné jej doplnit na obdélník a z něj “odstřihnout” vše, co nepatří trojúhelníku (metoda rámování).

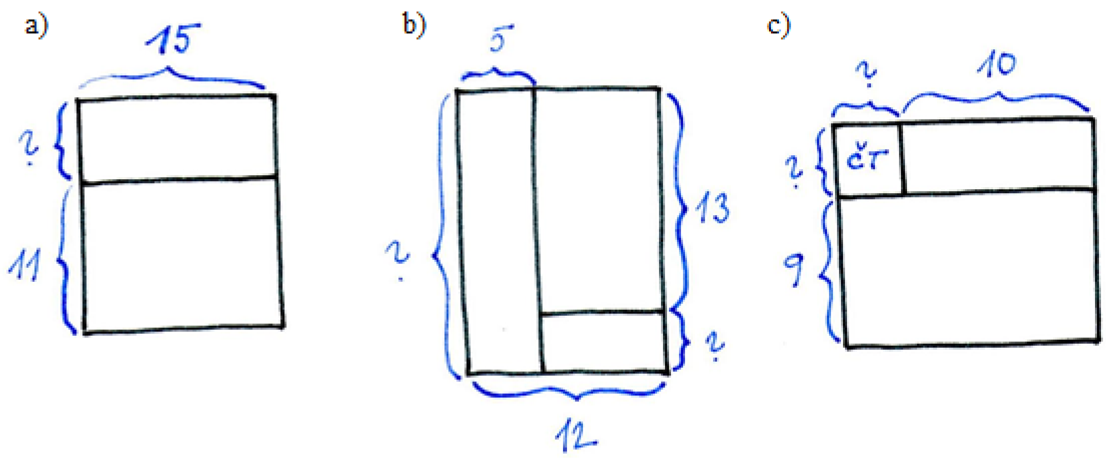
Úloha č. 2: Zjisti obsah v cm^2 i obvod v mm největšího a) obdélníku, b) trojúhelníku, c) lichoběžníku (Fraus, 5. ročník, 15/54)



Obrázek 20 – DT, Fraus, 5. ročník, 15/54

V této úloze žáci musí odhalit všechny útvary (kde problematické může být určení největšího lichoběžníku), umět použít některou z metod zjišťování obsahu na čtvercové síti, správně číst údaje na pravítku. Úskalí úlohy je v tom, že není explicitně vysloveno, že se jedná o mřížové útvary. Největší lichoběžník na obrázku není mřížový, s touto myšlenkou žáci pravděpodobně ještě nepracovali. Největší mřížový lichoběžník není největším lichoběžníkem na obrázku, jeho obsah se určí celkem snadno jakoukoliv strategií.

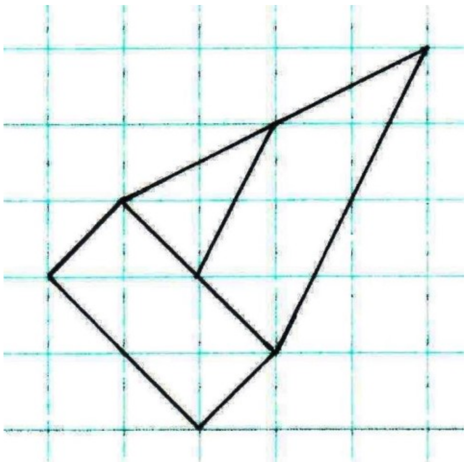
Úloha č. 3: Doplň chybějící délky, když víš, že obvod největšího obdélníku je v úloze a) 64, b) 74, c) 82. Navíc čtyřúhelník *ČT* je čtverec. Urči obvod i obsah každého ze třinácti čtyřúhelníků. (Fraus, 4. ročník, 29/7)



Obrázek 21 – DT, Fraus, 4. ročník, 29/7

Ve snaze eliminovat nedostatečnost v základních počtech, mohli žáci při řešení této úlohy použít kalkulačky. Pro správné řešení je třeba dobře rozumět pojmu obvod, mít dobrou představu obdélníku a doplnit do obrázku další údaje (a) 11, 15; b) 7, 13; c) 9, 10), které vychází ze zadání. Pak je možno úlohu dořešit i metodou pokus/omyl. Žáky jsem upozornil, že se jedná o náčrtek, údaje tedy nelze změřit, zadání je tedy abstraktnější úrovně.

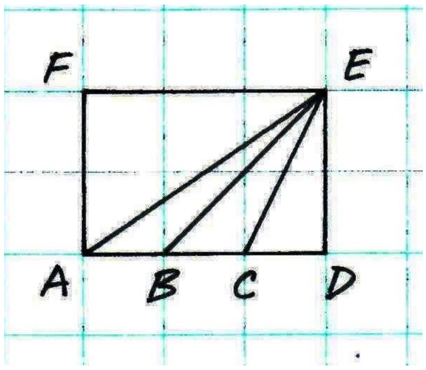
Úloha č. 4: Zjisti obsah v cm^2 i obvod v mm největšího a) obdélníku, b) trojúhelníku, c) lichoběžníku. (Fraus, 4. ročník, 60/2)



Obrázek 22 – DT, Fraus, 4. ročník, 60/2

Pro vyřešení této úlohy je třeba znát a odhalit uvedené mnohoúhelníky, mít zkušenost s prací na čtvercové síti, umět použít některou z metod zjišťování obsahu mřížových útvarů – metody doplnění, resp. stříhání (a) a „rámování“ (b, c). Určení obsahu obdélníku pomocí metody „stříhání“ může být překážkou pro vyřešení těžších úrovní této gradované úlohy. Pro určení obvodu opět stačí znalost pojmu a základní dovednost v použití pravítka při měření.

Úloha č. 5: Kolik je na obrázku trojúhelníků? Zjisti obsah každého z nich. (Fraus, 4. ročník, 29/9)

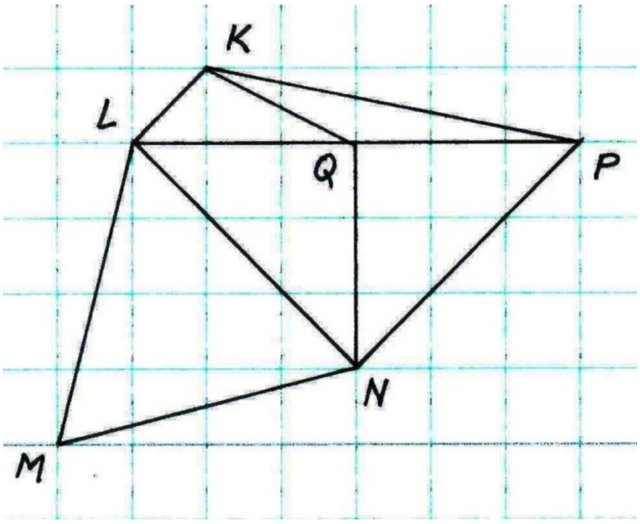


Obrázek 23 – DT, Fraus, 4. ročník, 29/9

Obrázek 23 – Fraus, 4. ročník, 29/9

V řešení úlohy velmi pomáhá zasazení trojúhelníků do obdélníku na obrázku. Jedná se o propedeutickou úlohu vedoucí k objevu vazby mezi stranou trojúhelníku, výškou na ní a obsahem trojúhelníku. Žákům při řešení pomůže dovednost doplnění na obdélník, problémem může být odhalení trojúhelníků *ACE* a *BDE*, které však může přispět k vyřešení obsahu. Při řešení v hodině bych nejdříve podpořil ono odhalení. V žákovském řešení úlohy bude též zajímavé sledovat, zda žák využil té vlastnosti obsahu, že součet obsahů dvou nepřekrývajících se útvarů je roven obsahu jejich sjednocení. Jinými slovy, zda žáci budou zjišťovat obsahy trojúhelníků např. *ABE*, *BCE* a *ACE* každého zvlášť.

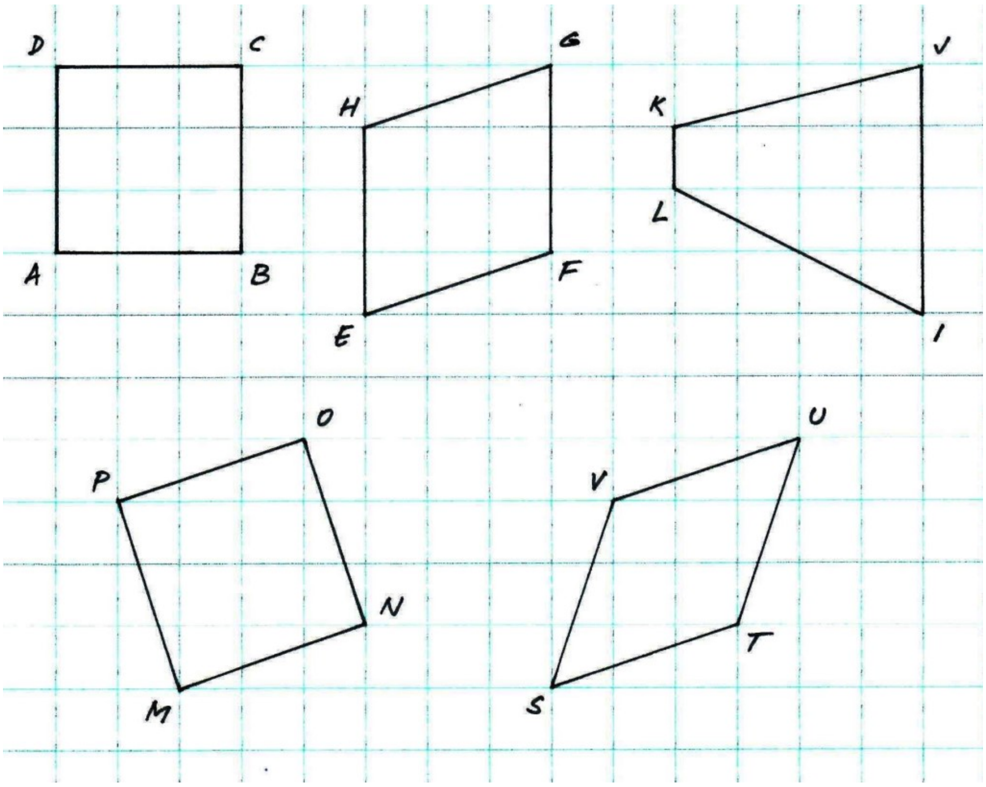
Úloha č. 6: Zjisti obvod i obsah trojúhelníků *LNQ*, *LQK*, *KQP*, *LMN*. (Fraus, 4. ročník, 28/3)



Obrázek 24 – DT, Fraus, 4. ročník, 29/8

Úloha, pro jejíž vyřešení je potřeba znát některou z metod určování obsahu na čtvercové síti. Určování obsahu jednotlivých trojúhelníků má v této úloze různou obtížnost. 1. *LNQ* – stačí doplnit na čtverec, jehož obsahu je polovinou, *LQK* - jedna ze stran leží na lince sítě, lze orámovat obdélníkem, popř. rozdělit na dva trojúhelníky, *KQP* – jedna strana leží na lince, lze pouze orámovat obdélníkem, a odečíst dva trojúhelníky, *LMN* – žádná ze stran neleží na lince, trojúhelník je nutno doplnit na čtverec a odečíst tři trojúhelníky.

Úloha č. 7: Zjisti obsah v cm^2 a obvod v mm každého ze čtyřúhelníků a pod obrázek napiš, o jaké čtyřúhelníky se jedná. (vlastní úloha)



Obrázek 25 – DT, vlastní úloha

Čtyřúhelník ABCD je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod ______________.

Čtyřúhelník EFGH je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod ______________.

Čtyřúhelník IJKL je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod ______________.

Čtyřúhelník MNOP je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod ______________.

Čtyřúhelník STUV je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod ______________.

Obrázek 26 - DT, vlastní úloha, záznam

Úloha postupně cílí na všechny metody určování obsahu na čtvercové síti, na správné použití měřidla při měření obvodu a znalost jednotlivých útvarů. Objevuje se zde čtverec v jiné než horizontálně vertikální poloze, kosodélník a kosočtverec se velmi podobají (v nematematickém významu slova podobnost). Úlohu jsem připravil sám a zdála se mi lehčí než ostatní. Obtížnost určování obsahu je podle mého názoru následující: 1. *ABCD* (strany leží na linkách), 2. *EFGH* a *IJKL* (lze je snadno rozdělit na tři útvary, popř. doplnit na pravoúhelník), 3. *MNOP* (obtížnější rozdělení na pět útvarů, po doplnění se musí odečíst čtyři trojúhelníky) 4. *STUV* (lze jej pouze doplnit a poté odečíst šest útvarů). Pro určení obvodu je nejsnazší čtverec *ABCD*, u kterého není třeba měřit. Při určování názvů útvarů na obrázku předpokládám, že až na výjimky poznají všichni žáci čtverec, slušné výsledky očekávám u kosočtverce a lichoběžníku. U kosodélníku a čtverce *MNOP*, jehož strany neleží na linkách, bude často docházet k záměně za kosočtverec.

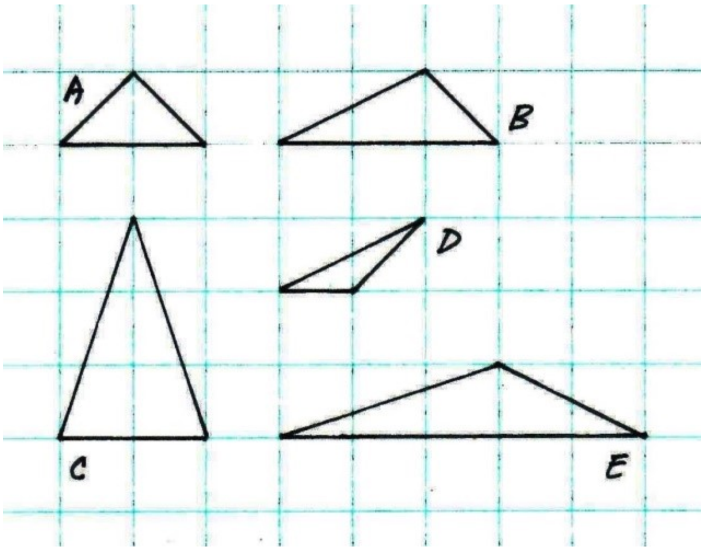
2.2 Výsledky

V této kapitole vždy nejdříve zopakuji zadání a poté uvedu výsledky. Po komentářích k jednotlivým třídám ukáži didakticky zajímavé řešení s výpovědí žáka. Rozhovory s žáky probíhaly vždy v pracovní den, který následoval po testu. U_01 znamená v rozhovoru první vstup učitele a například R_01, první vstup žákyně Renaty.

Ve třídě 6. A se testování zúčastnilo celkem 16 žáků, ve třídě 6. B 19 žáků, ve třídě 6. C 16 žáků a ve třídě 6. D 14 žáků.

2.2.1 Úloha č. 1

Zařaď mřížové trojúhelníky do tabulky a najdi ty, které schází.



Obrázek 27 – Fraus, 4. ročník, 55/14

	Obsah trojúhelníku je					
	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
rovnoramenný						
nerovnoramenný						

Obrázek 28 – DT, Fraus, 4. ročník, 55/14

Šedivá pole v tabulkách představují taková řešení úlohy, ve kterých žáci měli sami načrtnout trojúhelník daného obsahu na čtvercovou síť. Čísla udávají počet úspěšných řešitelů.

6. A	Obsah trojúhelníku je					
	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
rovnoramenný	**0**	**6**	**0**	**1**	**0**	**4**
nerovnoramenný	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**

Tabulka 1 – Výsledky 1. testu, 1. úloha, 6. A

9 žáků (z 16) úlohu neřešilo.

