

## POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

**Název:** Odhadování na principu věrohodnosti

**Autor:** Eva Březinová

### SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

Práce pojednává o různých metodách odhadu neznámého parametru založených na modifikacích metody maximální věrohodnosti. Vedle této klasické metody autorka v teoretické části stručně popisuje metodu založenou na kvazi-věrohodnosti a pseudo-věrohodnosti. V simulační části poté porovnává přesnost těchto odhadů pro různé modely pomocí metody Monte Carlo.

### CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

**Téma práce.** Jedná se o kompilační téma, náročnost je přiměřená. Ze způsobu zpracování, které obsahuje několik věcných chyb, není zcela jasné, zda bylo zadání (tj. seznámit se s vybranými metodami) splněno či ne. Nelze ani posoudit správnost provedených simulací, neboť zdrojový kód není dostupný.

**Vlastní příspěvek.** Vlastní příspěvek autorky není v práci jasně specifikován. Domnívám se, že spočívá v odvození kvazi-věrohodnosti a pseudo-věrohodnosti pro konkrétní modely a provedení odpovídajících simulačních studií.

**Matematická úroveň.** Po matematické stránce je práce velmi slabá. Neobsahuje rigorózní matematická tvrzení ani důkazy. V řadě výpočtů a odvození jsou chyby, někdy i dosti zásadní (detailněji popsáno níže). Popis kvazi-věrohodnosti ani pseudo-věrohodnosti není dostatečně motivován a v druhém případě ani vysvětlen (opět datily níže)

**Práce se zdroji.** Autorka vychází z celé řady zdrojů, tyto jsou v práci citovány. Nejsem si vědom zkopírovaných nebo otrocky přeložených pasáží. Tvrzení, že metoda maximální věrohodnosti se poprvé objevila v článku Fisher (1997) (viz str. 3, ř. 7) považuji za nešťastné. Jedná se totiž pouze o reprint původního článku (tuším z roku 1912).

**Formální úprava.** Formální úpravu považuji za zdařilou. Text je přehledně členěn do kapitol a podkapitol. Oceňuji snahu ilustrovat přesnost odhadů pomocí grafů skórových funkcí a jejich pásů spolehlivosti (Obr. 2.1. a Obr. 2.2.). Zejména obr. 2.1. je však díky množství čar a barev poněkud nepřehledný.

### PŘIPOMÍNKY

1. Str. 20. Kvazi-věrohodnostní skórová funkce je vyjádřena správně, ovšem její řešení je spočítáno špatně. Vámi spočítaný odhad je totožný s MLE, ve skutečnosti je ale kvazi-věrohodnostní odhad jiný. Výsledky v tab. 2.1 jsou tím pádem také chybné. Skutečné chování kvazi-věrohodnostního odhadu tak zůstává nejasné.
2. Str. 17: V odvození sdruženého rozdělení jsou formální chyby. Rovnost pravděpodobnosti průniku a součinu podmíněné pravděpodobnosti s pravděpodobností podmínky sice platí, ale obě strany jsou ve Vašem případě nulové (náh. vel.  $X$  je spojitá) a nelze pomocí této rovnosti odvodit sdružené rozdělení. Dále, není pravda že

$$P[X = x] = I_{[0,1]}(x),$$

ve skutečnosti je tato pravděpodobnost rovna nule pro každé  $x$ . Došlo k záměně hustoty a pravděpodobnosti.

3. Str. 7: Chybně vyjádřená logaritmická věrohodnostní funkce pro normální rozdělení. Dále jsou nesprávně vyjádřeny její parciální derivace vzhl. k  $\mu$  i vzhl. k  $\sigma^2$ . Namísto parciálních derivací jsou uvedeny zkrácené výrazy z věrohodnostních rovnic.
4. Definice 5: V definici exponenciální rodiny rozdělení chybí podmínka na nosič (nesmí záviset na par.  $\theta$ ).
5. Na str. 13 je odhad na základě pseudo-věrohodnosti popsán jako řešení pseudo-věrohodnostních rovnic  $U_1(\mathbb{X}, \Theta) = 0, U_2(\mathbb{X}, \Theta) = 0$ . Pro takto definovaný odhad není zřejmá existence (2 rovnice, 1 neznámá). V následujícím ilustračním příkladu, stejně tak jako v simulační studii, se však tento odhad počítá jen z druhé rovnice.
6. Kap. 2.3: Zanedbáním vzájemné závislosti při výpočtu maximálně věrohodného odhadu dochází k výraznému zkreslení. Numerické výsledky a jejich interpretace (např. tab. 2.2 a její popis) tak mohou být zavádějící. Ve skutečnosti totiž nebylo provedeno porovnání MLE s pseudo-věrohodnostním odhadem. Je škoda, že autorka nespočítala skutečný MLE.
7. Definice 8: Kvaziskórová funkce je v tomto případě rovna nule právě když  $\mu = \bar{X}$ , čímž dostáváme momentový odhad.
8. Autorka používá stejný symbol  $\mathbf{X}$  pro náhodný vektor i jeho realizaci, což je místy matoucí.
9. V práci jsou definovány různé odhady, nejsou však uvedeny žádné rigorózní výsledky o jejich vlastnostech a chování, přestože jsou známé (alespoň ve speciálních případech), což je myslím škoda.
10. Maximálně věrohodný odhad (MLE) je v práci definován obecně jako argument maxima věrohodnostní funkce na množině  $\Theta$ . Bez dalších omezení ale nemusí být pravda, že řešení věrohodnostních rovnic je automaticky MLE (str. 5, ř. 5), ani že jakýkoliv MLE je řešením věrohodnostních rovnic (str. 5., ř.20).
11. Nekonzistentní zápis indikátorové funkce, někdy je používán tvar  $I_A(x)$  a někdy  $I_{[x \in A]}$  (viz str. 6)
12. Str. 10, ř. 6: Má být var  $X$  místo var  $Y$ .
13. Str. 17, ř. 12: V definici střední čtvercové chyby (MSE) chybí střední hodnota.

## OTÁZKY

1. Jak vypadá dvourozměrná logaritmická pseudo-věrohodnostní funkce v případě, kdy  $X_1, \dots, X_n$  jsou nezávislé?
2. Na konci str. 17 je odvozena sdružená hustota  $f_{Y,X}(y, x; \lambda)$  pro model 1.1. Můžete upřesnit, vzhledem k jaké míře je tato hustota vyjádřena?
3. Proč je odhad  $\hat{\lambda}_{ML(3)}$  vycházející z modelu 1.3 tak nepřesný a zjevně velmi vychýlený?

## ZÁVĚR

Práci považuji za podprůměrnou a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.

Pavel Kříž  
 KPMS, MFF UK  
 25. srpna 2023