6. B	Obsah trojúhelníku je					
	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
rovnoramenný	**0**	**8**	**0**	**2**	**0**	**5**
nerovnoramenný	**6**	**1**	**5**	**0**	**5**	**1**

Tabulka 2 – Výsledky 1. testu, 1. úloha, 6. B

9 žáků (z 19) úlohu neřešilo.

6. C	Obsah trojúhelníku je					
	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
rovnoramenný	**0**	**7**	**0**	**0**	**0**	**1**
nerovnoramenný	**2**	**0**	**2**	**0**	**1**	**0**

Tabulka 3 – Výsledky 1. testu, 1. úloha, 6. C

9 žáků (z 16) úlohu neřešilo.

6. D	Obsah trojúhelníku je					
	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
rovnoramenný	**0**	**3**	**0**	**0**	**0**	**4**
nerovnoramenný	**3**	**0**	**2**	**0**	**2**	**0**

Tabulka 4 – Výsledky 1. testu, 1. úloha, 6. D

8 žáků (ze 14) úlohu neřešilo.

celkem	Obsah trojúhelníku je					
	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
rovnoramenný	**0**	**24**	**0**	**3**	**0**	**14**
nerovnoramenný	**14**	**1**	**12**	**0**	**11**	**1**

Tabulka 5 – Výsledky 1. testu, 1. úloha, třídy celkem

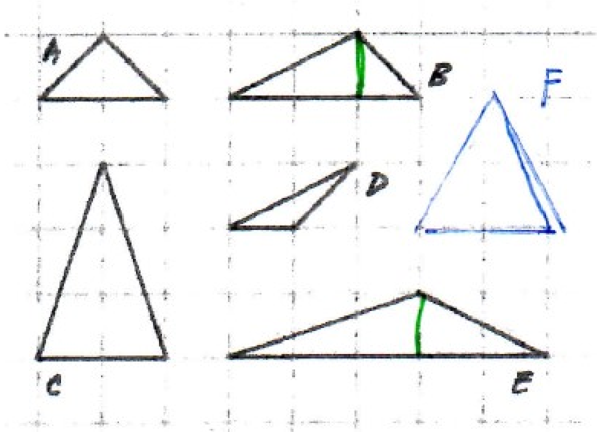
Úlohu řešilo celkem 30 žáků z 65 testovaných, někteří žáci nedokázali ani u jednoho z trojúhelníků správně použít žádnou strategii, někteří úlohu vynechali úplně. Pouze pět žáků nakreslilo trojúhelník podle zadaného obsahu. Výsledek ukazuje na malou zkušenost práce ve čtvercové síti. Žáci, kteří úlohu řešili, používali především metodu stříhání. Překvapivě hodně z řešitelů ve třídě 6. B správně určilo trojúhelník s obsahem ½ čtverce. Z rozhovorů, které následovaly po testu, vyplynulo, že se zdál žákům menší než trojúhelník A (rovnoramenný s obsahem 1 čtverce), tj. „nerámovali“, výsledek odhadli na základě porovnání.

Největším překvapením ve všech zúčastněných třídách je nenalezení rovnoramenného trojúhelníku s obsahem ½ čtverce. To ukazuje na malou zkušenost s tímto typem trojúhelníků; přestože rovnoramenné trojúhelníky s obsahy 1 a 3 žáci odhalili, bylo pro ně těžké vytvořit takový trojúhelník samostatně. Pro většinu z nich není rovnoramenný trojúhelník osobností.

Z výsledků vyplývá nepřipravenost žáků na vyjádření obsahu trojúhelníků na základě použití vzorce. Vzorec by s největší pravděpodobností pouze převzali bez hlubšího pochopení.

Rozhovor s komentářem k řešení úlohy č. 1

Eda, 6. A



Obrázek 29 - Eda

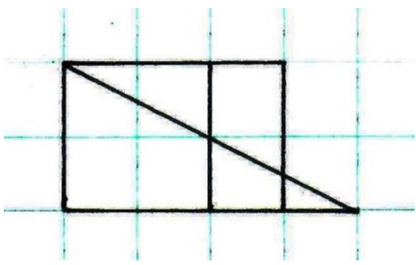
- U_01: „Edo, ty jsi v první úloze jeden trojúhelník doplnil a pak jsi všechny podle obsahu rozdělil do tří skupin. Jak jsi určil, že trojúhelník A je stejný jako D, F jako B a C jako E? Podle čeho?“
- E_01: „Přišly mi stejný.“
- U_02: „Jo, to vidím. Ale nevím, co tě k tomu vedlo. A jak jsi určil jejich obsah?“
- E_02: „ Já jsem udělal ty lehký a pak jsem určil ty těžký.“
- U_03: „Aha, a jaký jsou ty lehký?“
- E_03: „Tady ty.“ Ukazuje na A, C, F. „Ty rovnoramenný.“
- U_04: „A jak jsi určil jejich obsah? Máš to správně.“
- E_04: „ No, rozříz´ jsem je a jako překlopil.“
- U_05: „No, to jsi udělal chytře. A ještě jsi jeden dobře doplnil. A správně jsi určil, že jsou rovnoramenné. A co ty další?“
- E_05: „Ty mi přišli stejný, jen trochu jiný.“
- U_06: „A dokázal bys je taky rozříznout, jako ty rovnoramenné?“
- E_06: „Tak asi takhle?“ Ukazuje na výšky u trojúhelníku E.

- U_07: „Tak to tam nakresli. Tady máš fixu.“
- Eda naznačí výšku.
- U_08: „Na kolik trojúhelníků jsi to Éčko rozdělil?“
- E_07: „Na dva.“
- U_09: „A jejich obsah bys určil?“
- E_08: „Tady to je dva, takže jeden a tady to je tři, takže... jedna a půl.“ Chvíli obrázek sleduje a přemýšlí „Jo, tak to bude míň než to Céčko. To bude dva a půl.“
- U_10: „Výborně. A co trojúhelník B?“
- Eda naznačí výšku_09: „Teď vidim, že je to jeden a půl těch čtverečků.“
- U_11: „Vidím, že tomu rozumíš. Podívej se na to Déčko. Věděl bys, co s ním?“
- Eda po chvilce přemýšlení_10: „To nevim. To rozpůlit nejde.“
- U_12: „To je dobrý Edo, to nevadí. Ukážeme si to v hodině. Díky“

Eda dokáže útvar rozdělit a dílky vyjádřit jako část nového celku, dokáže pracovat s komplementem (E_04). Při vysvětlování dokáže použít jednotku (čtvercové sítě) a dokáže vyjádřit i její část. Vnímání pojmu obsah je u Edy na úrovni prvních dvou etap. Bude zapotřebí, aby přišel do styku s větším množstvím podobných úloh, ve kterých bude útvary rozdělovat a seskupovat do nových celků. Skutečnost, že nedokázal odečítáním (pomocí rámování) vyjádřit obsah trojúhelníku D ukazuje, že ještě není zralý na přechod do vyšší etapy numerických procesů; Eda potřebuje další zkušenost s podobnými úlohami.

2.2.2 Úloha č. 2

Zjisti obsah v cm^2 i obvod v mm největšího a) obdélníku, b) trojúhelníku, c) lichoběžníku.



Obrázek 30 – Fraus, 5. ročník, 15/54

6. A	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	4	3	0
obsah	5	4	0

Tabulka 6 – Výsledky 1. testu, 2. úloha, 6. A

6 žáků (z 16) úlohu neřešilo.

6. B	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	5	2	0
obsah	9	3	0

Tabulka 7 – Výsledky 1. testu, 2. úloha, 6. B

6 žáků (z 19) úlohu neřešilo.

6. C	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	1	0	0
obsah	0	0	0

Tabulka 8 – Výsledky 1. testu, 2. úloha, 6. C

15 žáků (z 16) úlohu neřešilo. Výsledek třídy je velkou výzvou pro učitele matematiky na 2. stupni.

6. D	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	**4**	**2**	**1**
obsah	**6**	**5**	**0**

Tabulka 9 – Výsledky 1. testu, 2. úloha, 6. D

5 žáků (ze 14) úlohu neřešilo.

celkem	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	**14**	**7**	**1**
obsah	**20**	**12**	**0**

Tabulka 10 – Výsledky 1. testu, 2. úloha, třídy celkem

Úlohu řešilo celkem 33 žáků z 65 testovaných. Pouze 14 řešitelů správně určilo obvod obdélníku, 20 jeho obsah, 6 žáků řešilo nejmenší obdélník (s obsahem 2). Jednalo se o jediný útvar, u jehož řešení žákům stačila minimální zkušenost práce na čtvercové síti, u jehož řešení nepotřebovali měřidlo.

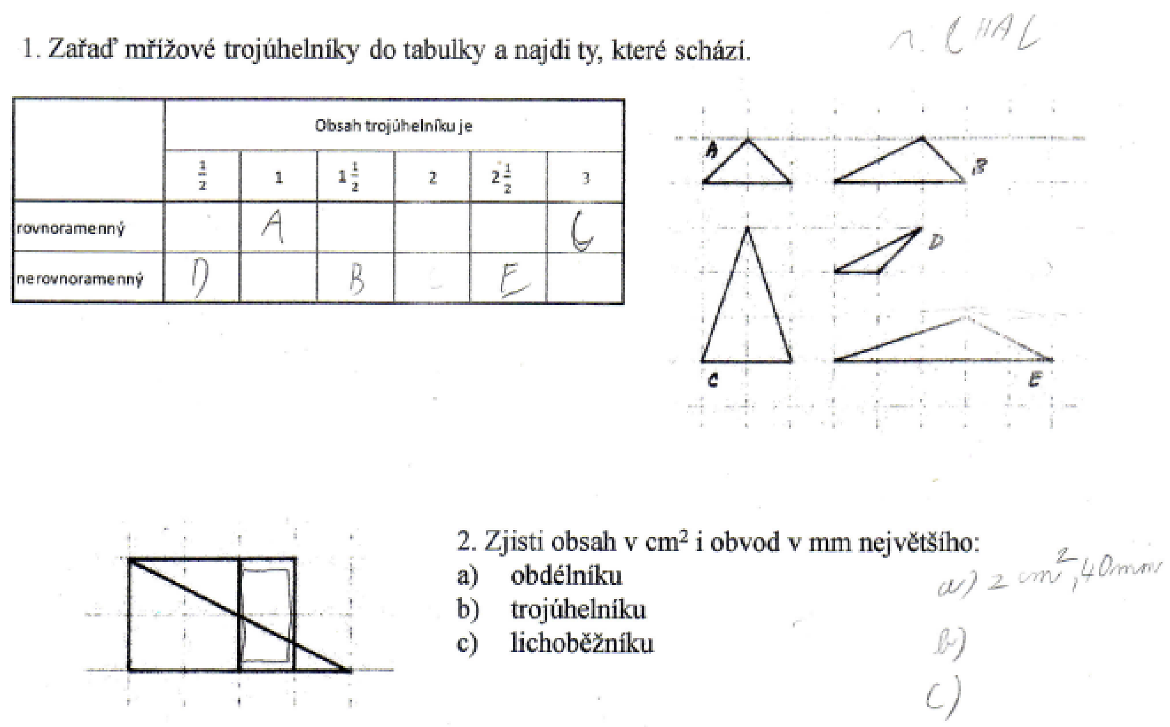
12 žáků, kteří úlohu řešili, odhalilo největší trojúhelník, 8 žáků počítalo trojúhelník menší (s obsahem 1); 7 správně změřilo jeho obvod a 12 určilo obsah.

Lichoběžník z obrázku odhalil pouze jeden žák. Tento čtyřúhelník není pro žáky osobností.

Malý počet řešitelů též ukazuje, podle mého názoru, na to, že nemají zkušenost s řešením gradovaných úloh. V opačném případě by řešení obdélníku, třeba jen metodou pokus-omyl, „zkusil“ řešit větší počet žáků.

Rozhovor s komentářem k řešení úlohy č. 2

Michal, 6. B



1. Zařaď mřížové trojúhelníky do tabulky a najdi ty, které schází.

	Obsah trojúhelníku je					
	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
rovnoramenný		A				C
nerovnoramenný	D		B		E	

2. Zjisti obsah v cm² i obvod v mm největšího:
a) obdélníku
b) trojúhelníku
c) lichoběžníku

Obrázek 31 - Michal

- U_01: „Michale, ty jsi tady vyznačil tenhle obdélník a určil jsi, že má obsah 2 cm^2 a obvod 40 mm. Můžeš mi prosím tě říct, jak jsi na to přišel?“
- M_01: „Je z těch dvou čtverečků, tak má obsah 2 cm^2.“
- U_02: „Ano a ten obvod?“
- M_02: „Tady jsou dvě čáry a tady taky,“ ukazuje na dvojici delších stran.
- U_03: „A to je jeho celý obvod?“
- M_03 (po chvilce): „Jo.“
- U_04: „A je to ten největší obdélník na obrázku?“
- M_04: „Jo, tady to je čtverec.“
- U_05: „Hm, to máš pravdu, to je čtverec. A trojúhelník jsi nepočítal, i když v předchozí úloze jsi správně určil obsah všech...“
- M_05: „Ale tady ten je moc malej, to bude míň než jedna. Nevim.“
- U_06 (ukazuje na úlohu č. 1): „A jak jsi počítal tyhle trojúhelníky?“
- M_06: „Ty jsem si takhle rozdělil,“ ukazuje na Michal na výšky.“

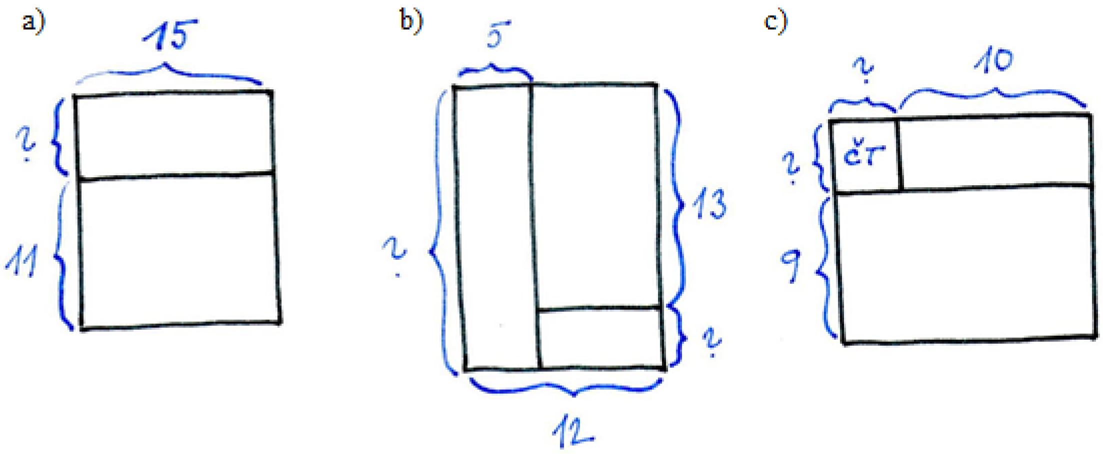
- U_07: „Jasně. A Michale, v úloze se ptají i na největší lichoběžník. Můžeš mi ho ukázat?
- M_07: „Ten tam nevidim.“

Michal v 7. úloze správně spočítal obsah a obvod čtverce, obsah kosodélníku a poznal lichoběžník. Ve 4. úloze spočítal obsah obdélníku i lichoběžníku, jejich obvody určil jako počet úhlopříček čtverců, jimiž strany útvarů procházely. V úloze č. 5 na obrázku viděl 4 trojúhelníky a správně určil jejich obsah. V této úloze pro něj bylo překážkou spojení a překrývání jednotlivých útvarů (M_04), což zřejmě vyplývá z Michalovy malé zkušenosti s podobnými úlohami. Dokáže obrazce rozdělit (M_06), dokáže je orámovat a správně určí jejich obsah. Čtverec a částečně i trojúhelník jsou pro Michala již osobnostmi, obdélník však nikoliv. V úloze 3a) Michal doplnil údaj, který se skrýval za otazníkem, ale obvody obdélníku již nepočítal.

U Michala jsem viděl velký potenciál, v hodinách byl aktivní a přicházel se zajímavými návrhy. Byl jsem zvědavý, jaký posun učiní. Bohužel od konce října začal velmi absentovat, v kontrolním testu nedošlo k výraznějšímu posunu.

2.2.3 Úloha č. 3

Doplň chybějící délky, když víš, že obvod největšího obdélníku je v úloze a) 64, b) 74, c) 82. Navíc čtyřúhelník *ČT* je čtverec. Urči obvod i obsah každého ze třinácti čtyřúhelníků.



Obrázek 32 – Fraus, 4. ročník, 29/7

a) Ve třídě 6. B a 6. C úlohu neřešil nikdo.

6. A	obdélník 15 x 6	obdélník 15 x 11	obdélník 15 x 17
obsah	2	2	0
obvod	2	2	

Tabulka 11 – Výsledky 1. testu, 3a. úloha, 6. A

14 žáků (z 16) úlohu neřešilo.

6. D	obdélník 15 x 6	obdélník 15 x 11	obdélník 15 x 17
obsah	2	2	0
obvod	1	1	

Tabulka 12 – Výsledky 1. testu, 3a. úloha, 6. D

11 žáků (ze 14) úlohu neřešilo.

b) Ve třídě 6. B a 6. C úlohu neřešil nikdo.

6. A	obdélník 5 x 25	obdélník 7 x 13	obdélník 7 x 12	obdélník 7 x 25	obdélník 12 x 25
obsah	2	2	0	0	0
obvod	2	2	0	0	

Tabulka 13 – Výsledky 1. testu, 3b. úloha, 6. A

14 žáků (z 16) úlohu neřešilo.

6. D	obdélník 5 x 25	obdélník 7 x 13	obdélník 7 x 12	obdélník 7 x 25	obdélník 12 x 25
obsah	1	1	1	0	0
obvod	1	1	1	0	

Tabulka 14 – Výsledky 1. testu, 3b. úloha, 6. D

12 žáků (ze 14) úlohu neřešilo.

c) Ve třídě 6. B a 6. C úlohu neřešil nikdo.

6. A	čtverec 11 x 11	obdélník 10 x 11	obdélník 21 x 11	obdélník 21 x 9	obdélník 21 x 20
obsah	2	2	0	2	0
obvod	0	0	0	0	

Tabulka 15 – Výsledky 1. testu, 3c. úloha, 6. A

14 žáků (z 16) úlohu neřešilo.

6. D	čtverec 11 x 11	obdélník 10 x 11	obdélník 21 x 11	obdélník 21 x 9	obdélník 21 x 20
obsah	1	1	0	1	0
obvod	1	1	0	1	

Tabulka 16 – Výsledky 1. testu, 3c. úloha, 6. D

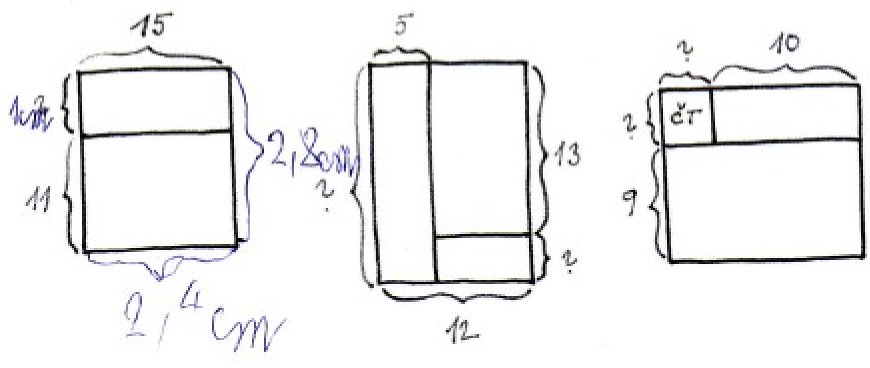
12 žáků (ze 14) úlohu neřešilo.

Úlohu č. 3 řešilo tak malé množství žáků (5 žáků z 65!), že těch několik málo řešení nemohu obšírněji komentovat. Nutno podotknout, že doplnit neznámé údaje zvládlo dalších 7 žáků (a – 7, b – 2 z nich, c – 1 z nich).

V dalších letech tyto ponechám pouze zadání 3a), další část úlohy vypustím. Nabyl jsem dojmu, že žáky zřejmě odrazuje „objemnost“ úlohy a nezkušenost s gradovanými úlohami jim brání vybrat si alespoň tu nejsnadnější část. Zároveň je to jediná úloha, která se neodehrává na čtvercové síti a ve které je třeba některé údaje dopočítat.

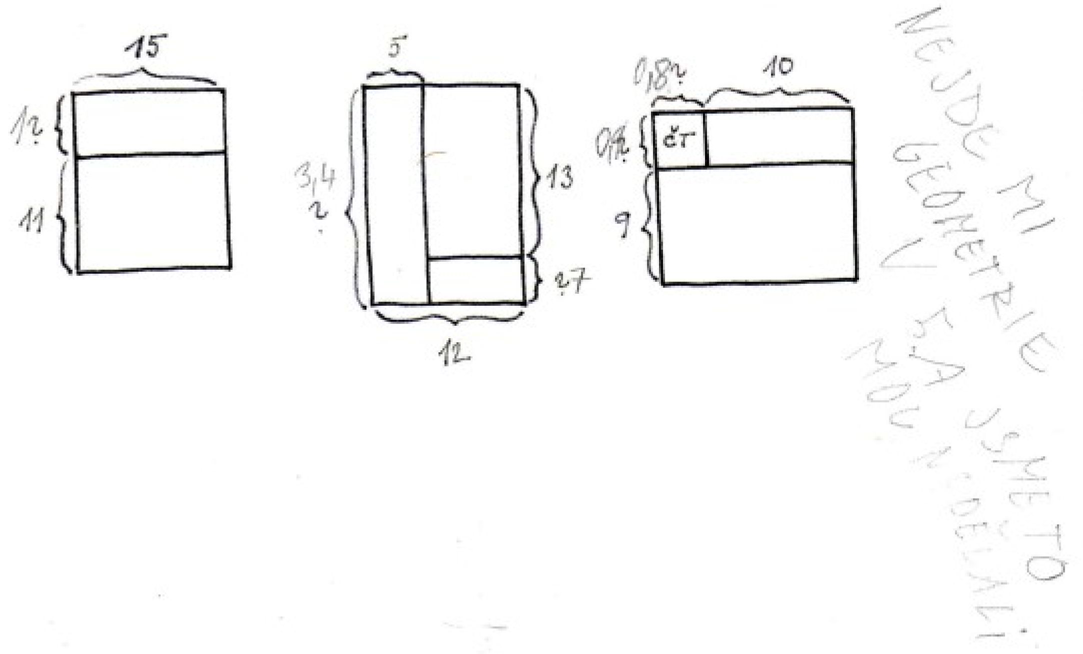
Nicméně, neúspěšné řešení této úlohy ukazuje na frapantní neznalost pojmu obvod pravoúhelníku.

Ukázky řešení úlohy č. 3



Obrázek 33 - Jirka

V zadání úlohy se nehovoří o jednotkách. Jirka (6. D) tuší, že se v podobných úlohách nějaké jednotky používají, obtížnost úlohy je pro něho signálem k použití desetinných čísel. Význam pojmů obsah a objem je na nízké úrovni.

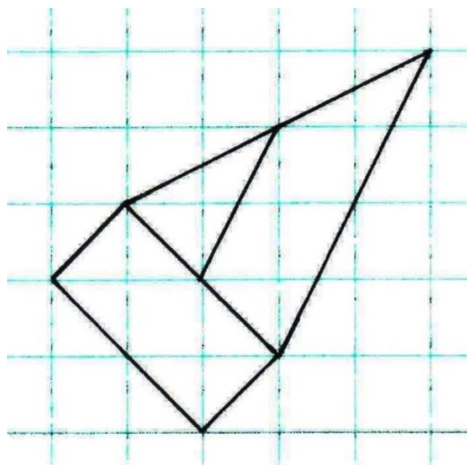


Obrázek 34 - Věrka

Věrka to také úplně nevzdává; chvilku se o řešení pokouší a pak svoji nemohoucnost raději vyjádří větou: „Nejde mi geometrie. V 5. A jsme to moc nedělali."

2.2.4 Úloha č. 4

Zjisti obsah v cm^2 i obvod v mm největšího a) obdélníku, b) trojúhelníku, c) lichoběžníku.



Obrázek 35 – Fraus, 4. ročník, 60/2

6. A	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	0	1	0
obsah	6	4	1

Tabulka 17 – Výsledky 1. testu, 4. úloha, 6. A

9 žáků (z 16) úlohu neřešilo.

6. B	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	1	3	1
obsah	6	2	3

Tabulka 18 – Výsledky 1. testu, 4. úloha, 6. B

9 žáků (z 19) úlohu neřešilo.

6. C	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	3	2	0
obsah	1	0	0

Tabulka 19 – Výsledky 1. testu, 4. úloha, 6. C

13 žáků (z 16) úlohu neřešilo.

6. D	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	**0**	**0**	**0**
obsah	**3**	**3**	**2**

Tabulka 20 – Výsledky 1. testu, 4. úloha, 6. D

11 žáků (ze 14) úlohu neřešilo.

celkem	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	**4**	**6**	**1**
obsah	**16**	**9**	**6**

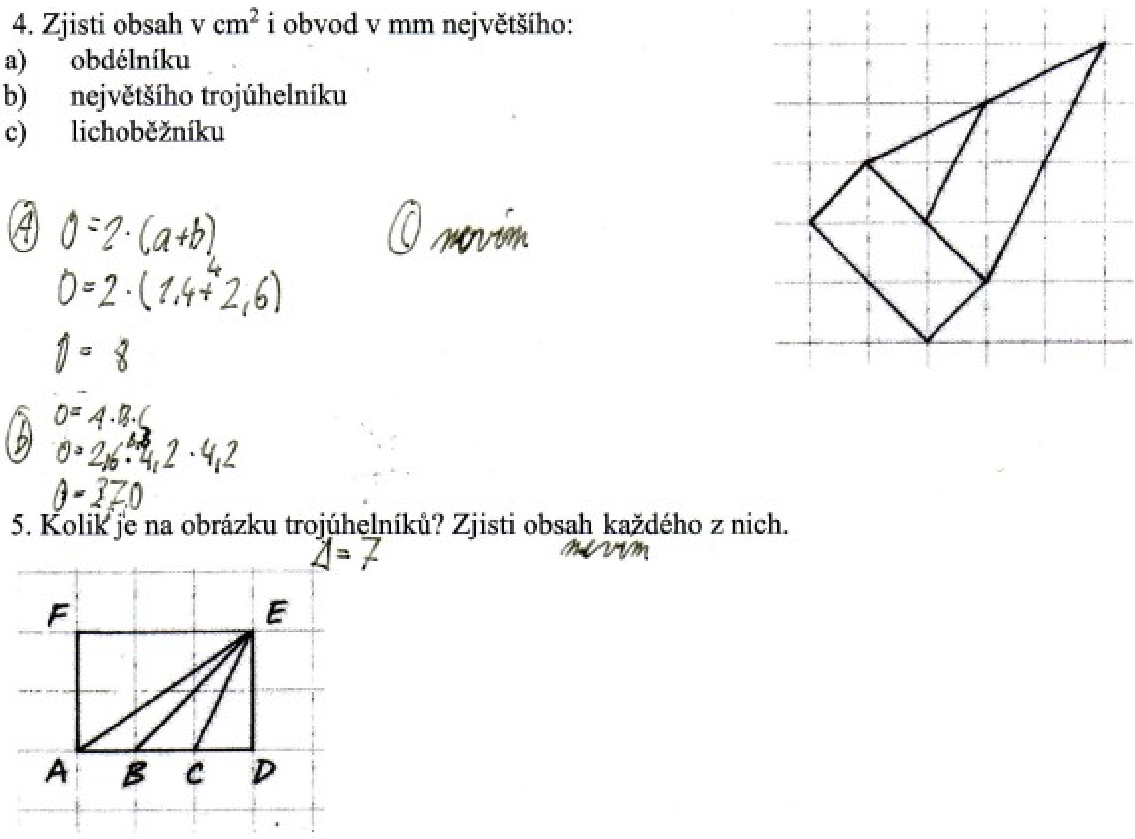
Tabulka 21 – Výsledky 1. testu, 4. úloha, třídy celkem

Úlohu řešilo celkem 23 žáků z 65 testovaných.

Úlohu řešilo celkem 23 žáků z 65 testovaných. Z rozhovorů, které jsem s žáky vedl po kontrole testu, vyplynulo, že metodou k určení obsahu obdélníku byla vždy metoda rozkladu. Při řešení obvodu obdélníku vedla k vysoké chybovosti mylná úvaha, podle které má úhlopříčka čtverce (sítě) stejnou délku jako jeho strana. Častým výsledkem tedy bylo 60 mm. U trojúhelníku byl přístup žáků velmi podobný a někteří žáci viděli pouze menší trojúhelník. Lichoběžník odhalila jen hrstka řešitelů.

Rozhovor s komentářem k řešení úlohy č. 4

Renata, 6. C


4. Zjisti obsah v cm^2 i obvod v mm největšího:
a) obdélníku
b) největšího trojúhelníku
c) lichoběžníku

a) $O = 2 \cdot (a+b)$
$O = 2 \cdot (1{,}4 + 2{,}6)$
$O = 8$

c) nevím

b) $O = 4 \cdot 8 \cdot 6$
$O = 2{,}6 \cdot 4{,}2 \cdot 4{,}2$
$O = 37{,}0$

5. Kolik je na obrázku trojúhelníků? Zjisti obsah každého z nich.
$\Delta = 7$ nevím

Obrázek 36 - Renata

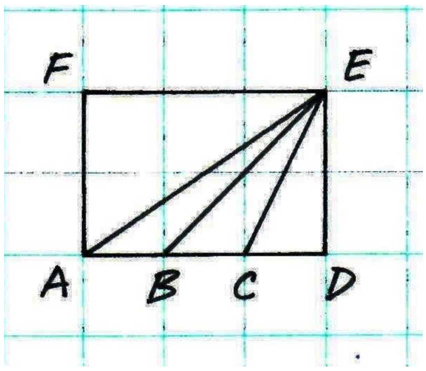
- U_01: „Ty jsi Renčo u této úlohy počítala jen obvod? Jak jsi postupovala?“
- R_01: „Já jsem si nemohla na ten obsah vzpomenout. A ten obvod jsem měřila a pak násobila podle vzorečku.“
- U_02: „Dobře. Já u toho prvního vzorce ale vidím i sčítání.“
- R_02: „No, to jsem sečetla ty dvě strany a pak jsou tam ještě jednou“, ukazuje na obvod obdélníku.
- U_03: „Jasně, to vidím stejně. A u toho trojúhelníku? Proč jsi tam násobila? Nešlo to udělat podobně jako u toho obdélníku?“
- R_03: „To se tak dělá. Že se to násobí.“
- U_04: „Aha. A po tom násobení ti vyšlo 37? Není to moc velké číslo?“
- R_04: „Je, ale vyšlo to.“
- U_05: „Dobře. A co ten lichoběžník?“

➢ R_05: „Ten nevím, ten neznám.“

Renata v obrázcích dobře vidí jednotlivé trojúhelníky, vidí i obdélník. V ostatních úlohách se ukázalo, že další rovinné útvary nepoznává. Vzorce používá bez většího porozumění, ale důvěřuje jim (R_03). Jsou pro ni umělou náhradou poznání, dalo by se říci, že skutečnému poznání brání. Přeskočila všechny etapy pojmotvorného procesu až k algebraické reprezentaci, které ovšem nerozumí. Pojmu obsah nerozumí, s úlohami na čtvercové síti nemá zkušenost. V poznávacím procesu je na úrovni izolovaných modelů, v pojmotvorném procesu míry v 1. etapě, většina rovinných útvarů není pro Renatu osobností. Nemá zkušenost s odhadováním výsledku, věří tomu, co vyjde. (R_04)

2.2.5 Úloha č. 5

Kolik je na obrázku trojúhelníků? Zjisti obsah každého z nich.



Obrázek 37 – Fraus, 4. ročník, 29/9

6. A	AEF	ABE	BCE	CDE	ACE	BDE	ADE
obsah	2	5	4	6	4	4	3

Tabulka 22 – Výsledky 1. testu, 5. úloha, 6. A

5 žáků (z 16) úlohu neřešilo. Šest žáků správně uvedlo počet trojúhelníků (7), šest trojúhelníků viděl jeden žák, čtyři trojúhelníky odhalili 2 žáci a jeden z žáků v odpovědi na otázku zjišťující počet trojúhelníků na obrázku uvedl pouze jeden trojúhelník.

6. B	AEF	ABE	BCE	CDE	ACE	BDE	ADE
obsah	**1**	**2**	**2**	**2**	**0**	**0**	**1**

Tabulka 23 – Výsledky 1. testu, 5. úloha, 6. B

15 žáků (z 19) v úloze neřešilo obsah trojúhelníků, někteří se jen pokusili o určení jejich počtu. Všechny trojúhelníky rozpoznal pouze jeden žák, pět žáků určilo pět trojúhelníků, šest jich odhalil jeden žák a pět žáků na obrázku vidělo čtyři trojúhelníky.

6. C	AEF	ABE	BCE	CDE	ACE	BDE	ADE
obsah	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**	**0**

Tabulka 24 – Výsledky 1. testu, 5. úloha, 6. C

14 žáků (z 16) v úloze neřešilo obsah trojúhelníků, někteří se jen pokusili o určení jejich počtu. Devět žáků určilo správný počet (!) a tři žáci viděli čtyři trojúhelníky, což ukazuje na dobré seznámení s pojmem trojúhelník a neporozumění pojmu obsah. Tato třída se během celého devítiletého pobytu na naší škole vyznačovala velkou absencí, na výsledcích je to znát; v letošním roce mělo ve 2. pololetí absenci vyšší než 200 hodin 5 žáků.

6. D	AEF	ABE	BCE	CDE	ACE	BDE	ADE
obsah	**3**	**2**	**3**	**3**	**2**	**3**	**2**

Tabulka 25 – Výsledky 1. testu, 5. úloha, 6. D

9 žáků (ze 14) úlohu neřešilo. Sedm trojúhelníků správně určili dva žáci, tři vypsali šest trojúhelníků, jeden žák určil pět a čtyři žáci čtyři trojúhelníky.

celkový počet řešitelů	AEF	ABE	BCE	CDE	ACE	BDE	ADE
obsah	**6**	**9**	**9**	**13**	**6**	**7**	**6**

Tabulka 26 – Výsledky 1. testu, 5. úloha, třídy celkem, obsah

počet trojúhelníků	1	2	3	4	5	6	7
počet žáků	**1**	**0**	**0**	**14**	**6**	**5**	**20**

Tabulka 27 – Výsledky 1. testu, 5. úloha, třídy celkem, počet trojúhelníků

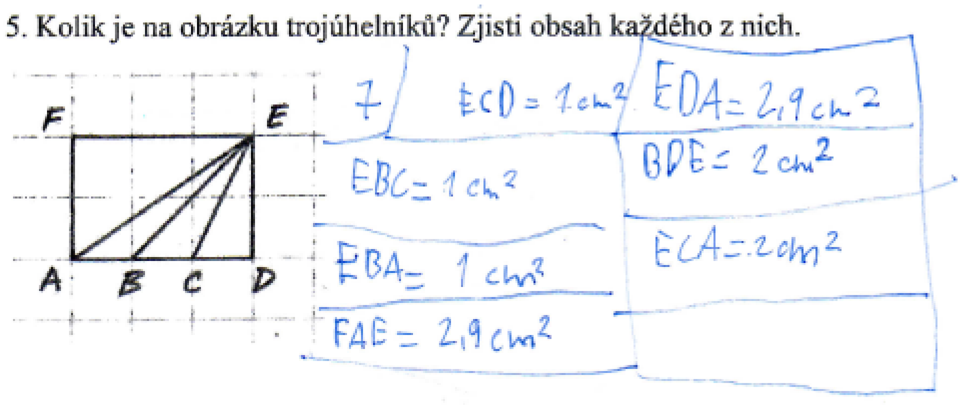
Část úlohy, ve které měli zjistit obsah trojúhelníků, řešilo pouze 22 žáků z 65 testovaných, což bylo překvapivé. Podle očekávání nejvíce řešitelů uvedlo správný obsah trojúhelníku *CDE*, naopak neočekávaným výsledkem bylo málo správných řešení obsahu trojúhelníku *AEF*.

Z výsledků je patrná nízká provázanost obdélníku a trojúhelníku; pokud pouze šest žáků uvedlo správně obsah trojúhelníku *AEF*, je nasnadě, že nadále nemá smysl přistupovat k počítání podle vzorce, ale bude nutné prohloubit zkušenost s určováním obsahu na čtvercové síti.

Počet trojúhelníků určovalo 46 žáků. V odpovědích na otázku „Proč jsi nezkusil(a) určit obsah některého z trojúhelníků, které jsi na obrázku viděl(a)?“, se většinou vyznávali z nechuti k práci, často i z neznalosti práce na čtvercové síti. To však, vzhledem k vyšší míře absence, kdy třídní průměr za pololetí činí na žáka 100 – 150 hodin, nelze vnímat pouze jako výsledek nedostatečného procvičování.

Rozhovor s komentářem k řešení úlohy č. 5

Alan, 6. A



Obrázek 38 - Alan

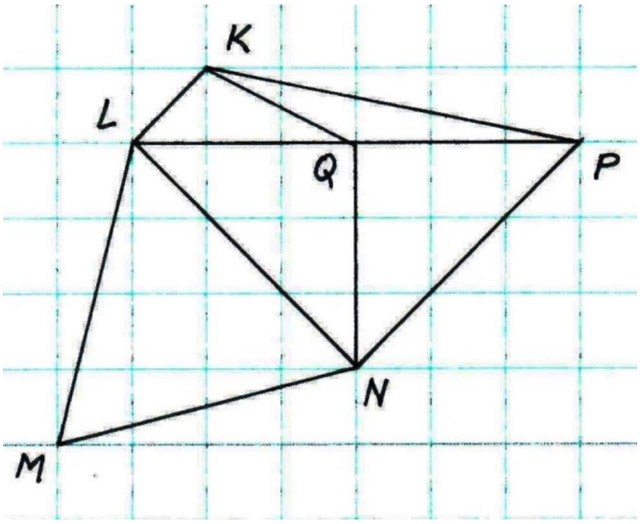
- U_01: „Alane, ty jsi poznal všechny trojúhelníky. Jak jsi zjišťoval jejich obsah?"
- A_01: „Já jsem si řek´, že ten malej je půlka z tohodle," ukazuje na trojúhelník *CDE* a obdélník, který jej rámuje.
- U_02: „Tomu rozumím. A dál?"
- A_02: „Ty další malý mi přišly stejný."
- U_03: „To je dobrej postřeh, vidím to stejně. Ale co tě k tomu vedlo?"
- A_03: „Že maj dole tu stranu stejnou a všechny jsou do toho Éčka. Takže sou i stejně vysoký."
- U_04: „S tím souhlasím. To jsi vymyslel dobře. A co ty další trojúhelníky?"
- A_04: „No tyhle sou jakoby složený z těch malejch a sou vždycky dva," ukazuje Alan na *ACE* a *BDE*.
- U_05: „A ty poslední dva?"
- A_05: „No ty sou největší."
- U_06: „To jsou. Ale proč zrovna 2,9?
- A_06: „Teď nevim, proč mi to takhle vyšlo."
- U_07: „No, jak jsi mi už jednou ukázal ty složený trojúhelníky," ukazuji na *ACE* a *BDE*, „tak z jakých trojúhelníků se skládá trojúhelník *ADE*?"
- A_07: „Z těch třech malejch. Jo, jasně, tak to bude tři. Mně se to zdálo divný."
- U_08: „Co?"

- A_08: „To číslo, ten výsledek."
- U_09: „Mně vůbec nenapadá, jak jsi k němu došel. A co ten poslední, AEF. Jaký má obsah?"
- A_09: „Tak ten má taky tři....., protože je stejnej?"
- U_10: „To mi řekni ty."
- A_10: „Jo, je stejnej."
- U_11: „Máš pravdu, ale jak to ověříme."
- Alan se směje_11: „Asi, že to taky říkáte."
- U_12: „A kdybych to nevěděl?"
- A_12: „Vlastně maj stejný strany; tady a tady 2, tady a tady 3 a tuhle maj společnou," ukazuje na shodné strany.

Alan je v této úloze blízko objevu vazby mezi stranou trojúhelníku, výškou na ni a obsahem trojúhelníku (A_03). V úlohách č. 1 a 6 tomu však tak nebylo. Zde mu významně pomáhá obdélníkový rámeček, ale dalo by se říci, že spíše intuitivně. V ostatních úlohách techniku rámování nepoužil. Stejně jako valná většina testovaných žáků také Alan má malou zkušenost práce s různými útvary na čtvercové síti. Samostatně není schopen práce s komplementem, porovnání útvarů, jejich rozdělování a seskupování. Pro všechny míry používá jednotku cm^2. Z hlediska pojmotvorného proces míry se Alan nachází v první etapě, na začátku cesty.

2.2.6 Úloha č. 6

Zjisti obvod i obsah trojúhelníků *LNQ*, *LQK*, *KQP*, *LMN*.



Obrázek 39 – Fraus, 4. ročník, 29/8

6. A	LNQ	LQK	KQP	LMN
obvod	**4**	**4**	**4**	**4**
obsah	**5**	**5**	**3**	**0**

Tabulka 28 – Výsledky 1. testu, 6. úloha, 6. A

9 žáků (z 16) úlohu neřešilo.

6. B	LNQ	LQK	KQP	LMN
obvod	**7**	**7**	**4**	**4**
obsah	**8**	**2**	**0**	**2**

Tabulka 29 – Výsledky 1. testu, 6. úloha, 6. B

7 žáků (z 19) úlohu neřešilo.

6. C	LNQ	LQK	KQP	LMN
obvod	**2**	**1**	**1**	**2**
obsah	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabulka 30 – Výsledky 1. testu, 6. úloha, 6. C

14 žáků (z 16) úlohu neřešilo.

6. D	LNQ	LQK	KQP	LMN
obvod	**2**	**2**	**1**	**1**
obsah	**2**	**2**	**0**	**0**

Tabulka 31 – Výsledky 1. testu, 6. úloha, 6. D

10 žáků (ze 14) úlohu neřešilo.

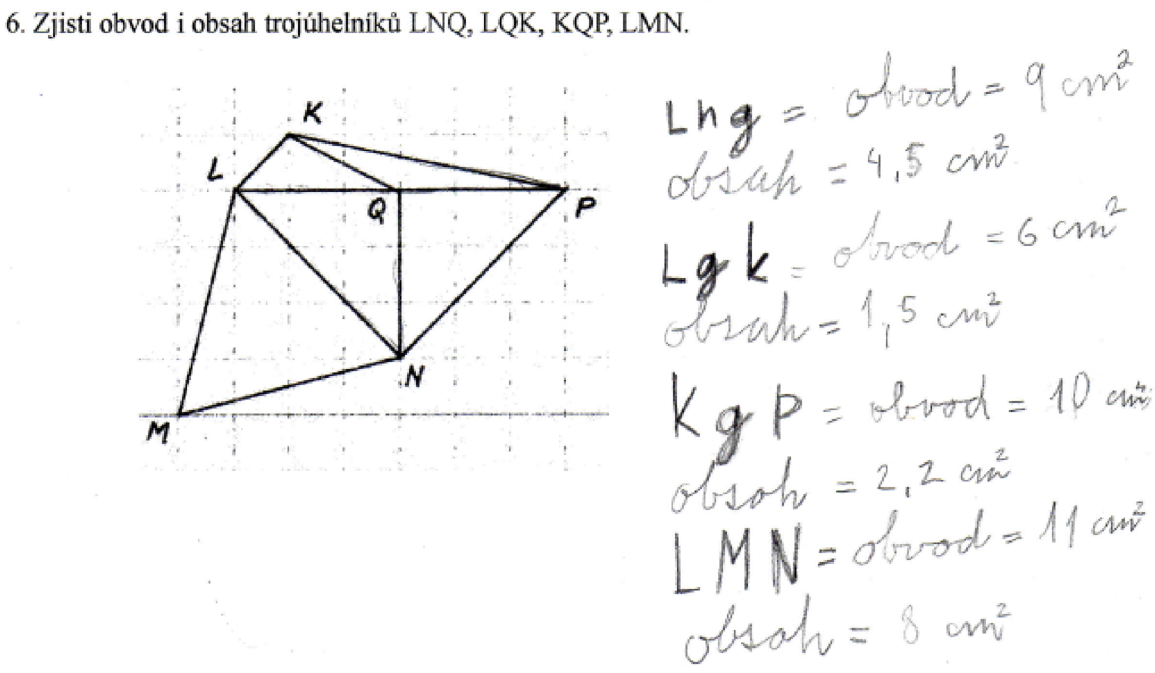
celkem	LNQ	LQK	KQP	LMN
obvod	**15**	**14**	**10**	**11**
obsah	**15**	**9**	**3**	**2**

Tabulka 32 – Výsledky 1. testu, 6. úloha, třídy celkem

Úlohu řešilo celkem 25 žáků z 65 testovaných, což opět není mnoho. Nejvíce žáků podle očekávání vyřešilo obsah a obvod trojúhelníku *LNQ*. Poměrně častou chybou bylo počítání obvodu na čtvercové síti, kdy délku úhlopříčky čtverce vnímali shodně s délkou jeho strany. Výsledky určování obsahu trojúhelníku *KPQ* a *LQK* ukazují na neznalost metody orámování obdélníkem.

Rozhovor s komentářem k řešením úlohy č. 6

Eva, 6. B



Obrázek 40 - Eva

- U_01: „Mě by, Evko, zajímalo, jak jsi zjišťovala obvody a obsahy v této úloze. Začni třeba tím trojúhelníkem *LNQ*."
- E_01: „Mně přišlo, že je to půlka čtverce, kterej má obsah 9 cm^2. A pak jsem počítala délky těch stran, to je obvod."
- U_02: „Já rozumím tomu obsahu, ale ne těm délkám. Ukaž mi, prosím, jak jsi je počítala."
- E_02: „Takhle ...," říká, ukazuje a počítá délky stran a úhlopříček čtverců sítě, „...devět."
- U_03: „A proč jsi nepoužila pravítko?"
- E_03: „Tohle mi přišlo rychlejší."
- U_04: „Tak to spolu přeměříme, jo? Na, tady máš pravítko, já budu zapisovat. Změříme třeba ten největší, *LMN*."
- E_04: „Tak jo," bere si pravítko, „4,1.... taky 4,1.... a 4,2."
- U_05: „Mám. Kolik to je celkem?

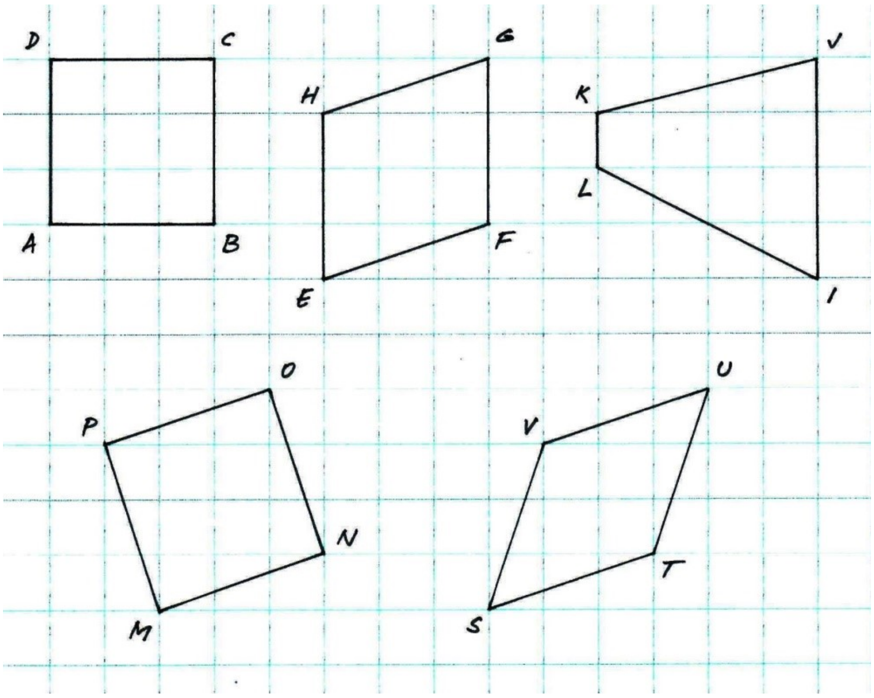
- E_05: „No to je 12... 12,4.“
- U_06: „A předtím ti vyšlo?“
- E_06: „11 cm^2.“
- U_07: „Tak na to se ještě podíváme. A teď mě ještě zajímá, proč používáš zrovna tyhle jednotky, cm^2.“
- E_07: „No, protože tam jsou ty čtverečky.“

Eva v této úloze používala jednotku cm^2 pro obsah i obvod. Nakonec si to uvědomila, jednalo se o chybu. V ostatních úlohách pro obvod používala jednotku předepsanou v zadání, milimetry. Obecně se jí dařilo v určování obsahu, při zjišťování obvodu dělala chybu, o které jsme spolu hovořili (E_02). V úloze čtyři spočítala obsahy všech mnohoúhelníků, v úloze č. 7 nepojmenovala ani jeden útvar.

Eva se v pojmotvorném procesu míry nachází v prvních dvou etapách. V poznávacím procesu je na úrovni izolovaných modelů.

2.2.7 Úloha č. 7

Zjisti obsah v cm^2 a obvod v mm každého ze čtyřúhelníků a pod obrázek napiš, o jaké čtyřúhelníky se jedná.



Obrázek 41 – vlastní úloha

Čtyřúhelník ABCD je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod ______________.

Čtyřúhelník EFGH je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod ______________.

Čtyřúhelník IJKL je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod ______________.

Čtyřúhelník MNOP je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod ______________.

Čtyřúhelník STUV je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod ______________.

Obrázek 42 - vlastní úloha, záznam

6. A	čtverec ABCD	kosodélník EFGH	lichoběžník IJKL	čtverec MNOP	kosočtverec STUV
název	**8**	**1**	**1**	**2**	**2**
obvod	**10**	**0**	**1**	**0**	**0**
obsah	**9**	**4**	**4**	**0**	**2**

Tabulka 33 – Výsledky 1. testu, 7. úloha, 6. A

4 žáci (z 16) úlohu neřešili.

6. B	čtverec ABCD	kosodélník EFGH	lichoběžník IJKL	čtverec MNOP	kosočtverec STUV
název	**11**	**0**	**2**	**2**	**4**
obvod	**5**	**2**	**2**	**2**	**2**
obsah	**6**	**4**	**1**	**1**	**1**

Tabulka 34 – Výsledky 1. testu, 7. úloha, 6. B

5 žáků (z 19) úlohu neřešilo.

6. C	čtverec ABCD	kosodélník EFGH	lichoběžník IJKL	čtverec MNOP	kosočtverec STUV
název	**5**	**0**	**4**	**3**	**3**
obvod	**4**	**3**	**2**	**4**	**4**
obsah	**3**	**2**	**1**	**2**	**0**

Tabulka 35 – Výsledky 1. testu, 7. úloha, 6. C

8 žáků (z 16) úlohu neřešilo.

6. D	čtverec ABCD	kosodélník EFGH	lichoběžník IJKL	čtverec MNOP	kosočtverec STUV
název	**8**	**1**	**2**	**7**	**4**
obvod	**4**	**2**	**3**	**2**	**2**
obsah	**6**	**3**	**4**	**3**	**3**

Tabulka 36 – Výsledky 1. testu, 7. úloha, 6. D

6 žáků (ze 14) úlohu neřešilo.

celkem	čtverec ABCD	kosodélník EFGH	lichoběžník IJKL	čtverec MNOP	kosočtverec STUV
název	**32**	**2**	**9**	**14**	**13**
obvod	**23**	**7**	**8**	**8**	**8**
obsah	**24**	**13**	**10**	**6**	**6**

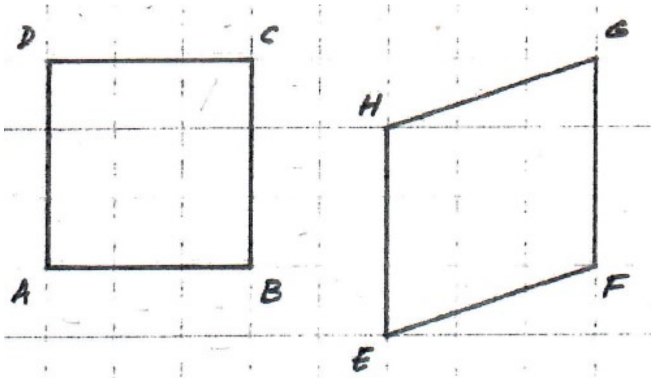
Tabulka 37 – Výsledky 1. testu, 7. úloha, třídy celkem

Úlohu řešilo celkem 42 žáků z 65 testovaných. Z celkového pohledu na výsledky je dobře vidět rozdíl v rozpoznání čtverců, resp. chybějící zkušenost se čtverci, jejichž strany neleží na linkách sítě. Kosodélník většina řešitelů označila jako kosočtverec.

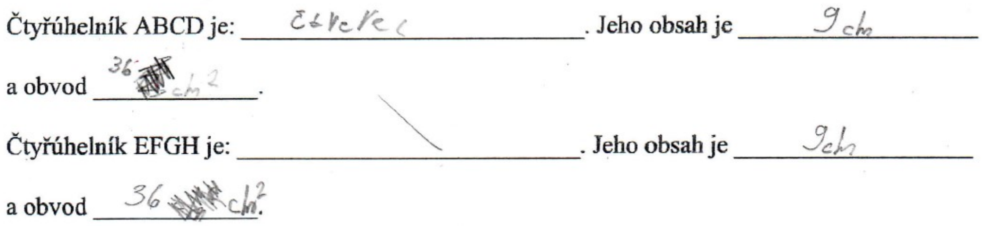
U výsledků úloh č. 6 a 7 je patrný, v porovnání s výsledky úloh č. 2 a 4, vzestup správných určení obvodů. Z rozhovorů vyplynulo, že během testu několik řešitelů vidělo u spolužáků používat pravítko a v posledních dvou úlohách tak učinilo rovněž.

Rozhovor s komentářem k řešení úlohy č. 7

Kateřina, 6. A



Obrázek 43 - Kateřina



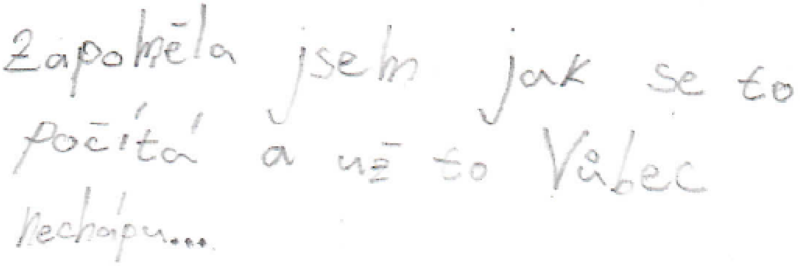
Čtyřúhelník ABCD je: čtverec. Jeho obsah je 9 cm

a obvod 36 cm².

Čtyřúhelník EFGH je: ________. Jeho obsah je 9 cm

a obvod 36 cm².

Obrázek 44 - Kateřina



Zapoměla jsem jak se to počítá a už to vůbec nechápu...

Obrázek 45 - Kateřina

- U_01: „Kájo, ty jsi tady napsala, že jsi zapomněla, jak se to počítá. Ale ty první dva čtyřúhelníky jsi počítala. Jak jsi je počítala?“
- K_01: „Já právě nevim, ty kostky.“
- U_02: „To vidím. Ty jsi spočítala, kolik to má čtverečků, viď?“
- K_02: „Jo.“
- U_03: „A to máš správně. Jak jsi to poznala u toho čtyřúhelníku *EFGH*?“
- K_03: „No připadal mi stejnej, jen jakože nakřivo.“
- U_04: „ To je pravda. A napsala jsi tam 9 cm. Proč?“

- K_04: „Já nevim. Jakože je tam těch devět kostiček."
- U_05: „Aha. A mě teď zajímá, jak jsi přišla na to, že obvod je 36 cm^2?"
- K_05: „To jsem pak vynásobila krát čtyři."
- U_06: „To mě napadlo, ale nevím proč."
- K_06: „To jak je na to takovej vzoreček, že se to napočítá a pak se to vynásobí."

Vědomosti Kateřiny jsou v oblasti míry, délky i obsahu, čistě formální. Matně si vybavuje vzorec $o = 4 . a$, ale vůbec neví, kdy a jak jej použít (K_05 a K_06). Při výpočtech používá jednotky, o kterých už slyšela a nejspíš je také již někdy použila (K_04). K obojímu, ke vzorci i k jednotkám, však byla, přivedena. Bezpochyby předčasně. Její úroveň se v pojmotvorném procesu míry nachází v první etapě, spíše však na jejím úplném začátku. O jednotce, kterou k výpočtu používá – kostičky – hovoří, ale pociťuje nutnost ji písemně vyjádřit jiným, formálnějším způsobem. Někteří žáci, kteří úlohu spočítali správně, přitom jednotku vůbec nepotřebovali, napsali pouze číslo.

Z útvarů poznala pouze čtverec *ABCD*. Nachází se úrovni izolovaných modelů, geometrické objekty nejsou osobností.

2.2.8 Závěr 1. kola testování

Výsledky testu ukázaly hned několik zásadních nedostatků:

- malá zkušenost s prací na čtvercové síti
- neznalost metody rámování (doplnění)
- nízká ochota využít metodu pokus-omyl
- nezkušenost s gradovanými testy (neochota zkusit alespoň nižší úroveň úloh)
- nízká znalost základních geometrických útvarů
- snížená schopnost měnit strategie (žáci téměř nepoužívali pravítko)
- mylná úvaha, podle které má úhlopříčka čtverce stejnou délku jako jeho strana
- nízká provázanost obdélníku a trojúhelníku
- malá zkušenost se čtvercem, jehož strany neleží na linkách sítě

Všechny uvedené nedostatky jsou klíčové pro další poznávání v geometrii a v matematice obecně. Hlavní příčinou je nedostatečná vlastní zkušenost testovaných žáků s aktivním objevováním. Princip epistemické blízkosti matematiky nám říká, že *autentický matematický poznatek se rodí výlučně z vlastních zkušeností budovaných v procesu poznávacích aktivit v kontaktu s poznávanou matematickou realitou*. (Kvasz, 2016, s. 19) Učitel 2. stupně, který by měl v tomto poznávání a budování pokračovat, stojí před těžkými úkoly. Pomocí přiměřeně obtížných úloh zvýšit motivaci žáků, naučit je používat různé strategie a metody, včetně metody pokus-omyl a strategie při výběru obtížnosti.

Velkou překážkou v této práci je specifická povaha lokality, ve které se škola nachází. Hodně žáků je z nepodnětného prostředí, ve kterém není zájem o vzdělání nebo je nízký. Žáci mají zvýšenou absenci, třídní průměry jsou více než 100 hodin na žáka, v každé třídě jsou 3 – 4 žáci, kteří mají více než 250 zameškaných hodin za pololetí. Na 2. stupeň řada žáků přechází bez motivace v oblasti matematiky, nebo s jejími zbytky. Výsledky testů na tento fakt poukazují; pět úloh řešilo méně než polovina testovaných žáků, jednu úlohu 33 žáků ze 65 a poslední úlohu 42 žáků. Na některých testech je vidět absolutní neznalost, resp. nezájem.

Časté absence mnoha žáků se samozřejmě promítají do pracovního klimatu třídy, kdy neustále několik žáků chybí, vědomosti si nedoplňují, ve skupinových činnostech vyrušují, žákovské diskuse nabourávají nemístnými poznámkami. Nebývá neobvyklé, že podobní žáci jsou na konci školní docházky na úrovni slabších žáků 1. stupně. To je však naše realita, ve které se snažíme, někdy úspěšně a někdy bez větších úspěchů, pracovat co nejlépe.

Výkon našich žáků koresponduje *s výsledky národních a mezinárodních testů, které poukazují na problémy žáků se strukturováním prostoru a jeho propojením s násobením a na jejich nízkou schopnost používat jiné strategie než vzorce, jako je rozkládání a opětovné skládání* (Tůmová, Vondrová, 2017).

Největším překvapením pro mě bylo, že většina žáků není schopna použít čtvercovou strukturu pro zjištění obsahu. Práci s komplementem rozumí a aktivně využívá přibližně třetina žáků. Dále je vidět, že chybí předchozí častá iterace zvolené jednotky. Žáci, kteří se rozhodli úlohu řešit, často používají vzorce, až na výjimky bez porozumění. Z hlediska pojmotvorného procesu míry se 90% testovaných žáků nachází v 1. fázi (Konzervace); před testováním jsem předpokládal fázi druhou (Jednotka míry), u některých žáků až třetí (Numerické procesy).

Neúčinná koncepce výuky geometrie se zejména v naší republice projevuje například podhodnocováním významu manipulativních činností zejména v mladším školním věku, ale i později. Důsledkem toho je značná propast mezi školní geometrií a životní zkušeností žáka. Mnohdy mají žáci a studenti zmatek v pojmech uložených ve svém vědomí (například tupoúhlý trojúhelník, objem, obsah, obvod, vrchol). Často jsme svědky také toho, že je příliš zdůrazňována znalost geometrické terminologie na úkor porozumění. (Jirotková, 2012, s. 8)

Také mě velmi překvapilo nesprávné určování útvarů, kdy čtverec, jehož strany leží na linkách, poznalo pouze 32 žáků z 65. Ostatní útvary žáci poznávali mnohem méně. Z hlediska poznávacího procesu se většina žáků v oblasti rozpoznání útvarů nachází v etapě izolovaných modelů.

2.3 Popis hospitace na hodině matematiky ve 4. ročníku

V jedné z testovaných tříd jsem ze studijních důvodů byl na náslechu na hodině matematiky. Žáci byli ve 4. ročníku, hodina byla, na mojí žádost, věnovaná geometrii. Cílem hodiny bylo seznámit žáky s obvodem trojúhelníku a zopakovat si obvod pravoúhelníků. Paní učitelka používala učebnici nakladatelství Fraus (Hejný a kol.)

Po úvodní rozcvičce, kdy žáci rýsovali přímku, bod a úsečku, paní učitelka zahájila diskusi na téma čtverec, model čtverce vyrobený ze špejlí přitom ukazovala dětem. Čtverec nebyl pevný, v průběhu diskuse neustále měnil svoji podobu; chvíli čtverec, chvíli kosočtverec. Na jedné z tabulí byly náčrtky čtverce a obdélníku. Vedle čtverce byl zápis a =, vedle obdélníku (pod sebou) a = ,b =.

- Učitelka: „Mám zahradu, její strana je 3 cm (!!!), jak dlouhý bude plot?“
- Žák 1: „Udělám $4 \,.\, a$.“
- Učitelka: „Proč?“
- Žák 1: (Dotaz žáka překvapil, neodpovídá.)

- Učitelka: „Kolik má zahrada stran?“
- Žák 1: „4“
- Paní učitelka zapisuje vedle čtverce vzorec pro jeho obvod.
- Učitelka: „Mám ubrus, jeho rozměry jsou 2 a 4. Jak vypočítám jeho obvod?“ Na tabuli píše k obdélníku vzorec $o = 2 . a + 2 . b$
- Učitelka: „Můžu to napsat jinak?“
- Žák 2: „$o = 2 . (a+b)$“

V další části paní učitelka předložila žákům zadání na tabuli: 1. $a = 8$ *cm*, 2. $a = 64$ *cm*, a rozdělila je do dvou výkonnostních skupin.

- Učitelka: „Řekneme si výsledky.“
- Žák: „Já jsem to počítal ...“
- Učitelka: „Neříkej mi, jak jsi to počítal, ale výsledek!“
- Žák: „256.“
- Učitelka: „Kde byl problém?“
- Ticho.

Paní učitelka zadala žákům další úlohu na tabuli: 1. $a = 6$ *cm*, $b = 3$ *cm* (zeleně), 2. $a = 11$ *cm*, $b = 34$ *cm* (červeně) a opět je rozdělila do dvou výkonnostních skupin.

- Žák: „Můžu červené?“
- Učitelka: „Ty zůstaň zelenej!“
- Učitelka dává ještě příklad pro experty ($a = 76$ *cm*, $b = 83$ *cm*)

Po několika minutách samostatné práce paní učitelka vidí, že řada žáků má hotovo.

- Učitelka: „Zkontrolujeme si výsledky.“ Dívá se do sešitu žáka ze zelené skupiny.
- Učitelka: „Hm, to ale není dobře.“
- Na tabuli píše $o = 2 . 6 + 2 . 3 = 18$ *cm*, $o = 2 . 11 + 2 . 34 = 90$ *cm*

V další části hodiny paní učitelka na elektronické tabuli otevřela úlohu na obvody trojúhelníků z dřívek (**Fraus 48/1**). Žáci však k dispozici dřívka neměli. Úlohu, kterou autoři připravili pro manipulativní řešení, tak žáci museli řešit bez manipulace.

- Učitelka: „Jaké známe trojúhelníky?“

Žáci říkají názvy jednotlivých trojúhelníků, paní učitelka opakuje se zřetelnou artikulací: rov – no – stran – ný, rov – no – ra – men – né

Po vysvětlení žáci určovali jednotlivé trojúhelníky na tabuli.

- Učitelka: „A teď si z toho vyvodíme obvod."
- Žáci sami: „$o = 3 . a$, $o = 2 . a + b$, $o = a + b + c$"
- Učitelka: „Na 1. stranu sešitu si pod čtverec a obdélník nakreslíme trojúhelník, označíme si strany, zapíšeme si vzoreček a budeme to vědět."

Z uvedeného popisu hodiny vyplývá, že žáci na hodinách matematiky neměli možnost odvodit postup pro určování obvodu, neměli prostor pro tolik potřebnou manipulaci. Paní učitelka se žákům snažila předat hotové informace, cílem hodiny nebylo poznání pojmu obvod (byť částečné), práce s ním a diskuse nad výsledky, resp. způsoby řešení, ale hotový vzorec.

Rendl, Vondrová a kol. (2013) k tomuto předkládání vzorců uvádí, že *se většina učitelů snaží o to, aby žáci vzorce odvodili. Bohužel postupy, kterými je vedou k jejich odhalování, neuvádějí. Někteří učitelé naproti tomu pojímají práci se vzorci odlišně: Nejdříve se nauč vzorec a pak zkoumej, co ten vzorec vlastně znamená.* (Rendl, Vondrová, 2013, s. 48)

Toto tvrzení dosvědčují následující úryvky z rozhovorů s učiteli: *Chci, aby (vzorec) vyvodili, a když ho vyvodí, tak si je píšeme na desky. To znamená, (že tam mají) všechny základní vzorečky od čtvrté třídy, ale musí je vyvodit, aby to pro ně nebylo abstraktní pojem (...) U obdélníku a u čtverce musí sami přijít na to, že čtverec má všechny strany stejně velké, takže si je pojmenováváme tady stejným písmenem, protože když jsou stejně velký, tak číslo 4 bude třeba „a, a u toho obdélníku zase, že jsou dvě a dvě strany stejně velké, takže až když tohle to vědí, tak se ptám, jestli by teda šlo vypočítat nějakým způsobem jednoduše ten obvod, a většinou na to přijdou, na to přišli teda i letos. A jestli počítají obvod u obdélníku 2 krát a plus b nebo 2a plus 2b, tam jim nechávám vyloženě, aby si to počítali podle toho, co jim líp vyhovuje. A pak se setkávají s novou látkou, a to jsou obsah obdélníku a obsah čtverce. Oni už vlastně musí vyvodit jakoby podle vzorečku, kdy si musí pamatovat nějaký vzoreček, a podle toho odvodit, co to vlastě obsah je.* (Rendl, Vondrová, 2013, s. 48 - 49)

Ze shlédnuté hodiny i ze soukromých rozhovorů s paní učitelkou je patrné, že se žákům snaží probíranou látku předat, co nejlépe to umí. Většinou vychází z toho, jak se matematiku učila sama. V diskusi o manipulativních technikách tyto odmítá, obává se, že by nestihla probrat všechno předepsané učivo. I přes uvedené informace, kdy k jejím výukovým metodám matematiky mám velké výhrady, si jí jako kolegyně velmi vážím, k dětem se chová velmi mile a vstřícně.

Vondrová a Tůmová v závěru svého výzkumu poukazují na skutečnost, že *existuje společná proměnná související s třídou - pravděpodobně učitel, jeho vyučovací metody, používané učebnice, ...* (Tůmová, Vondrová, 2017). Zde mohu jejich závěr potvrdit. Přestože třída měla k dispozici učebnice nakladatelství Fraus (Hejný a kol.), použití vzorců jasně ukazuje na jiný zdroj, který se promítl do učitelova postoje k probírané látce a stejně tak i do metody výuky.

Vyučování matematice v tradičním pojetí vidí v učiteli nositele poznání, který vykládá nové učivo, usměrňuje žáky při řešení úloh a při procvičování, upozorňuje na chyby a opravuje je. Úlohou žáka je porozumět předloženému učivu a osvojit si řešitelské postupy a definice pojmů. (Jirotková, 2012, s. 9). Edukační styl paní učitelky během popisované vycházel hodiny spíše z tradičního pojetí.

Nutno podotknout, že paní učitelka vyučovala ve čtvrtém a pátém ročníku dvě ze sledovaných tříd (6. A a 6. D).

2.4 Opakované zadání – 6. B

Opakovaného zadání didaktického testu se zúčastnila pouze třída, ve které jsem matematiku vyučoval a ve které jsem měl možnost pokusit se o nápravu. Nové testování žáků jsem učinil v prosinci, po třech měsících výuky, kdy jsem opakovaně zadával především úlohy na čtvercové síti; byly gradované, žáci si volili obtížnost i počet úloh podle vlastního uvážení. Úlohy v hodinách žáci většinou řešili v malých skupinách, po vyřešení jsme výsledky sdíleli.

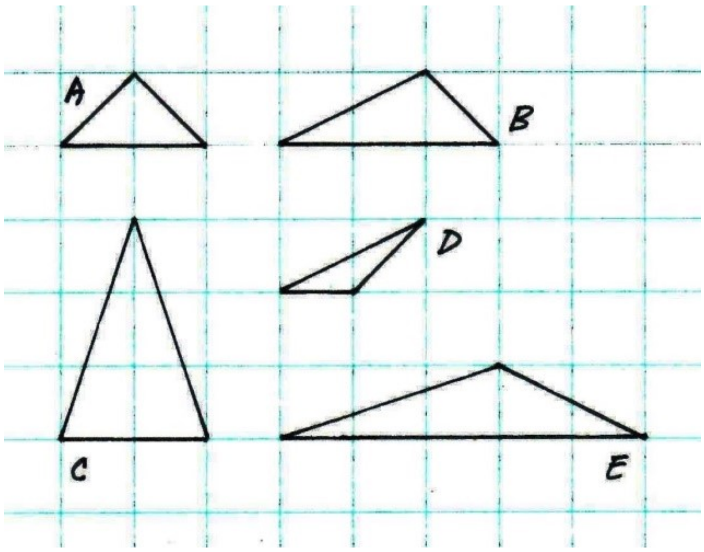
Ve výuce matematiky jsme pokračovali podle učebnice Matematika A (H-mat, o.p.s.), kde je dostatek gradovaných úloh, zadání písemných prací bylo rovněž gradované (většinou 4-

5 úloh, 3 úrovně obtížnosti). Během řešení úloh z učebnice žáci pracují v malých (3-4) skupinách, sdílejí strategie a řešení, znají a používají metodu pokus-omyl, znají hru Sova.

Opět nejdříve zopakuji zadání a poté uvedu výsledky. Červeně uvedené údaje znamenají zlepšení, černě uvedené znamenají zhoršení, resp. žádné zlepšení. Testování se i tentokrát zúčastnilo 19 žáků.

2.4.1 Úloha č. 1

Zařaď mřížové trojúhelníky do tabulky a najdi ty, které schází.



Obrázek 46 – Fraus, 4. ročník, 55/14

	Obsah trojúhelníku je					
	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
rovnoramenný						
nerovnoramenný						

Obrázek 47 – Fraus, 4. ročník, 55/14

Šedivá pole v tabulkách představují řešení úlohy, ve kterých žáci měli sami doplnit na čtvercovou síť.

6. B	Obsah trojúhelníku je					
	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
rovnoramenný	**0**	**8**	**0**	**2**	**0**	**5**
nerovnoramenný	**6**	**1**	**5**	**0**	**5**	**1**

Tabulka 38 – Výsledky 1. testu, 1. úloha, 6. B

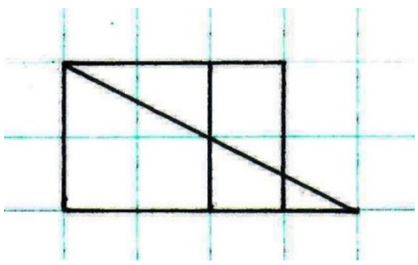
6. B - II.	Obsah trojúhelníku je					
	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
rovnoramenný	**0**	**11**	**0**	**3**	**0**	**10**
nerovnoramenný	**10**	**1**	**9**	**0**	**9**	**0**

Tabulka 39 – Výsledky 2. testu, 1. úloha, 6. B

Při prvním testování úlohu vůbec neřešilo 9 žáků, nyní ji neřešilo 7 žáků. U trojúhelníků na obrázku je patrné, že došlo k výraznému zlepšení. V druhé části úlohy, doplnění dalších trojúhelníků podle daného obsahu nikoliv. Zlepšila se práce s komplementem, projevilo se zařazování podobných úloh do výuky. Žáci ovládají více strategií vedoucích k určení obsahu.

2.4.2 Úloha č. 2

Zjisti obsah v cm^2 i obvod v mm největšího a) obdélníku, b) trojúhelníku, c) lichoběžníku.



Obrázek 48 – DT, Fraus, 5. ročník, 15/54

6. B	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	5	2	0
obsah	9	3	0

Tabulka 40 – Výsledky 1. testu, 2. úloha, 6. B

6. B - II.	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	7	0	0
obsah	8	8	0

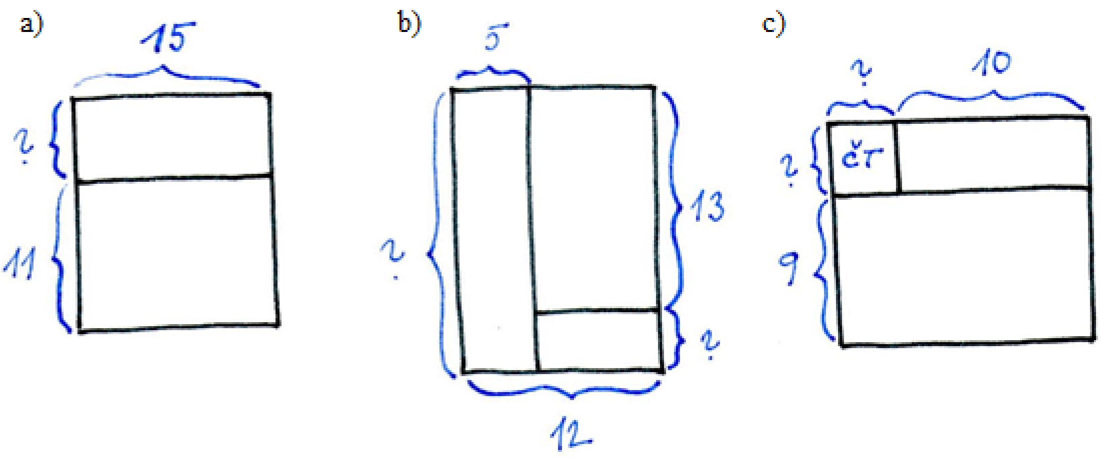
Tabulka 41 – Výsledky 2. testu, 2. úloha, 6. B

Při prvním testování úlohu vůbec neřešilo 6 žáků, nyní ji neřešilo rovněž 6 žáků. Zajímavé je zhoršení výsledků u nejjednodušší části, obsahu obdélníku a potěšující je nárůst správných řešení u obsahu trojúhelníku.

Z rozhovorů vyplynulo, že jedna žákyně před testem spolužákům ukázala svůj způsob počítání obvodu, při kterém nedělala rozdíl mezi délkou strany a délkou úhlopříčky čtverce. Obvod trojúhelníku jí tak vyšel 100 mm, ostatním z této skupiny rovněž. Problémem zůstává pravoúhlý nemřížový lichoběžník; lichoběžník z úlohy č. 7 někteří žáci poznali.

Úloha č. 3

Doplň chybějící délky, když víš, že obvod největšího obdélníku je v úloze a) 64, b) 74, c) 82. Navíc čtyřúhelník ČT je čtverec. Urči obvod i obsah každého ze třinácti čtyřúhelníků.



Obrázek 49 – Fraus, 4. ročník, 29/7

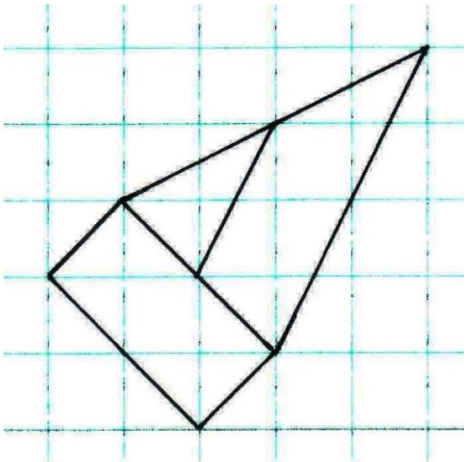
6. B - II.	obdélník 15 x 6	obdélník 15 x 11	obdélník 15 x 17
obsah	4	5	
obvod	1	3	

Tabulka 42 – Výsledky 2. testu, 3a. úloha, 6. B

Při prvním testování žáci sledované třídy úlohu neřešili. Nyní sedm žáků hledalo obsahy a obvody jednotlivých obdélníků v úloze a), dalších deset (!) žáků alespoň doplnilo neznámý údaj; sedmnáct žáků tedy úlohu mělo snahu vyřešit. To je velmi pozitivní, bez ohledu na správnost. Úlohy b, c) žáci neřešili.

2.4.3 Úloha č. 4

Zjisti obsah v cm^2 i obvod v mm největšího a) obdélníku, b) trojúhelníku, c) lichoběžníku.



Obrázek 50 – Fraus, 4. ročník, 60/2

6. B	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	1	3	1
obsah	6	2	3

Tabulka 43 – Výsledky 1. testu, 4. úloha, 6. B

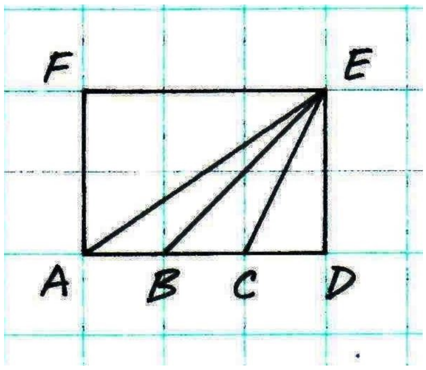
6. B - II.	obdélník	trojúhelník	lichoběžník
obvod	2	1	0
obsah	12	5	8

Tabulka 44 – Výsledky 2. testu, 4. úloha, 6. B

Při prvním testování úlohu vůbec neřešilo 9 žáků, nyní ji neřešilo 6 žáků. Z výsledků je patrný výrazný nárůst správných řešení u obsahu všech útvarů; někteří žáci s porozuměním používají metodu rámování. U měření obvodu se podobně projevil vliv žákovské porady jako u úlohy č. 2.

2.4.4 Úloha č. 5

Kolik je na obrázku trojúhelníků? Zjisti obsah každého z nich.



Obrázek 51 – Fraus, 4. ročník, 29/9

6. B	AEF	ABE	BCE	CDE	ACE	BDE	ADE
obsah	**1**	**2**	**2**	**2**	**0**	**0**	**1**

Tabulka 45 – Výsledky 1. testu, 5. úloha, 6. B, obsah

6. B - II.	AEF	ABE	BCE	CDE	ACE	BDE	ADE
obsah	**6**	**7**	**8**	**9**	**4**	**4**	**3**

Tabulka 46 – Výsledky 2. testu, 5. úloha, 6. B, obsah

počet trojúhelníků - I.	1	2	3	4	5	6	7
počet žáků	**0**	**0**	**0**	**5**	**1**	**5**	**1**

Tabulka 47 – Výsledky 1. testu, 5. úloha, 6. B, počet trojúhelníků

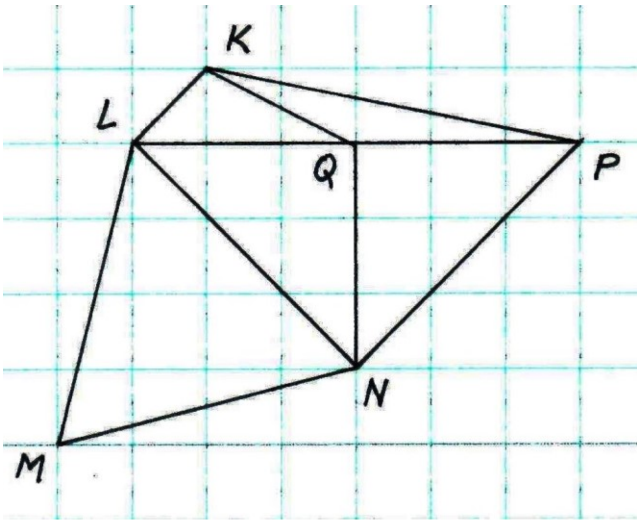
počet trojúhelníků - II.	1	2	3	4	5	6	7
počet žáků	**0**	**0**	**0**	**7**	**2**	**1**	**3**

Tabulka 48 – Výsledky 2. testu, 5. úloha, 6. B, počet trojúhelníků

Při prvním testování úlohu vůbec neřešilo 15 žáků, nyní ji neřešilo 10 žáků. Opět došlo ke zlepšení výsledků, někteří řešitelé správně určili obsah trojúhelníků *ACE* a *BDE*. V určení počtu trojúhelníků významný posun nenastal, správný počet však určilo více žáků.

2.4.5 Úloha č. 6

Zjisti obvod i obsah trojúhelníků LNQ, LQK, KQP, LMN.



Obrázek 52 – Fraus, 4. ročník, 28/3

6. B	LNQ	LQK	KQP	LMN
obvod	7	7	4	4
obsah	8	2	0	2

Tabulka 49 – Výsledky 1. testu, 6. úloha, 6. B

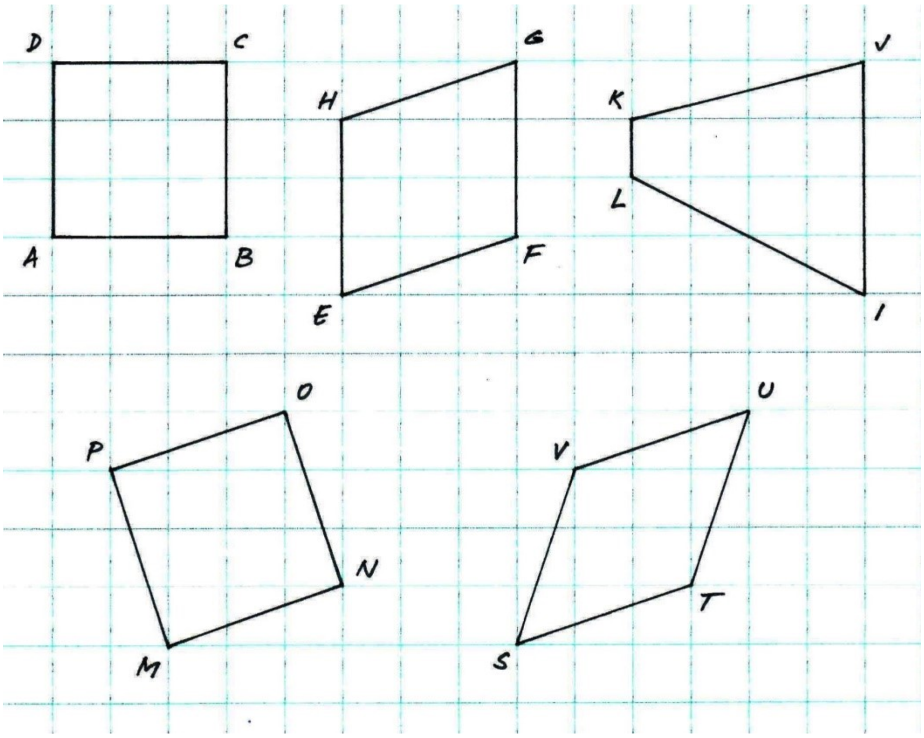
6. B - II.	LNQ	LQK	KQP	LMN
obvod	2	2	2	2
obsah	12	8	5	5

Tabulka 50 – Výsledky 2. testu, 6. úloha, 6. B

Při prvním testování úlohu vůbec neřešilo 7 žáků, nyní ji neřešilo 6 žáků. Zlepšení v řešení obsahu trojúhelníků na čtvercové síti je opět velmi patrné, hlavně u trojúhelníků *LQK*, *KQP* a také u *LMN*, kde žáci využili metodu rámování. Výsledek řešení obvodu je opět ovlivněn poradou žáků před testem.

2.4.6 Úloha č. 7

Zjisti obsah v cm^2 a obvod v mm každého ze čtyřúhelníků a pod obrázek napiš, o jaké čtyřúhelníky se jedná.



Obrázek 53 – DT, vlastní úloha

Čtyřúhelník ABCD je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod _______________.

Čtyřúhelník EFGH je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod _______________.

Čtyřúhelník IJKL je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod _______________.

Čtyřúhelník MNOP je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod _______________.

Čtyřúhelník STUV je: ______________________________. Jeho obsah je _____________________

a obvod _______________.

Obrázek 54 - DT, vlastní úloha, záznam

6. B	čtverec ABCD	kosodélník EFGH	lichoběžník IJKL	čtverec MNOP	kosočtverec STUV
název	11	0	2	2	4
obvod	5	2	2	2	2
obsah	6	4	1	1	1

Tabulka 51 – Výsledky 1. testu, 7. úloha, 6. B

6. B - II.	čtverec ABCD	kosodélník EFGH	lichoběžník IJKL	čtverec MNOP	kosočtverec STUV
název	12	0	6	8	10
obvod	7	3	2	4	4
obsah	15	12	8	7	7

Tabulka 52 – Výsledky 2. testu, 7. úloha, 6. B

Při prvním testování úlohu vůbec neřešilo 5 žáků, nyní ji neřešili pouze 3 žáci. S výjimkou kosodélníku žáci v mnohem větší míře rozpoznali útvary, lépe pracovali s obsahem. U obvodu zlepšení výsledků ovlivnila skupina žáků, kteří měli nadále problém s prací na čtvercové síti a u této úlohy pro určení obvodu použili pravítko. Z rozhovorů vyplynulo, že se jim na této úloze lépe pracovalo ze dvou důvodů – větší útvary a prostor mezi nimi; útvary byly jasně oddělené. Stále velká skupina žáků nerozezná čtverec *ABCD*, v předchozích hodinách jsme jich řešili hodně a poměrně hodně žáků čtverec využívá, spolu s obdélníkem, při rámování.

2.4.7 Závěr 2. kola testování

Výsledky nového testování ukázali zlepšení ve všech směrech:

- zlepšila se práce na čtvercové síti,
- do řešení se zapojilo více žáků,
- žáci používají více metod pro zjišťování obsahu,
- poznávají více geometrických útvarů,
- dokáží rozpoznat a využít gradace, zkusí alespoň tu nejlehčí úroveň,
- v některých případech používají metodu pokus-omyl.

V myšlení žáků přetrvává chybná představa, podle které má úhlopříčka čtverce stejnou délku jako jeho strana. To se projevilo u řešení obvodů. Opakovali chybu, kterou dělali (napříč třídami a ročníky) i v minulém testu. Je možné, že by k této chybě nedošlo v tolika případech:

- pokud by se žáci předem nedomluvili na způsobu řešení (v hodinách to patrné nebylo, tam jsme používali pravítko), který měli někteří z nich zažitý,
- pokud bych je některá zadání nechal přerýsovat do čtvercové sítě.

Zlepšení je výsledkem častého zařazování přiměřeně obtížných úloh do hodin matematiky, časté pobídky typu „Alespoň to zkus!“. Jistě nás čeká ještě velký kus práce, ale jistá naděje zde je. U některých žáků, kteří nadále velmi absentují, ke zlepšení téměř nedošlo; nemají šanci alespoň reprodukovat způsoby práce od ostatních žáků.

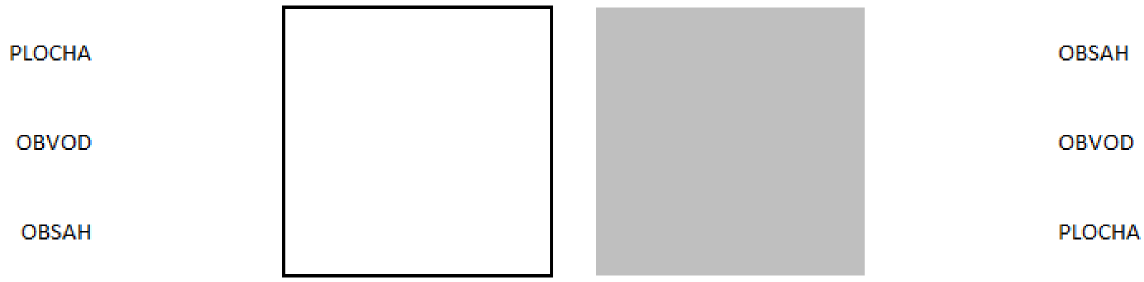
Zajímavá je situace kolem obvodu na čtvercové síti, kde se nedaří reedukace předchozí strategie, při které žáci načítají délky úhlopříček. V hodině žáci použijí pravítko, používáme vyjádření 3^{+}, $5^{!}$, 6^{-} a přesto se chybná strategie vrací jako bumerang. Na tomto příkladu je vidět, jak dokážou být některé miskoncepty trvalé. Nakonec nám pomohlo skládání a stříhání papíru. V jedné z hodin jsme objevili, že úhlopříčka čtverce je delší než jeho strana. Žáci potřebovali další model, mnohem větší a také změnu prostředí.

2.5 Obsah vs. plocha

Při kontrole výsledků didaktických testů jsem často narazil na úplné nepochopení významu slov obsah a obvod. Především slovu obsah nezanedbatelné množství žáků rozumí v úplně jiném kontextu. Řada učitelů o tomto problému ví a často používá vhodná synonyma (obsah nejčastěji nahrazujeme slovem plocha), popř. vysvětlování zadané úlohy podpoří slovním popisem konkrétního počítaného (sledovaného) pojmu (obvod – to je jako ten plot okolo školní zahrady, obsah – to je plocha desky stolu).

2.5.1 Test

Pro sledovanou skupinu jsem připravil jednoduchý test:



Obrázek 55 – Obsah vs. plocha

Žákům jsem vysvětlil, že oba ze dvou útvarů na obrázku mají spojit s **jedním, nejvýše však (maximálně) se dvěma** z napsaných pojmů. K útvaru vlevo budou žáci vybírat pojmy z levého sloupce a k útvaru vpravo vyberou pojmy z pravého sloupce. Pro větší názornost jsem na tabuli nakreslil obrázek otevřené a zavřené ruky a po stranách uvedl pojmy *ruka, pěst, dlaň*. Ve společné diskusi jsme si určili, jak bychom mohli k obrázkům přiřadit jednotlivé pojmy (*dlaň a ruka, pěst a ruka*).

2.5.2 Výsledky

Výsledky:

- tohoto testu se celkem zúčastnilo 59 žáků
- 8 žáků nepochopilo, co mají dělat – výsledek jejich práce není relevantní
- 32 žáků spojilo slovo obvod s levým útvarem (nebo od tohoto slova vedli šipku k hranici čtverce)
- 5 žáků spojilo levý obrázek se slovem plocha

- 2 žáci spojili levý obrázek se slovem obsah
- 6 žáků spojilo levý obrázek se slovy obvod a plocha
- 6 žáků spojilo levý obrázek se slovy obvod a obsah
- 12 žáků spojilo pravý obrázek se slovy obvod a obsah
- 16 žáků spojilo pravý obrázek se slovy plocha a obvod
- 20 žáků spojilo pravý obrázek se slovy obsah a plocha
- 3 žáci spojili pravý obrázek se slovem obvod

Pokud žáci spojovali obrázek, levý i pravý, se dvěma pojmy, odlišili spojovací čáry zakončením. Většina žáků vnímala hranici levého útvaru jako jeho obvod. Výrazy plocha a obsah vychází z tohoto malého srovnání jako rovnocenné pojmy. V úlohách, kde se pojem obsah vyskytuje, je užitečné (možná nezbytné) používat oba.

Závěr

Téma diplomové práce vyplynulo z mojí učitelské praxe, kdy jsem se od počátku opakovaně setkával s žáky, kteří nerozuměli základním geometrickým pojmům, při počítání obsahů a obvodů rovinných útvarů bezmyšlenkovitě používali vzorce, navíc často úplně nesmyslné. V rozhovorech se zkušenějšími kolegy jsem slýchal rady typu „To se musí nadrilovat.“ a „Dej jim vždycky ten vzoreček na tabuli, ať to vidí.“ Z počátku jsem se jejich radami řídil, výsledky však byly nadále žalostné. Pokaždé, když jsme se k tématu geometrické míry v nějaké souvislosti vrátili, mohl jsem začít od začátku.

Při studiu na pedagogické fakultě jsem postupně začal zjišťovat, že kořeny žákovského neporozumění používaným vzorcům vychází z neporozumění mnohem hlubšího a dodržování uvedených rad trvale nic nezlepší. Žákům chyběla niternější zkušenost s pojmy geometrické míry.

Z potřeby dopomoci žákům ke skutečnému porozumění, ne jenom dočasnému pamatování si vzorců, kterým nerozumí, se vynořilo téma práce. V jejím úvodu jsem stanovil její cíle, nyní nezbývá, než se ohlédnout a zjistit, jak byly naplněny.

V první části jsem prozkoumal současné teoretické koncepce didaktiky matematiky, hlavně ty části, které se týkají zkoumané problematiky. S některými jsem se seznámil již v průběhu studia a nyní jsem jim lépe porozuměl, některé pro mě byly nové. Studium teorie didaktiky matematiky v průběhu této práce mě významně obohatilo osobně i v kontextu mojí učitelské praxe. Mnohem lépe vnímám, jak jednotlivé teorie přísně respektují postupný vývoj žáků. Myslím, že tento cíl jsem naplnil.

Při porovnávání dvou vybraných učebnicových řad jsem měl prozkoumané teorie stále na zřeteli, stejně tak i jejich ukotvení v RVP ZV. Zjistil jsem, že zatímco autoři řady učebnic Alter často nehledí na linii procesu pojmotvorby a do svých učebnic zařazují úlohy, ve kterých nekompromisně přeskakují vývoj žákovských představ o geometrickém světě a někdy možná i ontogenetický vývoj žáků obecně, autoři řady učebnic H-mat tak nečiní. Přístupy jsem porovnal zevrubně, u každé řady jsem postupně prošel všechny učebnice pro 1. stupeň. Jako učitel nyní mohu na každé škole, na které bych v budoucnu učil, směle obhájit používání, dle mého názoru, vhodnější řady učebnic společnosti H-mat, která respektuje vývoj žákovských představ o geometrii a matematice obecně, popř. jsem schopen na základě dosažených znalostí zevrubně a kriticky zhodnotit řadu učebnic jiných autorských kolektivů. Týká se to nejenom mého pedagogického přesvědčení, ale i zodpovědnosti vůči žákům.

Stručně jsem popsal prostředí, která jsou z didaktického hlediska vhodná pro budování pojmů obsah a obvod, jejich vzájemnou provázanost a propedeutický přesah. Důrazně jsem sledoval i četné používání manipulačních činností v jednotlivých prostředích a jejich pozvolné směřování do numerických procesů, přes práci s komplementem, iteraci zvolených jednotek a propedeutické používání čtvercové sítě.

V závěru první části jsem popsal jednotlivé strategie vhodné pro zjišťování obvodu a obsahu, v případě obsahu jsem je doplnil ukázkami a u některých jsem uvedl, s jakými dalšími tématy je spojen jejich propedeutický význam.

V druhé části bylo jedním ze stanovených cílů zjištění, na jaké úrovni jsou znalosti žáků naší školy v oblasti míry bezprostředně po ukončení 1. stupně. Pro realizaci tohoto záměru jsem připravil didaktický test, který sestával z úloh vybraných z učebnic vydavatelství Fraus pro 4. a 5. ročník, podle kterých probíhala výuka testovaných žáků. Výsledky testu ukázaly, že se žáci, až na několik málo výjimek, nacházejí v 1. etapě pojmotvorného procesu, že řada z nich využívá zkratku v podobě vzorců, kterým však nerozumí, činnosti, které se váží k prvním dvěma etapám, např. práce s komplementem, porovnání útvarů, výběr jednotky míry, její iteraci a odečítání z mříže, neovládají. Výsledek byl natolik špatný, že pro mě bylo velmi náročné jej okomentovat.

Upřímně jsem zvažoval, nakolik špatný výsledek ovlivnil výběr a způsob zadání úloh; zde jsem našel několik chyb, kterých jsem se dopustil a díky tomu, je mohu při příštím testování eliminovat. Úloh bylo dáno velké množství naráz. V testech, které budu dělat vždy u nových žáků po jejich přechodu na 2. stupeň, změním způsob zadání úloh. Budu je zadávat po jedné, maximálně po dvou, v etapách a budou se vždy týkat pouze jednoho z pojmů obsah a obvod, přičemž určování geometrických útvarů může být jejich součástí vždy. Úlohy budou zadávány s tím, aby je žáci nejdříve museli převést na čtvercovou síť. V didaktickém testu jsem tuto část z časových důvodů přeskočil, což se pravděpodobně promítlo zhoršením výsledků testu.

Při kontrole testů jsem však dospěl k přesvědčení, že špatný výsledek měl dvě hlavní, mnohem zásadnější příčiny. První z nich, dle mého názoru největší příčinou, je velká absence žáků na naší škole. Jak uvádím v praktické části práce, většina tříd na naší škole, se s tímto negativní jevem potýká. Školu navštěvuje 279 žáků, z toho 166 chodí na 1. stupeň; průměrná absence činí 103 zameškaných omluvených hodin za pololetí. U 126 žáků, tj. u přibližně 45 % žáků, lze hovořit o vysoké absenci: 65 žáků má absenci vyšší než 100 hodin, 36 vyšší než 150 hodin, 17 žáků vyšší než 200 hodin, 5 žáků vyšší než 250 hodin a 3 žáci mají pololetní absenci vyšší než 300 hodin. Výuku žáků, kteří nechodí do školy, pod kontrolou nemáme a ani mít nemůžeme. Práce s nimi je velmi složitá, zvláště v předmětech, jako je matematika, kdy každá další vědomost a dovednost stojí na předchozích vědomostech, dovednostech a zkušenostech. Vysoká absence na naší škole výuku velmi ztěžuje. To je každodenní realita naší práce ve vyloučené lokalitě.

V rozhovorech s žáky, které jsem vedl po prvním testu, se často ozývalo „To jsem se neučil.“, „To jsem nikdy nedělala.“ a já při nejlepší vůli nejsem schopen určit, jakou skutečnost tyto „povzdechy“ odráží. Byl onen žák ve škole nebo se dané činnosti v hodinách skutečně nevěnovali?

Druhá příčina je na straně učitelů matematiky na 1. stupni a podotýkám, že je tímto rozhodně nechci soudit. Hodně položek z následného výčtu ovlivňuje příčina uvedená výše; učitelé se kvůli absentujícím žákům musí často vracet a dle mého soudu často nabydou dojmu, že musí výuku urychlit, že „nestíhají“. Výsledky testů nicméně neoddiskutovatelně ukázaly, že některé etapy se urychlují, jsou zbytečně, možná až nebezpečně krátké. Žákům pak chybí cenné zkušenosti, na což ukazují následující fakta:

- většina z testovaných žáků nevytváří vlastní jednotky nebo jimi neumí pokrýt plochu,
- pro vytvářené pojmy žáci nemají dostatek izolovaných modelů a v úlohách předčasně používají numerická vyjádření,
- nechápou výpočet obsahu obdélníku, resp. nemají vytvořený spoj mezi obdélníkem a ostatními rovnoběžníky, resp. trojúhelníkem,
- neorientují se v úlohách na čtvercové síti,
- používají vzorce, kterým nerozumí.

Přesto, že je naplnění prvního cíle zahaleno „mlhou“ výše uvedených okolností, úroveň znalosti žáků ve sledované oblasti jsem poznal.

Dalšími dvěma stanovenými cíli bylo provedení reedukace v jedné z testovaných tříd a její následné ověření. V hodinách matematiky jsem žákům průběžně dával gradované úlohy, většinou na čtvercové síti. Žáci si sami volili obtížnost a počet úloh. Většinu úloh řešili v malých skupinách, výsledky jsme sdíleli v rámci celé třídy. Ve výuce jsem také pracoval s gradovanými úlohami, používali jsme učebnici Matematika A (H-mat), kde jich je velké množství. Také já sám připravuji výhradně gradované písemné práce, na výběr úloh podle obtížnosti si žáci postupně navykli.

Po třech měsících jsem provedl kontrolní test, který ukázal zlepšení téměř všech sledovaných položek:

- zlepšila se práce na čtvercové síti,
- do řešení se zapojilo více žáků,
- žáci používali více metod pro zjišťování obsahu,
- poznávali více geometrických útvarů,
- dokázali rozpoznat a využít gradace, častěji zkoušeli alespoň tu nejlehčí úroveň,
- v některých případech používali metodu pokus-omyl.

V myšlení žáků zůstala chybná představa, podle které má úhlopříčka čtverce stejnou délku jako jeho strana. To se projevilo u řešení obvodů. Opakovali chybu, kterou dělali (napříč třídami a ročníky) i v minulém testu. Je možné, že by k této chybě nedošlo v tolika případech:

- pokud by se žáci předem nedomluvili na způsobu řešení (v hodinách to patrné nebylo, tam jsme používali pravítko), který měli někteří z nich zažitý,
- pokud bych je některá zadání nechal přerýsovat do čtvercové sítě.

K nápravě tohoto miskonceptu u některých žáků došlo až po kontrolním testu, kdy jsme v jedné z hodin, ve které jsme skládali a stříhali papír, objevili, že úhlopříčka čtverce je delší než jeho strana. Žáci potřebovali další model, mnohem větší a také změnu prostředí.

U žáků se zvýšenou absencí byl posun nepatrný, až žádný.

Přes uvedené vlastní chyby se domnívám, že jsem i posledních dvou cílů, alespoň z větší části, dosáhl.

V úplném závěru mi zbývá již pouze položit si otázku: „Jaký je přínos mojí diplomové práce pro vlastní pedagogickou praxi?"

Při psaní diplomové práce jsem si uvědomil, jak důležité je nepřeskakovat etapy vývoje geometrického poznání a poznání v matematice obecně. Ještě mnohem více si uvědomuji, že při objevení nedostatků v pojmotvorném procesu žáků, nejenom těch, kteří přecházejí na 2. stupeň, nemá smysl pokračovat v další navazující výuce, dokud nedoplním jejich znalosti a zkušenosti. Pokud shledám, že žáci vykazují znaky předčasné algebraizace, musím se vrátit zpět bez ohledu na čas, který na to budu muset vynaložit. Více využiji výhodu, kterou nám na naší škole skýtá velké množství tandemových hodin, hlavně v matematice. Nově nabyté zkušenosti také mohu předat kolegyním z 1. stupně, se kterými se v příštím roce budu setkávat právě v rámci zmíněných tandemů.

Přeji si, aby moje práce byla inspirací všem kolegům, kteří pracují v podobných podmínkách.

Seznam použitých informačních zdrojů

Blažková, R., Vaňurová, M., Matoušková, K., & Staudková, H. (2012 - 2013). *Matematika pro 3. ročník základních škol.* Alter.

Blažková, R., Matoušková, K., & Vaňurová, M. (2012 - 2013). *Matematika pro 4. ročník základních škol 1. díl.* Alter.

Dvořáková, J., Fuchs, E., Lišková, H., Pažoutová, M., Pohořelý, S., Řídká, E., Topičová, J., Zelendová, E. (2013). Standardy pro základní vzdělávání. Matematika a její aplikace. Dostupné z: https://archiv-nuv.npi.cz/artefact/file/Matematika%20a%20jeji%20aplikace.pdf?file=67490&view=9832

Didaktický test z matematiky – 2. řádný termín 2023. Přijímací zkoušky pro osmiletá gymnázia. Dostupné z: https://prijimacky.cermat.cz/files/files/M5B_2023_DT.pdf

Eichlerová, M., Staudková, H., & Vlček, O. (1994). *Matematika pro 2. ročník základních škol, sešit č. 6.* Alter

Eichlerová, M., Staudková, H., & Vlček, O. (1994). *Matematika pro 2. (3.) ročník základních škol, sešit č. 7.* Alter

Hejný, M., & Kuřina, F. (2015). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování* (3. vydání). Portál.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze.

Hejný, M., Jirotková, D. (1999). *Čtverečkovaný papír jako MOST mezi geometrií a aritmetikou*. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M., Jirotková, D., & Bomerová E. (2010). *Matematika pro 4. ročník základních škol.* Fraus.

Hejný, M., Jirotková, D., Bomerová E., & Michnová J. (2011). *Matematika pro 5. ročník základních škol.* Fraus.

Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková, J., Kuřík Sukniak, A., & Strnad, V. (2018). *Matematika pro 1. ročník*. H-mat, o.p.s.

Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková, J., Kuřík Sukniak, A., & Strnad, V. (2019). *Matematika pro 2. ročník*. H-mat.

Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková, J., Kuřík Sukniak, A., & Strnad, V. (2020). *Matematika pro 3. ročník*. H-mat, o.p.s.

Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková, J., Kuřík Sukniak, A., Strnad, V., & Ročák, Š. (2021). *Matematika pro 4. ročník*. H-mat.

Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková, J., Kuřík Sukniak, A., Strnad, V., & Ročák, Š. (2022). *Matematika pro 5. ročník*. H-mat.

Jirotková D. (2012). *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze.

Jirotková, D., Kloboučková, J. (2013). Kritická místa matematiky na 1. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In M. Rendl, N. Vondrová, L. Hříbková, D. Jirotková, J. Kloboučková, L. Kvasz, A. Páchová, I. Pavelková, M. Rendl, I. Smetáčková, E. Tauchmanová, N. Vondrová, & J. Žalská, *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 41 – 50). Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Justová, J. (2012). *Matematika pro 5. ročník základních* škol *1. díl.* Alter.

Kvasz, L. (2016). Princípy genetického konštruktivizmu. *Orbis scholae*, 10 (2), (s. 15 – 45). Dostupné z: https://karolinum.cz/data/clanek/3562/2_Kvasz.pdf

Landová, V., Staudková, H., & Tůmová, V. (1993). *Matematika pro 1. ročník základních škol, sešit č. 1 - 3*. Alter

Landová, V., Staudková, H., & Tůmová, V. (2013). *Matematika pro 1. (2.) ročník základních škol, sešit č. 4/A*. Alter

Landová, V., Staudková, H., & Tůmová, V. (2006). *Matematika pro 2. ročník základních škol, sešit č. 4/B*. Alter

Mason M. (1995) *Geometric Understanding in Gifted Students Prior to a Formal Course in Geometry*. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED389568.pdf

Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání. (2021). Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavaci-program-pro-predskolni-vzdelavani-rvp-pz/

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. (2021). Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

Specifikace požadavků pro jednotnou přijímací zkoušku v přijímacím řízení na střední školy v oborech vzdělání s maturitní zkouškou pro školní rok 2022/2023. Dostupné z: https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/specifikace-pozadavku/Specifikace_2022-2023/MASPECIFIKACEPOZADAVKU2022.pdf

Tůmová, V., Vondrová, N. (2017). Links between Success in Non-measurement and Calculation Tasks in Area and Volume Measurement and Pupils' Problems. *Scientia in educatione, 8(2)*, (s. 100 – 129)

Vojkůvková I. (2017). *The van Hiele Model of Geometric Thinking*. https://www.mff.cuni.cz/veda/konference/wds/proc/pdf12/WDS12_112_m8_Vojkuvkova.pdf

Vondrová, N., Žalská, J. (2013). Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In M. Rendl, N. Vondrová, L. Hříbková, D. Jirotková, J. Kloboučková, L. Kvasz, A. Páchová, I. Pavelková, M. Rendl, I. Smetáčková, E. Tauchmanová, N. Vondrová, & J. Žalská, *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 107 – 126). Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Vondrová, N. (2015). Obtíže žáků 2. stupně ve zjišťování obsahu útvarů a objemů těles. In N. Vondrová, M. Rendl, R. Havlíčková, L. Hříbková, A. Páchová, & J. Žalská, *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* (s. 253-318). Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum.

Vopěnka, P. (2000). *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci* (s. 24 – 34). Práh

Vygotskij, L. S. V. (2017). *Psychologie myšlení a řeči*. Portál

Seznam obrázků

Seznam tabulek